ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ЗА УПИС НА МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Београд, 26.07.2025.

Време за рад је 180 минута.

1. Број $\dfrac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{18}}{2\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{50}}{2\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{72}+\sqrt{32}}{2+\sqrt{2}}$ једнак је:

(A) $10\sqrt{2}-10$; **(B)** $2+\sqrt{2}$; **(C)** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$; **(D)** 0; **(E)** $10-10\sqrt{2}$; **(N)** не знам.

2. Скуп решења неједначине $\big||2x+1|-5\big|>2$ је:

(A) $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(3,\infty)$; **(B)** $(-\infty,-2)\cup(1,3)\cup(3,\infty)$; **(C)** $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$; **(D)** $(-\infty,-4)\cup(-2,1)\cup(3,\infty)$; **(E)** ниједан од понуђених одговора; **(N)** не знам.

3. У понуди једног ресторана су сладоледи од чоколаде, ваниле и јагоде. Због велике врућине конобар не успева добро да запише поруџбине, па 50% наручених сладоледа од јагоде бележи као сладоледе од ваниле, а 25% наручених сладоледа од ваниле као сладоледе од чоколаде. Ако су бројеви послужених сладоледа од чоколаде, ваниле и јагоде, редом, у односу $7:3:2$, онда су бројеви наручених сладоледа од чоколаде, ваниле и јагоде, редом, у односу:

(A) $5:3:1$; **(B)** $5:1:3$; **(C)** $31:13:4$; **(D)** $27:16:4$; **(E)** $27:4:16$; **(N)** не знам.

4. Решење неједначине $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+3|x|+2}>\dfrac{1}{3}$ је скуп облика (за неке $-\infty<a<b<c<\infty$):

(A) $(-\infty,a)$; **(B)** (a,∞); **(C)** (a,b); **(D)** $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$; **(E)** $(a,b)\cup(c,\infty)$; **(N)** не знам.

5. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+2025x-1=0$, а y_1 и y_2 решења једначине $x^2+2026x-1=0$, онда је вредност израза $(x_1-y_1)(x_1-y_2)(x_2-y_1)(x_2-y_2)$ једнака:

(A) $-2025\cdot 2026$; **(B)** -1; **(C)** 1; **(D)** $2025\cdot 2026$;
(E) ниједан од понуђених одговора; **(N)** не знам.

6. Решење неједначине $\sqrt{x^2+2x}>\sqrt{x^2-1}-1$ је скуп облика (за неке $-\infty<a<b<\infty$):

(A) $(-\infty,a]\cup[b,\infty)$; **(B)** $\emptyset$; **(C)** (a,b); **(D)** $[a,\infty)$; **(E)** (a,∞); **(N)** не знам.

7. Број реалних решења једначине $2^{2x^2-x}+2^{x+2}=5\cdot 2^{x^2}$ је:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** 4; **(N)** не знам.

8. Производ свих реалних решења једначине $\log_3\log_2 4x+\log_{\frac{1}{9}}\log_4 x^2=1$ једнак је:

(A) 2; **(B)** 4; **(C)** $4\sqrt{2}$; **(D)** 16; **(E)** 32; **(N)** не знам.

9. Ако у троуглу ABC важи $AB=6$, $BC=10$, $CA=8$, а D је средиште странице BC, онда је пречник уписаног круга троугла ADC једнак:

(A) $\dfrac{4}{3}$; **(B)** $\dfrac{8}{3}$; **(C)** 3; **(D)** $\dfrac{10}{3}$; **(E)** 4; **(N)** не знам.

10. Ако је n број решења једначине $\dfrac{\sin 6x\cdot\cos 3x}{1+\cos 6x}=0$ на интервалу $(0,2\pi)$, онда је:

(A) $n\in\{0,1\}$; **(B)** $n\in\{2,3\}$; **(C)** $n\in\{4,5\}$; **(D)** $n\in\{6,7\}$; **(E)** $n\geqslant 8$; **(N)** не знам.

11. Ако је $BC = CD = 3$, $DA = 5$, $\sphericalangle CDA = 120°$, а четвороугао $ABCD$ тетиван, онда је дужина дужи AB једнака:

(A) 3; **(B)** 5; **(C)** 6; **(D)** 7; **(E)** 8; **(N)** не знам.

12. Једнакокраки троугао ABC, чији је крак дужине a, а $\sphericalangle BAC = 120°$, ротира око праве AB. Запремина добијеног тела је:

(A) $\dfrac{a^3\pi}{12}$; **(B)** $\dfrac{(1+\sqrt{3})a^3\pi}{12}$; **(C)** $\dfrac{a^3\pi}{4}$; **(D)** $\dfrac{a^3\pi}{2}$; **(E)** $a^3\pi$; **(N)** не знам.

13. Ако је, у Декартовом правоуглом координатном систему, тачка $S(1, 2)$ средиште тетиве AB круга $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$, онда је дужина дужи AB једнака:

(A) $\sqrt{5}$; **(B)** $2\sqrt{2}$; **(C)** $\sqrt{10}$; **(D)** 4; **(E)** $2\sqrt{5}$; **(N)** не знам.

14. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$, тако да је $a < 0$. Ако су a, a^2, b три узастопна члана неког геометријског низа, a, b, a^2 прва три члана неког аритметичког низа, а S збир првих девет чланова тог аритметичког низа, онда је:

(A) $S < 1$; **(B)** $1 \leqslant S \leqslant 5$; **(C)** $5 < S < 9$; **(D)** $9 \leqslant S \leqslant 13$; **(E)** $S > 13$; **(N)** не знам.

15. Ако је n најмањи природан број, тако да је $n!$ дељив са 2025^3, онда n припада интервалу:

(A) $(1, 9]$; **(B)** $(9, 18]$; **(C)** $(18, 26]$; **(D)** $(26, 36]$; **(E)** $(36, \infty)$; **(N)** не знам.

16. Ако је комплексан број z решење једначине $2z + 2i = 6 - iz$, где је $i^2 = -1$, онда је $|z|$ једнако:

(A) $2\sqrt{2}$; **(B)** 4; **(C)** $2 + 2\sqrt{2}$; **(D)** $4\sqrt{2}$; **(E)** 8; **(N)** не знам.

17. Нека су a, b реални бројеви, а $1 + i$ нула полинома $p(x) = x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 10$, где је $i^2 = -1$. Онда је b једнако:

(A) -18; **(B)** -15; **(C)** 0; **(D)** 15; **(E)** 18; **(N)** не знам.

18. Број реалних решења једначине $\cos x - \ln|x| = 0$ је:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 4; **(E)** већи од 4; **(N)** не знам.

19. У разреду има 10 девојчица и 10 дечака. На колико начина се може изабрати 5 ученика, тако да се међу њима налазе бар 2 девојчице и бар 2 дечака?

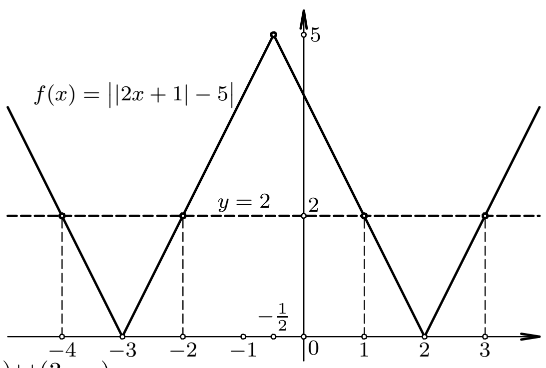
(A) 252; **(B)** 2025; **(C)** 5400; **(D)** 10800; **(E)** 15504; **(N)** не знам.

20. Члан који не садржи x у развоју степена бинома $\left(x^6 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{12}$ је:

(A) -792; **(B)** -220; **(C)** 66; **(D)** 220; **(E)** 495; **(N)** не знам.

Решења задатака.

1. Важи $\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{18}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{50}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{72}+\sqrt{32}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\frac{6\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}=10\sqrt{2}-10.$



2. Ако је $x\in[-\frac{1}{2},\infty)$, наведена неједначина је еквивалентна са $|2x-4|>2$, те, ако је $x\in[2,\infty)$, се своди на $2x-4>2$, односно, решење у том случају је $x\in(3,\infty)$, а, ако је $x\in[-\frac{1}{2},2)$, се своди на $4-2x>2$, па је решење у том случају $x\in[-\frac{1}{2},1)$. Слично, ако је $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$, еквивалентна је са $|-6-2x|=|2x+6|>2$, те, ако је $x\in[-3,-\frac{1}{2})$, се своди на $2x+6>2$, односно, решење у том случају је $x\in(-2,-\frac{1}{2})$, а, ако је $x\in(-\infty,-3)$, се своди на $-2x-6>2$, па је решење у том случају $x\in(-\infty,-4)$. Дакле, решење наведене неједначине је $x\in(-\infty,-4)\cup(-2,1)\cup(3,\infty)$.

3. Ако су, редом, бројеви наручених сладоледа од чоколаде, ваниле и јагоде x,y,z, онда су бројеви послужених сладоледа $x+\frac{y}{4}$, $\frac{3y}{4}+\frac{z}{2}$, $\frac{z}{2}$, те је $(x+\frac{y}{4}):(\frac{3y}{4}+\frac{z}{2}):\frac{z}{2}=7:3:2$. Дакле, важи $x,y,z>0$, $2\cdot(\frac{3y}{4}+\frac{z}{2})=3\cdot\frac{z}{2}$, тј. $z=3y$, као и $3\cdot(x+\frac{y}{4})=7\cdot(\frac{3y}{4}+\frac{z}{2})=\frac{63y}{4}$, тј. $x=5y$, те је $x:y:z=5:1:3$.

4. Како је $x^2+3|x|+2=|x|^2+3|x|+2=(|x|+1)(|x|+2)>0$, неједначина је дефинисана за $x\in\mathbb{R}$ и еквивалентна са $3(x^2-x-2)>x^2+3|x|+2$, тј. са $2x^2-3(x+|x|)-8>0$. Ако је $x\in[0,\infty)$, последња неједначина је еквивалентна са $2x^2-6x-8=2(x+1)(x-4)>0$, те је решење у том случају $x\in(4,\infty)$, а ако је $x\in(-\infty,0)$, еквивалентна је са $2x^2-8=2(x+2)(x-2)>0$, те је решење у том случају $x\in(-\infty,-2)$. Дакле, решење наведене неједначине је $x\in(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$.

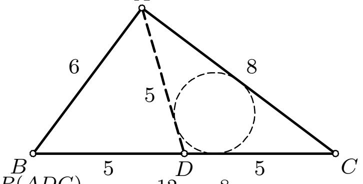
5. Ако је $a=2025$, $b=2026$ и $p(x)=x^2+bx-1$, важи $p(x)=(x-y_1)(x-y_2)$, па је $I=(x_1-y_1)(x_1-y_2)(x_2-y_1)(x_2-y_2)=p(x_1)p(x_2)=(b-a)^2x_1x_2=-1$, јер је $p(x_i)=x_i^2+bx_i-1=(x_i^2+ax_i-1)+(b-a)x_i=(b-a)x_i$ за $i\in\{1,2\}$, као и $x_1x_2=-1$, јер су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+ax-1=0$.

Друго решење. Уз ознаке из првог решења, како је $x_1x_2=-1$ и $x_1+x_2=-a$, јер су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+ax-1=0$, следи $I=(x_1x_2)^2+bx_1x_2(x_1+x_2)+b^2x_1x_2-(x_1^2+x_2^2)-b(x_1+x_2)+1=1+ab-b^2-(x_1+x_2)^2+2x_1x_2+ab+1=2ab-b^2-a^2=-(b-a)^2=-1$.

6. Важи $x^2+2x=x(x+2)\geqslant 0$ ако и само ако је $x\in(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$ и $x^2-1=(x+1)(x-1)\geqslant 0$ ако и само ако је $x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, тј. наведена неједначина је дефинисана за $x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty)$. На том скупу је еквивалентна са $\sqrt{x^2+2x}+1>\sqrt{x^2-1}$, тј. (како су обе стране у последњој неједначини ненегативне) са $x^2+2x+2\sqrt{x^2+2x}+1>x^2-1$, односно са $\sqrt{x^2+2x}>-x-1$. Ако је $x\in[1,\infty)$, последња неједначина је тачна (лева страна је позитивна, а десна негативна), док су за $x\in(-\infty,-2]$ стране ненегативне, па је еквивалентна са $x^2+2x>x^2+2x+1$, тј. са $0>1$, те нема решења. Дакле, решење наведене неједначине је $x\in[1,\infty)$.

7. Наведена једначина еквивалентна је са $2^x(2^{2(x^2-x)}-5\cdot 2^{x^2-x}+4)=2^x(2^{x^2-x}-1)(2^{x^2-x}-4)=0$. Како је $2^x\neq 0$, следи да је или $2^{x^2-x}=1$, тј. $x^2-x=0$, односно $x\in\{0,1\}$ или $2^{x^2-x}=4$, тј. $x^2-x=2$, односно $x\in\{-1,2\}$, те наведена једначина има 4 реална решења.

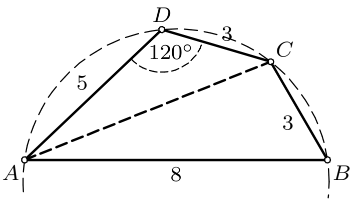
8. Мора бити $4x>0$, $\log_2 4x>0$ (тј. $x>\frac{1}{4}$), $x^2>0$ и $\log_4 x^2>0$ (тј. $x^2>1$), односно, наведена једначина је дефинисана за $x\in(1,\infty)$. На том скупу је $\log_2 4x=2+y$ и $\log_4 x^2=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_2 x=y$, где је $y=\log_2 x$, па је уочена једначина еквивалентна са $\log_3(2+y)+\log_{3^{-2}} y=\log_3(2+y)-\frac{1}{2}\log_3 y=1$, тј. са $2\log_3(2+y)-\log_3 y=\log_3\frac{(2+y)^2}{y}=2$, те је $\frac{(2+y)^2}{y}=9$, односно $(2+y)^2-9y=y^2-5y+4=(y-1)(y-4)=0$. Следи $y\in\{1,4\}$, тј. $x\in\{2,16\}$.



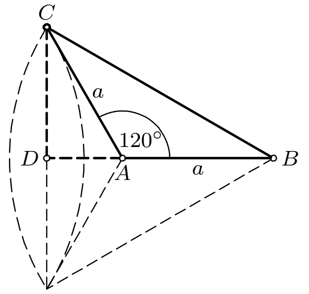
9. Како је $BC^2=CA^2+AB^2$, следи да је $\triangle ABC$ правоугли, при чему му је BC хипотенуза. Стога је $AD=BD=DC=\frac{BC}{2}=5$, као и $P(\triangle ADC)=\frac{1}{2}\cdot P(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{CA\cdot AB}{2}=12$, где $P(\triangle XYZ)$ означава површину $\triangle XYZ$. Следи да је полуобим $\triangle ADC$ једнак $s=\frac{CA+AD+DC}{2}=\frac{8+5+5}{2}=9$, па је пречник његовог уписаног круга $2r=2\cdot\frac{P(ADC)}{s}=2\cdot\frac{12}{9}=\frac{8}{3}$.

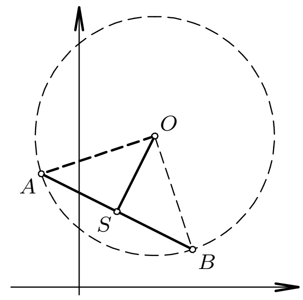
10. Мора бити $1+\cos 6x\neq 0$, тј. $x\neq\frac{(2k+1)\pi}{6}$, где је $k\in\mathbb{Z}$, и, под тим условом, наведена једначина је еквивалентна са $\frac{2\sin 3x\cos^2 3x}{2\cos^2 3x}=\sin 3x=0$. Следи, њено решење је $x=\frac{k\pi}{3}$ за $k\in\mathbb{Z}$ (а интервалу $(0,2\pi)$ припадају $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$).

11. На основу косинусне теореме, примењене у $\triangle ACD$, важи $AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2 \cdot CD \cdot DA \cdot \cos\sphericalangle CDA = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-\frac{1}{2}) = 49$, те је $AC = 7$. Како је $ABCD$ тетиван, важи $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle CDA = 60^\circ$, па, на основу косинусне теореме примењене у $\triangle ABC$, следи $49 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle ABC = AB^2 + 9 - 3 \cdot AB$, одакле је $AB^2 - 3 \cdot AB - 40 = (AB+5)(AB-8) = 0$, те је $AB = 8$.



12. Ако је D подножје висине из C на AB, онда је $CD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ и $DA = \frac{a}{2}$ ($\triangle ACD$ је правоугли, хипотенузе $AC = a$ и $\sphericalangle DAC = 60^\circ$). Тело добијено ротацијом око AB је права кружна купа, полупречника основе $r = CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и висине $h_1 = DB = DA + AB = \frac{a}{2} + a = \frac{3a}{2}$ (настала ротацијом правоуглог $\triangle CDB$ око катете DB) из које је „исечена" права кружна купа, полупречника основе $r = CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и висине $h_2 = DA = \frac{a}{2}$ (настала ротацијом правоуглог $\triangle CDA$ око катете DA), па је његова запремина $\frac{r^2\pi h_1}{3} - \frac{r^2\pi h_2}{3} = \frac{r^2\pi(h_1-h_2)}{3} = \frac{\frac{3a^2}{4}\cdot\pi\cdot a}{3} = \frac{a^3\pi}{4}$.





13. Центар уоченог круга је $O(2,4)$, полупречник $r = \sqrt{10}$, а важи $SO = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5} < r$, те S припада кругу. Следи да је $\triangle OAS$ правоугли, хипотенузе $OA = r = \sqrt{10}$, па је $AB = 2 \cdot AS = 2 \cdot \sqrt{OA^2 - SO^2} = 2\sqrt{5}$.

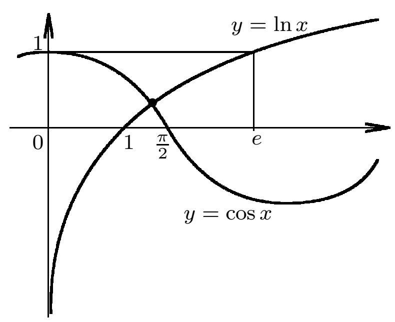
14. По условима је $ab = a^4$ и $a + a^2 = 2b$. Како је $a < 0$, следи $b = a^3$ и $2a^3 - a^2 - a = 2a(a+\frac{1}{2})(a-1) = 0$, па је $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{8}$, те је први члан уоченог аритметичког низа $-\frac{1}{2}$, корак $\frac{3}{8}$, а збир првих девет његових чланова $9 \cdot (-\frac{1}{2}) + \frac{8\cdot 9}{2} \cdot \frac{3}{8} = 9$.

15. Важи $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, па је $2025^3 = 3^{12} \cdot 5^6$. Бројеви $3, 6, 12, 15, 21, 24$ су дељиви са 3, а нису са 3^2, бројеви $9, 18$ су дељиви са 3^2, а нису са 3^3, а 27 је дељив са 3^3, а није са 3^4 (док остали бројеви мањи од 27 нису дељиви са 3), па $3^{12} \mid n!$ ако и само ако је $n \geqslant 27$. Бројеви $5, 10, 15, 20$ су дељиви са 5, а нису са 5^2, 25 је дељив са 5^2, а није са 5^3 (док остали бројеви мањи од 25 нису дељиви са 5), па $5^6 \mid n!$ ако и само ако је $n \geqslant 25$. Како је $(3,5) = 1$, следи да $3^{12} \cdot 5^6 \mid n!$ ако и само ако је $n \geqslant 27$, тј. најмањи такав број је 27.

16. Из наведене једначине је $(2+i)z = 6 - 2i$, те је $z = \frac{6-2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{10-10i}{5} = 2 - 2i$, па је $|z| = 2\sqrt{2}$.

17. Важи $p(1+i) = b + 18 + i(2a + b - 12)$, па, како су $a, b \in \mathbb{R}$, следи $b + 18 = 2a + b - 12 = 0$, одакле је $a = 15$, $b = -18$.

18. Ако је $f(x) = \cos x - \ln|x|$, онда је f дефинисана на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и парна. Како је $\cos x \leqslant 1$ за $x \in \mathbb{R}$ и $\ln x > 1$ за $x \in (e, \infty)$, важи $f(x) < 1 - 1 = 0$ за $x \in (e, \infty)$, тј. на том скупу f нема нула. На $(0, e]$ је f строго опадајућа (таква је $-\ln x$, као и $\cos x$ на $[0, \pi]$, а важи $e < \pi$), те може имати највише једну нулу, а како је f и непрекидна на $(0, e]$ (такве су $\ln x$ и $\cos x$), као и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \infty$, $f(e) = \cos e - 1 < 0$, на том интервалу има нулу. Због парности, следи да f има 2 нуле на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



19. По условима, треба изабрати или 2 дечака и 3 девојчице (2 дечака од 10 се може изабрати на $\binom{10}{2}$ начина, а, независно од тога, 3 девојчице од 10 на $\binom{10}{3}$ начина, те таквих избора има $\binom{10}{2}\binom{10}{3}$) или 3 дечака и 2 девојчице (аналогно, таквих избора је $\binom{10}{3}\binom{10}{2}$). Следи, избора који задовољавају наведене услове има $2 \cdot \binom{10}{2}\binom{10}{3} = 10800$.

20. Општи члан развоја је $\binom{12}{k} \cdot (x^6)^{12-k} \cdot (-\frac{1}{x^2})^k = (-1)^k \cdot \binom{12}{k} \cdot x^{72-8k}$ за $0 \leqslant k \leqslant 12$, па се члан који не садржи x добија за $k = 9$ и једнак је $-\binom{12}{9} = -220$.