ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ЗА УПИС НА МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Београд, 26.06.2026.

Време за рад је 180 минута.

1. Број $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ једнак је:

(A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$; **(B)** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$; **(C)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-5$; **(D)** $\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$;
(E) ниједном од понуђених одговора; **(N)** не знам.

2. За све $a,b \in (0,\infty)$ израз $\left(\dfrac{a^3}{b^2}+b\right):\left(\dfrac{a^2}{b}-a+b\right)\cdot\dfrac{1+\frac{b}{a}}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{4}{ab}}$ једнак је:

(A) ab; **(B)** 1; **(C)** $\dfrac{a}{b}$; **(D)** $\dfrac{a+b}{ab}$; **(E)** $\dfrac{a+b}{b^2}$; **(N)** не знам.

3. Скуп решења неједначине $\dfrac{x(x-1)}{(x+2)(4-x)} \geqslant -1$ је:

(A) $(-\infty,-8]\cup(-2,4)$; **(B)** $(-\infty,-8)\cup(-2,4)$; **(C)** $(-8,-2)\cup(4,\infty)$; **(D)** $(-2,4)\cup(4,\infty)$;
(E) $[-8,-2)\cup(4,\infty)$; **(N)** не знам.

4. Број реалних решења једначине $x|x|+1=3|x|$ је:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** већи од 3; **(N)** не знам.

5. Нека су α и β решења квадратне једначине $x^2+px+q=0$, где је $p,q\in\mathbb{R}$. Ако је $\alpha-\beta=5$ и $\alpha^3-\beta^3=35$, онда је p^2q^2 једнако:

(A) $\dfrac{25}{8}$; **(B)** 16; **(C)** 32; **(D)** 36; **(E)** није једнозначно одређено; **(N)** не знам.

6. Скуп решења неједначине $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{2x+3}$ је:

(A) $(1-\sqrt{5},1+\sqrt{5})$; **(B)** $[-\frac{3}{2},-1]\cup[1,1+\sqrt{5})$; **(C)** $(1-\sqrt{5},-1)\cup(1,1+\sqrt{5})$;
(D) $[1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}]$; **(E)** $(1-\sqrt{5},-1]\cup[1,1+\sqrt{5})$; **(N)** не знам.

7. Број решења једначине $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-5x+5}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-5x+5}=4$ је:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** већи од 3; **(N)** не знам.

8. Ако реални бројеви x и y задовољавају систем $\log_x y+\log_y x=\dfrac{10}{3}$, $xy=144$, онда је $\dfrac{x+y}{2}$ једнако:

(A) $12\sqrt{2}$; **(B)** $13\sqrt{3}$; **(C)** 24; **(D)** 30; **(E)** 36; **(N)** не знам.

9. Нека је $ABCDE$ тетиван петоугао, а F пресек његових дијагонала AC и BE. Ако је $AB=AE$, $\sphericalangle CDB=40^\circ$ и $\sphericalangle BFA=110^\circ$, онда је $\sphericalangle BDA$ једнак:

(A) 10°; **(B)** 20°; **(C)** 30°; **(D)** 40°; **(E)** 50°; **(N)** не знам.

10. Ако је n број решења једначине $\dfrac{\sin 4x\cdot\cos 2x}{1-\cos 4x}=0$ на интервалу $(-5\pi,5\pi)$, онда је:

(A) $0\leqslant n<10$; **(B)** $10\leqslant n<20$; **(C)** $20\leqslant n<40$; **(D)** $40\leqslant n<60$; **(E)** $n\geqslant 60$; **(N)** не знам.

11. Унутрашњи углови $\triangle ABC$ код темена B и C, редом, су $25°$ и $50°$. Ако права која садржи A и нормална је на AB сече BC у тачки D, онда $\dfrac{CA}{BD}$ припада скупу:

(A) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$; **(B)** $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$; **(C)** $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; **(D)** $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$; **(E)** $(1, \infty)$; **(N)** не знам.

12. Лопта додирује обе основе и омотач праве кружне зарубљене купе. Ако је запремина те купе два пута већа од запремине лопте, однос полупречника веће и мање основе купе једнак је:

(A) $\frac{3}{2}$; **(B)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; **(C)** $\sqrt{3}$; **(D)** 2; **(E)** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; **(N)** не знам.

13. У Декартовом координатном систему налази се $\triangle ABC$, чије су AA' и BB' висине, а CC_1 тежишна дуж. Ако је $A'(3,-1)$, $B'(0,-1)$, $C(1,1)$ и $C_1(p,q)$, онда је $p+q$ једнако:

(A) 8; **(B)** 4; **(C)** 0; **(D)** -4; **(E)** -8; **(N)** не знам.

14. Бројеви a, b, c, d чине геометријску, а $a+2, b+6, c+7, d+2$ аритметичку прогресију. Онда је $a+b+c+d$ једнако:

(A) 39; **(B)** 41; **(C)** 45; **(D)** 47; **(E)** 62; **(N)** не знам.

15. Последња цифра у декадном запису броја $2^{2026} + 3^{2026} + 7^{2026}$ је:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 5; **(D)** 7; **(E)** 8; **(N)** не знам.

16. Ако је z комплексан број за који важи $|z| = |z-6| = |z+2i|$, онда је $|z-3|$ једнако:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 4; **(E)** не постоји такав број; **(N)** не знам.

17. Ако је полином $2x^3 + px^2 + q$ дељив са $2x+1$ и $x-2$, за неке $p, q \in \mathbb{R}$, онда је $2p+q$ једнако:

(A) $-\frac{15}{2}$; **(B)** $-\frac{22}{3}$; **(C)** $\frac{22}{3}$; **(D)** $\frac{15}{2}$; **(E)** није једнозначно одређено; **(N)** не знам.

18. Ако је s збир најмање и највеће вредности функције $f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{за } x \in (-\infty, 0) \\ 3+2x-x^2, & \text{за } x \in [0, \infty) \end{cases}$ на $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$, онда:

(A) $s \in \left[\frac{13}{2}, 7\right]$; **(B)** $s \in \left(7, \frac{15}{2}\right)$; **(C)** $s \in \left[\frac{15}{2}, 8\right]$; **(D)** $s \in \left(8, \frac{17}{2}\right)$; **(E)** $s \in \left[\frac{17}{2}, 9\right]$; **(N)** не знам.

19. Ако је n број петочланих подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, 12\}$, којима је 6 средњи по величини елемент, онда је:

(A) $0 \leqslant n \leqslant 50$; **(B)** $50 < n < 100$; **(C)** $100 \leqslant n \leqslant 150$; **(D)** $150 < n < 200$; **(E)** $n \geqslant 200$; **(N)** не знам.

20. Константан члан у развоју $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^5$ једнак је:

(A) 5; **(B)** 15; **(C)** 30; **(D)** 45; **(E)** 51; **(N)** не знам.

Решења задатака.

1. Важи $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \frac{2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{5+2\sqrt{6}-5} = \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

2. За $a,b\in(0,\infty)$ је $a,b,a+b,a^2-ab+b^2\neq 0$, па је уочени израз дефинисан и важи $\left(\frac{a^3}{b^2}+b\right):\left(\frac{a^2}{b}-a+b\right)\cdot\frac{1+\frac{b}{a}}{(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})^2+\frac{4}{ab}} = \frac{a^3+b^3}{b^2}:\frac{a^2-ab+b^2}{b}\cdot\frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b^2}+\frac{4}{ab}} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{b^2}\cdot\frac{b}{a^2-ab+b^2}\cdot\frac{(a+b)\cdot ab^2}{(a+b)^2} = ab$.

3. Уочена неједначина је дефинисана за $x\notin\{-2,4\}$ и еквивалентна са $\frac{x(x-1)}{(x+2)(4-x)}+1 = \frac{8+x}{(x+2)(4-x)}\geqslant 0$, те је њено решење $x\in(-\infty,-8]\cup(-2,4)$.

4. Ако је $x\in[0,\infty)$, уочена једначина је еквивалентна са $x^2-3x+1=0$, те је $x\in\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$, а како су чланови последњег скупа ненегативни, они су решења и полазне једначине. Ако је $x\in(-\infty,0)$, уочена једначина је еквивалентна са $x^2-3x-1=0$, те је $x\in\left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$, а како је $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<0<\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, само је $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ решење полазне једначине.

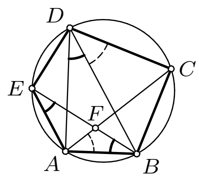
5. Важи $\alpha=\beta+5$, па је $\alpha^3-\beta^3=(\beta+5)^3-\beta^3=15\beta^2+75\beta+125=35$, тј. $15\beta^2+75\beta+90=15(\beta+2)(\beta+3)=0$, одакле је $\beta\in\{-2,-3\}$. Следи $(\alpha,\beta)\in\big\{(3,-2),(2,-3)\big\}$, тј. $(p,q)\in\big\{(-1,-6),(1,-6)\big\}$, а у оба случаја је $p^2q^2=36$.

6. Мора бити $x^2-1\geqslant 0$ и $2x+3\geqslant 0$, тј. $x\in[-\frac{3}{2},-1]\cup[1,\infty)$. У том случају, како су стране уочене неједначине ненегативне, еквивалентна је са $x^2-1<2x+3$, односно $x^2-2x-4<0$, тј. са $x\in(1-\sqrt{5},1+\sqrt{5})$, па је њено решење $x\in(1-\sqrt{5},-1]\cup[1,1+\sqrt{5})$ (важи $-\frac{3}{2}<1-\sqrt{5}$).

7. Ако је $t=(2+\sqrt{3})^{x^2-5x+5}$, онда је $(2-\sqrt{3})^{x^2-5x+5}=\frac{1}{t}$, па уочена једначина постаје $t+\frac{1}{t}=4$, односно $t^2-4t+1=0$, одакле је $t\in\{2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\}$. Ако је $t=2-\sqrt{3}$ следи $x^2-5x+5=-1$, тј. $x\in\{2,3\}$, а ако је $t=2+\sqrt{3}$, следи $x^2-5x+5=1$, тј. $x\in\{1,4\}$.

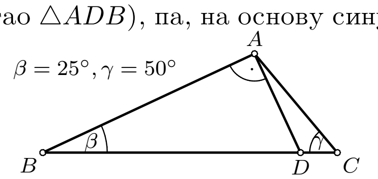
8. Због дефинисаности $\log_x y$ и $\log_y x$ је $x,y\in(0,1)\cup(1,\infty)$. Ако је $z=\log_x y$, како је $\log_y x=\frac{1}{z}$, прва једначина система се своди на $z+\frac{1}{z}=\frac{10}{3}$, па је $z^2-\frac{10}{3}z+1=(z-\frac{1}{3})(z-3)=0$, тј. $z\in\{\frac{1}{3},3\}$. Ако је $z=\frac{1}{3}$, следи $y=x^{\frac{1}{3}}$, па је $xy=x^{\frac{4}{3}}=144$, одакле је $(x,y)=(24\sqrt{3},2\sqrt{3})$, а ако је $z=3$, следи $y=x^3$, па је $xy=x^4=144$, одакле је $(x,y)=(2\sqrt{3},24\sqrt{3})$ (у оба случаја је $\frac{x+y}{2}=13\sqrt{3}$).

9. Важи $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CDB$ (углови над тетивом BC описаног круга $ABCDE$), па из $\triangle ABF$ следи $\sphericalangle ABF=180^\circ-\sphericalangle BFA-\sphericalangle FAB=180^\circ-\sphericalangle BFA-\sphericalangle CAB=180^\circ-110^\circ-40^\circ=30^\circ$ (јер је $A-F-C$). Због $B-F-E$ је $\sphericalangle ABE=\sphericalangle ABF$, а како је $\triangle ABE$ једнакокраки, следи $\sphericalangle BEA=\sphericalangle ABE=30^\circ$, па је $\sphericalangle BDA=\sphericalangle BEA=30^\circ$ (углови над тетивом AB описаног круга $ABCDE$).

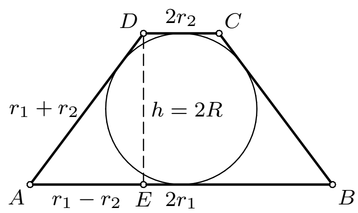


10. Уочена једначина је дефинисана ако и само ако је $1-\cos 4x=2\sin^2 2x\neq 0$, тј. ако и само ако је $\sin 2x\neq 0$, а еквивалентна је са $\frac{\sin 4x\cdot\cos 2x}{1-\cos 4x}=\frac{2\sin 2x\cos^2 2x}{2\sin^2 2x}=\frac{\cos^2 2x}{\sin 2x}=0$. Следи, мора бити $\cos 2x=0$, а како је онда $\sin 2x\neq 0$, еквивалентна је са $\cos 2x=0$, тј. решења су јој $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, где је $k\in\mathbb{Z}$ (скупу $(-5\pi,5\pi)$ припада 20 решења, за $-10\leqslant k\leqslant 9$).

11. Важи $\sphericalangle ADC=\sphericalangle DAB+\sphericalangle ABD=90^\circ+\beta$ (спољашњи угао $\triangle ADB$), па, на основу синусне теореме у $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$, следи $\frac{AD}{BD}=\sin\beta$ и $\frac{CA}{AD}=\frac{\sin\sphericalangle ADC}{\sin\sphericalangle DCA}=\frac{\sin(90^\circ+\beta)}{\sin\gamma}=\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$. Из добијеног је $\frac{CA}{BD}=\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin 2\beta}{2\sin\gamma}=\frac{\sin 50^\circ}{2\sin 50^\circ}=\frac{1}{2}$.



12. Пресек зарубљене купе и равни која садржи паралелне пречнике основа је једнакокраки трапез $ABCD$, основица $AB=2r_1$ и $CD=2r_2$, где су $r_1>r_2$ полупречници основа те купе, а висина трапеза је једнака висини купе h. Пресек те равни са уписаном лоптом је велики круг лопте, полупречника R, који је уписан у $ABCD$. Следи да је $h=2R$, а, како је $ABCD$ тангентан, важи $2DA=BC+DA=AB+CD=2(r_1+r_2)$. Ако је E подножје висине из D на AB, онда је $\triangle EDA$ правоугли, важи $AE=\frac{AB-CD}{2}=r_1-r_2$, па је, по Питагориној теореми, $(r_1-r_2)^2+(2R)^2=AE^2+ED^2=DA^2=(r_1+r_2)^2$, односно $R^2=r_1r_2$. Због односа запремина је $2\cdot\frac{4R^3\pi}{3}=\frac{h\pi}{3}\cdot(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$, што, уз претходно, даје $\frac{2R\pi}{3}\cdot(r_1^2+r_1r_2+r_2^2-4R^2)=\frac{2Rr_2^2\pi}{3}\cdot\left((\frac{r_1}{r_2})^2-3\cdot\frac{r_1}{r_2}+1\right)=0$, а како је $\frac{r_1}{r_2}>1$, следи $\frac{r_1}{r_2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.



13. За тачке $X \neq Y$, нека је k_{XY} коефицијент правца праве XY. Важи $k_{CA} = k_{CB'} = \frac{1-(-1)}{1-0} = 2$, $k_{BC} = k_{A'C} = \frac{-1-1}{3-1} = -1$, а, како је $AA' \perp BC$ и $BB' \perp CA$, следи $k_{AA'} = -\frac{1}{k_{BC}} = 1$ и $k_{BB'} = -\frac{1}{k_{CA}} = -\frac{1}{2}$. Следи да су $y - 1 = 2(x-1)$ и $y + 1 = x - 3$ једначине правих CA и AA', редом, па је $A(-3,-7)$, а $y - 1 = -(x-1)$ и $y + 1 = -\frac{1}{2}x$ једначине правих BC и BB', редом, па је $B(6,-4)$, одакле је $C_1 = \left(\frac{-3+6}{2}, \frac{-7-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$, тј. $p = \frac{3}{2}$, $q = -\frac{11}{2}$ (и важи $p + q = -4$).

14. Како a, b, c, d чине геометријску прогресију, следи $b = aq, c = aq^2, d = aq^3$, где је q корак те прогресије. Како су $a+2, b+6, c+7$, као и $b+6, c+7, d+2$, три узастопна члана аритметичке прогресије, следи $a(1+q^2)+9 = (a+2)+(c+7) = 2(b+6) = 2aq+12$ и $aq(1+q^2)+8 = (b+6)+(d+2) = 2(c+7) = 2aq^2+14$, односно $a(q-1)^2 = 3$ и $aq(q-1)^2 = 6$. Следи $q \notin \{0,1\}$, па је $q = \frac{aq(q-1)^2}{a(q-1)^2} = 2$, $a = 3$ (и важи $a + b + c + d = a(1 + q + q^2 + q^3) = 45$).

15. Важи $2^4 \equiv 6 \pmod{10}$, $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$, $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, одакле је, индукцијом, $2^{4k} \equiv 6 \pmod{10}$, $3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$, $7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$, за свако $k \in \mathbb{N}$. Следи, $N = 2^{2026} + 3^{2026} + 7^{2026} = 2^{4\cdot 506+2} + 3^{4\cdot 506+2} + 7^{4\cdot 506+2} \equiv 6\cdot 2^2 + 1\cdot 3^2 + 1\cdot 7^2 \equiv 4+9+9 \equiv 2 \pmod{10}$, тј. последња цифра N је 2.

16. Ако је $z = a+ib$, где су $a, b \in \mathbb{R}$, из $|z| = |z-6|$ следи $a^2 = (a-6)^2$, тј. $a = 3$, док из $|z| = |z+2i|$ следи $b^2 = (b+2)^2$, тј. $b = -1$. Дакле, $z = 3 - i$, па је $|z-3| = 1$.

17. Ако је $f(x) = 2x^3 + px^2 + q$, из дељивости са $2x+1$ следи $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{p}{4} + q = 0$, из дељивости са $x-2$ следи $f(2) = 16 + 4p + q = 0$, па је $p = -\frac{13}{3}$, $q = \frac{4}{3}$ (и важи $2p + q = -\frac{22}{3}$).

18. Функција f опада на $(-\infty, 0)$ и на $(1, \infty)$, расте на $(0,1)$ и важи $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 3 \geqslant f(0)$. Следи да је њена најмања вредност на $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$ једнака $m = f(0) = 3$, а највећа $M = \max\left\{f(-\frac{3}{2}), f(\frac{1}{2})\right\} = \max\left\{\frac{9}{2}, \frac{15}{4}\right\} = \frac{9}{2}$ (и важи $m + M = \frac{15}{2}$).

19. Подскуп са наведеним својством садржи елемент 6 и по два елемента из $\{1,2,3,4,5\}$ и $\{7,8,9,10,11,12\}$, при чему је њихов избор независан од избора преосталих, па је $n = \binom{5}{2}\binom{6}{2} = 150$.

20. Важи $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} \binom{5}{k}\left(x + \frac{1}{x}\right)^k$. Како $\left(x + \frac{1}{x}\right)^k$ садржи константан члан ако и само ако је $k = 2l$, за неко $l \in \mathbb{N}_0$, једнак 1 ако је $l = 0$, односно $\binom{2l}{l}$ ако је $l \geqslant 1$, следи да је константан члан у $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^5$ једнак $\binom{5}{0}\cdot 1 + \binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1} + \binom{5}{4}\cdot\binom{4}{2} = 51$.