УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Бојана Тодић

КОМБИНАТОРНИ ПРОБЛЕМ САКУПЉАЊА КУПОНА СА ПРОШИРЕНОМ КОЛЕКЦИЈОМ

докторска дисертација

Београд, 2024.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Bojana Todić

COMBINATORIAL COUPON COLLECTOR PROBLEM WITH AUGMENTED COLLECTION

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2024.

Ментор:

др Јелена Јоцковић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Бојана Милошевић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Горан Попивода, ванредни професор
Универзитет Црне Горе, Природно-математички факултет

др Марко Обрадовић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: ____________________

Наслов дисертације: Комбинаторни проблем сакупљања купона са проширеном колекцијом

Резиме: Предмет ове дисертације је комбинаторни проблем сакупљања купона, који се у свом основном (класичном) облику може једноставно описати на следећи начин: колекционар жели да попуни албум са n различитих сличица (купона), тако што полази од празног албума и сваког дана купује (на случајан начин извлачи) једну сличицу. Случајна величина од интереса је време чекања до попуњавања колекције.

У докторској дисертацији су разматрана три нова уопштења проблема сакупљања купона код којих се почетна колекција од n стандардних купона допуњава купонима специјалне намене.

Две уводне главе дисертације посвећене су класичном проблему сакупљања купона и постојећим резултатима везаним за проширење колекције купона ([1], [2], [39], [54]).

Нови резултати су садржани у трећој, четвртој и петој глави дисертације.

У трећој глави дисертације је разматран проблем сакупљања купона са нултим купоном (који представља празан корак) и са универзалним купоном, који је дефинисан као купон који не припада колекцији, али може да замени било који од стандардних купона. За случај када се сви стандардни купони извлаче са једнаком вероватноћом одређено је асимптотско понашање првог и другог момента одговарајућег времена чекања, за четири карактеристичне комбинације вероватноћа извлачења додатних купона, када број стандардних купона неограничено расте, а део колекције који се чека је фиксиран. Добијени резултати су садржани у раду [27] и уопштавају познате резултате везане за класични проблем сакупљања купона и део резултата из рада [2]. Исти проблем је анализиран и са становишта ланаца Маркова, одређена је фундаментална матрица која одговара овом ланцу. Она омогућава да се изведе резултат који је карактеристичан за ово уопштење проблема: вероватноћа да се сакупљање купона заврши на један од могућих начина, ако је познато да је извучено укупно n купона. Ови резултати су садржани у раду [24]. За случај када се стандардни купони извлаче са неједнаким вероватноћама, коришћењем техника мајоризације је одређена фамилија горњих и доњих граница за први и други моменат времена чекања, које служе да се превазиђу познате рачунске тешкоће које се појављују при

израчунавању ових величина. На основу нумеричких експеримената су издвојене најпогодније границе из ове класе, као компромис између рачунске једноставности и прецизности. Овај резултат је садржан у раду [26] и директно уопштава резултат добијен у раду [51].

У четвртој глави дисертације је разматран проблем сакупљања купона са купоном који омета сакупљање колекције (казненим купоном). Казнени купон је дефинисан као купон који не припада колекцији, али мења циљ експеримента, у смислу да се сакупљање купона прекида када се сакупи цела колекције без ометања, или када разлика броја сакупљених стандардних и казнених купона постане једнака n. Разматрано уопштење проблема се може приказати као специјални случај једнодимензионог случајног лутања са две апсорбујуће баријере. Комбинаторним закључивањем добијена је расподела одговарајућег времена чекања и добијена једноставна процена њене средње вредности. Наведено уопштење је даље разматрано као дводимензиони ланац Маркова, па је одређена фундаментална матрица. Ови резултати су садржани у раду [53].

У петој глави дисертације је разматран проблем сакупљања купона са купоном који празни колекцију (ресет купон), у смислу да скуп стандардних купона извучених за првих t дана постаје празан ако се ресет купон извуче $t+1$-вог дана. У случају када стандардни купони имају неједнаке вероватноће избора, комбинаторним закључивањем је изведена расподела одговарајућег времена чекања. За случај једнаких вероватноћа, коришћењем техника ланаца Маркова и особина специјалних функција, изведена је веза између средњег времена чекања и бета функције, која омогућава процену асимптотског понашања времена чекања кад n неограничено расте, за различите вредности вероватноће извлачења ресет купона. Ови резултати садржани су у раду [25].

Сва три уопштења проблема сакупљања купона дефинисана у дисертацији се одговарајућим избором параметара своде на класични проблем, па су и сви добијени резултати директна уопштења постојећих резултата за класични проблем.

Кључне речи: проблем сакупљања купона, време чекања, универзални купон, купон који омета сакупљање колекције, купон који празни колекцију, ланац Маркова, фундаментална матрица, Шур-конвексност, границе,

асимптотско понашање

Научна област: Математика

Ужа научна област: Вероватноћа и статистика

УДК број: 519.21(043.3)

Dissertation title: Combinatorial coupon collector problem with augmented collection

Abstract: This dissertation deals with the coupon collector problem, which in its simplest (classical) form can be formulated as follows: A collector wants to collect a set of n distinct coupons, by buying a single coupon each day. The random variable of interest is the waiting time until the collection is completed.

The goal of the dissertation is to propose and analyze three new generalizations of the classical coupon collector problem obtained by introducing additional coupons with special purposes into the set of n standard coupons.

The first two chapters are devoted to the results on the classical coupon collector problem and the known generalizations obtained by introducing additional coupons into the coupon set ([1], [2], [39], [54]).

New results are presented in chapters 3,4, and 5.

The third chapter of the dissertation is dedicated to the case where, in addition to the standard coupons, the coupon set consists of a null coupon (which can be drawn, but does not belong to any collection), and an additional universal coupon, that can replace any standard coupon. For the case of equal probabilities of standard coupons, the asymptotic behavior (as $n \to \infty$) of the expectated value and variance of the waiting time for a fixed size subcollection of a collection of coupons is obtained when one or both probabilities of additional coupons are fixed, and the remaining coupons have equal small probabilities. These results, published in [27], generalize part of the results in [2]. The same problem is analyzed using a Markov chain approach, which led to the determination of the fundamental matrix and some related features of the collection process (probability that the coupon collection process ends in a certin way). These results are contained in the paper [24]. For the case of unequal probabilities of standard coupons, a class of bounds is derived for the first and second moments of the waiting time until the end of the experiment by using majorization techniques and refining the bounds proposed in [51]. The quality of the proposed bounds is tested in numerical experiments, and the specific bounds from the class with the most desirable properties are given. These results are published in [26].

The fourth chapter of the dissertation deals with the generalization in which the additional coupon (so called, penalty coupon) interferes with the collection of standard coupons in the sense that the collection process ends when the absolute

difference between the number of collected standard coupons and the number of collected penalty coupons is equal to n. This generalization can be seen as a special case of the random walk with two absorbing barriers. The distribution and a simple upper bound on the first moment of the corresponding waiting time are determined by combinatorial considerations. The application of the Markov chain approach led to obtaining the fundamental matrix. These results are published in [53].

In the fifth chapter of the dissertation another additional coupon (so called reset coupon) is introduced, which acts as a reset button, in the sense that the set of coupons drawn up to time (day) t becomes empty if the reset coupon is drawn on day $t+1$. In the case of unequal probabilities of standard coupons, the distribution of the corresponding waiting time is obtained by combinatorial considerations. For the case of equal probabilities of obtaining standard coupons, For the case of equal probabilities, applying the first step analysis for the correspondingly constructed Markov chains led to the expressions for the expected waiting time and its simple form in terms of the beta function. These results are used for analysing the asymptotic behavior (when the size of the collection tends to infinity) of the expected waiting time, taking into account possible values of the probability of obtaining a reset coupon. These results are published in [25].

Setting the probabilities of the additional coupons to zero, all three generalizations of the coupon collector problem defined and analyzed in this dissertation as well as the obtained results reduce to the corresponding results for the classical coupon collector problem.

Keywords: coupon collector problem, waiting time, universal coupon, penalty coupon, reset coupon, Markov chain, fundamental matrix, Schur-convexity, bounds, asymptotic properties

Research area: Mathematics

Research sub-area: Probability and Statistics

UDC number: 519.21(043.3)

Захвалница

Пре свега, захваљујем се менторки др Јелени Јоцковић на свему што сам од ње научила, дугогодишњој професионалној подршци, али и огромном разумевању, креативности и упорности да превазиђемо све тешкоће током израде ове дисертације. Хвала на времену, пренетом знању и стрпљењу који су ми били од непроцењивог значаја, као и на моралној подршци.

Захвалност на сарадњи и сугестијама дугујем члановима комисије: проф. др Бојани Милошевић, проф. др Горану Попиводи и др Марку Обрадовићу, који су својим огромним и драгоценим искуством допринели коначном изгледу ове дисертације. Захваљујем се на труду који су уложили и на свим корисним саветима које су ми пружили, а надам се даљој успешној сарадњи.

Захваљујем се мојим колегама, члановима Катедре за вероватноћу и статистику на свим облицима професионалне подршке, колегијалности и људском разумевању.

Хвала свим пријатељима који су ме охрабривали, веровали у мене и увек проналазили начин да ми помогну.

Исто тако, од не мањег значаја била ми је подршка и разумевање моје породице у сваком погледу да истрајем у овом раду. Њима дугујем посебну захвалност за безрезервну љубав и подршку.

Београд, мај 2024. *Бојана Тодић*

Садржај

Глава 1

Увод

Проблем сакупљања купона је познати комбинаторни проблем, који се може дефинисати на следећи начин: Посматра се особа (сакупљач) која прикупља различите типове купона из коначног скупа $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, где се сваки купон може изабрати са одређеном вероватноћом. Извлачења су са враћањем и међусобно су независна. Питање које се поставља је: Колико је најмање извлачења потребно да би се изабрала одређена колекција различитих купона? Другим речима, потребно је одредити расподелу или очекивано време чекања које је потребно да би се изабрала цела колекција купона или нека њена потколекција. Специјални случај овог проблема је класични проблем сакупљања купона, где сви купони из скупа $\mathbb{N}_n$ имају једнаку вероватноћу да буду изабрани.

Почетком 18. века први пут је дефинисан проблем сакупљања купона у текстовима De Mensura Sortis (De Moivre, 1712.) и Théorie Analytique de Probabilités (Laplace, 1812.) ([14], [15], [20]). Овај проблем привукао је пажњу многих истраживача због своје примене у различитим научним областима, као што су рачунарске науке, претраживање алгоритама, математичко програмирање, оптимизација, инжењерство, биологија, екологија ([7], [22], [30], [32], [56]). Проблем сакупљања купона се појављује у различитим контекстима у математичкој литератури од средине прошлог века, а и даље представља активно поље истраживања.

Проблем сакупљања купона може се формулисати на различите начине. Осим као чисто комбинаторни проблем у оквиру области вероватноће, може се разматрати и у контексту формалних језика ([17]). Такође, може се описати и као специјални случај модела кутије (енг. urn model) ([33], [46]). Модел кутије се односи на систем који се састоји од једне или више кутија у којима се налазе различите куглице. Куглице се по одређеном правилу извлаче из кутија и у њих враћају све док се не испуни унапред дефинисан крај експеримента. Ако се претпостави да се у кутији налази n различитих куглица, да се куглице из кутије бирају са враћањем, и ако се посматра укупан број извлачења који је потребан да се свака куглица изабере бар једанпут, добија се управо проблем сакупљања купона. Још један начин да се проблем сакупљања купона опише као модел кутије је да замислимо да имамо n кутија и насумице убацујемо куглице у те кутије. Ако куглица упадне у i-ту кутију сматрамо да је извучен купон i.

Овај проблем се може модификовати или уопштити на више начина. Нека уопштења могу се добити променом циља процеса сакупљања. На пример, може се посматрати време чекања потребно да се сакупи више копија оригиналне колекције или време потребно да се сакупе сви парови или тројке из колекције што је разматрано у радовима [20], [23], [37]. Друга врста уопштења добија се када се уместо једног посматра више колекционара и на различите начине се дефинишу односи међу њима. Резултати који се односе на ово уопштење дати су, на пример, у радовима [16], [38], [41]. Ако се претпостави да се у сваком извлачењу бира по m различитих купона, добија се још једно уопштење проблема сакупљања купона које је разматрано у радовима [48], [52].

Посебна група уопштења проблема сакупљања купона заснована је на идеји да се скуп купона прошири додавањем једног или више додатних купона са специјалном наменом. Уопштење проблема сакупљања купона са нултим купоном, купоном који представља неуспело извлачење (празан корак) и успорава сакупљање купона разматрано је у радовима [1] и [2]. У раду [39] предлаже се још једно уопштење класичног проблема сакупљања купона, где се појављивањем додатног купона (тзв. бонус купона) доводи до избора још једног купона. Једна мало другачија варијанта проблема сакупљања купона дата је у раду [54], где су аутори сваком од купона доделили један или више циљева, а крај експеримента дефинисан је када се сакупе (испуне) сви могући циљеви, а не сви могући купони.

У овој докторској дисертацији разматрано је неколико нових уопштења проблема сакупљања купона добијених додавањем различитих додатних купона, који не припадају стандардној колекцији купона, али утичу на брзину сакупљања купона. Структуру ове дисертације чини пет делова.

У уводном делу дат је преглед познатих алгебарских идентитета, резултата из теорије Марковљевих ланаца, као и теорије мајоризације који су коришћени за добијање резултата у дисертацији.

Друга глава дисертације посвећена је класичном проблему сакупљања купона и постојећим резултатима везаним за проширење колекције купона, додавањем нултог купона.

Нови резултати су садржани у трећој, четвртој и петој глави дисертације.

У трећој глави разматран је проблем сакупљања купона са универзалним купоном, где скуп допустивих купона садржи стандардне купоне (који припадају колекцији), нулти купон и додатно универзални купон (тзв. џокер) који може да замени било који стандардни купон, једанпут.

У четвртој глави разматарано је уопштење проблема сакупљања купона, где је скуп стандардних купона проширен додавањем купона, који омета сакупљање стандардних купона.

У петој глави разматрана је варијанта проблема сакупљања купона у којој је претпостављено да поред стандардних купона постоји и додатни купон који представља ресет дугме, тј. купон који уклања све купоне из колекције који су до тада сакупљени.

1.1 Помоћне леме и ознаке

У овом поглављу ће бити уведене неке ознаке и наведени разни помоћни резултати који ће бити коришћени за добијање резултата у наредним поглављима. Ови и слични резултати се могу наћи у [28], [36], [45], [44].

Алгебарски идентитети

Лема 1.1. *1. За ненегативне целе бројеве n и k такве да је $0 \leq k \leq n$ важи једнакост:*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \cdot I_{\{k\geq 1\}}. \tag{1.1}$$

2. За ненегативне целе бројеве a и b такве да је $0 \leq a < b$ важи једнакост:

$$\sum_{m=0}^{a} (-1)^m \binom{b}{m} = (-1)^a \binom{b-1}{a}. \tag{1.2}$$

3. *За све реалне бројеве a такве да је* $| a |< 1$ *важи једнакост:*

$$\sum_{t=i}^{+\infty} \binom{t}{i} a^{t-i} = \frac{1}{(1-a)^{i+1}}. \tag{1.3}$$

4. *За све реалне бројеве a такве да је* $| a |< 1$ *важи једнакост:*

$$\sum_{t=i}^{+\infty} t \binom{t}{i} a^{t-i} = \frac{i}{(1-a)^{i+1}} + \frac{a(i+1)}{(1-a)^{i+2}} = \frac{i+a}{(1-a)^{i+2}}. \tag{1.4}$$

5. *За све природне бројеве* n *и* c *такве да је* $c \leq n$ *важи једнакост:*

$$\sum_{i=0}^{c-1} (-1)^{c-1-i} \binom{n-i-1}{n-c} \binom{n}{i} = 1. \tag{1.5}$$

6. *За све природне бројеве* r *важи једнакост:*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+r} = \frac{m!(r-1)!}{(m+r)!}. \tag{1.6}$$

7. *За све природне бројеве* n *и позитивне реалне бројеве* α *важи једнакост:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\alpha k+1} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{\alpha}+1\right)}, \tag{1.7}$$

где $\Gamma(\cdot)$ *означава гама функцију.*

8. *За све природне бројеве* n *и полиноме* $f(x)$ *степена* n *важи једнакост:*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} k(f(x))^k = nf(x)(1-f(x))^{n-1}. \tag{1.8}$$

Напомена 1.1. *Идентитети 1.1, 1.3 и 1.4 се једноставно показују, а идентитети 1.2 и 1.5-1.8 су изведени у [45]. Идентитет 1.8 се једноставно проверава и применом биномне формуле на десну страну једнакости.*

Матрице

Прво, уведимо додатну нотацију:

$\mathbf{I}$	јединична матрица;
$\mathbf{0}$	матрица чији су сви елементи једнаки 0;
$\mathbf{1}$	матрица са свим елементима једнаким 1;
$\mathbf{M}^{(sq)}$	матрица чији су сви елементи квадрати елемената матрице $\mathbf{M}$;
$(\mathbf{M})_{i,j}$	елемент у i-том реду и j-тој колони матрице $\mathbf{M}$;
$S_1(\mathbf{M})$	сума свих елемената првог реда матрице $\mathbf{M}$;
$S_1^{(m)}(\mathbf{M})$	сума првих m елемената првог реда матрице $\mathbf{M}$.

Лема 1.2. *За горње троугаону блок матрицу* $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$ *важи следећа једнакост:*

1.

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

2. За произвољно $n \geq 1$*, важи једнакост:*

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^n & \mathbf{Y}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j \mathbf{B} \mathbf{C}^{n-1-j}. \tag{1.10}$$

Доказ. Једнакост (1.9) се директно проверава, а једнакост (1.10) једноставно се доказује математичком индукцијом по n. □

1.2 Помоћни резултати Марковљевих процеса

Марковљеви процеси су релативно једноставна, али веома интересантна и корисна класа случајних процеса, које је увео руски математичар Андреј Марков[1] почетком 20. века. Марковљеви процеси су математички модел којим се могу описати системи чије стање се мења током времена и који имају особину коју неформално можемо да искажемо на следећи начин: будућност зависи само од садашњости, тј. условно је независна од прошлости. То значи да је за одређивање условне расподеле будућих стања система битно само садашње стање система, али не и пут којим је систем дошао у то стање. Марковљев процес који узима највише пребројиво много вредности назива се Марковљев ланац са дискретним временом. У овом поглављу су наведени резултати везани за Марковљеве процесе који ће бити коришћени у овој дисертацији ([18], [28], [29], [42], [49], [50]).

Марковљеви ланци имају широку примену у различитим областима, јер се њима могу описати многе појаве са којима се срећемо у реалном животу. Ови процеси могу се успешно применити за добијање резултата везаних за неколико различитих варијанти проблема сакупљања купона ([1], [2], [15]), као и на многе друге проблеме чекања ([14], [31], [33]).

[1] Андрей Андреевич Марков, 1856 -1922

За потребе овог рада разматраћемо хомогени Марковљев ланац са коначним скупом стања. Матрицу вероватноћа прелаза у једном кораку ћемо означавати са $\mathbf{P}$, а матрицу вероватноћа прелаза за n корака са $\mathbf{P}_n$. За ове матрице важи релација $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}^n$.

Стања Марковљевог ланца и односи између њих могу се класификовати на више начина, али нам је за потребе ове дисертације довољно да посматрамо две врсте стања: апсорбујућа и неапсорбујућа (пролазна). Апсорбујућа стања су она стања која систем не може да напусти кад у њих уђе, односно остаје у том стању са вероватноћом 1, а прелази у неко друго стање са вероватноћом 0. Неапсорбујућа стања су она стања која се могу напустити са позитивном вероватноћом.

Размотримо произвољан Марковљев ланац који има r апсорбујућих и t пролазних стања. Матрица вероватноћа прелаза за један корак $\mathbf{P}$ оваквог ланца може се приказати на следећи начин (канонски облик):

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{t\times t} & \mathbf{R}_{t\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times t} & \mathbf{I}_{r\times r} \end{array} \right), \tag{1.11}$$

где матрица $\mathbf{Q}_{t\times t}$ садржи вероватноће прелаза између пролазних стања и матрица $\mathbf{R}_{t\times r}$ садржи вероватноће прелаза из пролазних у апсорбујућа стања.

Теорема 1.1. *За ланац Маркова којем одговара матрица вероватноћа прелаза (1.11), матрица $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$ има инверз који је једнак:*

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}^k. \tag{1.12}$$

Доказ. Доказ се може наћи у [29]. □

Дефиниција 1.1. *За ланац Маркова са айсорбујућим скуйом сūања дефинише се фундаменūална маūрица са $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$. Елеменūū n_{ij} маūрице $\mathbf{N}$ йредсūавља очекивани број долазака ланца у неайсорбујуће сūање j, ако је у йочеūном ūренуūку био у неайсорбујућем сūању i.*

Теорема 1.2. *[29] Нека је t_i очекивано време (број корака) до айсорйције ако се у йочеūном ūренуūку ланац налазио у сūању i и нека је $\mathbf{t}$ векūор чији је i-ūи елеменūū t_i. Тада је:*

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{1}. \tag{1.13}$$

Доказ. Доказ се може наћи у [29]. □

Теорема 1.3. *Нека је τ_i дисперзија времена до апсорпције ако се у почетном тренутку ланац налазио у стању i и нека је τ вектор чији је i-ти елемент τ_i. Тада је:*

$$\tau = (\mathbf{2N} - \mathbf{1})\mathbf{t} - \mathbf{t}^{(\mathbf{sq})}. \tag{1.14}$$

Доказ. Доказ се може наћи у [29]. □

Теорема 1.4. *Нека је b_{ij} вероватноћа да је ланац у апсорбујућем стању j ако је у почетном тренутку био у пролазном стању i. Нека је $\mathbf{B}$ матрица чији су елементи b_{ij}. Тада је $\mathbf{B}$ матрица димензије $t \times r$ и важи:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{NR}. \tag{1.15}$$

Доказ. Доказ се може наћи у [29]. □

Фундаментална матрица има важну улогу у анализи Марковљевих ланаца и решавању различитих проблема који се могу представити преко Марковљевих ланаца. Занимљива је примена Марковљевих ланаца у демографији, друштвеној науци о становништву која испитује и мери динамику становништва. У раду [9] аутор је посматрао кретање појединца кроз његов животни циклус као један Марковљев ланац са апсорбујућим стањем. Различите животне фазе представљене су као пролазна стања Марковљевог ланца, док је смрт апорбујуће стање. Користећи технике Марковљевих ланаца и особине фундаменталне матрице одређен је просечан животни век и његова дисперзија, просечан број посета пролазних стања и друге значајне демографске информације.

1.3 Помоћни резултати теорије мајоризације

Веома важну улогу у многим областима математике имају неједнакости. Међутим, све до почетка прошлог века није постојала посебна математичка дисциплина која се бави овом тематиком. Теорија мајоризације развијала се потпуно независно у различитим областима математике: линеарна алгебра, нумеричка анализа, вероватноћа и статистика, али и у другим научним областима као што су економија, физика, квантна механика и многе друге.

У овом поглављу дати су основни појмови теорије мајоризације. Више детаља у вези са теоријом мајоризације може се пронаћи, на пример, у [4], [5], [34].

Дефиниција 1.2. *Нека су* $(p_{(1)}, p_{(2)}, \ldots, p_{(n)})$ *координате вектора* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ *поређане у растућем поретку. Кажемо да вектор* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ *мајорира вектор* $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ *(ознака* $\mathbf{q} \prec \mathbf{p}$*) ако важи:*

$$\sum_{i=1}^{k} q_{(i)} \leq \sum_{i=1}^{k} p_{(i)}, \ k = 1, 2, \ldots, n-1, \ \text{и} \ \sum_{i=1}^{n} q_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} p_{(i)}. \tag{1.16}$$

Класу функција које обезбеђују да за два елемента која су у некој релацији, њихове слике поново буду у некој релацији у теорију мајоризације увео је познати математичар Шур[2]. У његову част реалне функције које чувају релацију мајоризације називају се Шур конвексне функције.

Дефиниција 1.3. *Реално вредносна функција* f *дефинисана на* $I \subset \mathbb{R}^n$ *је Шур конвексна (конкавна) на* I *ако важи:*

$$\mathbf{p} \prec \mathbf{q} \ \text{на} \ I \implies f(\mathbf{p}) \leq (\geq) f(\mathbf{q}). \tag{1.17}$$

Сада ћемо навести лему која ће бити потребна у овој дисертацији.

Лема 1.3. *Функција* f *дефинисана на* $\mathbb{R}^n$ *је Шур конвексна (конкавна) ако и само ако је* f *симетрична и ако је* $f(\lambda q, (1-\lambda)q, p_3, \ldots, p_n)$ *неопадајућа (нерастућа) функција по* λ *за* $\lambda \in (0, 1/2]$.

Доказ. Доказ се може наћи у [34]. □

Данас је теорија мајоризације математичка дисциплина која се веома брзо развија и омогућава проналажење нових неједнакости и њихову примену у различитим областима математике, као и у многим другим научним областима. Многобројне примене техника мајоризације за добијање неједнакости у геометрији, комбинаторици, као и у теорији графова могу се наћи у [34], [5], [4]. Занимљиво је да се технике мајоризације могу применити и у животном осигурању за одређивање доње и горње границе премија за хетерогену популацију осигураника ([10]), али и у комбинаторном проблему сакупљања купона за добијање доње и горње границе расподеле времена чекања ([51]).

[2] Issai Schur, 1875 – 1941

Глава 2

Класични проблем сакупљања купона и његова уопштења

2.1 Класични проблем сакупљања купона

Ако се претпостави да се сваки купон из скупа $\mathbb{N}_n$ бира са истом вероватноћом $\frac{1}{n}$, онда говоримо о класичном проблему сакупљања купона. На сличан начин дефинише се проблем сакупљања купона са неједнаким вероватноћама, где се претпоставља да се купон $j \in \mathbb{N}_n$ бира са вероватноћом p_j и важи $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Проблем сакупљања купона разматра се од шездесетих година прошлог века. Променљива од интереса је случајна величина која представља време чекања потребно да се сакупи колекција купона. Различити приступи, методе и технике коришћени су приликом разматрања овог комбинаторног проблема. Време чекања до комплетирања колекције за класични проблем сакупљања купона дат је у наредној теореми.

Теорема 2.1. *За време чекања потребно да се сакупи цела колекција купона W_n важи следећа једнакост:*

$$P\{W_n > k\} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \binom{n}{i} \left(\frac{i}{n}\right)^k, \quad k \geq 0. \tag{2.1}$$

Доказ. Доказ се може наћи у [14]. □

Време потребно да се сакупи цела колекција, ако вероватноће избора купона нису једнаке, одређено је у [47]. Гранична расподела класичног проблема сакупљања купона прво је добијена у [13] и дата је у наредној теореми.

Теорема 2.2. *За свако реално x важи:*

$$\lim_{n\to\infty} P\{W_n \leq n(x + \ln n)\} = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Више аутора дошло је до граничних резултата и неких примена овог проблема коришћењем различитих метода, као што су метод карактеристичних и генераторних функција, метод утапања у Пуасонове процесе, метод теорије екстремних вредности. Гранични резултат за произвољне вероватноће избора купона одређен је у [8]. Проблем постојања граничне расподеле времена чекања за дату потколекцију купона из скупа $\mathbb{N}_n$ одређен је у раду [6]. У раду [20] уместо времена чекања до појаве свих k-торки, разматра се време чекања до појаве бар r k-орки из колекције $\mathbb{N}_n$. Гранична расподела времена чекања потребна да се сакупи одређена колекција парова jj из скупа $\mathbb{N}_n$ одређена је у [37], а гранична расподела времена чекања потребног да се сакупе све тројке из скупа $\mathbb{N}_n$ дата је у [23].

Применом проблема сакупљања купона у различитим инжењерским проблемима појавио се проблем приликом израчунавања функције расподеле дате у леми 2.1, јер је то израчунавање било рачунарски веома захтевно. Због тога је било потребно да се нађе нека врста апроксимације те функције расподеле. У раду [51] аутор је предложио две групе доњих и горњих граница за стандардни проблем сакупљања купона. Први скуп граница је добијен директним комбинаторним резоновањем, а други је одређен применом мајоризације.

2.2 Уопштења проблема сакупљања купона са проширеном колекцијом

Проблем сакупљања купона има бројне модификације и уопштења. Једно од могућих уопштења заснива се на идеји да се скуп стандардних купона прошири додавањем додатних купона који имају посебну намену. Купони специјалне намене не припадају основној колекцији, али на неки начин утичу на ток сакупљања колекције. У зависности од тога коју намену имају специјални купони, као и колико их има у колекцији, на различите начине се дефинише крај експеримента. У наставку је дат преглед неких радова који се односе на уопштење проблема сакупљања купона проширивањем колекције купона.

У раду [39] аутори се баве проблемом сакупљања купона са бонусима. Претпостављају да постоји n стандардних купона и m бонус купона, а кад се изабере бонус купон даје право да се изабере још један купон. Дакле, бонус купони омогућавају још једно извлачење. У раду су претпоставили да се купони извлаче са истом вероватноћом. Добијени су тачни и асимптотски резултати који се односе на расподелу времена чекања до сакупљања фиксираног броја стандардних и фиксираног броја бонус купона.

У раду [54] аутори су стандардним купонима доделили један или више циљева, а крај експеримента су дефинисали као време чекања до остварења свих могућих циљева, а не свих могућих купона. На пример, имамо четири купона таква да први купон има циљеве A, B и C, други купон има циљеве B и D, трећи купон има циљеве A, C и D и четврти купон има циљеве A и D. Крај експеримента се дефинише када се сакупе сви циљеви A, B, C и D. Циљ рада [54] је да се одреде једноставније и практичније формуле за рачунање у смислу компјутерских ресурса.

Још један начин проширивања колекције стандардних купона је додавање нултог купона који се појављује у неколико радова ([1], [2], [40], [46]). Нулти купон је купон који не припада колекцији и успорава сакупљање стандардних купона. Постојање нултог купона је еквивалентно томе да је збир вероватноћа избора стандардних купона мањи од 1. Познато је да се (основни) проблем сакупљања купона може представити и на следећи начин: Претпоставимо да имамо лоптице које се убацују у n кутија, бацања су међусобно независна и једнако је вероватно да се погоди свака од кутија. Додатно, ако се претпостави да са позитивном вероватноћом лоптица пада поред кутија и ако се посматра колико је лоптица потребно бацити док се у свакој кутији не појави бар једна лоптица, добија се проблем сакупљања купона са нултим купоном формулисан на исти начин.

У радовима [1] и [2] аутори су разматрали проширени скуп купона

$$\mathbb{N}_n^{\circ} = \{1, 2, \ldots, n, \circ\},$$

где купон $i \in \mathbb{N}_n$ може бити изабран са вероватноћом p_i, нулти купон $\circ$ може бити изабран са вероватноћом p_N и важи једнакост $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i + p_N = 1$.

Расподела времена чекања $W_{n,c}^{(N)}$ потребног да се сакупи потколекција од c различитих купона, као и просечно време потребно да се сакупи потколекција од c различитих купона одређени су користећи технике Марковљевих ланаца и дати су у наредној теореми.

Теорема 2.3. *За свако $n \geq 1$ и $c = 1, \dots, n$, важе једнакости:*

$$P\{W_{n,c}^{(N)} > t\} = \sum_{k=0}^{c-1} (-1)^{c-k-1} \binom{n-k-1}{n-c} \sum_{J \in T_{i,n}} (p_N + P_J)^t, \ t \geq 0,$$

$$EW_{n,c}^{(N)} = \sum_{k=0}^{c-1} (-1)^{c-k-1} \binom{n-k-1}{n-c} \sum_{J \in T_{i,n}} \frac{1}{1 - (p_N + P_J)},$$

где је $T_{i,n} = \{I \subseteq \{1, \dots, n\} \mid |I| = i\}$, $T_{0,n} = \emptyset$, $P_J = \sum_{j \in J} p_j$ и $\sum_{j \in \emptyset} p_j = 0$.

Доказ. Доказ се може наћи у [2]. □

У раду [1] аутори су разматрали проблем проналажења расподеле вероватноћа избора стандардних купона, за коју је време чекања до комплетирања колекције минимално. Показано је да се то постиже ако је у питању равномерна расподела. Тај резултат је прецизно формулисан у теореми 2.4.

Дефиниција 2.1. *Кажемо да је случајна величина X стохастички мања од случајне величине Y (ознака: $X \leq_{st} Y$) ако важи $P\{X > t\} \leq P\{Y > t\}$ за све реалне бројеве t.*

Теорема 2.4. *Нека је $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in (0,1)^n$ вектор вероватноћа избора стандардних купона из скупа $\mathbb{N}_n$ и нека је $p_N > 0$ вероватноћа избора нултог купона тако да важи $\sum_{j=1}^{n} p_j + p_N = 1$, тада за свако $n \geq 1$ и свако $c = 1, \dots, n$, важе релације:*

$$W_{n,c}^{(N)}(\mathbf{p}) \geq_{st} W_{n,c}^{(N)}(\mathbf{v}) \geq_{st} W_{n,c}^{(N)}(\mathbf{u}),$$

где су $\mathbf{v} = \left(\frac{1-p_N}{n}, \dots, \frac{1-p_N}{n}\right)$, $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

Доказ. Доказ се може наћи у [1]. □

Услови који се односе на вероватноћу избора нултог купона под којим постоји гранична расподела максимума одређени су у раду [46].

Глава 3

Проблем сакупљања купона са универзалним купоном

Уопштење проблема сакупљања купона, које је разматрано у овом поглављу може се описати на следећи начин: Претпоставимо да скуп расположивих купона осим стандардних купона из скупа $\mathbb{N}_n$, садржи и нулти купон који не припада колекцији и успорава сакупљање колекције, као и универзални купон (тзв. џокер) који може да замени било који купон из скупа $\mathbb{N}_n$, једанпут. Према томе, разматра се проширени скуп расположивих купона:

$$\mathbb{N}_n^{\star,\circ} = \{1, 2, \ldots, n, \star, \circ\}, \tag{3.1}$$

где $\star$ означава универзални купон и $\circ$ означава нулти купон. Претпоставимо да се купони извлаче са враћањем, да купон $k \in \mathbb{N}_n$ може бити изабран са вероватноћом p_k, да универзални купон може бити изабран са вероватноћом p_U и нулти купон може бити изабран са вероватноћом p_N, где су $p_N, p_U < 1$ и важи $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k + p_N + p_U = 1$.

Посматрамо случајну величину $W_{n,c}$, која представља време чекања потребно да се сакупи потколекција од c различитих купона из скупа $\mathbb{N}_n$, $1 \leq c \leq n$, где неки или сви купони могу бити замењени универзалним купоном. Другим речима, посматрамо време чекања дефинисано са:

$$W_{n,c} = \inf\{t \in \mathbb{N} | Y_t + Z_t = c\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq c \leq n, \tag{3.2}$$

где су Y_t и Z_t број различитих стандардних купона и број универзалних купона, редом, изабраних након t јединица времена.

Уопштење проблема сакупљања купона са универзалним купоном разматрано је у радовима [24], [26] и [27].

У наредној теореми одређена је функција расподеле, први и други моменат случајне величине $W_{n,c}$, коришћењем познатих резултата који се односе на проблем сакупљања купона са нултим купоном.

Теорема 3.1. *За време чекања $W_{n,c}$, $1 \leq c \leq n$ важе следеће једнакости:*
1.

$$P\{W_{n,c} > t\} = \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \sum_{\substack{K \subset \mathbb{N}_n, \\ |K|=k}} (P_K + p_N)^{t-i}, \quad (3.3)$$

за $t \geq 0$,
2.

$$E(W_{n,c}) = \sum_{i=0}^{c-1} p_U^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \sum_{\substack{K \subset \mathbb{N}_n, \\ |K|=k}} \frac{1}{(1 - P_K - p_N)^{i+1}}, \quad (3.4)$$

3.

$$E(W_{n,c}^2) = \sum_{i=0}^{c-1} p_U^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \sum_{\substack{K \subset \mathbb{N}_n, \\ |K|=k}} \frac{2i + 1 + P_K + p_N}{(1 - P_K - p_N)^{i+2}}, \quad (3.5)$$

где је $P_K = \sum\limits_{k \in K} p_k$.

Доказ. 1. Време чекања $W_{n,c}$ се може записати као (3.2), па важе једнакости:

$$\begin{aligned} P\{W_{n,c} > t\} &= P\{Y_t + Z_t \leq c-1\} \\ &= \sum_{i=0}^{c-1} P\{Z_t = i\} P\{Y_t + Z_t \leq c-1 | Z_t = i\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Израз $P\{Y_t + Z_t \leq c-1 | Z_t = i\}$ представља вероватноћу да је укупан број добијених различитих стандардних и универзалних купона у t извлачења највише $c-1$ ако је у тих t извлачења било тачно i универзалних купона и једнак је условној вероватноћи да је у преосталих $t-i$ извлачења било највише $c-1-i$ различитих стандардних купона ако се у тих $t-i$ извлачења није појавио ниједан универзални купон. Дакле, за посматрано време чекања $W_{n,c}$ важи:

$$\begin{aligned} P\{W_{n,c} > t\} &= \sum_{i=0}^{c-1} P\{Z_t = i\} P\{Y_{t-i} \leq c-1-i | Z_{t-i} = 0\} \\ &= \sum_{i=0}^{c-1} P\{Z_t = i\} \frac{P\{Y_{t-i} \leq c-1-i, Z_{t-i} = 0\}}{P\{Z_{t-i} = 0\}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Вероватноћа $P\{Y_{t-i} \leq c-1-i, Z_{t-i} = 0\}$ представља вероватноћу добијања највише $c-1-i$ стандардних купона у тачно $t-i$ извлачења (при чему може бити извучен и нулти купон), која је дата у теореми 2.3, односно важи једнакост:

$$P\{Y_{t-i} \leq c-1-i, Z_{t-i} = 0\} = P\left\{W_{n,c-i}^{(N)} > t-i\right\},$$

где је вероватноћа за време чекања $W_{n,c}^{(N)}$ дата у теореми 2.3. Заменом добијамо да је:

$$P\{W_{n,c} > t\} = \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} {p_U}^i (1-p_U)^{t-i} \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-1-k} \binom{n-k-1}{n-c+i} \sum_{\substack{K \subset \mathbb{N}_n, \\ |K|=k}} \left(\frac{P_K + p_N}{1-p_U}\right)^{t-i},$$

одакле следи тражена једнакост.

2. Средње време чекања $W_{n,c}$ може се представити као:

$$\begin{aligned} E(W_{n,c}) &= \sum_{t=0}^{+\infty} P\{W_{n,c} > t\} \\ &= \sum_{i=0}^{c-1} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \sum_{\substack{K \subset \mathbb{N}_n, \\ |K|=k}} \sum_{t=0}^{+\infty} \binom{t}{i} (P_K + p_N)^{t-i}. \end{aligned}$$

Тражена једнакост следи из једнакости (1.3).

3. Други моменат времена чекања $W_{n,c}$ може се представити као:

$$E({W_{n,c}}^2) = \sum_{t=0}^{+\infty} P\{W_{n,c} > t\} + 2 \sum_{t=0}^{+\infty} t P\{W_{n,c} > t\}. \tag{3.8}$$

Једнакост (3.5) добија се из једнакости (3.4) и (1.4). □

Напомена 3.1. *Познато је да једнакост $P\{W_{n,c} \geq t\} = 1$ важи за свако t такво да је $0 \leq t \leq c-1$. Заменом израза за вероватноћу који је дат у* *теореми 3.1 добијају се следећи комбинаторни идентитети:*

$$\sum_{i=0}^{c-1}\binom{t}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-1}(-1)^{c-i-k-1}\binom{n-k-1}{n-c+i}\sum_{\substack{K\subset\mathbb{N}_n,\\ |K|=k}}(P_K+p_N)^{t-i}=1, \tag{3.9}$$

што важи за свако $n\in\mathbb{N}$, $1\leq c\leq n$, $0\leq t\leq c-1$, $0\leq p_N,p_U<1$, $0\leq p_1,\ldots,p_n<1$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{n}p_j+p_N+p_U=1$.

3.1 Приступ преко ланаца Маркова

У овом поглављу претпоставимо да се сви стандардни купони из скупа $\mathbb{N}_n$ бирају са истом вероватноћом p, где је $p=\frac{1-p_U-p_N}{n}$, што ће омогућити да изведемо расподелу, први и други моменат случајне величине $W_{n,c}$, али и неке нове резултате коришћењем техника Марковљевих ланаца.

Нека је $X_t=(Y_t,Z_t)$, где је Y_t број различитих стандардних купона и Z_t број универзалних купона, редом, изабраних након t јединица времена. Тада је $\{X_t,t\in\mathbb{N}\}$ Марковљев ланац са простором стања

$$S=\bigcup_{i=0}^{n-1}T_{n-1-i}\cup A, \tag{3.10}$$

где су

$$T_{n-1-i}=\{(0,i),(1,i),\ldots,(n-1-i,i)\},\quad i\in\{0,1,\ldots,n-1\}, \tag{3.11}$$

скупови пролазних стања и

$$A=\{(n-a,a)\},\quad a\in\{0,1,\ldots,n\}, \tag{3.12}$$

је скуп апсорбујућих стања. Према томе, $|S|=n(n+1)/2+n+1$.

У овом случају матрица вероватноћа прелаза за један корак једнака је:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}_{\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}} & \mathbf{R}_{\frac{n(n+1)}{2}\times(n+1)}\\ \mathbf{0}_{(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}} & \mathbf{I}_{(n+1)\times(n+1)}\end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

где матрица $\mathbf{Q}$ садржи прелазе између пролазних стања и може се представити на следећи начин:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} T_{n-1} & T_{n-2} & T_{n-3} & T_{n-4} & \dots & T_1 & T_0 \end{array} \\ \begin{array}{c} T_{n-1} \\ T_{n-2} \\ T_{n-3} \\ \vdots \\ T_1 \\ T_0 \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{n-2} & \mathbf{B}_{n-2} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{n-3} & \mathbf{B}_{n-3} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.14}$$

Матрица $\mathbf{A}_k$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ садржи вероватноће прелаза између стања T_k. Вероватноће тих прелаза су:

$$p_{(i,n-1-k),(j,n-1-k)} = \begin{cases} p_N + ip, & i = j; \\ 1 - p_N - p_U - ip, & j = i + 1; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Према томе, матрица $\mathbf{A}_k$ има облик:

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} p_N & np & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_N + p & (n-1)p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_N + 2p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_N + (k-1)p & (n-k+1)p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_N + kp \end{pmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}. \tag{3.16}$$

Матрица $\mathbf{B}_k$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, садржи вероватноће прелазе из стања T_k у стања T_{k-1}. Вероватноће тих прелаза су:

$$p_{(i,n-1-k),(j,n-k)} = \begin{cases} p_U, & i = j; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{3.17}$$

и матрица има облик:

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} p_U \mathbf{I}_{k\times k} \\ \mathbf{0}_{1\times k} \end{pmatrix}_{(k+1)\times k}. \tag{3.18}$$

Матрица $\mathbf{R}$ садржи вероватноће прелаза из пролазних у апсорбујућа стања и може се представити на следећи начин:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{n-1} \\ \mathbf{R}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_0 \end{pmatrix}_{\frac{n(n+1)}{2}\times(n+1)}, \ \mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k\times(n-k-1)} & \mathbf{0}_{k\times 1} & \mathbf{0}_{k\times 1} & \mathbf{0}_{k\times k} \\ \mathbf{0}_{1\times(n-k-1)} & (n-k)p & p_U & \mathbf{0}_{1\times k} \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Облик матрице $\mathbf{R}_k$ следи из једнакости:

$$p_{(i,n-1-i),(j,m)} = \begin{cases} p_U, & j=i, m=n-i; \\ (n-k)p & i=k, j=k+1, m=n-1-k; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.20}$$

Неке особине матрица $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}_k$ које ће бити потребне у наставку дате су у наредне две леме.

Лема 3.1. *1. За матрице $\mathbf{B}_k$, $k \in \{2,\dots,n-1\}$ важи следећа једнакост:*

$$\mathbf{B}_{k+1}\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} p_U^2 \mathbf{I}_{k\times k} \\ \mathbf{0}_{2\times k} \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

2. За матрице $\mathbf{A}_k$, $k \in \{1,\dots,n-1\}$ важе следеће једнакости:

$$\mathbf{A}_k{}^s\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_k\mathbf{A}_{k-1}{}^s = \begin{pmatrix} p_U\mathbf{A}_{k-1}{}^s \\ \mathbf{0}_{1\times k} \end{pmatrix}, s \in \mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Доказ. Обе једнакости се добијају множењем одговарајућих блок матрица. $\square$

Лема 3.2. *1. Елемент у m-том реду и j-тој колони матрице $\mathbf{A}_k{}^s$, где је $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $m,j \in \{1,2,\dots,k+1\}$, $s \in \mathbb{N}$ једнак је:*

$$((\mathbf{A}_k)^s)_{m,j} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{j-1+i} \binom{n-m+1}{i-m+1} \binom{n-i}{j-1-i} (p_N + ip)^s. \tag{3.23}$$

2. Елемент у m-том реду и j-тој колони матрице $(\mathbf{I}-\mathbf{A}_k)^{-s}$, где је $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $m,j \in \{1,2,\dots,k+1\}$, $s \in \mathbb{N}$ једнак је:

$$\left((\mathbf{I}-\mathbf{A}_k)^{-s}\right)_{m,j} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{j-1+i} \binom{n-m+1}{i-m+1} \binom{n-i}{j-1-i} \frac{1}{(1-p_N-ip)^s}. \tag{3.24}$$

Напомена 3.2. *Ради једноставности, уместо да се мењају границе сума, дефинишимо:*

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ ако је } k < 0. \tag{3.25}$$

Доказ. 1. Матрица $\mathbf{A}_k$ је горње троугаона, према томе њене сопствене вредности једнаке су елементима главне дијагонале:

$$\mu_i = p_N + ip, \quad i \in \{0, 1, \ldots, k\}. \tag{3.26}$$

Одређивањем сопствених вектора матрице $\mathbf{A}_k$ добија се да се матрица $\mathbf{A}_k^s$ може представити као:

$$\mathbf{A}_k^s = \mathbf{M}_k \mathbf{G}_k^s \mathbf{M}_k^{-1}, \tag{3.27}$$

где је

$$\mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_k \end{pmatrix}.$$

Елементи m-тог реда и j-те колоне матрица $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{M}_k^{-1}$ дати су са:

$$(\mathbf{M}_k)_{m,j} = \begin{cases} \binom{n-m+1}{j-m}, & m \leq j; \\ 0, & m > j, \end{cases} \text{ и } \left(\mathbf{M}_k^{-1}\right)_{m,j} = \begin{cases} (-1)^{m+j}\binom{n-m+1}{j-m}, & m \leq j; \\ 0, & m > j, \end{cases} \tag{3.28}$$

редом. Множењем матрица у (3.27) долазимо до једнакости (3.23).
2. Слично као (3.27) имамо да је:

$$\mathbf{I} - \mathbf{A}_k = \mathbf{M}_k(\mathbf{I} - \mathbf{G}_k)\mathbf{M}_k^{-1}, \tag{3.29}$$

односно,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}_k)^{-s} = \mathbf{M}_k(\mathbf{I} - \mathbf{G}_k)^{-s}\mathbf{M}_k^{-1}, \tag{3.30}$$

одакле следи тражена једнакост. □

3.2 Матрица вероватноћа прелаза за $k \geq 1$ корака и фундаментална матрица

У наредне две теореме одређена је матрица вероватноћа прелаза за k корака $\mathbf{Q_n}^k$, као и фундаментална матрица $\mathbf{F}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_n)^{-1}$ за ланац Маркова уведен у поглављу 3.1. За добијање тих резултата су коришћене су технике Марковљевих ланаца уведене у поглављу 1.2.

Теорема 3.2. *За $k \geq 1$ важи следећа једнакост:*

$$\mathbf{Q}_n^k = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{n-1}^{(k,0)} & \mathbf{D}_{n-2}^{(k,1)} & \mathbf{D}_{n-3}^{(k,2)} & \dots & \mathbf{D}_1^{(k,n-2)} & \mathbf{D}_0^{(k,n-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{n-2}^{(k,0)} & \mathbf{D}_{n-3}^{(k,1)} & \dots & \mathbf{D}_1^{(k,n-3)} & \mathbf{D}_0^{(k,n-2)} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_1^{(k,0)} & \mathbf{D}_0^{(k,1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{D}_0^{(k,0)} \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

īде је

$$\mathbf{D}_i^{(k,j)} = \begin{pmatrix} \binom{k}{j} p_U^j \mathbf{A}_i^{k-j} \\ \mathbf{0}_{j\times(i+1)} \end{pmatrix}_{(i+j+1)\times(i+1)} \tag{3.32}$$

блок који садржи вероваīноће свих īрелаза у k корака из скуīа сīања T_{i+j} у скуī сīања T_i.

Доказ. Теорему ћемо доказати користећи математичку индукцију по степену матрице k. За $k = 1$ једноставно се проверава да важи једнакост (3.14). Даље, претпоставимо да једнакост (3.14) важи за степен $k-1$, и докажимо да важи за степен k. Имамо да је $\mathbf{Q}_n^k = \mathbf{Q}_n^{k-1} \cdot \mathbf{Q}_n$. Са друге стране, матрица $\mathbf{Q}_n^k$ се може записати као блок матрица на следећи начин:

$$\mathbf{Q}_n^k = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{V}_{1,3} & \dots & \mathbf{V}_{1,n-1} & \mathbf{V}_{1,n} \\ \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{V}_{2,3} & \dots & \mathbf{V}_{2,n-1} & \mathbf{V}_{2,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathbf{V}_{n-1,1} & \mathbf{V}_{n-1,2} & \mathbf{V}_{n-1,3} & \dots & \mathbf{V}_{n-1,n-1} & \mathbf{V}_{n-1,n} \\ \mathbf{V}_{n,1} & \mathbf{V}_{n,2} & \mathbf{V}_{n,3} & \dots & \mathbf{V}_{n,n-1} & \mathbf{V}_{n,n} \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

где је $\mathbf{V}_{i,j}$ матрица димензије $(n-i+1) \times (n-j+1)$. Множењем матрица и коришћењем индукцијске претпоставке добијамо:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{i,j} &= \begin{cases} \mathbf{0}, & j < i; \\ \mathbf{D}_{n-i}^{(k-1,0)} \mathbf{A}_{n-i}, & j = i; \\ \mathbf{D}_{n-j+1}^{(k-1,j-i-1)} \mathbf{B}_{n-j+1} + \mathbf{D}_{n-j}^{(k-1,j-i)} \mathbf{A}_{n-j}, & j > i \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbf{0}, & j < i; \\ \mathbf{A}_{n-i}^{k-1} \mathbf{A}_{n-i}, & j = i; \\ \begin{pmatrix} \binom{k-1}{j-i-1} p_U^{j-i-1} \mathbf{A}_{n-j+1}^{k-j+i} \\ \mathbf{0}_{(j-i-1)\times(n-j+2)} \end{pmatrix} \mathbf{B}_{n-j+1} + \begin{pmatrix} \binom{k-1}{j-i} p_U^{j-i} \mathbf{A}_{n-j}^{k-j+i-1} \\ \mathbf{0}_{(j-i)\times(n-j+1)} \end{pmatrix} \mathbf{A}_{n-j}, & j > i. \end{cases} \end{aligned}$$

За $j > i$, из леме 3.1 следи:

$$\mathbf{A}_{n-j+1}^{k-j+i}\mathbf{B}_{n-j+1} = \begin{pmatrix} p_U \mathbf{A}_{n-j}^{k-j+i} \\ \mathbf{0}_{1\times(n-j+1)} \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

а важи и једнакост:

$$\mathbf{0}_{(j-i-1)\times(n-j+2)}\mathbf{B}_{n-j+1} = \mathbf{0}_{(j-i-1)\times(n-j+1)}. \tag{3.35}$$

Коначно, из једнакости (3.34), (3.34) и (3.35), добијамо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{i,j} &= \begin{cases} \mathbf{0}, & j < i; \\ \mathbf{A}_{n-i}^{k}, & j = i; \\ \begin{pmatrix} \binom{k-1}{j-i-1} p_U^{j-i} \mathbf{A}_{n-j}^{k-j+i} \\ \mathbf{0}_{(j-i)\times(n-j+1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \binom{k-1}{j-i} p_U^{j-i} \mathbf{A}_{n-j}^{k-j+i} \\ \mathbf{0}_{(j-i)\times(n-j+1)} \end{pmatrix}, & j > i \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathbf{0}, & j < i; \\ \mathbf{A}_{n-i}^{k}, & j = i; \\ \begin{pmatrix} \binom{k}{j-i} p_U^{j-i} \mathbf{A}_{n-j}^{k-j+i} \\ \mathbf{0}_{(j-i)\times(n-j+1)} \end{pmatrix}, & j > i \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathbf{0}, & j < i; \\ \mathbf{D}_{n-j}^{(k,j-i)}, & j \geq i, \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

чиме је теорема доказана. □

Теорема 3.3. *Фундаментална матрица* $\mathbf{F}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_n)^{-1}$ *може се представити на следећи начин:*

$$\mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{n-1}^{(0)} & \mathbf{C}_{n-2}^{(1)} & \mathbf{C}_{n-3}^{(2)} & \dots & \mathbf{C}_{1}^{(n-2)} & \mathbf{C}_{0}^{(n-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{n-2}^{(0)} & \mathbf{C}_{n-3}^{(1)} & \dots & \mathbf{C}_{1}^{(n-3)} & \mathbf{C}_{0}^{(n-2)} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{1}^{(0)} & \mathbf{C}_{0}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{0}^{(0)} \end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

где блок

$$\mathbf{C}_i^{(j)} = \begin{pmatrix} p_U^j (\mathbf{I} - \mathbf{A}_i)^{-(j+1)} \\ \mathbf{0}_{j\times(i+1)} \end{pmatrix}_{(i+j+1)\times(i+1)} \tag{3.38}$$

садржи вероватноће свих путања из скупа стања T_{i+j} *у скуп стања* T_i.

Доказ. Користећи релацију:

$$\mathbf{F}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}_n^k \tag{3.39}$$

и теорему 3.2, матрица $\mathbf{F}_n$ се може представити као блок матрица на следећи начин:

$$\mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{1,1} & \mathbf{U}_{1,2} & \mathbf{U}_{1,3} & \dots & \mathbf{U}_{1,n-1} & \mathbf{U}_{1,n} \\ \mathbf{U}_{2,1} & \mathbf{U}_{2,2} & \mathbf{U}_{2,3} & \dots & \mathbf{U}_{2,n-1} & \mathbf{U}_{2,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathbf{U}_{n-1,1} & \mathbf{U}_{n-1,2} & \mathbf{U}_{n-1,3} & \dots & \mathbf{U}_{n-1,n-1} & \mathbf{U}_{n-1,n} \\ \mathbf{U}_{n,1} & \mathbf{U}_{n,2} & \mathbf{U}_{n,3} & \dots & \mathbf{U}_{n,n-1} & \mathbf{U}_{n,n} \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

где је $\mathbf{U}_{i,j}$ блок димензије $(n-i+1) \times (n-j+1)$ који се може представити као:

$$\mathbf{U}_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{0}, & j < i; \\ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{D}_{n-j}^{(k,j-i)}, & j \geq i. \end{cases} \tag{3.41}$$

Резултат следи из једнакости која важи за $j \geq i$:

$$\sum_{k=j-i}^{\infty} \binom{k}{j-i} \mathbf{A}_{n-j}^{k-j+i} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{n-j})^{-(j-i+1)}. \tag{3.42}$$

□

3.3 Особине времена чекања $W_{n,n}$ и $W_{n,c}$

У овом поглављу на други начин је одређен израз за функцију расподеле и први и други моменат времена чекања $W_{n,n}$ и $W_{n,c}$ користећи резултате добијене у поглављу 3.2. Такође, приказани су додатни резултати карактеристични за проблем сакупљања купона са универзалним купоном.

Теорема 3.4. *1. За време чекања $W_{n,n}$ за свако $t \geq 0$ важи следећа једнакост:*

$$P\{W_{n,n} > t\} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{n-i-1} (-1)^{n-i-k-1} \binom{n-k-1}{i} \binom{n}{k} (kp+p_N)^{t-i}. \tag{3.43}$$

2. За време чекања $W_{n,c}$, $1 \leq c \leq n$, за свако $t \geq 0$, важи следећа једнакост:

$$P\{W_{n,c} > t\} = \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \binom{n}{k} (kp+p_N)^{t-i}. \tag{3.44}$$

Доказ. 1. Вероватноћа $P\{W_{n,n} > t\}$ представља вероватноћу да полазећи из стања $(0,0)$, Марковљев ланац (дефинисан у поглављу 3.1) након t корака остане у неком од пролазних стања. Према томе, вероватноћа $P\{W_{n,n} > t\}$ је једнака суми првог реда матрице $\mathbf{Q}^t$, тј. важи једнакост:

$$P\{W_{n,n} > t\} = S_1\left(\mathbf{Q}^t\right) = \sum_{i=0}^{n-1} S_1\left(\mathbf{D}_{n-1-i}^{(t,i)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{t}{i} p_U^i S_1\left(\mathbf{A}_{n-1-i}{}^{t-i}\right). \quad (3.45)$$

Из леме 3.2 следи да је елемент у m-том реду и j-тој колони матрице $\mathbf{A}_{n-1-i}{}^{t-i}$ једнак:

$$\left(\mathbf{A}_{n-1-i}{}^{t-i}\right)_{m,j} = \sum_{s=0}^{n-i-1} (-1)^{j-1+s} \binom{n-m+1}{s-m+1} \binom{n-s}{j-1-s} \mu_s^{t-i}, \quad (3.46)$$

где је $\mu_s = p_N + sp$.

Користећи једнакости (3.46), (3.25) и (1.2) добијамо:

$$\begin{aligned} S_1\left(\mathbf{A}_{n-1-i}{}^{t-i}\right) &= \sum_{j=1}^{n-i} \sum_{s=0}^{n-i-1} \binom{n}{s} \mu_s^{t-i} (-1)^{j-1+s} \binom{n-s}{j-1-s} \\ &= \sum_{s=0}^{n-i-1} (-1)^{n-i-1+s} \binom{n}{s} \binom{n-s-1}{i} \mu_s^{t-i}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Коначно, заменом (3.47) у једнакост (3.45) добија се:

$$P\{W_{n,n} > t\} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{t}{i} p_U^i \sum_{s=0}^{n-i-1} (-1)^{n-i-1+s} \binom{n}{s} \binom{n-s-1}{i} (p_N + sp)^{t-i}. \quad (3.48)$$

2. Доказ се добија једноставном модификацијом доказа првог дела теореме. Дефинишимо матрицу колоне $\mathbf{H}_c$ као:

$$\mathbf{H}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{c\times 1} \\ \mathbf{0}_{(n-c)\times 1} \\ \mathbf{1}_{(c-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{(n-c)\times 1} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{1\times 1} \\ \mathbf{0}_{(n-c)\times 1} \\ \mathbf{0}_{\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{c(2n-c+1)}{2}\right)\times 1} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Приметимо да ако је $i+j > k+l$, прелаз из стања (i,j) у стање (k,l) није могуће. Према томе, матрица вероватноћа прелаза (3.13) може се трансформисати на следећи начин:

$$\mathbf{P}^{(c)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{(c)} & \mathbf{R}^{(c)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{3.50}$$

где матрица $\mathbf{Q}^{(c)}$ описује прелазе између стања

$$T^{(c)} = \{(i,j), i+j \leq c-1\}. \tag{3.51}$$

У овом случају, збир произвољног реда матрице $\left(\mathbf{Q}^{(c)}\right)^t$ једнак је елементу у истом реду матрице $\mathbf{Q}^t\mathbf{H}_c$, за свако $t \in \mathbb{N}$, јер множење са матрицом $\mathbf{H}_c$ поништава (поставља на нулу) све вероватноће прелаза у стања из скупа $S \setminus T^{(c)}$.

Вероватноћа $P\{W_{n,c} > t\}$ једнака је вероватноћи да полазећи из стања $(0,0)$, ланац након t корака још увек буде у неком од стања из скупа $T^{(c)}$. Према томе, вероватноћа $P\{W_{n,c} > t\}$ се добија као сума првог реда матрице $\mathbf{Q}^{(c)}$, односно важи:

$$\begin{aligned} P\{W_{n,c} > t\} &= S_1\left(\left(\mathbf{Q}^{(c)}\right)^t\right) = S_1\left(\mathbf{Q}^t\mathbf{H}_c\right) \\ &= \sum_{i=0}^{c-1} S_1^{(c-i)}\left(\mathbf{D}_{n-1-i}{}^{(t,i)}\right) = \sum_{i=0}^{c-1}\binom{t}{i} p_U^i S_1^{(c-i)}\left(\mathbf{A}_{n-1-i}{}^{t-i}\right). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Користећи (3.46),(3.25), и релацију (1.2), добијамо:

$$\begin{aligned} S_1^{(c-i)}\left(\mathbf{A}_{n-1-i}{}^{t-i}\right) &= \sum_{j=1}^{c-i}\sum_{s=0}^{n-i-1}\binom{n}{s}\mu_s^{t-i}(-1)^{j-1+s}\binom{n-s}{j-1-s} \\ &= \sum_{s=0}^{c-i-1}(-1)^{c-i-1+s}\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{n-c+i}\mu_s^{t-i}, \end{aligned} \tag{3.53}$$

где је $\mu_s = p_N + sp$. Према томе,

$$P\{W_{n,c} > t\} = \sum_{i=0}^{c-1}\binom{t}{i} p_U^i \sum_{s=0}^{c-i-1}(-1)^{c-i-1+s}\binom{n}{s}\binom{n-s-1}{n-c+i}(p_N+sp)^{t-i}. \tag{3.54}$$

□

Одговарајући резултати који се односе на време чекања $W_{n,n}$ теореме 3.1, могу се добити заменом $c = n$. Очекивано време чекања потребно да се сакупи цела колекција купона, може се записати на једноставнији начин и дато је у наредној последици.

Последица 3.1. *За време чекања $W_{n,n}$ важе следеће једнакости:*

1.
$$E(W_{n,n}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(kp)^{k-1}}{(kp+p_U)^k}, \tag{3.55}$$

2.
$$\begin{aligned} E(W_{n,n}^2) &= 2p_U\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-2}\binom{n}{k}\frac{(k-1)(kp)^{k-2}}{(kp+p_U)^{k+1}} \\ &+ 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(kp)^{k-1}}{(kp+p_U)^{k+1}} - E(W_{n,n}). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Доказ. 1. Релација следи из низа једнакости:

$$\begin{aligned} E(W_{n,n}) &= \sum_{i=0}^{n-1}{p_U}^i\sum_{k=0}^{n-i-1}(-1)^{n-i-1-k}\binom{n-k-1}{i}\binom{n}{k}\frac{1}{(1-p_N-kp)^{i+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k-1}(-1)^i\binom{n-k-1}{i}\frac{{p_U}^i}{(1-p_N-kp)^{i+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{(n-k)p+p_U}\left(\frac{(n-k)p}{(n-k)p+p_U}\right)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{kp+p_U}\left(\frac{kp}{kp+p_U}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(kp)^{k-1}}{(kp+p_U)^k}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

2. Из једнакости (3.5) имамо:

$$E(W_{n,n}^2) = 2\sum_{i=0}^{n-1}{p_U}^i\sum_{k=0}^{n-i-1}(-1)^{n-i-1-k}\binom{n-k-1}{i}\binom{n}{k}\frac{i+1}{(1-p_N-kp)^{i+2}} - E(W_{n,n}). \tag{3.58}$$

Из низа једнакости:

$$\sum_{i=0}^{n-1}{p_U}^i\sum_{k=0}^{n-i-1}(-1)^{n-i-1-k}\binom{n-k-1}{i}\binom{n}{k}\frac{i+1}{(1-p_N-kp)^{i+2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k-1} (-1)^{n-i-1-k} \binom{n-k-1}{i} {p_U}^i \frac{i+1}{(1-p_N-kp)^{i+2}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{i=1}^{n-k-1} (-1)^{n-i-1-k} \binom{n-k-1}{i} {p_U}^i \frac{i}{(1-p_N-kp)^{i+2}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k-1} (-1)^{n-i-1-k} \binom{n-k-1}{i} {p_U}^i \frac{1}{(1-p_N-kp)^{i+2}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k-2} (-1)^{n-i-2-k} \binom{n-k-2}{i} {p_U}^{i+1} \frac{n-k-1}{(1-p_N-kp)^{i+3}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k-1} (-1)^{n-i-1-k} \binom{n-k-1}{i} {p_U}^i \frac{1}{(1-p_N-kp)^{i+2}} \\
&= p_U \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-2} \frac{n-k-1}{(1-p_N-kp)^3} \left(1 - \frac{p_U}{1-p_N-kp}\right)^{n-k-2} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} \frac{1}{(1-p_N-kp)^2} \left(1 - \frac{p_U}{1-p_N-kp}\right)^{n-k-1} \\
&= p_U \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-2} \frac{n-k-1}{((n-k)p+p_U)^3} \left(\frac{(n-k)p}{(n-k)p+p_U}\right)^{n-k-2} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} \frac{1}{((n-k)p+p_U)^2} \left(\frac{(n-k)p}{(n-k)p+p_U}\right)^{n-k-1} \\
&= p_U \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-2} \frac{k-1}{(kp+p_U)^3} \left(\frac{kp}{kp+p_U}\right)^{k-2} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \frac{1}{(kp+p_U)^2} \left(\frac{kp}{kp+p_U}\right)^{k-1} \\
&= p_U \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2} \binom{n}{k} (k-1) \frac{(kp)^{k-2}}{(kp+p_U)^{k+1}} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(kp)^{k-1}}{(kp+p_U)^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{kp-(k-1)p_U}{k^3p^3} \left(\frac{kp}{kp+p_U}\right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (kp-(k-1)p_U) \frac{(kp)^{k-2}}{(kp+p_U)^{k+1}},
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

добија се тражена једнакост. □

Напомена 3.3. *Ако се замени $p_N = p_U = 0$ у (3.4), добија се очекивано време чекања потребно да се сакупи потколекција дужине c за стандардни проблем* *сакуӣљања куӣона које ћемо означиӣи са* $E(W_{n,c}^{(0)})$:

$$E(W_{n,c}^{(0)}) = \sum_{k=0}^{c-1} (-1)^{c-1-k} \binom{n-k-1}{n-c} \binom{n}{k} \frac{n}{n-k}. \tag{3.60}$$

Једносӣавно се ӣроверава да $r_{n,c} = \frac{E(W_{n,c}^{(0)})}{n}$ *задовољава следећу рекуренӣну формулу:*

$$r_{n,c} = \frac{1}{n} + r_{n-1,c-1}, \text{ за } 1 \leq c \leq n, \text{ и } r_{n-c+1,1} = \frac{1}{n-c+1}. \tag{3.61}$$

Решавањем рекурзије (3.61) долази се до ӣознаӣе формуле:

$$E(W_{n,c}^{(0)}) = n(H_n - H_{n-c}), \tag{3.62}$$

ӣде је H_n n*-ӣи хармонијски број дефинисан као:*

$$H_0 = 1, \quad H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}. \tag{3.63}$$

Користећи последицу 3.1, може се добити једноставна горња граница за очекивано време чекања $E(W_{n,n})$.

Последица 3.2. *За очекивано време чекања* $E(W_{n,n})$ *важи следећа неједнакосӣ:*

$$E(W_{n,n}) \leq \frac{1}{2p} \left(2^n + \frac{1}{n} - \frac{p}{p+p_U} \right). \tag{3.64}$$

Доказ. Користећи неједнакости:

$$\frac{1}{np} \left(\frac{p}{p+p_U} \right)^k \leq \frac{(kp)^{k-1}}{(kp+p_U)^k} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{np}{np+p_U} \right)^k, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{3.65}$$

добијамо:

$$\begin{aligned}
E(W_{n,n}) &= \sum_{1 \leq 2k-1 \leq n} \binom{n}{2k-1} \frac{((2k-1)p)^{2k-2}}{((2k-1)p+p_U)^{2k-1}} - \sum_{2 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \frac{(2kp)^{2k-1}}{(2kp+p_U)^{2k}} \\
&\leq \frac{1}{p} \sum_{1 \leq 2k-1 \leq n} \binom{n}{2k-1} \left(\frac{np}{np+p_U} \right)^{2k-1} - \frac{1}{np} \sum_{2 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \left(\frac{p}{p+p_U} \right)^{2k} \\
&= \frac{1}{2p} \left(\left(1 + \frac{np}{np+p_U} \right)^n - \left(1 - \frac{np}{np+p_U} \right)^n \right) \\
&- \frac{1}{np} \left(\frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{p}{p+p_U} \right)^n + \left(1 - \frac{p}{p+p_U} \right)^n \right) - 1 \right).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Користећи очигледне неједнакости:

$$\left(1+\frac{np}{np+p_U}\right)^n \le 2^n, \quad \left(1-\frac{np}{np+p_U}\right)^n \ge 0,$$
$$\left(1+\frac{p}{p+p_U}\right)^n \ge 1+\frac{np}{p+p_U}, \quad \left(1-\frac{p}{p+p_U}\right)^n \ge 0,$$

имамо:

$$E(W_{n,n}) \le \frac{1}{2p}\left(2^n - \frac{1}{n}\left(1+\frac{np}{p+p_U}-2\right)\right) = \frac{1}{2p}\left(2^n + \frac{1}{n} - \frac{p}{p+p_U}\right), \quad (3.67)$$

чиме је исказ доказан. □

Напомена 3.4. *У изразу (3.64) једнакост важи за* $p_U = 0$ *и* $n = 1$*, када се за четири неједнакости које се користе у доказу достиже једнакост.*

Напомена 3.5. *Резултати (3.4) и (3.5) из теореме 3.1 могу се добити на још један начин користећи фундаменталну матрицу из теореме 3.3 и чињеницу да је сума првог реда фундаменталне матрице једнака математичком очекивању* $E(W_{n,n})$*. Слична процедура може се применити за добијање дисперзије случајне величине* $W_{n,n}$ *([29]), као и одговарајућих резултата везаних за време чекања* $W_{n,c}$*.*

Комбинујући теорему 3.2 и теорему 3.3 са изразом (3.19), могу се добити резултати везани за тип сакупљених купона. У наставку је формулисан један такав резултат везан за време чекања $W_{n,n}$.

Теорема 3.5. *Ако је сакупљена цела колекција, вероватноћа да је тачно* m *купона из скупа* $\mathbb{N}_n$ *и* $n-m$ *универзалних купона изабрано, једнака је:*

$$p_{(m,n-m)} = \begin{cases} pS_0, & m = n; \\ (n-m+1)pS_{n-m} + p_U S_{n-m-1}, & m = 1, \dots n-1; \\ p_U S_{n-1}, & m = 0, \end{cases} \quad (3.68)$$

где је:

$$S_r = \sum_{i=0}^{n-r-1} (-1)^{n-r+i-1} \binom{n}{i} \binom{n-i}{r+1} \frac{p_U^r}{(1-p_N-ip)^{r+1}}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.69)$$

Доказ. Први ред матрице **FR** садржи вероватноће да ланац полазећи из стања $(0,0)$ заврши у апсорбујућем стању (видети теорему 1.4). Према томе, користећи (3.20), добијамо да је вероватноћа да је тачно m купона и тачно $n-m$ универзалних купона изабрано ако је цела колекција сакупљена, елемент првог реда и $(n-m+1)$-те колоне матрице $\mathbf{FR}$. Користећи израз за фундаменталну матрицу добијен у теореми 3.3 и облик матрице $\mathbf{R}$ из (3.19) имамо:

$$p_{(m,n-m)} = \begin{cases} p\left(\mathbf{C}_{n-1}^{(0)}\right)_{1,n}, & m=n; \\ (n-m+1)p\left(\mathbf{C}_{m-1}^{(n-m)}\right)_{1,m} + p_U\left(\mathbf{C}_{m}^{(n-1-m)}\right)_{1,m+1}, & m=1,\dots n-1; \\ p_U\left(\mathbf{C}_{0}^{(n-1)}\right)_{1,1}, & m=0. \end{cases} \tag{3.70}$$

Коначно користећи лему 3.2, добијамо:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{C}_{n-r-1}^{(r)}\right)_{1,n-r} &= \left(p_U^r\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{n-r-1}\right)^{-(r+1)}\right)_{1,n-r} \\ &= \sum_{i=0}^{n-r-1}(-1)^{n-r+i-1}\binom{n}{i}\binom{n-i}{r+1}\frac{p_U^r}{(1-p_N-ip)^{r+1}}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Коначно користећи идентитет:

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{r+1} = \binom{n}{r+1}\binom{n-r-1}{i}, \tag{3.72}$$

и једноставне трансформације сума следи доказ исказа.

□

Пример 3.1. *Нека је* $p_U = p_j = p = p_U = 1/(n+2)$, $j \in \mathbb{N}_n$. *Применом теореме 3.5 добијамо да је вероватноћа да су сви купони из скупа* $\mathbb{N}_n$ *изабрани пре универзалног купона једнака:*

$$\begin{aligned} pS_0 &= \frac{1}{n+2}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}(n-j)\binom{n}{j}\frac{1}{1-\frac{j+1}{n+2}} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}(n-j)\binom{n+1}{j} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Последња једнакост следи из једнакости (1.6).

Вероватноћа да је изабрано n универзалних купона пре првог стандардног купона из скупа $\mathbb{N}_n$ *једнака је:*

$$p_U S_{n-1} = \left(\frac{p_U}{1-p_N}\right)^n = \frac{1}{(n+1)^n}.$$

Нумерички пример

У наставку, представимо нумеричке резултате за проблем сакупљања купона са универзалним купоном. Ако је $n = 3$, у том случају скуп допустивих купона је $\mathbb{N}_3^{\star,\circ} = \{1, 2, 3, \star, \circ\}$. Претпоставимо да се универзални купон бира са вероватноћом $p_U = 1/8$ и да се нулти купон бира са вероватноћом $p_N = 1/8$. Тада се сваки од стандардних купона $k \in \mathbb{N}_3$ бира са вероватноћом $p = p_k = 1/4$. У том случају, матрица вероватноћа прелаза за један корак је

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (1,0) \\ (2,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \\ (0,2) \\ (3,0) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (0,3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} (0,0) & (1,0) & (2,0) & (0,1) & (1,1) & (0,2) & (3,0) & (2,1) & (1,2) & (0,3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.125 & 0.75 & 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.5 & 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.625 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0.75 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.375 & 0 & 0 & 0.5 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0.75 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

У наставку су представљени резултати из теорема 3.1 - 3.5 из поглавља 3.3 за различите комбинације вероватноћа p_N и p_U.

Табела 3.1: $P\{W_{3,1} \leq t\}$ за различите вредности t

t	$p_U = 0$, $p_N = 0$	$p_U = \frac{1}{8}$, $p_N = 0$	$p_U = 0$, $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$, $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{2}$, $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$, $p_N = \frac{1}{2}$
1	1	1	0.875	0.875	0.875	0.5
2	1	1	0.9844	0.9844	0.9844	0.75
3	1	1	0.9989	0.9989	0.9989	0.875
4	1	1	0.9997	0.9997	0.9997	0.93750
5	1	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.96875

Табела 3.2: $P\{W_{3,2} \leq t\}$ за различите вредности t

t	$p_U = 0$ $p_N = 0$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = 0$	$p_U = 0$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{2}$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = \frac{1}{2}$
1	0	0	0	0	0	0
2	0.6667	0.7448	0.5104	0.5781	0.7187	0.2031
3	0.8889	0.9256	0.7869	0.8398	0.9336	0.4238
4	0.963	0.9783	0.9101	0.9402	0.9849	0.6047
5	0.9876	0.9937	0.9624	0.9776	0.9965	0.7373

Табела 3.3: $P\{W_{3,3} \leq t\}$ за различите вредности t

t	$p_U = 0$ $p_N = 0$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = 0$	$p_U = 0$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{2}$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = \frac{1}{2}$
3	0.2222	0.3832	0.1489	0.2715	0.5586	0.0664
4	0.4444	0.6371	0.335	0.5227	0.8428	0.1814
5	0.6173	0.7901	0.5027	0.699	0.9477	0.3154
6	0.7407	0.8789	0.6368	0.8128	0.9829	0.4469
7	0.8258	0.93	0.7381	0.8841	0.9944	0.5641
8	0.8834	0.9594	0.8126	0.9282	0.9981	0.6626

Табела 3.4: $P\{W_{3,3} = t\}$ за различите вредности t

t	$p_U = 0$ $p_N = 0$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = 0$	$p_U = 0$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{2}$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = \frac{1}{2}$
3	0.2222	0.3832	0.1489	0.2715	0.5586	0.0664
4	0.2222	0.2539	0.1861	0.2512	0.2842	0.115
5	0.1728	0.153	0.1677	0.1763	0.1049	0.134
6	0.1234	0.0888	0.1341	0.1138	0.0352	0.1315
7	0.085	0.0511	0.1014	0.0712	0.0115	0.1172
8	0.0576	0.0294	0.0745	0.0441	0.0038	0.0985

Табела 3.5: Математичко очекивање времена чекања $W_{3,3}$

	$p_U = 0$ $p_N = 0$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = 0$	$p_U = 0$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{2}$ $p_N = \frac{1}{8}$	$p_U = \frac{1}{8}$ $p_N = \frac{1}{2}$
$E(W_{3,3})$	5.5	4.48	6.29	5	3.68	7.79

Представимо сада графички приказ очекиваног времена чекања $E(W_{n,n})$ за различите вредности параметра n и следеће комбинације вероватноћа p_N и p_U:

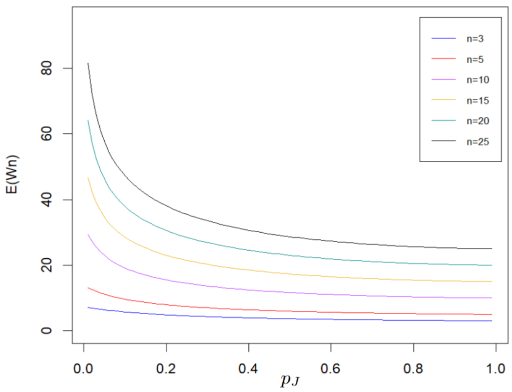
1. $p_U \in [0,1]$ и $p_N = p = \frac{1-p_U}{n+1}$;

2. $p_N \in [0,1]$ и $p_U = p = \frac{1-p_N}{n+1}$;

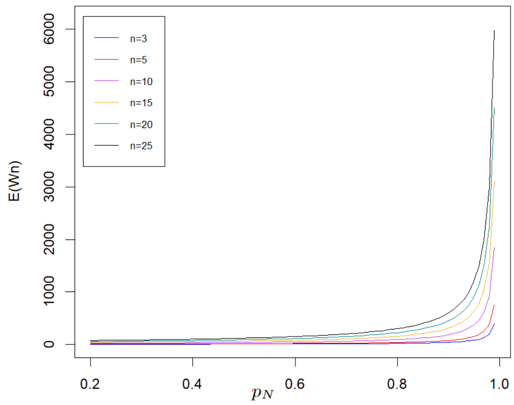
3. $p_N = p_U \in [0, 0.5]$.

Табела 3.6: Вероватноћа да је сакупљено тачно m стандардних купона и $3-m$ универзалних купона ако је сакупљена цела колекција

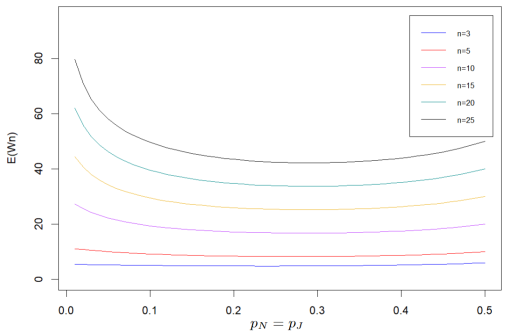
m	$p_U=0$ $p_N=0$	$p_U=\frac{1}{8}$ $p_N=0$	$p_U=0$ $p_N=\frac{1}{8}$	$p_U=\frac{1}{8}$ $p_N=\frac{1}{8}$	$p_U=\frac{1}{2}$ $p_N=\frac{1}{8}$	$p_U=\frac{1}{8}$ $p_N=\frac{1}{2}$
0	0	0.002	0	0.0029	0.1866	0.0156
1	0	0.0602	0	0.0763	0.4937	0.1927
2	0	0.4334	0	0.4637	0.2912	0.5417
3	1	0.5044	1	0.4571	0.0286	0.25



Слика 3.1: Очекивано време чекања $E(W_{n,n})$ у зависности од p_U, за различите вредности n, ако је $p_N = p = \frac{1-p_U}{n+1}$



Слика 3.2: Очекивано време чекања $E(W_{n,n})$ у зависности од p_N за различите вредности n, ако је $p_U = p = \frac{1-p_N}{n+1}$



Слика 3.3: Очекивано време чекања $E(W_{n,n})$ у зависности од $p_N = p_U$, за различите вредности n

Приметимо да понашање очекиваног времена чекања $E(W_{n,n})$, приказано на слици 3.1 и слици 3.2, је у складу са интуицијом коју имамо о проблему: очекивано врмене чекања $E(W_{n,n})$ расте када расте вероватноћа p_N (пошто нулти купони успоравају процес прикупљања и продужавају очекивано време чекања), а опада када вероватноћа p_U расте (пошто универзални купон убрзава процес прикупљања). Такође можемо приметити да се $E(W_{n,n})$ повећава када n расте, као што смо и очекивали.

Понашање $E(W_{n,n})$, као функције по $p_N = p_U$, приказано на слици 3.3 је много интригантније, јер сугерише да се минимално очекивано време чекања добија када је $p_N = p_U \approx 1/3$ у већини разматраних случајева.

3.4 Асимптотске особине времена чекања $W_{n,c}$

Анализа асимптотских особина времена чекања проблема сакупљања купона је стара, али још увек веома популарна област истраживања. Неки од радова у којима су разматране ове особине су [11], [12] [19], [21]. Разматрање времена чекања до комплетирања дела колекције, такође је од значаја због примене овог проблема у различитим научним областима ([2], [22], [30], [56]).

У овом поглављу прво су одређене рекурентне релације за први и други моменат случајне величине $W_{n,c}$, применом анализе првог корака Марковљевог ланца (видети [28]). Основна идеја ове технике се заснива на анализи свих могућих стања у које ланац може стићи након првог корака, а затим се применом закона потпуне вероватноће и марковског својства одређују односи између непознатих променљивих. Даље се рекурентне релације користе за добијање асимптотског понашања $E(W_{n,c})$, $E(W_{n,c}^2)$ и $D(W_{n,c})$, када $n \to \infty$.

Размотримо асимптотско понашање $E(W_{n,c})$, $E(W_{n,c}^2)$ и $D(W_{n,c})$, када $n \to \infty$, у четири карактеристична случаја:

Случај 1: вероватноће p_N и p_U су константне и $p = \frac{1-p_N-p_U}{n}$;

Случај 2: вероватноћа p_N је константна и $p_U = p = \frac{1-p_N}{n+1}$;

Случај 3: вероватноћа p_U је константна и $p_N = p = \frac{1-p_U}{n+1}$;

Случај 4: $p_N = p_U = p = \frac{1}{n+2}$.

У наставку поглавља време чекања $W_{n,c}$ ћемо означити са $W_{n,c}^{(p_N,p_U)}$, како бисмо нагласили да су вероватноће нултог и универзалног купона p_N и p_U, редом, јер ће се те вероватноће по потреби мењати.

Теорема 3.6. *За $0 \leq p_N, p_U < 1$, време чекања $W_{n,c}^{(p_N,p_U)}$ задовољава следеће рекурентне релације:*

1.

$$E\left(W_{n,c}^{(p_N,p_U)}\right) = \frac{1}{1-p_N} + \frac{p_U}{1-p_N} E\left(W_{n,c-1}^{(p_N,p_U)}\right) + \frac{1-p_N-p_U}{1-p_N} E\left(W_{n-1,c-1}^{(p+p_N,p_U)}\right), \quad (3.73)$$

2.

$$E\left(\left(W_{n,c}^{(p_N,p_U)}\right)^2\right) = -\frac{1}{1-p_N} + \frac{p_U}{1-p_N} E\left(\left(W_{n,c-1}^{(p_N,p_U)}\right)^2\right) + \frac{1-p_N-p_U}{1-p_N} E\left(\left(W_{n-1,c-1}^{(p+p_N,p_U)}\right)^2\right) + \frac{2}{1-p_N} E\left(W_{n,c}^{(p_N,p_U)}\right). \quad (3.74)$$

Доказ. 1. Знамо да је $X_t = (Y_t, Z_t)$, где су Y_t и Z_t број стандардних и број универзалних купона, редом, изабраних након t извлачења, ланац Маркова са скупом стања $T = \{(a,b), 0 \leq a, b \leq n, a+b \leq n\}$. Користећи анализу првог корака Марковљевог ланца добијамо:

$$\begin{aligned} P\{W_{n,c}^{(p_N,p_U)} > t\} &= p_N P\{W_{n,c}^{(p_N,p_U)} > t-1\} + p_U P\{W_{n,c-1}^{(p_N,p_U)} > t-1\} \\ &+ \sum_{j=1}^{n} p P\{W_{n-1,c-1}^{(p+p_N,p_U)} > t-1\}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

где је $W_{n-1,c-1}^{(p+p_N,p_U)}$ време чекања које одговара случају где је један од стандардних купона већ изабран, што значи да остаје још $c-1$ стандардних или универзалних купона да се сакупи од $n-1$ могућих стандардних купона, при чему је вероватноћа избора сваког од стандардних купона $p = \frac{1-p_N-p_U}{n}$, а нулти купон се бира са вероватоћом $p + p_N$.

Једнакост (3.75) може се записати као:

$$\begin{aligned} P\{W_{n,c}^{(p_N,p_U)} > t\} &= p_N P\{W_{n,c}^{(p_N,p_U)} > t-1\} + p_U P\{W_{n,c-1}^{(p_N,p_U)} > t-1\} \\ &+ (1-p_N-p_U) P\{W_{n-1,c-1}^{(p+p_N,p_U)} > t-1\}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Сумирањем сваког члана у (3.76) по $t \geq 1$, добија се тражена релација.

2. Множењем сваког члана у (3.76) са $2t-1$, сумирањем по $t \geq 1$ и користећи релацију (3.8) добија се тражени исказ. □

Теорема 3.7. *За $0 \leq p_N, p_U < 1$ време чекања $W_{n,c}^{(p_N,p_U)}$ задовољава следеће асимптотске релације, када $n \to \infty$:*

1.

$$E(W_{n,c}^{(p_N,p_U)}) = \frac{c}{1-p_N} + \frac{c(c-1)}{2n} \frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.77)$$

2.

$$E\left(\left(W_{n,c}^{(p_N,p_U)}\right)^2\right) = \frac{c(c+p_N)}{(1-p_N)^2} - \frac{c(c-1)}{2n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} + \frac{c(c^2-1)}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.78}$$

3.

$$D\left(W_{n,c}^{(p_N,p_U)}\right) = \frac{cp_N}{(1-p_N)^2} + \frac{c(c-1)}{2n}\frac{(1+p_N)(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.79}$$

Доказ. 1. Доказ се добија применом математичке индукције по величини колекције c.

За $c = 1$, из (3.4), имамо:

$$E\left(W_{n,1}^{(p_N,p_U)}\right) = \frac{1}{1-p_N}, \tag{3.80}$$

и исказ (3.77) очигледно важи.

Претпоставимо да (3.77) важи за $c-1$. За c, из једнакости (3.73), имамо:

$$\begin{aligned}
E(W_{n,c}^{(p_N,p_U)}) &= \frac{1}{1-p_N} + \frac{p_U}{1-p_N}E(W_{n,c-1}^{(p_N,p_U)}) + \frac{1-p_N-p_U}{1-p_N}E(W_{n-1,c-1}^{(p_N,p_U)}) - \frac{c+1}{1-p_N}\\
&= \frac{1}{1-p_N} + \frac{p_U}{1-p_N}\left(\frac{c-1}{1-p_N} + \frac{(c-1)(c-2)}{2n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3}\right)\\
&+ \frac{1-p_N-p_U}{1-p_N}\left(\frac{c-1}{1-p-p_N} + \frac{(c-1)(c-2)}{2(n-1)}\frac{(1-p-p_N-p_U)^2}{(1-p-p_N)^3}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= S_1 + S_2 + S_3 + o\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned} \tag{3.81}$$

где је:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{1-p_N} + (c-1)\frac{p_U}{(1-p_N)^2} + (c-1)\frac{1-p_N-p_U}{(1-p_N)(1-p-p_N)},\\
S_2 &= \frac{(c-1)(c-2)}{2n}\frac{p_U(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4},\\
S_3 &= \frac{(c-1)(c-2)}{2(n-1)}\frac{(1-p_N-p_U)(1-p-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)(1-p-p_N)^3}.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Користећи чињеницу да је $1 - p_N - p_U = np$, добијамо:

$$S_1 = \frac{1}{1-p_N} + \frac{c-1}{(1-p_N)^2}\left(p_U + (1-p_N-p_U)\left(1-\frac{p}{1-p_N}\right)^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{1-p_N} + \frac{c-1}{(1-p_N)^2}\left(p_U + (1-p_N-p_U)\left(1+\frac{1-p_N-p_U}{n(1-p_N)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{1-p_N} + \frac{c-1}{(1-p_N)^2}\left(1-p_N+\frac{(1-p_N-p_U)^2}{n(1-p_N)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{c}{1-p_N} + \frac{c-1}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.83}$$

Слично имамо:

$$S_3 = \frac{(c-1)(c-2)}{2n}\cdot\frac{n}{n-1}\frac{(1-p_N-p_U)^3}{(1-p_N)^4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(1-\frac{p}{1-p_N}\right)^{-3}$$
$$= \frac{(c-1)(c-2)}{2n}\frac{(1-p_N-p_U)^3}{(1-p_N)^4}(1+o(1))$$
$$= \frac{(c-1)(c-2)}{2n}\frac{(1-p_N-p_U)^3}{(1-p_N)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.84}$$

Коначно заменом (3.82), (3.83) и (3.84) у (3.81), добијамо тражено тврђење.

2. Поново користимо математичку индукцију по c.

За $c = 1$, из (3.5), имамо:

$$E\left((W_{n,1}^{(p_N,p_U)})^2\right) = \frac{1+p_N}{(1-p_N)^2}, \tag{3.85}$$

и исказ (3.78) важи.

Даље, претпоставимо да (3.78) важи за $c-1$. За c, користећи (3.73) и (3.74), када $n\to\infty$, имамо:

$$E\left((W_{n,c}^{(p_N,p_U)})^2\right) = \frac{p_N+2c-1}{(1-p_N)^2} + \frac{c-1}{1-p_N}Q_1 - \frac{(c-1)(c-2)}{2n(1-p_N)}Q_2$$
$$+\frac{c(c-1)(c-2)}{n(1-p_N)}Q_3 + \frac{c(c-1)}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.86}$$

где је:

$$Q_1 = \frac{p_U(c-1+p_N)}{(1-p_N)^2} + \frac{(1-p_N-p_U)(c-1+p_N+p)}{(1-p_N-p)^2},$$
$$Q_2 = \frac{p_U(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} + \frac{n}{n-1}\frac{(1-p_N-p_U)(1-p_N-p-p_U)^2}{(1-p_N-p)^3}$$
$$Q_3 = \frac{p_U(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} + \frac{n}{n-1}\frac{(1-p_N-p_U)(1-p_N-p-p_U)^2}{(1-p_N-p)^4}. \tag{3.87}$$

Користећи једнакост $1-p_N-p_U = np$, добијамо:

$$Q_1 = \frac{c-1+p_N}{(1-p_N)^2}\left(p_U + (1-p_N-p_U)\left(1+\frac{p}{c-1+p_N}\right)\left(1-\frac{p}{1-p_N}\right)^{-2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c-1+p_N}{(1-p_N)^2} \times \\
&\times \left(p_U + (1-p_N-p_U) \left(1 + \frac{1-p_N-p_U}{n(c-1+p_N)}\right) \left(1 + 2\frac{1-p_N-p_U}{n(1-p_N)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \frac{c-1+p_N}{(1-p_N)^2} \left(1 - p_N + 2\frac{(1-p_N-p_U)^2}{n(1-p_N)} + \frac{(1-p_N-p_U)^2}{n(c-1+p_N)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{c-1+p_N}{1-p_N} + 2\frac{(1-p_N-p_U)^2}{n(1-p_N)^3}(c-1+p_N) + \frac{(1-p_N-p_U)^2}{n(1-p_N)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (3.88) \\
Q_2 &= \frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} \left(p_U + \frac{n}{n-1}(1-p_N-p_U)(1+o(1))\right) \\
&= \frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} (1-p_N+o(1)) \\
&= \frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^2} (1+o(1)), \qquad (3.89) \\
Q_3 &= \frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} \left(p_U + \frac{n}{n-1}(1-p_N-p_U)(1+o(1))\right) \\
&= \frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} (1-p_N+o(1)) \\
&= \frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} (1+o(1)). \qquad (3.90)
\end{aligned}$$

Заменом (3.88), (3.89), (3.90) у (3.86), имамо:

$$\begin{aligned}
E\big((W_{n,c}^{(p_N,p_U)})^2\big) &= \frac{p_N+2c-1}{(1-p_N)^2} + \frac{(c-1)(c-1+p_N)}{(1-p_N)^2} + 2\frac{(c-1)(c-1+p_N)}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} \\
&+ \frac{c-1}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} - \frac{(c-1)(c-2)}{2n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} \\
&+ \frac{c(c-1)(c-2)}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} + \frac{c(c-1)}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{c(c+p_N)}{(1-p_N)^2} + \frac{(4-c)(c-1)}{2n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} \\
&+ \frac{c-1}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4}(2c-2+2p_N+c^2-2c+c) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{c(c+p_N)}{(1-p_N)^2} + \frac{(4-c)(c-1)}{2n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} \\
&+ 2\frac{c-1}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} + \frac{(c+1)c(c-1)}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{c(c+p_N)}{(1-p_N)^2} - \frac{c(c-1)}{2n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^3} + \frac{c(c^2-1)}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

чиме добијамо тражени исказ.

3. Из једнакости (3.77), имамо:

$$\left(E(W_{n,c}^{(p_N,p_U)})\right)^2 = \frac{c^2}{(1-p_N)^2} + \frac{c^2(c-1)}{n}\frac{(1-p_N-p_U)^2}{(1-p_N)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.91}$$

Релације (3.78) и (3.91) воде до траженог исказа. □

Асимптотски резултати из теореме 3.7 важе и ако су једна или обе вероватноће p_U и p_N једнаке вероватноћи избора стандардних купона и теже 0, кад $n \to \infty$. Користећи ту чињеницу добијамо одговарајуће асимптотске резултате у преосталим случајевима.

У (3.77) претпоставили смо да су вероватноће p_N и p_U фиксиране. Даље, анализирајмо случајеве у којима је једна од тих вероватноћа фиксирана, а друга је једнака вероватноћи избора стандардног купона p и зависи од n.

Ако је p_N фиксирано и ако је $p_U = p = \frac{1-p_N}{n+1}$, добијамо следећу последицу теореме 3.7.

Последица 3.3. *За $0 \le p_N < 1$, време чекања $W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}$, задовољава следеће асимптотске релације када $n \to \infty$:*

1.

$$E(W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}) = \frac{c}{1-p_N} + \frac{c(c-1)}{2n(1-p_N)} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.92}$$

2.

$$E\left((W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})})^2\right) = \frac{c(c+p_N)}{(1-p_N)^2} - \frac{c(c-1)}{2n(1-p_N)} + \frac{c(c^2-1)}{n(1-p_N)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.93}$$

3.

$$D(W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}) = \frac{cp_N}{(1-p_N)^2} - \frac{c(c-1)}{2n(1-p_N)} + \frac{c(c-1)}{n(1-p_N)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.94}$$

Доказ. Сва три исказа следе директно из одговарајућих исказа теореме 3.7 ако је $p_U = p = \frac{1-p_N}{n+1}$. □

Резултати садржани у последици 3.3 се могу добити и на други начин, коришћењем следеће теореме која даје рекурентне везе које важе за време чекања $W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}$.

Теорема 3.8. *За $0 \le p_N < 1$, време чекања $W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}$, задовољава следеће рекурентне релације:*

1.

$$E(W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}) = \frac{1}{1-p_N} + \frac{1}{n+1}E(W_{n,c-1}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}) + E(W_{n-1,c-1}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n})}), \tag{3.95}$$

2.

$$E\left((W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})})^2\right) = -\frac{1}{1-p_N} + \frac{1}{n+1}E\left((W_{n,c-1}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})})^2\right)$$
$$+\frac{n+1}{n}E\left((W_{n-1,c-1}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n})})^2\right)+\frac{1}{n}E(W_{n-1,c-1}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n})})+\frac{2}{1-p_N}E(W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}). \qquad (3.96)$$

Доказ. 1. Заменом $p_U = \frac{1-p_N}{n+1}$ у (3.4), добијамо:

$$\begin{aligned} E(W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}) &= \frac{1}{1-p_N}\sum_{i=0}^{c-1}\sum_{k=0}^{c-i-1}(-1)^{c-i-k-1}\binom{n-k-1}{n-c+i}\binom{n}{k}\frac{n+1}{(n+1-k)^{i+1}} \\ &= \frac{1}{1-p_N}A_{n,c}, \end{aligned} \qquad (3.97)$$

где је:

$$A_{n,c} = \sum_{i=0}^{c-1}\sum_{k=0}^{c-i-1}(-1)^{c-i-k-1}\binom{n-k-1}{n-c+i}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1-k)^i}. \qquad (3.98)$$

Користећи идентитете (1.1) и (1.5) добијамо следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} A_{n,c} &= \sum_{i=0}^{c-1}\sum_{k=0}^{c-i-1}(-1)^{c-i-k-1}\binom{n-k-1}{n-c+i}\binom{n}{k}\frac{1}{(n+1-k)^i} \\ &\quad +\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=1}^{c-i-1}(-1)^{c-i-k-1}\binom{n-k-1}{n-c+i}\binom{n}{k-1}\frac{1}{(n+1-k)^i} \\ &= \sum_{k=0}^{c-1}(-1)^{c-k-1}\binom{n-k-1}{n-c}\binom{n}{k} \\ &\quad +\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-1}{n-c+i+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1-k)^i} \\ &\quad +\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}\binom{n}{k}\frac{1}{(n-k)^i} \\ &= 1+\frac{1-p_N}{n+1}E(W_{n,c-1}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})})+(1-p_N)E(W_{n-1,c-1}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n})}), \end{aligned} \qquad (3.99)$$

чиме је исказ доказан.

2. Имамо да је:

$$E\left((W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})})^2\right) = \frac{2(n+1)}{(1-p_N)^2}B_{n,c} - E(W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}), \qquad (3.100)$$

где је:

$$B_{n,c} = \sum_{i=0}^{c-1}\sum_{k=0}^{c-i-1}(-1)^{c-i-k-1}\binom{n-k-1}{n-c+i}\binom{n+1}{k}\frac{1+i}{(n+1-k)^{i+1}}. \qquad (3.101)$$

Слично као (3.99), добијамо:

$$\begin{aligned}
B_{n,c} &= \sum_{i=0}^{c-1}\sum_{k=0}^{c-i-1}(-1)^{c-i-k-1}\binom{n-k-1}{n-c+i}\binom{n}{k}\frac{1+i}{(n+1-k)^{i+1}} \\
&\quad+\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=1}^{c-i-1}(-1)^{c-i-k-1}\binom{n-k-1}{n-c+i}\binom{n}{k-1}\frac{1+i}{(n+1-k)^{i+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{c-1}(-1)^{c-k-1}\binom{n-k-1}{n-c}\binom{n}{k}\frac{1}{n+1-k} \\
&\quad+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-1}{n-c+i+1}\binom{n+1}{k}\frac{1+i}{(n+1-k)^{i+1}} \\
&\quad+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-1}{n-c+i+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1-k)^{i+1}} \\
&\quad+\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}\binom{n}{k}\frac{1+i}{(n-k)^{i+1}} \\
&= \frac{1}{n+1}B_{n,c-1}+B_{n-1,c-1}+\frac{1-p_N}{n+1}E(W_{n,c}^{(p_N,\frac{1-p_N}{n+1})}).
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Комбинујући (3.100) и (3.102) добијамо тражено тврђење. □

Ако је p_U фиксирано и $p_N = p = \frac{1-p_U}{n+1}$, имамо следећи резултат.

Последица 3.4. *За $0 \le p_U < 1$, време чекања $W_{n,c}^{(\frac{1-p_U}{n+1},p_U)}$ задовољава следеће релације када $n \to \infty$:*

1.

$$E(W_{n,c}^{(\frac{1-p_U}{n+1},p_U)}) = c + \frac{c}{n}(1-p_U) + \frac{c(c-1)}{2n}(1-p_U)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.103}$$

2.

$$E\left((W_{n,c}^{(\frac{1-p_U}{n+1},p_U)})^2\right) = c^2 + \frac{c(2c+1)}{n}(1-p_U) + \frac{c(c-1)(2c+1)}{2n}(1-p_U)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.104}$$

3.

$$D(W_{n,c}^{(\frac{1-p_U}{n+1},p_U)}) = \frac{c}{n}(1-p_U) + \frac{c(c-1)}{2n}(1-p_U)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.105}$$

Доказ. Сва три исказа следе директно из одговарајућих изказа теореме 3.7 ако је $p_N = p = \frac{1-p_U}{n+1}$. □

Коначно, ако је $p_N = p_U = p = \frac{1}{n+2}$, добијамо следеће резултате.

Последица 3.5. *Време чекања* $W_{n,c}^{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+2})}$*, задовољава следеће асимӣӣоӣске релације када* $n \to \infty$*:*

1.

$$E(W_{n,c}^{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+2})}) = c + \frac{c(c+1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.106}$$

2.

$$E\left((W_{n,c}^{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+2})})^2\right) = c^2 + \frac{c(c+1)(2c+1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.107}$$

3.

$$D(W_{n,c}^{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+2})}) = \frac{c(c+1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.108}$$

Доказ. Све три једнакости следе директно из одговарајућих једнакости теореме 3.7 ако је $p_U = p_N = p = \frac{1}{n+2}$. □

Из теореме 3.7 и последице 3.3 следи да ако је p_N фиксирано, одговарајуће очекивано време чекања $E(W_{n,c})$ је асимптотски еквивалентно са $\frac{c}{1-p_N}$, када $n \to \infty$. Из последице 3.4 и последице 3.5 следи да ако је p_U фиксирано или не, одговарајуће очекивано време чекања је асимптотски еквивалентно са c. Према томе, вероватноћа избора нултог купона p_N директније утиче на асимптотско понашање посматраних величина од вероватноће избора универзалног купона p_U.

3.5 Горња и доња граница функције расподеле времена чекања $W_{n,c}$

У случају када вероватноће избора стандардних купона нису једнаке, рачунање одговарајућих вероватноћа се много компликује. Због тога се јавила потреба да се одреде горња и доња граница функције расподеле $W_{n,c}$, што је често навођено у литератури ([51],[35],[1]). У раду [51], аутор је разматрао класични проблем сакупљања купона и предложио два скупа горњих и доњих граница за реп расподеле времена чекања потребног да се сакупи цела колекција. Прва група граница

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_{i=1}^{n}(1-p_i)^k - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(1-p_i-p_j)^k, \\ U_1 &= \sum_{i=1}^{n}(1-p_i)^k, \end{aligned}$$

је добијена различитим комбинаторним методама, а друга група граница

$$\begin{aligned} L_2 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(1-ip_{ave}), \quad p_{ave}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}p_j, \\ U_2 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(1-ip_{min}), \quad p_{min}=\min\{p_1,\ldots,p_n\}, \end{aligned}$$

добијена је применом техника теорије мајоризације, односно стохастичког поретка.

У овом поглављу фокусираћемо се на одређивање горњих и доњих граница функције расподеле за проблем сакупљања купона са универзалним купоном користећи технике мајоризације. У наредним лемама дате су особине функције расподеле времена чекања за проблем сакупљања купона са универзалним купоном. Означимо са $W_{n,c}(\mathbf{p})$ време чекања до комплетирања дела колекције величине c којем одговара вектор вероватноћа избора стандардних купона $\mathbf{p}$.

Лема 3.3. *Функција расподеле времена чекања дата у (3.3) је Шур-конкавна функција по вероватноћама избора стандардних купона* $(p_1,\ldots,p_n)$.

Доказ. Функција (3.3) је симетрична и користићемо лему 1.3. Нека је:

$$h(p,t,i)=\sum_{\substack{K\subset\mathbb{N}_n\setminus\{1,2\},\\ |K|=k}}(p+P_K+p_N)^{t-i}. \tag{3.109}$$

Имамо:

$$\begin{aligned} P\{W_{n,c}>t\} &= \sum_{i=0}^{c-2}\binom{t}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}h(p_1,t,i) \\ &+ \sum_{i=0}^{c-2}\binom{t}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}h(p_2,t,i) \\ &+ \sum_{i=0}^{c-3}\binom{t}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-3}(-1)^{c-i-k-1}\binom{n-k-3}{n-c+i}h(p_1+p_2,t,i) \\ &+ D, \end{aligned}$$

где члан D не зависи од p_1 и p_2.
Нека је $f(\lambda)=P\{W_{n,c}(\mathbf{p}^*)>t\}$, где је $\mathbf{p}^*=(\lambda q,(1-\lambda)q,p_3,\ldots,p_n)$, $\lambda\in(0,1/2]$.
Тада важи:

$$\frac{\partial f(\lambda)}{\partial\lambda}=q\sum_{i=0}^{c-2}(t-i)\binom{t}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}h(\lambda q,t-1,i)$$

$$-q\sum_{i=0}^{c-2}(t-i)\binom{t}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}h((1-\lambda)q,t-1,i)$$
$$=qt\sum_{i=0}^{c-2}\binom{t-1}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}(h(\lambda q,t-1,i)-h((1-\lambda)q,t-1,i)).$$

За $t \geq 1$, посматрамо функцију:

$$l(a)=\sum_{i=0}^{c-2}\binom{t-1}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}h(a,t-1,i). \tag{3.110}$$

Дефинишемо $W_{n-2,c}^{(a+p_N)}$ као време чекања потребно да се изабере потколекција величине c, у случају када се нулти купон бира са вероватноћом $a+p_N$ (уместо p_N) и скуп стандардних купона је $\mathbb{N}_n \setminus \{1,2\} = \{3,\dots,n\}$ (уместо $\mathbb{N}_n$).
За $t \geq 2$, имамо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(a)}{\partial a} &= \sum_{i=0}^{c-2}(t-i-1)\binom{t-1}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}h(a,t-2,i)\\ &= (t-1)\sum_{i=0}^{c-2}\binom{t-2}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-2}{n-c+i}h(a,t-2,i)\\ &= (t-1)\sum_{i=0}^{c-2}\binom{t-2}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-2}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-3}{n-c+i-1}h(a,t-2,i)\\ &\quad+(t-1)\sum_{i=0}^{c-3}\binom{t-2}{i}{p_U}^i\sum_{k=0}^{c-i-3}(-1)^{c-i-k}\binom{n-k-3}{n-c+i}h(a,t-2,i)\\ &= (t-1)\left(P\{W_{n-2,c-1}^{(a+p_N)}>t-2\}-P\{W_{n-2,c-2}^{(a+p_N)}>t-2\}\right)\geq 0.\end{aligned} \tag{3.111}$$

Према томе, $l(a)$ је растућа функција по a и добија се

$$\frac{\partial f(\lambda)}{\partial\lambda}=qt(l(\lambda q)-l((1-\lambda)q))\leq 0, \tag{3.112}$$

чиме је лема доказана. □

Сада ћемо формулисати и доказати лему у којој претпостављамо да су $p_1,\dots,p_n$ произвољне вероватноће за које не мора да важи $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Ова лема ће нам бити потребна касније за добијање вештачких граница за вероватноћу (3.3).

Лема 3.4. *Функција расподеле из (3.3) је растућа функција по (свакој) вероватноћи одабира купона.*

Доказ. Функција расподеле (3.3) је симетрична по $p_1, p_2, \ldots, p_n$, према томе довољно је да се покаже да је то растућа функција по p_1.

Нека је

$$q(p,t) = \sum_{\substack{K \subset \mathbb{N}_n \setminus \{1\},\\ |K|=k}} (p + P_K + p_N)^{t-i}. \tag{3.113}$$

Имамо

$$P\{W_{n,c} > t\} = r(p_1) = \sum_{i=0}^{c-2} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-2} (-1)^{c-i-k} \binom{n-k-2}{n-c+i} q(p_1,t) + C, \tag{3.114}$$

где члан C не зависи од p_1.

За $t \geq 1$ добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(p_1)}{\partial p_1} &= \sum_{i=0}^{c-2} (t-i) \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-2} (-1)^{c-i-k} \binom{n-k-2}{n-c+i} q(p_1, t-1) \\ &= t \sum_{i=0}^{c-2} \binom{t-1}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-2} (-1)^{c-i-k} \binom{n-k-2}{n-c+i} q(p_1, t-1). \end{aligned} \tag{3.115}$$

Дефинишемо $W_{n-1,c}^{(a+p_N)}$ као време чекања потребно да се сакупи потколекција димензије c, у случају када је вероватноћа избора нултог купона $a + p_N$ (уместо p_N), и скуп стандардних купона је $\mathbb{N}_n \setminus \{1\} = \{2, \ldots, n\}$ (уместо $\mathbb{N}_n$). Сада имамо:

$$\frac{\partial r(p_1)}{\partial p_1} = tP\{W_{n-1,c-1}^{(p_1+p_N)} > t-1\} \geq 0,$$

чиме је лема доказана. $\square$

У наставку претпоставимо да је вектор вероватноћа $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ у растућем поретку.

Даље, дефинишемо следеће фамилије вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(s,1)} &= \left(p_1, \ldots, p_s, \underbrace{\sum_{j=s+1}^{n} \frac{p_U}{n-s}, \ldots, \sum_{j=s+1}^{n} \frac{p_j}{n-s}}_{n-s} \right), s \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ \mathbf{p}^{(0,1)} &= (\underbrace{p_{ave}, \ldots, p_{ave}}_{n}), p_{ave} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p_j, \\ \mathbf{p}^{(s,2)} &= \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1}, \underbrace{p_s, \ldots, p_s}_{n-s}, \sum_{j=1}^{n} p_j - (n-s) p_s \right), s \in \{1, \ldots, n\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^{(s,3)} &= \left(\underbrace{0,\ldots,0}_{s-1}, p_s,\ldots,p_{n-1}, \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=s}^{n-1} p_j\right), s\in\{1,\ldots,n-1\},\\
\mathbf{p}^{(n,3)} &= \left(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}, \sum_{j=1}^{n} p_j\right). \qquad (3.116)
\end{aligned}$$

Лако се уочава да је

$$\mathbf{p}^{(n,2)} = \mathbf{p}^{(n,3)}, \mathbf{p}^{(n-1,2)} = \mathbf{p}^{(n-1,3)} \text{ и } \mathbf{p}^{(n-1,1)} = \mathbf{p}^{(1,3)} = \mathbf{p}. \qquad (3.117)$$

Односи између посматраних фамилија вектора дати су у наредној леми.

Лема 3.5. *Важе следеће релације:*

$$\mathbf{p}^{(s,1)} \prec \mathbf{p}^{(s-1,1)}, \quad 1\le s\le n-1. \qquad (3.118)$$

$$\mathbf{p}^{(s,3)} \prec \mathbf{p}^{(s-1,3)}, \quad 2\le s\le n. \qquad (3.119)$$

$$\mathbf{p}^{(s,2)} \prec \mathbf{p}^{(s,3)}, \quad 1\le s\le n. \qquad (3.120)$$

Доказ. За доказивање (3.118) довољно је проверити да релација:

$$p_s + k\sum_{j=s+1}^{n}\frac{p_j}{n-s} \le (k+1)\sum_{j=s}^{n}\frac{p_j}{n-s+1}, \qquad (3.121)$$

важи за свако $0\le k\le n-s$, а израз (3.121) може се свести на очигледну неједнакост:

$$(n-s-k)\left(\sum_{j=s+1}^{n} p_j - (n-s)p_s\right) \ge 0. \qquad (3.122)$$

Релације (3.119) и (3.120) тривијално важе. □

Скуп могућих горњих и доњих граница за вероватноћу 3.3 добијен је у наредној теореми.

Теорема 3.9. *Доње границе за вероватноћу (3.3) дате су са:*

$$L^{(s,1)}(t) = P\{W_{n,c}(\mathbf{p}^{(s,1)}) > t\}, \text{ за } s\in\{0,\ldots,n-2\}. \qquad (3.123)$$

За $s\in\{1,\ldots,n\}$, горње границе за вероватноћу (3.3) дате су са:

$$U^{(s,2)}(t) = P\{W_{n,c}(\mathbf{p}^{(s,2)}) > t\} \text{ и } U^{(s,3)}(t) = P\{W_{n,c}(\mathbf{p}^{(s,3)}) > t\}. \qquad (3.124)$$

Доказ. Све границе следе из леме 1.3, леме 3.3 и леме 3.5. □

Последица 3.6. *Изрази за све границе добијене у теореми 3.9 могу се представити као:*

$$
\begin{aligned}
L^{(s,1)}(t) &= \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \\
&\quad \sum_{j=0}^{\min\{k,s\}} \sum_{\substack{K\subset\{1,\dots,s\},\\ |K|=j}} \binom{n-s}{k-j} \left(P_K + p_N + \frac{k-j}{n-s} \sum_{l=s+1}^{n} p_l \right)^{t-i}, \\
U^{(s,2)}(t) &= \sum_{i=0}^{c-2} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-2} (-1)^{c-i-k} \binom{n-k-2}{n-c+i} \\
&\quad \sum_{j=0}^{k} \binom{n-s}{j} \binom{s-1}{k-j} (1 - p_U - (n-s-j)p_s)^{t-i} \\
&+ \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \sum_{j=0}^{k} \binom{n-s}{j} \binom{s-1}{k-j} (jp_s + p_N)^{t-i}, \\
U^{(s,3)}(t) &= \sum_{i=0}^{c-2} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-2} (-1)^{c-i-k} \binom{n-k-2}{n-c+i} \\
&\quad \sum_{j=0}^{\min\{k,n-s\}} \sum_{\substack{K\subset\{s,\dots,n-1\},\\ |K|=j}} \binom{s-1}{k-j} \left(P_K + 1 - p_U - \sum_{l=s}^{n-1} p_l \right)^{t-i} \\
&+ \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \\
&\quad \sum_{j=0}^{\min\{k,n-s\}} \sum_{\substack{K\subset\{s,\dots,n-1\},\\ |K|=j}} \binom{s-1}{k-j} (P_K + p_N)^{t-i}.
\end{aligned}
$$

Напомена 3.6. *Из леме 3.3 и леме 3.5 имамо следеће релације између граница предложених у теореми 3.9:*

$$L^{(0,1)}(t) \le \cdots \le L^{(n-1,1)}(t) \le P\{W_{n,c}(\mathbf{p}) > t\} \le U^{(2,3)}(t) \le \cdots \le U^{(n,3)}(t),$$

$$P\{W_{n,c}(\mathbf{p}) > t\} \le U^{(s,3)}(t) \le U^{(s,2)}(t),\ s \in \{2,\dots,n\}.$$

Очигледно, границе типа $U^{(s,2)}$ су рачунски једноставније од граница $U^{(s,3)}$.

Неке од добијених граница могу се записати једноставније. Те формуле су дате у наредној последици.

Последица 3.7. *Важе следеће једнакости:*

$$
\begin{aligned}
L^{(0,1)}(t) &= \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \binom{n}{k} (kp_{ave} + p_N)^{t-i}, \\
U^{(n-1,3)}(t) &= \sum_{i=0}^{c-3} \binom{t}{i} {p_U}^i (1-p_U)^{t-i} + \binom{t}{c-1} p_U^{c-1} p_N^{t-c+1} \\
&\quad + \binom{t}{c-2} p_U^{c-2} \left((p_{n-1}+p_N)^{t-c+2} + (1-p_U-p_{n-1})^{t-c+2} - p_N^{t-c+2} \right), \\
U^{(n,3)}(t) &= \sum_{i=0}^{c-2} \binom{t}{i} {p_U}^i (1-p_U)^{t-i} + \binom{t}{c-1} p_U^{c-1} p_N^{t-c+1}, \\
U^{(1,2)}(t) &= \sum_{i=0}^{c-2} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-2} (-1)^{c-i-k} \binom{n-k-2}{n-c+i} \binom{n-1}{k} (1-p_U-(n-1-k)p_1)^{t-i} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} {p_U}^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-k-1} \binom{n-k-1}{n-c+i} \binom{n-1}{k} (kp_1+p_N)^{t-i}.
\end{aligned}
$$

Последица 3.8. *Први и други моменат времена чекања $W_{n,c}(p)$, дати у теореми 3.1, су Шур-конкавне функције вероватноћа $(p_1, \dots, p_n)$.*

Доказ. Ако је $\mathbf{q} \prec \mathbf{p}$, применом леме 3.3 имамо да је:

$$
E(W_{n,c}(\mathbf{p})) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{W_{n,c}(\mathbf{p}) > k\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} P\{W_{n,c}(\mathbf{q}) > k\} = E(W_{n,c}(\mathbf{q})),
$$

$$
E(W_{n,c}(\mathbf{p}))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (2t-1) P\{W_{n,c}(\mathbf{p}) > k\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2t-1) P\{W_{n,c}(\mathbf{q}) > k\} = E(W_{n,c}(\mathbf{q}))^2.
$$

Одакле следи доказ последице. □

Напомена 3.7. *Из последице 3.8 следи да је могуће одредити доњу и горњу границу за $E(W_{n,c}(\mathbf{p}))$ и $D(W_{n,c}(\mathbf{p}))$ комбинујући доње и горње границе за функцију расподеле $W_{n,c}$ предложених у теореми 3.9.*

Како за произвољан вектор вероватноћа $\mathbf{p}$ важи $\mathbf{p} \prec \mathbf{p}^{(0,1)}$, можемо закључити да је функција расподеле за $W_{n,c}(\mathbf{p})$ минимизирана $\mathbf{p}^{(0,1)}$. Исто важи за $E(W_{n,c}(\mathbf{p}))$ и $E(W_{n,c}^2(\mathbf{p}))$.

Користећи једнакост (3.6) и релацију:

$$
P\{Y_t = 0, Z_t \leq c-1\} \leq P\{Y_t + Z_t \leq c-1\} \leq P\{Z_t \leq c-1\}, \tag{3.125}
$$

добијамо још један пар једноставних (тривијалних) граница, доњу (L^*) и горњу (U^*) границу за функцију расподеле (3.3):

$$L^*(t) = \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} p_U^i p_N^{t-i}, \text{ и } U^*(t) = \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} p_U^i (1-p_U)^{t-i}. \tag{3.126}$$

Границе L^* и U^* су мање блиске тачној вредности вероватноће од било које друге границе предложене у овом раду (односно, све остале границе припадају интервалу (L^*,U^*)), што је јасно из следећих разматрања.
За границу U^* имамо:

$$U^*(t) \geq U^{(n,3)}(t) = U^{(n,2)}(t). \tag{3.127}$$

За границу L^* користећи једнакост 1.8, добијамо:

$$L^*(t) = \sum_{i=0}^{c-1} \binom{t}{i} p_U^i \sum_{k=0}^{c-i-1} (-1)^{c-i-1-k} \binom{n-k-1}{n-c+i} \binom{n}{k} p_N^{t-i}. \tag{3.128}$$

Користећи лему 3.4 добијамо:

$$L^*(t) \leq L^{(0,1)}(t). \tag{3.129}$$

Закључак следи из напомене 3.6.

Нумерички резултати

У овом поглављу дајемо нумеричко поређење ефикасности скупова граница предложених у поглављу 3.5. Размотрамо следеће комбинације додатних параметара:

$$(p_N, p_U) \in \{(1/22, 1/22), (1/3, 1/4), (1/3, 0)\}, \quad (n, c) \in \{(20, 10), (20, 20)\}$$

и проверавамо понашање предложених граница за следеће расподеле:

$$\mathbf{q}(1) = (q, q(1-q), q(1-q)^2, \ldots q(1-q)^{19}), q = 1 - (p_U + p_N)^{\frac{1}{20}},$$

и

$$\mathbf{q}(4) = (\underbrace{q, \ldots, q}_{4}, \underbrace{q(1-q), \ldots, q(1-q)}_{4}, \ldots, \underbrace{q(1-q)^4, \ldots, q(1-q)^4}_{4}),$$

где је

$$q = 1 - \left(1 - \frac{1 - p_U - p_N}{4}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Расподеле $q(1)$ и $q(4)$ су одабране због значаја расподеле тог типа у области инжењеринга [51].

Укључујемо резултате за границе $L^{(0,1)}(t)$, $L^{(1,1)}(t)$, $L^{(2,1)}(t)$, $U^{(19,3)}(t)$, $U^{(20,3)}(t)$, $U^{(1,2)}(t)$, $U^{(10,2)}(t)$, које су изабране због њихове једноставности, односно релативно малог броја рачунских операција потребних за њихово израчунавање. Ради поређења такође смо укључили границе $L^{(10,1)}(t)$ и $U^{(10,3)}(t)$ које нису толико рачунски једноставне, али су доста прецизне.

Резултати су представљени у табелама 3.8 - 3.13.

Закључци су следећи:

1. У већини случајева, границе за функцију расподеле за $W_{20,20}$ су прецизније, него исти тип граница за функцију расподеле за $W_{20,10}$ и границе су најуже за $(p_N, p_U) = (1/3, 1/4)$. Ово није изненађујуће, зато што важи следећа релација:

$$U^*(t) \leq \frac{(1-p_U)^{t-c+1}}{{p_N}^t} L^*(t). \tag{3.130}$$

Према томе, тачност предложених граница много зависи од вероватноћа p_U и p_N, као и величине потколекције коју је потребно сакупити.

2. У већини размотрених случајева комбинације граница $L^{(2,1)}(t)$ и $U^{(1,2)}(t)$ се чине најприкладнијим узимајући у обзир и сложеност и рачунски напор. Ови случајеви су у табелама 3.8 - 3.13 означени подебљаним фонтом.

3. Једини случај у ком ниједна од предложених граница не функционише добро је случај $(n, c) = (20, 10)$, $(p_N, p_U) = (1/22, 1/22)$ у табели 3.8. Ово се такође може објаснити са (3.130).

4. У већини разматраних случајева, граница $L^{(10,1)}(t)$ је веома близу тачној вредности функције расподеле за $W_{n,c}$, што потврђује да се тачност граница повећава истовремено са повећањем рачунског напора.

Коначно, на основу њихових особина и правећи компромис између прецизности граница и рачунског напора, можемо предложити пар граница $L^{(2,1)}(t)$ и $U^{(1,2)}(t)$.

Напомена 3.8. *Ако се разматрани проблем сведе на проблем сакупљања купона са неједнаким вероватноћама (постављањем вероватноћа додатних купона на нулу), могуће је упоредити границе са оним добијеним у [51]. Доња граница добијена у [51] коришћењем техника мајоризације (која је означена са $L_1^{(S)}$) поклапа се са границом $L^{(0,1)}$ разматраном у овој дисертацији. Одговарајућа горња граница добијена у [51] (која је означена са $U_1^{(S)}$) је према* *нашем искуству, мање прецизна од било које горње границе предложене у теореми 3.9.*

За илустрацију, у таблели 3.7 упоређене су границе $L^{(2,1)}$ *и* $U^{(1,2)}$, *предложене у раду [26] са границама* $L_1^{(S)}$ *и* $U_1^{(S)}$. *Такође, у табели су приказане и горња и доња граница добијене директним комбинаторним закључивањем, разматране у [51] (које су означене са* $U_2^{(S)}$ *и* $L_2^{(S)}$, *редом), које је било могуће добити само за конкретну варијанту проблема. Поредећи резултате за границе* $L_1^{(S)}$, $U_1^{(S)}$, $L_2^{(S)}$ *и* $U_2^{(S)}$ *из табеле 1, на страни 161 у [51] можемо приметити да је пар граница* $(L^{(2,1)}(t), U^{(1,2)}(t))$ *прецизнији, него пар граница* $(L_1^{(S)}(t), U_1^{(S)}(t))$ *у већини разматраних случајева, али је мање прецизан, него пар граница* $(L_2^{(S)}(t), U_2^{(S)}(t))$.

Табела 3.7: Поређење граница $L^{(2,1)}$ и $U^{(1,2)}$ са границама добијеним у [51], табела 1, стр. 161 (за исту расподелу вероватноћа)

t	$P\{W_{20,20}>t\}$	$L_1^{(S)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L_2^{(S)}(t)$	$U_1^{(S)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U_2^{(S)}(t)$
50	9.9915e-01	9.9859e-01	9.9877e-01	-6.8488	9.9999e-01	9.9998e-01	5.1241
100	7.9769e-01	7.2222e-01	7.4740e-01	5.3002e-01	9.7367e-01	9.6798e-01	1.4451
200	1.3314e-01	6.7771e-02	9.2527e-02	1.3290e-01	3.9348e-01	3.7786e-01	1.4095e-01
500	2.6724e-04	1.4339e-05	1.6181e-04	2.6724e-04	1.8377e-03	1.7459e-03	2.6726e-04
1000	1.5259e-08	1.0281e-11	1.2326e-08	1.5259e-08	1.6911e-07	1.6065e-07	1.5259e-08

Табела 3.8: Резултати за $c = 10$ и $c = 20$, $p_N = \frac{1}{22}$, $p_U = \frac{1}{22}$, $\mathbf{p} = \mathbf{q}(1)$

t	$P\{W_{20,10}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	4.6973e-07	1.2441e-12	3.9312e-12	1.2527e-11	6.4489e-08	9.9962e-01	9.9825e-01	1.7929e-01	1.2223e-01	1.3384e-02
100	2.4998e-15	9.6148e-30	1.6986e-28	3.1685e-27	7.7998e-17	9.6141e-01	9.1446e-01	1.6048e-04	3.0781e-04	1.1138e-05
200	7.3601e-31	5.5039e-64	3.1215e-61	2.0619e-58	5.5487e-34	4.4042e-01	3.0777e-01	2.4914e-12	1.5286e-09	2.058e-11
300	4.184e-46	3.1507e-98	5.7379e-94	1.3428e-89	4.1324e-51	6.9453e-02	3.5428e-02	1.5137e-20	8.7914e-15	5.6978e-17
400	2.739e-61	1.8036e-132	1.0547e-126	8.7446e-121	3.0781e-68	5.4951e-03	2.1742e-03	8.4588e-29	5.0992e-20	1.8039e-22
500	1.8795e-76	1.0324e-166	1.9389e-159	5.6947e-152	2.2927e-85	2.8248e-04	9.0905e-05	4.7788e-37	2.9585e-25	6.0488e-28
600	1.3147e-91	5.9101e-201	3.564e-192	3.7085e-183	1.7077e-102	1.0881e-05	2.9462e-06	2.7277e-45	1.7165e-30	2.0843e-33
700	9.2753e-107	3.3832e-235	6.5514e-225	2.4151e-214	1.272e-119	3.4135e-07	7.9715e-08	1.5638e-53	9.9591e-36	7.2822e-39
800	6.5708e-122	1.9367e-269	1.2043e-257	1.5727e-245	9.4742e-137	9.1884e-09	1.8856e-09	8.9785e-62	5.7782e-41	2.5629e-44
900	4.6641e-137	1.1086e-303	2.2138e-290	1.0242e-276	7.0568e-154	2.1971e-10	4.0205e-11	5.1577e-70	3.3525e-46	9.0564e-50
1000	3.314e-152	0	0	6.67e-308	5.2563e-171	4.7809e-12	7.8929e-13	2.9632e-78	1.9451e-51	3.2073e-55

t	$P\{W_{20,20}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	7.6509e-01	3.2661e-01	3.9424e-01	**4.5853e-01**	7.3277e-01	1	1	**9.9929e-01**	9.9996e-01	9.9984e-01
100	5.2792e-02	1.8106e-03	5.4955e-03	**1.1016e-02**	5.0344e-02	1.0000e-01	1.0000e-01	**6.3534e-01**	9.6915e-01	9.6347e-01
200	5.0073e-05	1.0565e-07	8.0432e-06	**1.8105e-05**	4.9933e-05	9.979e-01	9.9521e-01	**3.4966e-03**	4.4172e-01	4.4063e-01
300	6.8834e-08	7.6425e-12	2.2328e-08	**4.0939e-08**	6.8826e-08	9.06795e-01	8.5725e-01	**3.0418e-06**	6.9467e-02	6.9455e-02
400	1.3578e-10	5.5457e-16	6.2856e-11	**1.0087e-10**	1.3578e-10	5.4485e-01	4.4916e-01	**3.1321e-09**	5.4951e-03	5.4951e-03
500	3.1668e-13	4.0243e-20	1.7698e-13	**2.6179e-13**	3.1668e-13	1.8333e-01	1.285e-01	**5.0153e-12**	2.8248e-04	2.8248e-04
600	7.9308e-16	2.9202e-24	4.9834e-16	**6.9642e-16**	7.9309e-16	3.6743e-02	2.2068e-02	**1.0983e-14**	1.0881e-05	1.0881e-05
700	2.0542e-18	2.1191e-28	1.4031e-18	**1.8748e-18**	2.0542e-18	4.8790e-03	2.5489e-03	**2.8074e-17**	3.4135e-07	3.41364e-07
800	5.4236e-21	1.5377e-32	3.9508e-21	**5.0822e-21**	5.4236e-21	4.6926e-04	2.1636e-04	**7.6381e-20**	9.1884e-09	9.1884e-09
900	1.4504e-23	1.1159e-36	1.1124e-23	**1.3845e-23**	1.4504e-23	3.4946e-05	1.4401e-05	**2.1257e-22**	2.1971e-10	2.1971e-10
1000	3.9157e-26	8.0974e-41	3.1323e-26	**3.7871e-26**	3.9162e-26	2.117e-06	7.8807e-07	**5.9623e-25**	4.7809e-12	4.7809e-12

Табела 3.9: Резултати за $c = 10$ и $c = 20$, $p_N = \frac{1}{3}$, $p_U = \frac{1}{4}$, $\mathbf{p} = \mathbf{q}(1)$

t	$P\{W_{20,10}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	4.4893e-09	3.5551e-09	3.6543e-09	**3.7498e-09**	4.3199e-09	9.1597e-02	5.5857e-02	**2.8412e-07**	1.3948e-04	5.9733e-05
100	3.2566e-23	1.2471e-23	1.3942e-23	**1.5489e-23**	2.7879e-23	1.2085e-05	3.3484e-06	**2.1398e-19**	1.0828e-12	2.5742e-13
200	1.2508e-50	3.7427e-52	5.5723e-52	**8.1643e-52**	7.5319e-51	9.8403e-16	1.2123e-16	**7.0747e-44**	1.1212e-28	2.3673e-29
300	2.1094e-77	1.7181e-80	3.7362e-80	**7.9656e-80**	8.5139e-78	8.1034e-27	6.5662e-28	**5.2867e-68**	8.6615e-44	1.3809e-44
400	6.7316e-104	8.0301e-109	2.6549e-108	**8.6177e-108**	1.8757e-104	2.6003e-38	1.5751e-39	**4.5897e-92**	1.0164e-58	1.0911e-59
500	3.0634e-130	3.7548e-137	1.9177e-136	**9.6537e-136**	6.1192e-131	4.9773e-50	2.4075e-51	**4.0447e-116**	1.241e-73	9.3361e-75
600	1.7167e-156	1.7557e-165	1.3936e-164	**1.0957e-163**	2.4944e-157	6.8702e-62	2.7658e-63	**3.5688e-140**	1.5197e-88	8.4188e-90
700	1.0922e-182	8.2101e-194	1.0151e-192	**1.2499e-191**	1.1454e-183	7.5681e-74	2.6092e-75	**3.1492e-164**	1.8614e-103	7.9071e-105
800	7.5401e-209	3.8391e-222	7.4006e-221	**1.4285e-219**	5.5903e-210	7.0678e-86	2.1307e-87	**2.7789e-188**	2.2801e-118	7.6678e-120
900	5.4945e-235	1.7951e-250	5.3962e-249	**1.6337e-247**	2.8131e-236	5.8187e-98	1.5584e-99	**2.4523e-212**	2.7927e-133	7.6263e-135
1000	4.1565e-261	8.3941e-279	3.9355e-277	**1.8689e-275**	1.4372e-262	4.3368e-110	1.0449e-111	**2.164e-236**	3.4208e-148	7.7398e-150

t	$P\{W_{20,20}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	2.3151e-02	2.1275e-02	2.1509e-02	**2.1727e-02**	2.2871e-02	9.7127e-01	9.5345e-01	**7.3e-02**	4.5312e-01	3.956e-01
100	4.3526e-10	2.8867e-10	3.0563e-10	**3.2192e-10**	4.1349e-10	6.3011e-02	3.9051e-02	**1.0079e-08**	6.5431e-05	4.4039e-05
200	7.0316e-26	3.217e-26	3.7087e-26	**4.1872e-26**	6.6384e-26	6.9418e-09	2.0081e-09	**1.3897e-24**	1.3489e-15	1.1734e-15
300	3.9416e-40	1.6544e-40	2.0812e-40	**2.4551e-40**	3.8181e-40	3.7730e-18	7.1043e-19	**2.8151e-39**	8.3798e-27	8.2222e-27
400	8.9423e-54	2.7356e-54	4.2636e-54	**5.4615e-54**	8.7627e-54	2.3111e-28	3.2281e-29	**4.4920e-53**	2.6081e-38	2.6031e-38
500	2.7148e-67	5.1856e-68	1.1508e-67	**1.6144e-67**	2.6781e-67	4.3072e-39	4.7812e-40	**1.4378e-66**	4.9785e-50	4.9776e-50
600	8.7891e-81	9.9343e-82	3.5235e-81	**5.2772e-81**	8.7139e-81	3.7938e-50	3.4937e-51	**5.2626e-80**	6.8703e-62	6.8702e-62
700	2.9256e-94	1.9046e-95	1.1749e-94	**1.8201e-94**	2.9107e-94	1.9952e-61	1.5698e-62	**1.96486e-93**	7.5680e-74	7.5680e-74
800	9.9201e-108	3.6515e-109	4.1327e-108	**6.4657e-108**	9.8914e-108	7.2001e-73	4.9448e-74	**7.3559e-107**	7.0678e-86	7.06783e-86
900	3.4111e-121	7.0009e-123	1.4983e-121	**2.3332e-121**	3.4057e-121	1.9497e-84	1.1879e-85	**2.7548e-120**	5.8187e-98	5.8187e-98
1000	1.1861e-134	1.3423e-136	5.5198e-135	**8.4902e-135**	1.185e-134	4.2107e-96	2.3056e-97	**1.0317e-133**	4.3368e-110	4.3368e-110

Табела 3.10: Резултати за $c = 10$ и $c = 20$, $p_N = \frac{1}{3}$, $p_U = 0$, $\mathbf{p} = \mathbf{q}(1)$

t	$P\{W_{20,10}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	4.9493e-05	1.1207e-05	1.3107e-05	**1.5242e-05**	3.7927e-05	1	1	**4.7996e-02**	6.6713e-01	4.1167e-01
100	5.7068e-13	2.3565e-15	4.0932e-15	**7.0456e-15**	2.3849e-13	1	1	**3.1413e-06**	6.3662e-02	1.4619e-02
200	5.1495e-28	3.5613e-35	1.7077e-34	**8.2361e-34**	7.9031e-29	1	1	**5.0312e-16**	1.3092e-04	9.9319e-06
300	1.8799e-42	5.1869e-55	7.2766e-54	**1.0511e-52**	1.2279e-43	1	1	**4.4701e-26**	2.2551e-07	8.7342e-09
400	1.0838e-56	7.5534e-75	3.1169e-73	**1.3569e-71**	2.6054e-58	1	1	**3.7777e-36**	3.8601e-10	9.1426e-12
500	7.5013e-71	1.1e-94	1.3358e-92	**1.7535e-90**	5.8111e-73	1	1	**3.1782e-46**	6.6062e-13	1.0572e-14
600	5.6663e-85	1.6018e-114	5.7251e-112	**2.2664e-109**	1.3067e-87	1	1	**2.6727e-56**	1.1306e-15	1.2993e-17
700	4.4886e-99	2.3326e-134	2.4537e-131	**2.9292e-128**	2.9425e-102	1	1	**2.2475e-66**	1.9348e-18	1.6621e-20
800	3.6573e-113	3.3969e-154	1.0516e-150	**3.7859e-147**	6.6278e-117	1	1	**1.8901e-76**	3.3113e-21	2.1847e-23
900	3.0333e-127	4.9467e-174	4.5071e-170	**4.8932e-166**	1.4929e-131	1	1	**1.5893e-86**	5.6669e-24	2.9277e-26
1000	2.5455e-141	7.2036e-194	1.9317e-189	**6.3243e-185**	3.3628e-146	1	1	**1.3365e-96**	9.6982e-27	3.9781e-29

t	$P\{W_{20,20}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	9.9636e-01	9.914e-01	9.9243e-01	**9.9324e-01**	9.9599e-01	1	1	**9.9998e-01**	1	1
100	6.9075e-01	5.0996e-01	5.4733e-01	**5.7748e-01**	6.7938e-01	1	1	**9.6267e-01**	1	1
200	9.4587e-02	2.2526e-02	4.0307e-02	**5.4226e-02**	9.2704e-02	1	1	**3.5352e-01**	1	1
300	1.0869e-02	7.6549e-04	3.9163e-03	**6.1761e-03**	1.0788e-02	1	1	**6.1852e-02**	1	1
400	1.3263e-03	2.5806e-05	5.1794e-04	**8.3631e-04**	1.3234e-03	1	1	**9.4647e-03**	1	1
500	1.6997e-04	8.6976e-07	7.534e-05	**1.1863e-04**	1.6987e-04	1	1	**1.4201e-03**	1	1
600	2.2519e-05	2.9314e-08	1.1201e-05	**1.7029e-05**	2.2516e-05	1	1	**2.1246e-04**	1	1
700	3.0546e-06	9.8798e-10	1.6729e-06	**2.4557e-06**	3.0546e-06	1	1	**3.1774e-05**	1	1
800	4.2158e-07	3.3298e-11	2.5011e-07	**3.5517e-07**	4.2158e-07	1	1	**4.7516e-06**	1	1
900	5.8957e-08	1.1223e-12	3.7398e-08	**5.1498e-08**	5.8957e-08	1	1	**7.1056e-07**	1	1
1000	8.3309e-09	3.7825e-14	5.5925e-09	**7.4845e-09**	8.3309e-09	1	1	**1.0626e-07**	1	1

Табела 3.11: Резултати за $c = 10$ и $c = 20$, $p_N = \frac{1}{22}$, $p_U = \frac{1}{22}$, $\mathbf{p} = \mathbf{q}(4)$

t	$P\{W_{20,10}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	1.7309e-12	1.2441e-12	1.2856e-12	**1.3332e-12**	1.6437e-12	9.9962e-01	9.9837e-01	**1.0127e-10**	3.3243e-02	2.5113e-02
100	3.4982e-29	9.6148e-30	1.0914e-29	**1.2568e-29**	2.8683e-29	9.6141e-01	9.1478e-01	**1.531e-25**	2.0743e-05	1.2166e-05
200	5.8213e-62	5.5039e-64	8.5896e-64	**1.4128e-63**	3.0007e-62	4.4042e-01	3.0777e-01	**3.1022e-55**	8.7877e-12	3.3596e-12
300	3.3054e-94	3.1506e-98	7.4384e-98	**1.9445e-97**	9.8995e-95	6.9453e-02	3.5428e-02	**6.2848e-85**	3.8804e-18	1.0337e-18
400	3.5869e-126	1.8036e-132	6.6947e-132	**2.8978e-131**	6.1841e-127	5.4951e-03	2.1742e-03	**1.2733e-114**	1.7144e-24	3.4039e-25
500	5.4671e-158	1.0324e-166	6.1113e-166	**4.441e-165**	5.4135e-159	2.8248e-04	9.0905e-05	**2.5796e-144**	7.574e-31	1.1872e-31
600	1.0018e-189	5.9101e-201	5.6068e-200	**6.8703e-199**	5.6631e-191	1.0881e-05	2.9462e-06	**5.2261e-174**	3.3462e-37	4.3437e-38
700	2.0365e-221	3.3832e-235	5.1531e-234	**1.0662e-232**	6.5142e-223	3.4135e-07	7.9714e-08	**1.0587e-203**	1.4783e-43	1.6528e-44
800	4.3956e-253	1.9367e-269	4.7389e-268	**1.6563e-266**	7.8835e-255	9.1884e-09	1.8856e-09	**2.1449e-233**	6.5312e-50	6.4924e-51
900	9.8291e-285	1.1086e-303	4.3589e-302	**2.5739e-300**	9.8038e-287	2.1971e-10	4.0205e-11	**4.3456e-263**	2.8855e-56	2.6164e-57
1000	2.2448e-316	0	0	**0**	1.2367e-318	4.7809e-12	7.8929e-13	**8.8039e-293**	1.2748e-62	1.0761e-63

t	$P\{W_{20,20}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	3.3318e-01	3.2661e-01	3.2732e-01	**3.281e-01**	3.3228e-01	1	1	**4.1779e-01**	9.9989e-01	9.9988e-01
100	1.9581e-03	1.8106e-03	1.8275e-03	**1.846e-03**	1.9405e-03	1	1	**3.2062e-03**	9.6407e-01	9.6354e-01
200	1.3525e-07	1.0565e-07	1.0959e-07	**1.1383e-07**	1.3272e-07	9.979e-01	9.9521e-01	**2.7477e-07**	4.4054e-01	4.405e-01
300	1.2857e-11	7.6425e-12	8.4232e-12	**9.2504e-12**	1.2539e-11	9.0678e-01	8.5725e-01	**3.2608e-11**	6.9454e-02	6.9454e-02
400	1.3109e-15	5.5457e-16	6.7944e-16	**8.1017e-16**	1.2789e-15	5.4485e-01	4.4916e-01	**3.9034e-15**	5.4951e-03	5.4951e-03
500	1.3991e-19	4.0243e-20	5.8095e-20	**7.6594e-20**	1.3703e-19	1.8333e-01	1.285e-01	**4.6731e-19**	2.8248e-04	2.8248e-04
600	1.5404e-23	2.9202e-24	5.3121e-24	**7.7698e-24**	1.5162e-23	3.6743e-02	2.2068e-02	**5.5947e-23**	1.0881e-05	1.0881e-05
700	1.7331e-27	2.1191e-28	5.1985e-28	**8.3412e-28**	1.7137e-27	4.8791e-03	2.5489e-03	**6.6981e-27**	3.4135e-07	3.4135e-07
800	1.9802e-31	1.5377e-32	5.4031e-32	**9.3268e-32**	1.9651e-31	4.6926e-04	2.1636e-04	**8.0191e-31**	9.1884e-09	9.1884e-09
900	2.2881e-35	1.1158e-36	5.8886e-36	**1.0713e-35**	2.2764e-35	3.4947e-05	1.4401e-05	**9.6004e-35**	2.1971e-10	2.1971e-10
1000	2.6655e-39	8.0974e-41	6.64e-40	**1.2516e-39**	2.6567e-39	2.117e-06	7.8807e-07	**1.1494e-38**	4.7809e-12	4.7809e-12

Табела 3.12: Резултати за $c = 10$ и $c = 20$, $p_N = \frac{1}{3}$, $p_U = \frac{1}{4}$, $\mathbf{p} = \mathbf{q}(4)$

t	$P\{W_{20,10}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	3.5891e-09	3.5551e-09	3.5586e-09	**3.5624e-09**	3.584e-09	9.1597e-02	5.8712e-02	**5.0364e-09**	1.1794e-04	1.0145e-04
100	1.2983e-23	1.2471e-23	1.2522e-23	**1.2579e-23**	1.2905e-23	1.2085e-05	3.595e-06	**4.0878e-23**	7.9932e-13	6.1249e-13
200	4.3909e-52	3.7427e-52	3.804e-52	**3.8734e-52**	4.2879e-52	9.8403e-16	1.2324e-16	**7.5454e-51**	7.8368e-29	5.765e-29
300	2.4564e-80	1.7181e-80	1.7814e-80	**1.8546e-80**	2.3292e-80	8.1034e-27	6.5774e-28	**2.2864e-78**	5.5482e-44	3.7901e-44
400	1.5087e-108	8.0301e-109	8.5553e-109	**9.1819e-109**	1.3738e-108	2.6004e-38	1.5753e-39	**7.1151e-106**	5.6796e-59	3.4779e-59
500	9.9616e-137	3.7548e-137	4.1388e-137	**4.6144e-137**	8.623e-137	4.9773e-50	2.4075e-51	**2.2162e-133**	6.0021e-74	3.2912e-74
600	7.0371e-165	1.7558e-165	2.0148e-165	**2.3501e-165**	5.7388e-165	6.8702e-62	2.7658e-63	**6.9031e-161**	6.3568e-89	3.1337e-89
700	5.2944e-193	8.2101e-194	9.8637e-194	**1.2114e-193**	4.0359e-193	7.5681e-74	2.6092e-75	**2.1502e-188**	6.7335e-104	2.9973e-104
800	4.2216e-221	3.8391e-222	4.8534e-222	**6.3126e-222**	2.9883e-221	7.0678e-86	2.1307e-87	**6.6976e-216**	7.1325e-119	2.8792e-119
900	3.5502e-249	1.7951e-250	2.3988e-250	**3.3212e-250**	2.3208e-249	5.8187e-98	1.5584e-99	**2.0862e-243**	7.5552e-134	2.7775e-134
1000	3.1334e-277	8.3941e-279	1.1903e-278	**1.7622e-278**	1.8835e-277	4.3368e-110	1.0449e-111	**6.4983e-271**	8.003e-149	2.6905e-149

t	$P\{W_{20,20}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	2.1349e-02	2.1275e-02	2.1283e-02	**2.1291e-02**	2.1338e-02	9.7127e-01	9.5516e-01	**2.3584e-02**	4.4111e-01	4.3059e-01
100	2.9363e-10	2.8867e-10	2.8919e-10	**2.8977e-10**	2.9293e-10	6.3011e-02	3.9897e-02	**4.2689e-10**	5.988e-05	5.5515e-05
200	3.3263e-26	3.217e-26	3.2289e-26	**3.242e-26**	3.3119e-26	6.9418e-09	2.0231e-09	**5.0834e-26**	1.298e-15	1.2599e-15
300	1.7228e-40	1.6544e-40	1.6622e-40	**1.6708e-40**	1.7146e-40	3.7731e-18	7.1104e-19	**2.4257e-40**	8.32801e-27	8.2915e-27
400	2.9128e-54	2.7356e-54	2.7568e-54	**2.7799e-54**	2.8933e-54	2.3111e-28	3.2283e-29	**4.3029e-54**	2.6063e-38	2.6051e-38
500	5.709e-68	5.1856e-68	5.2504e-68	**5.3208e-68**	5.6556e-68	4.3072e-39	4.7813e-40	**9.1749e-68**	4.9781e-50	4.9779e-50
600	1.1393e-81	9.9343e-82	1.0121e-81	**1.0323e-81**	1.1256e-81	3.7938e-50	3.4937e-51	**1.9889e-81**	6.8703e-62	6.8703e-62
700	2.2905e-95	1.9045e-95	1.9555e-95	**2.0106e-95**	2.2569e-95	1.9952e-61	1.5698e-62	**4.3172e-95**	7.5681e-74	7.5681e-74
800	4.6335e-109	3.6515e-109	3.7853e-109	**3.9291e-109**	4.5545e-109	7.2001e-73	4.9448e-74	**9.3721e-109**	7.0678e-86	7.0678e-86
900	9.4268e-123	7.0009e-123	7.3414e-123	**7.7059e-123**	9.2471e-123	1.9497e-84	1.1879e-85	**2.0346e-122**	5.8187e-98	5.8187e-98
1000	1.9281e-136	1.3423e-136	1.4268e-136	**1.5171e-136**	1.8882e-136	4.2107e-96	2.3056e-97	**4.4168e-136**	4.3368e-110	4.3368e-110

Табела 3.13: Резултати за $c = 10$ и $c = 20$, $p_N = \frac{1}{3}$, $p_U = 0$, $\mathbf{p} = \mathbf{q}(4)$

t	$P\{W_{20,10}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	1.1715e-05	1.1207e-05	1.1257e-05	**1.1314e-05**	1.1637e-05	1	1	**3.4811e-05**	5.8862e-01	5.4915e-01
100	2.843e-15	2.3565e-15	2.4013e-15	**2.4522e-15**	2.7627e-15	1	1	**6.0092e-14**	3.9726e-02	3.1275e-02
200	7.4844e-35	3.5613e-35	3.8333e-35	**4.1613e-35**	6.6838e-35	1	1	**5.383e-32**	4.6471e-05	2.8275e-05
300	2.6421e-54	5.1869e-55	6.0825e-55	**7.2681e-55**	2.0699e-54	1	1	**4.5461e-50**	4.7486e-08	2.3158e-08
400	1.2387e-73	7.5534e-75	9.8953e-75	**1.3392e-74**	8.2274e-74	1	1	**3.8375e-68**	4.8351e-11	1.9266e-11
500	7.3392e-93	1.1301e-94	1.6413e-94	**2.5721e-94**	4.0418e-93	1	1	**3.2394e-86**	4.9227e-14	1.631e-14
600	5.2448e-112	1.6018e-114	2.7619e-114	**5.0931e-114**	2.3645e-112	1	1	**2.7344e-104**	5.0119e-17	1.4038e-17
700	4.3436e-131	2.3326e-134	4.6961e-134	**1.0308e-133**	1.5926e-131	1	1	**2.3082e-122**	5.1027e-20	1.2272e-20
800	4.0351e-150	3.3969e-154	8.0434e-154	**2.1186e-153**	1.1997e-150	1	1	**1.9484e-140**	5.1951e-23	1.0885e-23
900	4.0981e-169	4.9467e-174	1.3847e-173	**4.3996e-173**	9.8691e-170	1	1	**1.6447e-158**	5.2893e-26	9.7851e-27
1000	4.461e-188	7.2036e-194	2.392e-193	**9.201e-193**	8.6959e-189	1	1	**1.3884e-176**	5.3851e-29	8.9056e-30

t	$P\{W_{20,20}>t\}$	$L^{(0,1)}(t)$	$L^{(1,1)}(t)$	$L^{(2,1)}(t)$	$L^{(10,1)}(t)$	$U^{(19,3)}(t)$	$U^{(20,3)}(t)$	$U^{(1,2)}(t)$	$U^{(10,2)}(t)$	$U^{(10,3)}(t)$
50	9.9159e-01	9.914e-01	9.9142e-01	**9.9145e-01**	9.9157e-01	1	1	**9.944e-01**	1	1
100	5.1567e-01	5.0996e-01	5.1059e-01	**5.1128e-01**	5.1493e-01	1	1	**5.8266e-01**	1	1
200	2.3945e-02	2.2526e-02	2.2693e-02	**2.2876e-02**	2.3783e-02	1	1	**3.4855e-02**	1	1
300	8.7724e-04	7.6549e-04	7.7959e-04	**7.9488e-04**	8.6632e-04	1	1	**1.5229e-03**	1	1
400	3.2698e-05	2.5806e-05	2.6733e-05	**2.7729e-05**	3.2123e-05	1	1	**6.5709e-05**	1	1
500	1.2463e-06	8.6976e-07	9.2346e-07	**9.8077e-07**	1.2196e-06	1	1	**2.8337e-06**	1	1
600	4.8431e-08	2.9314e-08	3.2192e-08	**3.5243e-08**	4.7289e-08	1	1	**1.2221e-07**	1	1
700	1.9131e-09	9.8798e-10	1.1343e-09	**1.2886e-09**	1.8666e-09	1	1	**5.2698e-09**	1	1
800	7.6604e-11	3.3298e-11	4.0472e-11	**4.7986e-11**	7.4791e-11	1	1	**2.2725e-10**	1	1
900	3.1024e-12	1.1223e-12	1.4643e-12	**1.8207e-12**	3.0335e-12	1	1	**9.8001e-12**	1	1
1000	1.2683e-13	3.7825e-14	5.3799e-14	**7.0363e-14**	1.2427e-13	1	1	**4.2262e-13**	1	1

Глава 4

Проблем сакупљања купона са купоном који омета комплетирање колекције

У овом поглављу размотрићемо још једно уопштење проблема сакупљања купона где је скуп стандардних купона $\mathbb{N}_n$ допуњен додатним купоном који не припада колекцији и који омета сакупљање стандардних купона (зваћемо га казнени купон). Казнени купон дефинисан је тако да мења циљ експеримента у смислу да се сакупљање купона прекида када се сакупи цела колекција без ометања, или када разлика броја сакупљених казнених купона и стандардних купона постане једнака n. Према томе, из проширеног скупа купона:

$$\mathbb{N}_n^{\diamond} = \{1, 2, \dots, n, \diamond\},$$

где $\diamond$ означава казнени купон, бирају се купони са враћањем. Претпоставимо да се казнени купон бира са вероватноћом $p_{\diamond} < 1$ и сваки стандардни купон $k \in \mathbb{N}_n$ се бира са вероватноћом $p_k = p = \frac{1-p_{\diamond}}{n}$.

Посматрамо случајну величину $W_n^{\diamond}$ која представља време чекања потребно да се сакупи n елемената из скупа $\mathbb{N}_n$ без ометања, или да се сакупи $m \leq n$ стандардних купона (елемената из скупа $\mathbb{N}_n$) и $m+n$ казнених купона. Дакле, случајна величина $W_n^{\diamond}$ може се дефинисати као:

$$W_n^{\diamond} = \inf\{t \geq 0 : |Y_t - Z_t| = n\}, \tag{4.1}$$

где је Y_t број различитих стандардних купона изабраних након t извлачења купона и Z_t је број казнених купона изабраних након t извлачења купона. Ово уопштење проблема сакупљања купона разматрано је у раду [53].

4.1 Проблем сакупљања купона са купоном који омета комплетирање колекције као Марковљев ланац

Проблем сакупљања купона са купоном који омета комплетирање колекције може се представити као дискретан дводимензионални Марковљев ланац $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ дефинисан са $X_t = (Y_t, Z_t)$, где је Y_t број различитих стандардних купона изабраних након t извлачења купона и Z_t је број казнених купона изабраних након t извлачења купона. За овако дефинисан Марковљев ланац простор стања је:

$$S = \{T_0, T_1, \ldots, T_{2n-1}, A\}, \tag{4.2}$$

где су

$$\begin{aligned}
T_0 &= \{(0,0), \ldots, (n-1,0)\}, \quad |T_0| = n, \\
T_i &= \{(0,i), \ldots, (n,i)\}, \quad |T_i| = n+1 \quad i \in \{1,2,\ldots n-1\}, \\
T_i &= \{(i-n+1,i), \ldots, (n,i)\}, \quad |T_i| = 2n-i \quad i \in \{n, n+1, \ldots 2n-1\}
\end{aligned}$$

скупови пролазних стања и

$$A = \{(n,0),\ (0,n),\ (1,n+1) \ldots (n,2n)\} \tag{4.3}$$

је скуп апсорбујућих стања. Према томе, укупан број стања је
$|S| = \frac{3n^2+3n-2}{2} + n + 2$.

Користећи ознаке уведене у претходном поглављу, матрица вероватноћа прелаза за један корак за размотрени ланац Маркова дата је са:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q^*}_{\frac{3n^2+3n-2}{2} \times \frac{3n^2+3n-2}{2}} & \mathbf{R}_{\frac{3n^2+3n-2}{2} \times (n+2)} \\ \mathbf{0}_{(n+2) \times \frac{3n^2+3n-2}{2}} & \mathbf{I}_{n+2} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

где матрица $\mathbf{Q}^*$ садржи вероватноће прелаза између пролазних стања и једнака је:

$$\mathbf{Q}^* = \begin{array}{c} \\ T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \\ T_{n+1} \\ \vdots \\ T_{2n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} T_0 & T_1 & T_2 & \dots & T_{n-1} & T_n & T_{n+1} & \dots & T_{2n-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1}^{(0)} & p_\diamond \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^{(0)} & p_\diamond \mathbf{I}_{n+1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^{(0)} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_n^{(0)} & p_\diamond \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^{(1)} & \mathbf{B}_n & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_n^{(n)} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{4.5}$$

Матрица $\mathbf{A}_k^{(l)}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $l \in \{0, 1, \dots k\}$ садржи вероватноће прелаза између скупова стања T_i, $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ и има облик:

$$\mathbf{A}_k^{(l)} = \begin{pmatrix} lp & 1-p_\diamond-pl & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (l+1)p & 1-p_\diamond-(l+1)p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (l+2)p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k-1)p & 1-p_\diamond-(k-1)p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & kp \end{pmatrix}_{(k+1-l)\times(k+1-l)}.$$

Матрица $\mathbf{B}_k$, $k \in \{2, \dots, n\}$ садржи вероватноће прелаза из скупа стања T_i у скупове стања T_{i+1}, $i \in \{n, n+1, \dots 2n-1\}$ и има облик:

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1\times(k-1)} \\ p_\diamond \mathbf{I}_{(k-1)} \end{pmatrix}_{k\times(k-1)}. \tag{4.6}$$

Матрица $\mathbf{R}$ садржи вероватноће прелаза из пролазних стања у апсорбујућа стања и има облик:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{0}_{(n^2-n-2)\times(n+2)} \\ \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{n+1} \end{pmatrix}_{\frac{3n^2+3n-2}{2}\times(n+2)}, \tag{4.7}$$

где су:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(n-1)\times(n+1)} \\ p & \mathbf{0}_{1\times(n+1)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1\times k} & p_\diamond & \mathbf{0}_{1\times(n+1-k)} \\ \mathbf{0}_{(n+1-k)\times k} & \mathbf{0}_{(n+1-k)\times 1} & \mathbf{0}_{(n+1-k)\times(n+1-k)} \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n+1.$$

4.2 Особине времена чекања $W_n^\diamond$

У овом поглављу одређена је функција расподеле, први и други момент времена чекања $W_n^\diamond$, и анализиране су неке особине ових величина.

Теорема 4.1. *За $0 < p_\diamond < 1$, важе следеће једнакости за време чекања $W_n^\diamond$:*

1.

$$\begin{aligned} P\{W_n^\diamond > t\} = & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{k(1-p_\diamond)}{n}\right)^t + \sum_{i=-n+1}^{n-1} \binom{t}{n+i} p_\diamond^{n+i} (1-p_\diamond)^{t-n-i} \\ & - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{n-k-1}{n-i-1} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^{t-i-n} \binom{t}{n+i} p_\diamond^{n+i} (1-p_\diamond)^{t-n-i}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

2.

$$E(W_n^\diamond) = \frac{1}{p_\diamond} \left(2n - \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{\alpha}+1\right)} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(k\alpha)^{k-1}}{(1+k\alpha)^{2n}} \right), \tag{4.9}$$

3.

$$\begin{aligned} E(W_n^\diamond)^2 = & \frac{1}{p_\diamond} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{\alpha}+1\right)} - \frac{2}{p_\diamond^2} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{\alpha}+1\right)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha k + 1} \\ & + \frac{2n}{p_\diamond^2} (2n+1-p_\diamond) + \left(2(2n+1) - \frac{2}{p_\diamond^2 \alpha} - \frac{1}{p_\diamond}\right) \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(k\alpha)^{k-1}}{(1+k\alpha)^{2n+1}} \\ & + \frac{2}{p_\diamond^2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(k\alpha)^{k-2}}{(1+k\alpha)^{2n+1}} - \left(\frac{1}{p_\diamond} + \frac{2}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(k\alpha)^k}{(1+k\alpha)^{2n+1}}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где је $\alpha = \frac{1-p_\diamond}{np_\diamond}$ и $\Gamma(\cdot)$ означава гама функцију.

Доказ. 1. Како је време чекања $W_n^\diamond$ дефинисано у (4.1), важи једнакост

$$P\{W_n^\diamond > t\} = P\{|Y_t - Z_t| < n\}.$$

Применом формуле потпуне вероватноће имамо да је:

$$\begin{aligned}
P\{W_n^\diamond > t\} &= \sum_{i=-n}^{n-1} P\{|Y_t - Z_t| < n, Z_t = n+i\} \\
&= P\{|Y_t - Z_t| < n, Z_t = 0\} + \sum_{i=-n+1}^{n-1} P\{|Y_t - Z_t| < n, Z_t = n+i\} \\
&= P\{|Y_t - Z_t| < n | Z_t = 0\} P\{Z_t = 0\} + \sum_{i=-n+1}^{n-1} P\{|Y_t - Z_t| < n | Z_t = n+i\} P\{Z_t = n+i\} \\
&= P\{Y_t < n | Z_t = 0\} P\{Z_t = 0\} + \sum_{i=1}^{n-1} P\{Z_t = i\} \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} P\{Y_t \geq i+1 | Z_t = n+i\} P\{Z_t = n+i\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{k(1-p_\diamond)}{n} \right)^t + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{t}{i} p_\diamond^i (1-p_\diamond)^{t-i} \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{n-k-1}{n-i-1} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} \right)^{t-i-n} \right) \binom{t}{n+i} p_\diamond^{n+i} (1-p_\diamond)^{t-n-i}.
\end{aligned}$$

Последња једнакост следи из Теореме 1 (страна 409) у [2]. Користећи ознаке уведене у [2], имамо да је $P\{Y_t < u | Z_t = v\} = P\{T_{u,n}(\mathbf{p}) > t - v\}$, где је $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

2. Први момент случајне величине $W_n^\diamond$ је:

$$\begin{aligned}
E(W_n^\diamond) &= \sum_{t \geq 0} P\{W_n^\diamond > t\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} \sum_{t \geq 0} \left(\frac{k(1-p_\diamond)}{n} \right)^t + \sum_{i=-n+1}^{n-1} \sum_{t \geq 0} \binom{t}{n+i} p_\diamond^{n+i} (1-p_\diamond)^{t-n-i} \\
&- \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{n-k-1}{n-i-1} \binom{n}{k} p_\diamond^{n+i} \sum_{t \geq 0} \binom{t}{n+i} \left(\frac{k}{n} (1-p_\diamond) \right)^{t-i-n}.
\end{aligned}$$

Користећи једнакост (1.3) и једнакост (1.7) добија се тражени исказ.

3. Други момент случајне величине $W_n^\diamond$ једнак је:

$$E(W_n^\diamond)^2 = \sum_{t \geq 0} P\{W_n^\diamond > t\} + 2 \sum_{t \geq 0} t P\{W_n^\diamond > t\}.$$

Користећи (4.33) и једнакости (1.7), (1.3) и (1.8) добија се тражени исказ.

□

Напомена 4.1. *Дисперзија времена чекања $W_n^\diamond$ добија се из једнакости (4.9) и (4.10).*

Последица 4.1. *За $0 < p_\diamond < 1$ имамо:*

$$E(W_n^\diamond) \le \frac{1}{p_\diamond}\left(2n - \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{\alpha}+1\right)} - \frac{n}{(1+\alpha)^{2n}}\right). \tag{4.11}$$

Доказ. Сума у (4.9) задовољава следеће неједнакости:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(k\alpha)^{k-1}}{(1+k\alpha)^{2n}} &\ge \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(k\alpha)^{k-1}}{(1+\alpha)^{2nk}}\\
&\ge \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\alpha^{k-1}}{(1+\alpha)^{2nk}}\\
&= \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)^{2n}}\right)^{n} - \frac{1}{\alpha}\\
&\ge \frac{1}{\alpha}\left(1+n\frac{\alpha}{(1+\alpha)^{2n}}\right) - \frac{1}{\alpha},
\end{aligned}$$

што даје тражени исказ. □

4.3 Фундаментална матрица и њена примена

У овом поглављу одређена је фундаментална матрица $\mathbf{F}^* = (\mathbf{I}-\mathbf{Q}^*)^{-1}$ која одговара ланцу (дефинисаном у поглављу 4.1). Као и раније (у поглављу 3), користећи особине фундаменталне матрице одређени су математичко очекивање и дисперзије времена чекања $W_n^\diamond$, као и неки додатни резултати.

Лема 4.1. *Елемент у m-том реду и j-тој колони матрице $(\mathbf{I}_{k-l+1}-\mathbf{A}_k^{(l)})^{-s}$, где је $k \in \{0,1,\dots,n\}$, $l \in \{0,1,\dots,k\}$, $s \in \mathbb{N}$ једнак је:*

$$\left((\mathbf{I}_{k-l+1}-\mathbf{A}_k^{(l)})^{-s}\right)_{m,j} = \sum_{i=0}^{k-l}(-1)^{j-1+i}\binom{n-l-m+1}{i-m+1}\binom{n-l-i}{j-1-i}\frac{1}{(1-(l+i)p)^s}. \tag{4.12}$$

Доказ. Прво, уочимо да је матрица $(\mathbf{I}_{k-l+1}-\mathbf{A}_k^{(l)})^{-1}$ горње троугаона, па су њене сопствене вредности једнаке елементима на главној дијагонали:

$$\lambda_i = \frac{1}{1-(l+i)p}, \quad i \in \{0,1,\dots,k-l\}. \tag{4.13}$$

Одређивањем одговарајућих сопствених вектора долази се до израза:

$$(\mathbf{I}_{k-l+1} - \mathbf{A}_k^{(l)})^{-s} = \mathbf{M}_k^{(l)} \mathbf{J}_{k-l}^{(s)} (\mathbf{M}_k^{(l)})^{-1}, \tag{4.14}$$

где је:

$$\mathbf{J}_{k-l}^{(s)} = \begin{pmatrix} \lambda_0^s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^s & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_{k-l}^s \end{pmatrix},$$

и елементи у m-том реду и j-тој колони матрица $\mathbf{M}_k^{(l)}$ и $(\mathbf{M}_k^{(l)})^{-1}$ дати су са:

$$\left(\mathbf{M}_k^{(l)}\right)_{m,j} = \begin{cases} \binom{n-l-(m-1)}{j-1}, & m \leq j; \\ 0, & m > j, \end{cases} \tag{4.15}$$

и

$$\left((\mathbf{M}_k^{(l)})^{-1}\right)_{m,j} = \begin{cases} (-1)^{m+j}\binom{n-l-(m-1)}{j-1}, & m \leq j; \\ 0, & m > j, \end{cases} \tag{4.16}$$

редом.

Множењем матрица (4.14) долазимо до израза (4.12). □

Пре него што одредимо фундаменталну матрицу, приметимо да је матрица $\mathbf{Q}_n^*$ горње троугаона блок матрица облика:

$$\mathbf{Q}_n^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1}^{(0)} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_n \end{pmatrix}_{\frac{3n^2+3n-2}{2} \times \frac{3n^2+3n-2}{2}}, \tag{4.17}$$

где су:

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} p_\diamond \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{n \times \frac{3n^2+n-2}{2}}, \quad \mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^{(n-1)} & \beta^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_n^{(n)} \end{pmatrix}_{\frac{3n^2+n-2}{2} \times \frac{3n^2+n-2}{2}}, \tag{4.18}$$

$$\alpha_n^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n^{(0)} & p_\diamond \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^{(0)} & p_\diamond \mathbf{I}_{n+1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_n^{(0)} & p_\diamond \mathbf{I}_{n+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^{(0)} \end{pmatrix}_{k(n+1) \times k(n+1)}, \tag{4.19}$$

$$\beta^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ p_\diamond \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(n^2-1) \times \frac{n(n+1)}{2}}, \tag{4.20}$$

$$\mathbf{D}_n^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n^{(1)} & \mathbf{B}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^{(2)} & \mathbf{B}_{n-1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_n^{(k-1)} & \mathbf{B}_{n-k+2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^{(k)} \end{pmatrix}_{\frac{k(2n-k+1)}{2} \times \frac{k(2n-k+1)}{2}} . \tag{4.21}$$

Лема 4.2. *За горње троугаону блок матрицу $\alpha_n^{(k)}$ дефинисану са (4.19) важи следећа једнакост за $k \geq 1$:*

$$(\mathbf{I} - \alpha_n^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_n^{(1)} & \mathbf{V}_n^{(2)} & \dots & \mathbf{V}_n^{(k)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_n^{(1)} & \dots & \mathbf{V}_n^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V}_n^{(1)} \end{pmatrix}_{k(n+1) \times k(n+1)} , \tag{4.22}$$

где је $\mathbf{V}_n^{(l)} = p_\diamond^{l-1} \left((\mathbf{I}_{n+1} - \mathbf{A}_n^{(0)})^{-1} \right)^l$.

Доказ. Доказ леме следи применом математичке индукције по k.
За $k = 1$ важи:

$$(\mathbf{I} - \alpha_n^{(1)})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_n^{(0)})^{-1} = \mathbf{V}_n^{(1)}.$$

Претпоставимо да једнакост (4.22) важи за све димензије које су мање од k, докажимо да она важи и за k користећи лему 4.1. Приметимо да је:

$$(\mathbf{I} - \alpha_n^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_n^{(1)} & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \alpha_n^{(k-1)})^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

где је:

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}_n^{(1)} \mathbf{Y}_n (\mathbf{I} - \alpha_n^{(k-1)})^{-1}, \quad \mathbf{Y}_n = (p_\diamond \mathbf{I}_{n+1} \quad \mathbf{0})_{(n+1) \times (k-1)(n+1)} .$$

Нека је:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p_\diamond \mathbf{V}_n^{(1)} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(n+1) \times (k-1)(n+1)} , \tag{4.24}$$

тада имамо:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}(\mathbf{I} - \alpha_n^{(k-1)})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_n^{(2)} & \mathbf{V}_n^{(3)} & \dots & \mathbf{V}_n^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

чиме је лема доказана. □

Лема 4.3. *За горње троугаону блок матрицу $\mathbf{D}_n^{(k)}$ дефинисану у (4.21) следећа једнакост важи за $k \geq 1$:*

$$(\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_n^{(1,0)} & \mathbf{U}_n^{(1,1)} & \dots & \mathbf{U}_n^{(1,k-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(2,0)} & \dots & \mathbf{U}_n^{(2,k-2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{U}_n^{(k,0)} \end{pmatrix}_{\frac{k(2n-k+1)}{2}\times\frac{k(2n-k+1)}{2}}, \tag{4.26}$$

где је:

$$\mathbf{U}_n^{(i,m)} = p_\diamond^m(\mathbf{I}-\mathbf{A}_n^{(i)})^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{1\times(n-i)} \\ \mathbf{I}_{n-i}\end{pmatrix}(\mathbf{I}-\mathbf{A}_n^{(i+1)})^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{1\times(n-i-1)} \\ \mathbf{I}_{n-i-1}\end{pmatrix}\dots(\mathbf{I}-\mathbf{A}_n^{(m+i)})^{-1},$$

за $i = 1, 2, \dots k$ и $m = 0, 1, \dots, k-i$.

Доказ. Лему доказујемо применом математичке индукције по k.
За $k = 1$ једнакост (4.26) важи:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(1)})^{-1} = \mathbf{U}_n^{(1,0)}.$$

Претпостављамо да (4.26) важи за све димензије мање од k, па доказујемо да важи и за k користећи лему 4.1. Имамо да је:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix}(\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(k-1)})^{-1} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(k,0)}\end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

где је:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(k-1)})^{-1}\mathbf{Z}_n\mathbf{U}_n^{(k,0)}, \quad \mathbf{Z}_n = \begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{n-k+2}\end{pmatrix}_{\frac{(2n-k+1)k}{2}\times(n-k+1)}.$$

Нека је:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix}\mathbf{0} \\ p_\diamond\mathbf{U}_n^{(k,0)}\end{pmatrix}_{\frac{(2n-k+1)k}{2}\times(n-k+1)}. \tag{4.28}$$

Тада имамо:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(k-1)})^{-1}\mathbf{T} = \begin{pmatrix}\mathbf{U}_n^{(1,k-1)} \\ \mathbf{U}_n^{(2,k-2)} \\ \vdots \\ \mathbf{U}_n^{(k-1,1)}\end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

чиме је лема доказана. □

Теорема 4.2. *Фундаментална матрица* $\mathbf{F}_n^* = (\mathbf{I}-\mathbf{Q}_n^*)^{-1}$ *може се приказати на следећи начин:*

$$\mathbf{F}_n^* = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{n-1}^{(1)} & \mathbf{K}_n^{(1)} & \mathbf{K}_n^{(2)} & \dots & \mathbf{K}_n^{(n-1)} & \mathbf{L}_n^{(1)} & \mathbf{L}_n^{(2)} & \dots & \mathbf{L}_n^{(n)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_n^{(1)} & \mathbf{V}_n^{(2)} & \dots & \mathbf{V}_n^{(n-1)} & \mathbf{M}_n^{(1,1)} & \mathbf{M}_n^{(1,2)} & \dots & \mathbf{M}_n^{(1,n)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_n^{(1)} & \dots & \mathbf{V}_n^{(n-2)} & \mathbf{M}_n^{(2,1)} & \mathbf{M}_n^{(2,2)} & \dots & \mathbf{M}_n^{(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V}_n^{(1)} & \mathbf{M}_n^{(n-1,1)} & \mathbf{M}_n^{(n-1,2)} & \dots & \mathbf{M}_n^{(n-1,n)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(1,0)} & \mathbf{U}_n^{(1,1)} & \dots & \mathbf{U}_n^{(1,n-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_n^{(2,0)} & \dots & \mathbf{U}_n^{(2,n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{U}_n^{(n,0)} \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

где су:

$$\mathbf{K}_n^{(l)} = \begin{bmatrix} p_\diamond \mathbf{U}_n^{(0,0)} & \mathbf{0}_{n\times 1} \end{bmatrix} \mathbf{V}_n^{(l)},$$

$$\mathbf{L}_n^{(l)} = \begin{bmatrix} p_\diamond^2 \mathbf{U}_n^{(0,0)} & \mathbf{0}_{n\times 1} \end{bmatrix} \mathbf{V}_n^{(n-2)} \mathbf{U}_n^{(0,l)},$$

$$\mathbf{M}_n^{(i,j)} = (p_\diamond \mathbf{V}_n^{(n-2)})^{n-1-i} \mathbf{U}_n^{(0,j)}.$$

Доказ. Матрица вероватноћа прелаза за један корак $\mathbf{Q}_n^*$ је горње троугаона блок матрица и може се представити као (4.17), па користећи лему 4.22 добијамо да се фундаментална матрица може записати на следећи начин:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q_n^*})^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{A}_{n-1}^{(0)})^{-1} & (\mathbf{I}-\mathbf{A}_{n-1}^{(0)})^{-1}\mathbf{B}^*(\mathbf{I}-\mathbf{C}_n)^{-1} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}-\mathbf{C}_n)^{-1} \end{pmatrix}_{\frac{3n^2+3n-2}{2}\times\frac{3n^2+3n-2}{2}}, \tag{4.31}$$

где су:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{C}_n)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I}-\alpha_n^{(n-1)})^{-1} & (\mathbf{I}-\mathbf{A}_n^*)^{-1}\beta^*(\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(n)})^{-1} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(n)})^{-1} \end{pmatrix}_{\frac{3n^2+n-2}{2}\times\frac{3n^2+n-2}{2}}. \tag{4.32}$$

Приметимо да су изрази за матрице $(\mathbf{I}-\alpha_n^{(n-1)})^{-1}$ и $(\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(n)})^{-1}$ дати са (4.1) и (4.26), редом.

Изрази за матрице $(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{n-1}^{(0)})^{-1}\mathbf{B}^*(\mathbf{I}-\mathbf{C}_n)^{-1}$ и $(\mathbf{I}-\mathbf{A}_n^*)^{-1}\beta^*(\mathbf{I}-\mathbf{D}_n^{(n)})^{-1}$ се тривијално добијају множењем матрица. Дакле, фундаментална матрица има облик дат са (4.30), чиме је теорема доказана. $\square$

Сада можемо приказати други начин за одређивање математичког очекивања и дисперзије за време чекања $W_n^\diamond$.

Користећи теорему 1.3 следи да је очекивано време чекања $W_n^\diamond$ једнако:

$$E(W_n^\diamond) = S_1(\mathbf{E}), \tag{4.33}$$

и дисперзија времена чекања $W_n^\diamond$ једнака је:

$$D(W_n^\diamond) = S_1(\mathbf{V}), \tag{4.34}$$

где су:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_n^* \mathbf{1}_{\frac{3n^2+3n-2}{2}\times 1}, \quad \mathbf{V} = (2\mathbf{F}_n^* - \mathbf{I})\mathbf{E} - \mathbf{E}^{(sq)}, \tag{4.35}$$

и матрица $\mathbf{F}_n^*$ је дефинисана у (4.30).

Комбинујући теорему 4.2 са изразом (4.7), могуће је одредити неколико резултата у вези са врстом сакупљених купона. Један такав резултат дат је у наредној теореми.

Теорема 4.3. *Вероватноћа да су сви купони из скупа $\mathbb{N}_n$ изабрани пре казненог купона једнака је:*

$$p_{(n,0)} = (1 - p_\diamond) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{n}{j} \frac{n-j}{n - j(1-p_\diamond)}. \tag{4.36}$$

Доказ. Први ред матрице $\mathbf{F}^*\mathbf{R}$ садржи вероватноће да ланац полазећи из стања $(0,0)$ заврши у апсорбујућем стању. Такође, уочимо да је вероватноћа да тачно n стандардних купона и 0 казнених купона буде изабрано ако је сакупљена цела колекција, једнака елементу који се налази у првом реду и првој колони матрице $\mathbf{F}^*\mathbf{R}$. Користећи израз за фундаменталну матрицу $\mathbf{F}^*$ добијен у теореми 4.2, као и облик матрице $\mathbf{R}$ дат у (4.7), добија се тражени резултат. □

Пример 4.1. *Нека је $p_\diamond = p_j = 1/(n+1)$, $j \in \mathbb{N}_n$. Ако је сакупљена цела колекција, вероватноћа да су изабрани сви купони из скупа $\mathbb{N}_n$ пре него што је изабран казнени купон једнака је:*

$$p_{(n,0)} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{n}{j} \frac{n-j}{n - j\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}(n-j)\binom{n}{j}\frac{1}{n-n\frac{j}{n+1}} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}(n-j)\binom{n}{j}\frac{n+1}{n+1-j} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}(n-j)\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Последња једнакост следи из идентитета (1.5).

4.4 Веза са случајним лутањем

Уопштење класичног проблема сакупљања купона додавањем казненог купона доводи до интересантне везе са случајним лутањем (или проблем пропасти коцкара). Проблем сакупљања купона са казненим купоном може се посматрати као специјални случај једнодимензионог случајног лутања са апсорбујућим баријерама на нивоима $-n$ и n. Прецизније, честица почиње да се креће по правој и у узастопним временским интервалима може да направи корак у позитивном или негативном смеру или да остане у истој позицији са одређеним вероватноћама. Случајно лутање је ограничено на скуп $S = \{-(n-1), -(n-2), \ldots, 0, \ldots, n-2, n-1\}$ и претпоставимо да када честица изађе из овог скупа, она је у апсорбујућем стању. Вероватноће прелаза су:

$$p_{k,l}^{(i)} = \begin{cases} p_\diamond,\ l = k-1, \\ (1-p_\diamond)\frac{i}{n},\ l = k, \\ (1-p_\diamond)\left(1-\frac{i}{n}\right),\ l = k+1, \\ 0,\ \text{иначе}, \end{cases}$$

при чему је i корака у позитивном смеру већ направљено. Приметимо да ово случајно лутање није симетрично, вероватноћа корака у негативном смеру је константна, а вероватноћа корака у позитивном смеру и вероватноћа да честица остане на истој позицији нису константне, већ зависе од броја корака који су направљени у позитивом смеру до тог тренутка. Такође, јасно је да највише n корака у позитивном смеру честица може да направи.

Класични проблем сакупљања купона добија се за $p_\diamond = 0$. Одговарајуће вероватноће су:

$$q_{k,l}^{(i)} = \begin{cases} \frac{i}{n},\ l = k, \\ \left(1 - \frac{i}{n}\right),\ l = k+1 \\ 0,\ \text{иначе}, \end{cases}$$

где је i корака направљено у позитивном смеру. Приметимо да је у том случају једина апсорбујућа баријера на нивоу n.

Ако је $p_\diamond = \frac{1}{2}$, и уз малу модификацију размотреног проблема дефинишемо време чекања $W_n^{\diamond *}$ на следећи начин:

$$W_n^{\diamond *} = \inf\{t \geq 0 : |Y_n^* - Z_t| = n\}, \tag{4.37}$$

где је Y_n^* укупан број стандардних купона изабраних до тренутка t (било које врсте) добијених и Z_t је број изабраних казнених купона, добијамо симетрично случајно лутање са апсорбујућом баријером. Овај проблем може се на сличан начин описати и као варијанта проблема пропасти коцкара.

Нумерички пример

У овом поглављу дати су нумерички резултати везани за проблем сакупљања купона са казненим купоном. Претпоставимо да је скуп расположивих купона $\mathbb{N}_3^\diamond = \{1, 2, 3, \diamond\}$.

Ако је вероватноћа избора казненог купона $p_\diamond = 1/4$, тада је вероватноћа избора сваког од стандардних купона $k \in \mathbb{N}_3$ једнака $p = p_k = 1/4$. У овом случају матрица вероватноћа прелаза за један корак је:

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccccccccc} (0,0) & (1,0) & (2,0) & (0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) & (0,2) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & (1,3) & (2,3) & (3,3) & (2,4) & (3,4) & (3,5) & (3,0) & (0,3) & (1,4) & (2,5) & (3,6) \end{array} \\
\begin{array}{c} (0,0) \\ (1,0) \\ (2,0) \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (1,1) \\ (2,1) \\ (3,1) \\ (0,2) \\ (1,2) \\ (2,2) \\ (3,2) \\ (1,3) \\ (2,3) \\ (3,3) \\ (3,4) \\ (3,3) \\ (3,0) \\ (0,3) \\ (1,4) \\ (2,5) \\ (3,6) \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Даље, размотримо различите комбинације вероватноћа избора казненог купона $p_\diamond$ и директним множењем матрица добијамо математичко очекивање и дисперзију за време чекања $W_3^\diamond$ користећи формуле (4.33) и (4.34). Резултати су представљени у Табели 4.1. Поређења ради, добијени су

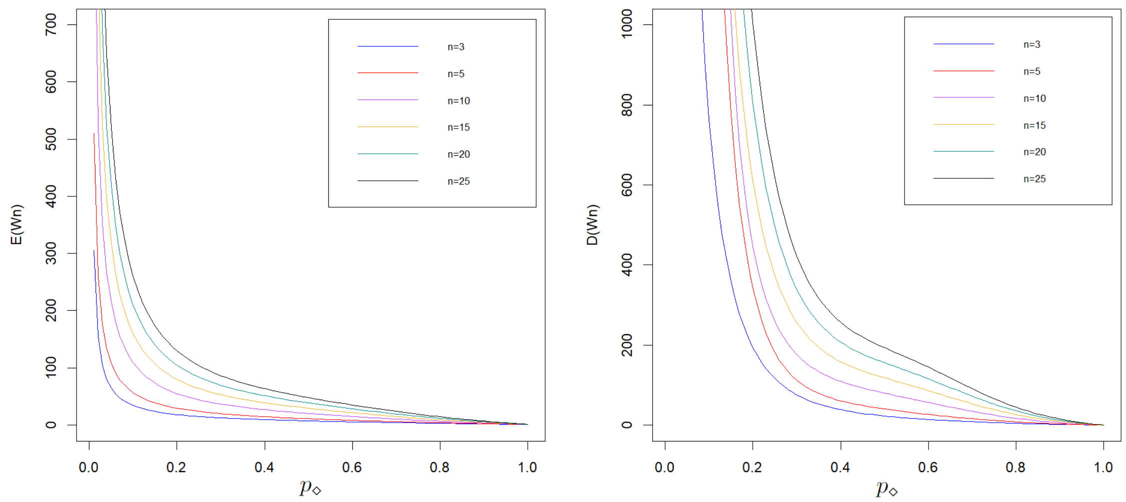
Табела 4.1: Математичко очекивање и дисперзија времена чекања $W_3^\diamond$

	$p_\diamond = \frac{2}{3}$	$p_\diamond = \frac{1}{2}$	$p_\diamond = \frac{1}{4}$	$p_\diamond = \frac{1}{8}$	$p_\diamond = \frac{1}{10}$	$p_\diamond = \frac{1}{20}$	$p_\diamond = \frac{1}{50}$	$p_\diamond = \frac{1}{100}$
$E(W_3)$	4.59	7.26	14.94	27.96	34.21	64.79	155.19	305.35
$D(W_3)$	9.93	22.59	116.22	510.61	763.57	2222.07	7025.53	15219.95

одговарајући резултати за класични проблем сакупљања купона и симетрично случајно лутање са апсорбујућим баријерама на нивоима $-n$ и n.

Поређења ради, користећи формулу за математичко очекивање и дисперзију за случајну величину W_3 за класични проблем сакупљања купона (видети [15] и [55]), добија се да је $E(W_3) = 5.5$ и $D(W_3) = 6.75$, док користећи формуле за математичко очекивање и дисперзију времена чекања $W_3^{\diamond *}$ (видети [43] и [3]), добијамо да је $E(W_3^{\diamond *}) = 15$ и $D(W_3^{\diamond *}) = 48$.

Даље, прикажимо како математичко очекивање и дисперзија времена чекања $W_n^{\diamond}$ зависе од вероватноће $p_{\diamond}$ за различите вредности n.



Слика 4.1: Математичко очекивање и дисперзија за време чекања $W_n^{\diamond}$ у зависности од $p_{\diamond}$ за различите вредности n

Уочимо да је понашање математичког очекивања и дисперзије случајне величине $W_n^{\diamond}$ у складу са теоријским резултатима добијеним у поглављу 4.2. Математичко очекивање и дисперзија времена чекања $W_n^{\diamond}$ опадају када вероватноћа избора казненог купона $p_{\diamond}$ расте. Додатно, може се приметити да је математичко очекивање близу 3 када је вероватноћа избора казненог купона $p_{\diamond}$ близу 1. Такође, математичко очекивање и дисперзија времена чекања $W_n^{\diamond}$ расту како расте n, као што је такође очекивано.

Глава 5

Проблем сакупљања купона са купоном који празни колекцију

Размотримо следеће уопштење проблема сакупљања купона: претпоставимо да постоји специјални купон (тзв. ресет купон) који не припада скупу $\mathbb{N}_n$ и представља ресет дугме у смислу да скуп купона сакупљених након t јединица времена постаје празан ако је ресет купон изабран у $(t+1)$-вом извалачењу. Након тога, процес сакупљања купона може (а не мора) да почне испочетка. Прецизније, разматране су две варијанте овог проблема. Прва варијанта у којој сакупљач престаје са сакупљањем купона након што извуче ресет купон. У другој варијанти се претпоставља да сакупљач након што извуче ресет купон почиње сакупљање купона испочетка. Дакле, посматрамо проширени скуп купона:

$$\mathbb{N}_n^{\otimes} = \{1, 2, \ldots, n, \otimes\}, \tag{5.1}$$

где $\otimes$ означава купон који празни колекцију. Овакву верзију проблема сакупљања купона зваћемо проблем сакупљања купона са ресет купоном. Ово уопштење проблема сакупљања купона разматрано је у раду [25].

Претпоставимо да је вероватноћа избора ресет купона p_R, $0 \leq p_R < 1$ и збир вероватноћа избора стандардних купона $1-p_R$. Очигледно, овај проблем се своди на класични проблем сакупљања купона када је $p_R = 0$.

5.1 Расподела времена чекања до комплетирања колекције

Нека је $W_n^{\otimes}$ случајна величина која представља време чекања потребно да се сакупи цела колекција стандардних купона у случају када у колекцији постоји купон који празни колекцију и нека је W_n време чекања потребно да се сакупи колекција купона у случају када не постоје додатни купони. Расподела времена чекања W_n дата је у теореми 2.1.

У остатку текста користићемо ознаку $D_{i,k}$ за

$$(k_1, k_2, \ldots, k_{i+1}) \in \mathbb{N}_0^{i+1}, k_1 + k_2 + \cdots + k_{i+1} = k - i.$$

Теорема 5.1. *За свако $k \geq 0$, за време чекања $W_n^{\otimes}$ важе следеће једнакости:*

1.

$$P\{W_n^{\otimes} > k\} = \sum_{i=0}^{k} p_R^i (1-p_R)^{k-i} \sum_{D_{i,k}} \prod_{j=1}^{i+1} P\{W_n > k_j\}, \tag{5.2}$$

2.

$$\begin{aligned} P\{W_n^{\otimes} = k\} \quad = \quad & \sum_{i=0}^{k} p_R^i (1-p_R)^{k-i} \sum_{D_{i,k}} \prod_{j=1}^{i} P\{W_n > k_j\} \\ & \left(P\{W_n > k_{i+1} - 1\} - P\{W_n > k_{i+1}\}\right), \end{aligned} \tag{5.3}$$

где је W_n случајна величина која представља време чекања потребно да се сакупи цела колекција купона за класични проблем сакупљања купона.

Доказ. 1. Сваки низ изабраних купона након k извачења може се представити као:

$$B_1 R B_2 R \ldots B_i R B_{i+1}, \tag{5.4}$$

где R означава ресет купон, а B_j, $j \in \{1, 2, \ldots, i+1\}$ означава блок стандардних купона где је дужина блока B_j једнака $k_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{i+1} k_j = k - i$, и ниједан од блокова B_j не садржи целу колекцију стандардних купона.

Дефинишимо догађаје на следећи начин:

- $S_{m,t}$, $t \geq 1, 0 \leq m \leq t$: изабрано m ресет купона након t извлачења;
- Q_k, $k \geq 0$: блок дужине k не садржи целу колекцију стандардних купона.

Према томе, важи једнакост:

$$P\{W_n^{\otimes} > k\} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{D_{i,k}} P\left(S_{i,k} \cap \bigcap_{j=1}^{i+1} Q_{k_j}\right). \tag{5.5}$$

Са друге стране, имамо:

$$P\left(S_{i,k} \cap \bigcap_{j=1}^{i+1} Q_{k_j}\right) = P(S_{i,k}) P\left(\bigcap_{j=1}^{i+1} Q_{k_j} | S_{i,k}\right) = p_R^i (1-p_R)^{k-i} \prod_{j=1}^{i+1} P\{W_n > k_j\}, \tag{5.6}$$

како сви блокови B_j садрже некомплетну колекцију стандардних купона, њихова укупна дужина је $k-i$, и појављивање блокова било које дужине су независни догађаји. Тиме је прво тврђење теореме доказано.

2. Доказ следи једноставном модификацијом првог дела теореме. Свака реализација експеримента може се записати у облику:

$$B_1 R B_2 R \dots B_i R B_{i+1}, \text{ за неко } 0 \le i \le k, \tag{5.7}$$

где ниједан од блокова B_j, $1 \le j \le i$ не садржи целу колекцију купона и блок B_{i+1} садржи целу колекцију купона. Из једнакости:

$$P\{W_n = k_{i+1}\} = P\{W_n > k_{i+1} - 1\} - P\{W_n > k_{i+1}\},$$

следи доказ теореме.

□

Пример 5.1. *Ако је $n = 2$, $p_R = \frac{1}{7}$ и $p_1 = p_2 = \frac{3}{7}$, вероватноћа да није изабрана цела колекција стандардних купона након три извачења једнака је:*

$$P\{W_2^{\otimes} > 3\} = \sum_{i=0}^{3} \left(\frac{1}{7}\right)^i \left(\frac{6}{7}\right)^{3-i} \sum_{D_{i,3}} \prod_{j=1}^{i+1} P\{W_2 > k_j\} = \sum_{i=0}^{3} \left(\frac{1}{7}\right)^i \left(\frac{6}{7}\right)^{3-i} F_{3,i}, \tag{5.8}$$

где су:

$$F_{3,0} = P\{W_2 > 3\} = 0.25,$$
$$F_{3,1} = 2P\{W_2 > 0\}P\{W_2 > 2\} + P\{W_2 > 1\}^2 = 2,$$
$$F_{3,2} = 3P\{W_2 > 1\}P\{W_2 > 0\}^2 = 3,$$
$$F_{3,3} = P\{W_2 > 0\}^4 = 1.$$

Добијамо да је:

$$P\{W_2^{\otimes} > 3\} = 0.4227.$$

Напомена 5.1. *Очекивано време чекања потребно да се сакупи цела колекција добија се из једнакости:*

$$E(W_n^{\otimes}) = \sum_{k \geq 0} P\{W_n^{\otimes} > k\}, \tag{5.9}$$

где је израз за $P\{W_n^{\otimes} > k\}$ дат у формули (5.2).

Познато је да је за велике вредности n, рачунање вероватноћа које се односе на проблем сакупљања купона, постаје рачунски захтевно и потребна је нека врста апроксимације. Овај проблем је још очигледнији за проблем сакупљања купона са ресет купоном. Доња и горња граница за вероватноћу (5.2) могу се добити дикректно примењујући одговарајуће доње и горње границе за вероватноћу која се односи на класични проблем сакупљања купона. Приметимо да је:

$$P\{W_n > k - i\} \leq \sum_{D_{i,k}} \prod_{j=1}^{i+1} P\{W_n > k_j\}, \tag{5.10}$$

па добијамо додатну једноставну (не нарочито прецизну) горњу границу за вероватноћу $P\{W_n^{\otimes} > k\}$:

$$\sum_{i=0}^{k} p_R^i (1 - p_R)^{k-i} P\{W_n > k - i\} \leq P\{W_n^{\otimes} > k\}. \tag{5.11}$$

Напомена 5.2. *Групе доњих и горњих граница за вероватноћу (5.2), могу се добити применом одговарајућих доњих и горњих граница за вероватноћу (2.1) које су дате у раду [51].*

Напомена 5.3. *Нека $W_{n,c}^{\otimes}$ означава време чекања потребно да се сакупи потколекција дужине c, $1 \leq c \leq n$ за проблем сакупљања купона са ресет купоном. Одговарајући резултати који се односе на време чекања $W_{n,c}^{\otimes}$ добијају се аналогно као у теореми 5.1.*

5.2 Примена техника Марковљевих ланаца на случај са једнаким вероватноћама избора купона

Очекивано време чекања потребно да се сакупи колекција или нека потколекција купона може се добити из (5.9). Међутим, ако претпоставимо да сви стандардни купони имају исту вероватноћу да буду изабрани $p = \frac{1-p_R}{n}$, очекивано време чекања потребно да се сакупи цела колекција има једноставнији облик и може се добити применом техника Марковљевих ланаца.

Нека је X_t број различитих стандардних купона изабраних након t јединица времена. Приметимо да је $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ ланац Маркова са скупом стања:

$$S = \{0, 1, \ldots, n-1, n\}. \tag{5.12}$$

У зависности од тога како је дефинисан крај процеса сакупљања, могу се разликовати два карактеристична случаја.

Случај 1: сакупљач купона одустаје након првог ресет купона

У првом случају сакупљач почиње са одређеним бројем купона и додаје нове купоне у своју колекцију док не заврши сакупљање или док се први пут не појави ресет купон.

Матрица вероватноћа прелаза је:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ n-2 \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & \ldots & n-1 & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ p_R & p & (n-1)p & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ p_R & 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-2)p & 2p & 0 \\ p_R & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (n-1)p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{5.13}$$

и

$$v_k = E(\min\{t \geq 0 : X_t = 0, \text{ или } X_t = n\} | X_0 = k), \quad k \in S, \tag{5.14}$$

је време чекања до апсорпције, полазећи из стања k.

Случај 2: сакупљач купона наставља сакупљање након ресет купона

У овом случају сакупљач купона наставља сакупљање док не сакупи целу колекцију, без обзира да ли се десио ресет купон у међувремену.

Матрица вероватноћа прелаза за један корак је:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ n-2 \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n-1 & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_R & 1-p_R & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ p_R & p & (n-1)p & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ p_R & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2)p & 2p & 0 \\ p_R & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad (5.15)$$

и

$$u_k = E(\min\{t \geq 0 : X_t = n\} | X_0 = k) \quad (5.16)$$

је време чекања до апсорпције, полазећи из стања k.

Очекивана времена чекања v_k и u_k, $k \in S$ одређена су у наредној теореми користећи анализу првог корака Марковљевих ланаца.

Теорема 5.2. *1. За очекивано време чекања v_k у случају 1, важи следећа релација:*

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{p} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n-k+1)} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n-k-i)}{\Gamma(n-k-i+1)}, k = 1, \dots, n-1, \\ v_0 &= 0, \\ v_n &= 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где $\Gamma(\cdot)$ означава гама функцију.

2. За очекивано време чекања u_k у случају 2 важи следећа релација:

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{v_k}{(1-p_R)(1-p_R v_1)}, k = 1, 2, \dots, n-1, \\ u_0 &= \frac{1+(1-p_R)v_1}{(1-p_R)(1-p_R v_1)}, \\ u_n &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Доказ. 1. Применом анализе првог корака Марковљевих ланаца са матрицом вероватноћа прелаза (5.13), добијамо да је:

$$v_k = 1 + kpv_k + (n-k)pv_{k+1}, \quad v_0 = v_n = 0. \quad (5.19)$$

Рекурзија (5.19) је решена у [28] (проблем 6.2., стр. 165):

$$v_k = \frac{1}{p_R + (n-k)p} + \frac{h_{k,k+1}}{p_R + (n-k-1)p} + \dots + \frac{h_{k,n-1}}{p_R + p}, \quad (5.20)$$

где је:

$$h_{k,j} = \frac{(n-k)p}{p_R + (n-k)p} \cdot \frac{(n-k-1)p}{p_R + (n-k-1)p} \cdots \frac{(n-j+1)p}{p_R + (n-j+1)p}, \quad k < j. \tag{5.21}$$

Даље имамо да је:

$$\begin{aligned} h_{k,j} &= \frac{n-k}{\frac{p_R}{p} + n - k} \cdot \frac{n-k-1}{\frac{p_R}{p} + n - k - 1} \cdots \frac{n-j+1}{\frac{p_R}{p} + n - j + 1} \\ &= \frac{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\frac{p_R}{p} + n - j + 1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(\frac{p_R}{p} + n - k + 1)}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Сада, израз (5.20) можемо записати као:

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\frac{p_R}{p} + n - k - i + 1)}{(\frac{p_R}{p} + n - k - i)\Gamma(n-k-i+1)\Gamma(\frac{p_R}{p} + n - k + 1)} \\ &= \frac{1}{p} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(\frac{p_R}{p} + n - k + 1)} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{\Gamma(\frac{p_R}{p} + n - k - i + 1)}{(\frac{p_R}{p} + n - k - i)\Gamma(n-k-i+1)} \\ &= \frac{1}{p} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(\frac{p_R}{p} + n - k + 1)} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{\Gamma(\frac{p_R}{p} + n - k - i)}{\Gamma(n-k-i+1)}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

чиме је завршен доказ.

2. Применом анализе првог корака Марковљевих ланаца са матрицом вероватноћа прелаза (5.15), можемо закључити да:

$$u_k = 1 + p_R u_0 + kpu_k + (n-k)pu_{k+1}, \; k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5.24}$$

$$u_0 = 1 + p_R u_0 + (1 - p_R)u_1 \;\text{ и }\; u_n = 0. \tag{5.25}$$

Заменом:

$$v_k = \frac{u_k}{1 + p_R u_0},$$

добијамо једнакост (5.19), и решење је дато у (5.20). Из једнакости (5.25), следи да је:

$$u_0 = \frac{1 + (1 - p_R)v_1}{(1 - p_R)(1 - p_R v_1)}, \tag{5.26}$$

и

$$u_k = \frac{v_k}{(1 - p_R)(1 - p_R v_1)}, k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5.27}$$

чиме је завршен доказ теореме.

□

Пример 5.2. *Ако је $p_R = 0$, добија се стандардни проблем сакупљања купона и очекивано време чекања u_0 постаје очекивано време чекања за класични проблем сакупљања купона. Из једнакости (5.17) за $k = 1$ имамо:*

$$v_1 = n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} = nH_{n-1}^{(1)}(0), \tag{5.28}$$

где је:

$$H_n^{(a)}(b) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+b)^a}. \tag{5.29}$$

Заменом $p_R = 0$ у (5.28) и (5.26) добијамо познати резултат у коме се појављују хармонијски бројеви:

$$u_0 = n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = nH_n^{(1)}(0). \tag{5.30}$$

Очекивана времена чекања v_1 и u_0 су најопштија у смислу да сакупљач мора да чека док не сакупи целу колекцију. Даље, одредимо једноставније изразе за времена v_1 и u_0 ако је $p_R > 0$. У ту сврху, потребна нам је следећа лема.

Лема 5.1. *Нека $(a)_k$ означава опадајући факторијел:*

$$(a)_k = a(a-1)\dots(a-k+1). \tag{5.31}$$

1. *За произвољно $m \in \mathbb{N}$, важи следећа једнакост:*

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(a)_k}{(b)_k} = \frac{a}{b-a+1}\left(1-\frac{(a-1)_m}{(b)_m}\right). \tag{5.32}$$

2. *За произвољно $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq a+1$, важи следећа једнакост:*

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(b+m)}\frac{(a+m)_{m+1}-(b+m-1)_{m+1}}{(a-b+1)(a+m-1)_m}. \tag{5.33}$$

Доказ. 1. Применимо математичку индукцију по m. За $m = 1$, лако се проверава да важи једнакост (5.32). Даље, претпоставимо да (5.32) важи за $m-1$, па проверавамо да (5.32) важи за m. Имамо:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(a)_k}{(b)_k} = \frac{a}{b-a+1}\left(1-\frac{(a-1)_{m-1}}{(b)_{m-1}}\right)+\frac{(a)_m}{(b)_m}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a}{b-a+1}\left(1-\frac{(a-1)_{m-1}}{(b)_{m-1}}+(b-a+1)\frac{(a-1)_{m-1}}{(b)_m}\right)\\
&= \frac{a}{b-a+1}\left(1-(a-m)\frac{(a-1)_{m-1}}{(b)_m}\right)\\
&= \frac{a}{b-a+1}\left(1-\frac{(a-1)_m}{(b)_m}\right),
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

чиме је завршен доказ леме.

2. Користећи (5.32), добијамо:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} &= \sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(a+m-k)}{\Gamma(b+m-k)}\\
&= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(b+m)}\sum_{k=0}^{m}\frac{\frac{\Gamma(a+m-k)}{\Gamma(a+m)}}{\frac{\Gamma(b+m-k)}{\Gamma(b+m)}}\\
&= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(b+m)}\left(1+\sum_{k=1}^{m}\frac{(b+m-1)_k}{(a+m-1)_k}\right)\\
&= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(b+m)}\left(1+\frac{b+m-1}{a-b+1}\left(1-\frac{(b+m-2)_m}{(a+m-1)_m}\right)\right)\\
&= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(b+m)}\left(\frac{a+m}{a-b+1}-\frac{b+m-1}{a-b+1}\frac{(b+m-2)_m}{(a+m-1)_m}\right)\\
&= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(b+m)}\frac{(a+m)_{m+1}-(b+m-1)_{m+1}}{(a-b+1)(a+m-1)_m},
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

чиме је завршен доказ леме.

□

Теорема 5.3. *1. Ако је $p_R > 0$, за очекивано време чекања v_1, важи следећа једнакост:*

$$
v_1 = \frac{1}{p_R}\left(1-\frac{np_R}{1-p_R}B\left(n,\frac{np_R}{1-p_R}\right)\right), \tag{5.36}
$$

где $B(\cdot)$ означава бета функцију.

2. Ако је $p_R > 0$, за очекивано време чекања u_0, важи следећа једнакост:

$$
u_0 = \frac{1}{p_R}\left(\frac{1}{np_RB\left(n,\frac{np_R}{1-p_R}\right)}-1\right). \tag{5.37}
$$

Доказ. 1. За (5.17) следи да је:

$$v_1 = \frac{1}{np}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n-j)}{\Gamma(n-j+1)} = \frac{1}{np}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n)}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\Gamma(\frac{p_R}{p}+j+1)}{\Gamma(j+2)}. \tag{5.38}$$

Ако је $p_R > 0$, применом леме 5.1, добијамо:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{np}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n)}\frac{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n-1)}{\Gamma(n)}\frac{(\frac{p_R}{p}+n-1)_{n-1}-(n-1)_{n-1}}{\frac{p_R}{p}(\frac{p_R}{p}+n-2)_{n-2}} \\ &= \frac{1}{np}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n)}\frac{\Gamma(\frac{p_R}{p}+1)}{(n-1)!}\frac{(\frac{p_R}{p}+n-1)_{n-1}-(n-1)!}{\frac{p_R}{p}} \\ &= \frac{1}{np}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n)}\left(\frac{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n)}{\frac{p_R}{p}\Gamma(n)} - \frac{\Gamma(\frac{p_R}{p}+1)}{\frac{p_R}{p}}\right) \\ &= \frac{1}{p_R}\left(1-\frac{p_R}{p}\frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{p_R}{p})}{\Gamma(\frac{p_R}{p}+n)}\right) \\ &= \frac{1}{p_R}\left(1-\frac{p_R}{p}B\left(n,\frac{p_R}{p}\right)\right). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Користећи једнакост $p = \frac{1-p_R}{n}$, добија се тражено тврђење.

2. Једнакост (5.26) може се записати као:

$$u_0 = \frac{1}{p_R}\left(\frac{1}{(1-p_R)(1-p_R v_1)} - 1\right). \tag{5.40}$$

Заменом (5.39) у једнакост (5.40), добијамо:

$$u_0 = \frac{1}{p_R}\left(\frac{1}{(1-p_R)\frac{p_R}{p}B\left(n,\frac{p_R}{p}\right)} - 1\right) = \frac{1}{p_R}\left(\frac{1}{np_R B\left(n,\frac{np_R}{1-p_R}\right)} - 1\right), \tag{5.41}$$

чиме је завршен доказ теореме.

□

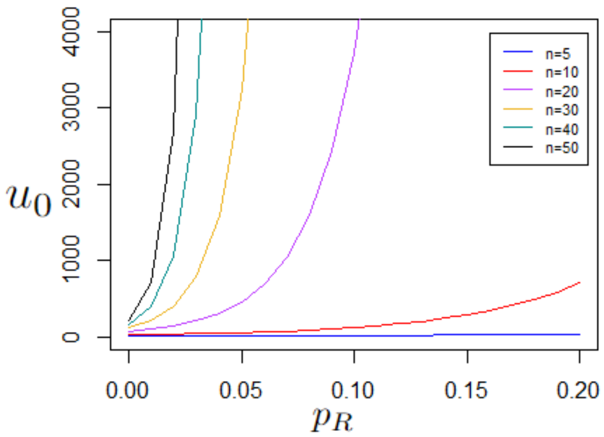
Нумерички резултати

Представимо нумеричке резултате за проблем сакупљања купона са ресет купоном размотрен у овом поглављу. Претпоставимо да је скуп расположивих купона $\mathbb{N}_{10}$. Размотримо различите вероватноће избора ресет купона p_R и одредимо очекивано време чекања $u_0 = u_0^{(10)}$ у том случају користећи формуле (5.26). Резултати су представљени у табели 5.1.

Табела 5.1: Очекивано време чекања $u_0^{(10)}$

	$p_R=\frac{1}{2}$	$p_R=\frac{1}{4}$	$p_R=\frac{1}{8}$	$p_R=\frac{1}{10}$	$p_R=\frac{1}{20}$	$p_R=\frac{1}{50}$	$p_R=\frac{1}{100}$	$p_R=0$
$u_0^{(10)}$	369510	1768.25	191.61	127.21	58.73	38.28	33.42	29.29

Даље, показаћемо како очекивано време чекања u_0 зависи од вероватноће p_R за различите вредности n.



Слика 5.1: Очекивано време чекања u_0 у зависности од p_R за различите вредности n

Приметимо да је понашање u_0 приказано на слици 5.2 у складу са интуицијом коју имамо о проблему сакупљања купона са ресет купоном (ако има више стандардних купона које треба сакупити, продужава се време чекања), u_0 се повећава како расте вероватноћа p_R (јер ресет уклања прикупљене купоне, па продужава време чекања).

У неким разматраним случајевима, такође се може приметити нека врста експоненцијалног раста, што се детаљније разматра у наредном поглављу.

5.3 Асимптотске особине очекиваног времена чекања v_1 и u_0

У овом поглављу анализирамо особине времена чекања до краја процеса прикупљања када број стандардних купона n тежи бесконачности за различите вредности вероватноће p_R. Могу се разликовати случајеви када је p_R фиксирано и када p_R зависи од n.

Ако $p_R \in (0,1)$, може се применити Стирлингова апроксимација за $B\left(n, \frac{np_R}{1-p_R}\right)$ у теореми 5.3 и добити асимптотска процена за u_0, кад $n \to \infty$ дата у следећој последици.

Последица 5.1. *За фиксирано $p_R \in (0,1)$ важи следећа асимптотска релација кад $n \to \infty$:*

$$u_0 \sim \frac{1}{p_R}\left(\frac{1}{\sqrt{2p_R\pi n}(1-p_R)^n p_R^{\frac{np_R}{1-p_R}}} - 1\right). \tag{5.42}$$

Напомена 5.4. *Израз (5.42) може се записати и у алтернативном облику:*

$$u_0 \sim \frac{1}{p_R}\left(\frac{\alpha^{-n}}{\sqrt{2p_R\pi n}} - 1\right), \text{ где је } \alpha = (1-p_R)p_R^{\frac{p_R}{1-p_R}}. \tag{5.43}$$

Релације (5.42) и (5.43) такође важе када p_R зависи од n, у случају када количник $\frac{np_R}{1-p_R} = \frac{p_R}{p}$ тежи бесконачности, када $n \to \infty$.

У случају када је количник $\frac{np_R}{1-p_R}$ ограничен (што значи да се процес прикупљања купона не прекида пречесто ресетовањем), имамо следећи асимптотски резултат.

Последица 5.2. *За $\frac{np_R}{1-p_R} = O(1)$, важи следећа асимптотска релација кад $n \to \infty$:*

$$u_0 \sim \frac{1}{p_R}\left(\frac{n^{\frac{np_R}{1-p_R}}}{(1-p_R)\Gamma(\frac{np_R}{1-p_R}+1)} - 1\right). \tag{5.44}$$

Доказ. Тврђење следи из теореме 5.3 и релације:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{x^{a-b}\Gamma(x+b)} = 1. \tag{5.45}$$

□

У наставку анализирамо неке специјалне случајеве овог проблема.

Пример 5.3. *Ако је $p_R = p = \frac{1}{n+1}$, тј. ако је једнако вероватно да се изабере ресет купон, као било који од стандардних купона, користећи теорему 5.3, добијају се следећи изрази:*

$$v_1 = (n+1)(1 - B(n,1)) = \frac{n^2-1}{n} \sim n, \text{ кад } n \to \infty, \tag{5.46}$$

и

$$u_0 = (n+1)\left(\frac{1}{\frac{n}{n+1}B(n,1)} - 1\right) = n(n+1) \sim n^2, \text{ кад } n \to \infty. \tag{5.47}$$

Овај случај је „решив” у смислу да, за дату вредност u_0 може се једноставно добити $n = n_{u_0}$ тако да је очекивано време чекања мање или једнако од u_0. Прецизније, важи једнакост:

$$n^2 + n \leq u_0,$$

и чињенице да је $n_{u_0} \geq 0$, добија се да је:

$$n_{u_0} \in \left[0, \frac{-1+\sqrt{1+4u_0}}{2}\right].$$

Пример 5.4. *Случај када је $p_R = \frac{1}{2}$ одговара ситуацији, где је количник $\frac{np_R}{1-p_R}$ једнак са n. Применом теореме 5.3, добијају се релације:*

$$v_1 = 2(1 - B(n,n)) \sim 2\left(1 - \frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n-1}}\right), \text{ кад } n \to \infty, \tag{5.48}$$

и

$$u_0 = 2\left(\frac{2}{nB(n,n)} - 1\right) \sim 2\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n^3}} - 1\right), \text{ кад } n \to \infty. \tag{5.49}$$

Глава 6

Закључак

Многи важни комбинаторни проблеми могу се описати као реализација свих догађаја из неке колекције у низу случајних експеримената, односно приказати као варијанта проблема сакупљања купона. Увођењем додатних купона који имају специјалну намену могу се добити различита уопштења овог комбинаторног проблема. У дисертацији су анализирана три различита уопштења: проблем сакупљања купона са универзалним купоном, проблем сакупљања купона са купоном који омета сакупљање купона и проблем сакупљања купона са купоном који празни колекцију.

За проблем сакупљања купона са универзалним и нултим купоном одређена је расподела времена чекања до комплетирања колекције, као и њене додатне особине, применом техника Марковљевих ланаца. У случају када се стандардни купони бирају са неједнаким вероватноћама, одређена је фамилија доњих и горњих граница за времена чекања до краја експеримента, применом теорије мајоризације. Квалитет добијених граница је илустрован нумеричким примерима и у сваком од разматраних случајева дат је лични избор граница које представљају компромис између прецизности и једноставности. Додатно, одређено је асимптотско понашање очекивања и дисперзије времена потребног да се сакупи потколекција купона фиксне величине, у случају када су једна или обе вероватноће избора специјалних купона фиксне, а преостали купони имају једнаке, мале вероватноће. Једно од могућих праваца даљег истраживања овог проблема била би анализа асимптотског понашања истог времена чекања, али у случајевима када вероватноће изброра различитих типова купона теже нули различитим брзинама, као и асимптотско понашање времена чекања потребног да се сакупи цела колекција купона.

У дисертацији је представљен и проблем сакупљања купона са купоном који омета сакупљање купона и применом техника Марковљевог ланца одређено је средње време чекања до комплетирања колекције. Такође, добијене су и асимптотске особине очекивања и дисперзије овог времена чекања. Овај проблем се може разматрати и као посебан случај једнодимензионог случајног лутања са две апсорбујуће баријере, уз додатни услов да вероватноћа корака у позитивном смеру линеарно зависи од броја већ направљених корака. Разматрани проблем пружа и неколико могућности за даља истраживања. Један правац истраживања би био да се добију прецизније процене за очекивање и дисперзију времена чекања у зависности од брзине конвергенције вероватноће избора купона који омета сакупљање купона.

За проблем сакупљања купона са купоном који празни колекцију код кога се стандардни купони бирају са неједнаким вероватноћама одређена је расподела времена чекања, преко одговарајуће расподеле за проблем сакупљања купона са неједнаким вероватноћама. Додатно, уколико се претпостави да се сви стандардни купони бирају са истом вероватноћом, применом анализе првог корака за одговарајуће Марковљеве ланце, добијени су изрази за очекивано време чекања у оба случаја (када се процес не наставља после ресет купона и када се наставља) и добијен је једноставан израз преко бета функције. Одређено је и асимптотско понашање средњег времена чекања при одговарајућим претпоставкама за вероватноћу избора ресет купона и броја стандардних купона.

Сва претходна разматрања указују да постоји још отворених питања која се односе на проблем сакупљања купона и његова различита уопштења.

Литература

[1] Anceaume, E., Busnel, Y., Schulte-Geers, E. and Sericola, B. (2016). Optimization results for a generalized coupon collector problem. *Journal of Applied Probability 53*(2), 622-629.

[2] Anceaume, E., Busnel, Y. and Sericola, B. (2018). New results on a generalized coupon collector problem using Markov chains. *Journal of Applied Probability 52*(2), 405-418.

[3] Anděl, J. and Hudecová, Š. (2012). Variance of the game duration in the gambler's ruin problem. *Statistics* & *Probability Letters, 82*(9), 1750-1754.

[4] Arnold, B. (2007). Majorization: Here, There and Everywhere. *Statistical Science 22*(3), 407-413.

[5] Arnold, B. and Sarabia, J. (2018). *Majorization and the Lorenz Order with Applications in Applied Mathematics and Economics.* Springer.

[6] Baum, L. E. and Billingsley, P. (1965). Asymptotic distributions for the coupon collector's problem. *The Annals of Mathematical Statistics 36*(6), 1835-1839.

[7] Boneh, A. and Hofri, M. (1997). The coupon-collector problem revisited - a survey of engineering problems and computational methods. *Communications in Statistics. Stochastic Models 13*(1), 39-66.

[8] Boneh, S. and Papanicolaou, V. G. (1996). General asymptotic estimates for the Coupon Collector Problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics 67*(2), 277-289.

[9] Caswell, H. (2009). Stage, Age and Individual Stochasticity in Demography. *Oikos 118*(12), 1763-1782.

[10] Dahan, M., Frostig, E. and Langberg, N. A. (2002). Life Insurance Policies with Statistical Heterogeneous Population. *Scandinavian Actuarial Journal 2002*(3), 212-222.

[11] Doumas, A. V. and Papanicolaou V.G. (2012). Asymptotics of the rising moments for the coupon collector's problem. *Electonic Journal of Probability 18*(41), 1-15.

[12] Doumas, A. V. and Papanicolaou V.G. (2012). The Coupon Collector's Problem Revisited: Asymptotics of the Variance. *Advances in Applied Probability 44*(1), 166-195.

[13] Erdős, P. and Rényi, A. (1961). On a classical problem of probability theory. *Magyar Tud Akad Mat Kutato Int Kozl 9*, 133-141.

[14] Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* John Wiley and Sons Inc.

[15] Ferrante, M. and Saltalamacchia, M. (2014). The Coupon Collector's problem. *MATerials MATemàtics 2014*(2), 35.

[16] Ferrante, M. and Tagliavini, A. (2016). On the coupon-collector's problem with several parallel collections. arXiv:1609.04174.

[17] Flajolet, P., Gardy, D. and Thimonier, L. (1992). Birthday paradox, coupon collectors, caching algorithms and self-organizing search. *Discrete Applied Mathematics 39*(3), 207-229.

[18] Fu J. and Lou W. (2003). *Distribution Theory of Runs and Patterns and Its Applications: A Finite Markov Chain Imbedding Approach.* World Scientific.

[19] Holst, L. (1971). Limit Theorems for Some Occupancy and Sequential Occupancy Problems. *The Annals of Mathematical Statistics 42*(5), 1671-1680.

[20] Holst, L. (1986). On Birthday, Collectors', Occupancy and Other Classical Urn Problems. *International Statistical Review 54*(1), 15-27.

[21] Holst, L. (1977). Some Asymptotic Results for Occupancy Problems. *The Annals of Probability 5*(6), 1028-1035.

[22] Hou, W., Ruan, P., Ching, W.K. and Akutsu, T. (2019). On the number of driver nodes for controlling a Boolean network when the targets are restricted to attractors. *Journal of Theoretical Biology 463*, 1-11.

[23] Jocković, J. and Mladenović, P. (2014). Coupon collector's problem and its extensions in extreme value framework. *Statistics and Its Interface 7*, 381-388.

[24] Jocković, J. and Todić, B. Markov chain approach to the coupon collector problem with universal coupon, na recenziji

[25] Jocković, J. and Todić, B. (2024). Coupon Collector Problem with Reset Button. *Mathematics 12*(2), 239.

[26] Jocković, J. and Todić, B. (2024). Some bounds on the coupon collector problem with universal coupon. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius din Constanta 32*(2).

[27] Jocković, J. and Todić, B. (2024). Waiting Time for a Small Subcollection in the Coupon Collector Problem with Universal Coupon. *Journal of Theoretical Probability*, DOI:10.1007/s10959-023-01312-2.

[28] Karlin, S. and Taylor, H.M. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling*, 3rd edition. Academic Press: San Diego.

[29] Kemeny, J. and Snell, L. (1976). *Finite Markov chains*. Springer.

[30] Kershenbaum, A., Freeberg, T. and Gammon, D. (2015). Estimating vocal repertoire size is like collecting coupons: A theoretical framework with heterogeneity in signal abundance. *Journal of theoretical biology 373*, 1-11.

[31] Kim, B. and Kim, J. (2019). Sooner waiting time problems in a sequence of multi-state trials with random rewards. *Statistics & Probability Letters 153*, 171-179.

[32] Luko, S. (2009). The "Coupon Collector's Problem" and Quality Control. *Quality Engineering 21*(2), 168-181.

[33] Mahmoud H. (2009). *Polya Urn Models*. Taylor & Francis.

[34] Marshall, A. W., Olkin, I. and Arnold, B. C. (2011). *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. Springer.

[35] Martinez, S. (2004). Some bounds on the coupon collector problem. *Random Structures & Algorithms 25*(2), 208-226.

[36] Mitzenmacher, M. and Upfal, E. (2005). *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press.

[37] Mladenović, P. (2008). Limit distributions for the problem of collecting pairs. *Bernoulli 14*(2), 419-439.

[38] Myers, A. N. and Wilf, H. S. (2003). Some New Aspects of the Coupon Collector's Problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics 17*(1), 1-17.

[39] Nakata, T. and Kubo, I. (2006). A coupon collector's problem with bonuses. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 215-224.

[40] Neal, P. (2008). The Generalised Coupon Collector Problem. *Journal of Applied Probability 45*(3), 621-629.

[41] Newman D. J. (1960). The Double Dixie Cup Problem. *American Mathematical Monthly 67*(1), 58-61.

[42] Norris, J. R. (1997). *Markov Chains*. Cambridge University Press.

[43] Orosi, G. (2018). Duration Of Play In The Gambler's Ruin Problem: A Novel Derivation. *Applied Mathematics E-Notes 18*(2018), 268–274.

[44] Qi, F., Luo, Q.M. (2013). Bounds for the ratio of two gamma functions: from Wendel's asymptotic relation to Elezović-Giordano-Pečarić's theorem. *Journal of Inequalities and Applications 542*(2013), 1-20.

[45] Quaintance J. and Gould, H. W. (2015). *Combinatorial Identities for Stirling Numbers: The Unpublished Notes of H W Gould*.

[46] Samuel-Cahn, E. (1974). Asymptotic distributions for occupancy and waiting time problems with positive probability of falling through the cells. *The Annals of Probability 2*(3), 515-521.

[47] Schelling H. V. (1954). Coupon Collecting for Unequal Probabilities. *The American Mathematical Monthly 61*(5), 306-311.

[48] Schilling, J. Henze, N. (2021) Two poisson limit theorems for the coupon collector's problem with group drawings. *Journal of Applied Probability 58*(4), 966-977.

[49] Seneta, E. (2008). *Non-negative Matrices and Markov Chains.* Springer.

[50] Sericola B. (2013). *Markov Chains. Theory, Algorithms and Applications.* Springer.

[51] Shioda, S. (2007). Some upper and lower bounds on the coupon collector problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics 200*(1), 154-167.

[52] Stadje, W. (1990). The collector's problem with group drawings. *Advances in Applied Probability 22*(4) 866-882.

[53] Todić, B. (2023). Coupon collector problem with penalty coupon. *Matematički vesnik 76*(1-2), 15-28.

[54] Wild, M., Janson, S., Wagner, S. and Laurie, D. (2013). Coupon collecting and transversals of hypergraphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science 15*(2), 259-270.

[55] Yu, Y. (2017). Minimum variance in the coupon collector's problem. *Journal of Applied Probability 54*(2), 655-656.

[56] Zoroa, N., Lesigne, E., Fernández-Sáez, M. J., Zoroa, P. and Casas, J. (2016). The coupon collector urn model with unequal probabilities in ecology and evolution. *Journal of the Royal Society Interface 14*(127), 1-35.

Биографија аутора

Бојана Тодић рођена је 2. јануара 1993. године у Суботици. Завршила је Гимназију „Светозар Марковић” у Суботици 2011. године, као носилац Вукове дипломе.

Основне студије на Математичком факултету Универзитета у Београду (модул: Статистика, актуарска и финансијска математика) завршила је 2015. године просечном оценом 9.00. Мастер студије на истом модулу завршила је 2016. године просечном оценом 9.75. Мастер рад на тему „Обезбеђење од ризика у финансијској математици” одбранила је 2016. године под менторством проф. др Слободанке Јанковић. Докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду (студијски програм: Математика) уписала је 2016. године. Положила све испите предвиђене наставним планом и програмом просечном оценом 10.00.

На Математичком факултету је запослена од 2015. године, као сарадник у настави од 2015. до 2017. године, а затим у звању асистент од 2017. године, за ужу научну област Вероватноћа и статистика. У том периоду држала је часове вежби на 13 различитих предмета са Катедре за вероватноћу и статистику на основним и мастер студијама, као и предмет Статистика за аутоматску анализу података на мастер студијама Индустрија 4.0 на Машинском факултету Универзитета у Београду.

Учествовала је на неколико научних скупова у земљи и иностранству. До сада је објавила више научних радова у домаћим и међународним часописима. Радови који се односе на тему докторске дисертације објављени су у часописима категорија М21а, М22, М23 и М24. Била је учесник пројекта 174012 Министраства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Бојана Тодић

број индекса 2026/2016

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Комбинаторни проблем сакупљања купона са проширеном колекцијом

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 17. 5. 2024.

Тодић Бојана

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Бојана Тодић

Број индекса 2026/2016

Студијски програм Математика

Наслов рада Комбинаторни проблем сакупљања купона са проширеном колекцијом

Ментор др Јелена Јоцковић

Потписани/а Бојана Тодић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 17.5.2024.

Тодић Бојана

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Комбинаторни проблем сакупљања купона са проширеном колекцијом

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 17.5.2024.

Подић Бојана