

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На 425. седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, одржаној 26. септембра 2025. године, именовани смо у Комисију за оцену докторске дисертације

**Неки типови интеграције оператор-вредносних функција и комплексних
мера са применама на Лапласове трансформере у идеалима компактних
оператора**

кандидата Михаила Крстића. Ментори ове докторске дисертације су проф. др Данко Јоцић, редовни професор Математичког факултета (у пензији) и проф. др Милош Арсеновић, редовни професор Математичког факултета.

Комисија је прегледала приложени текст и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија кандидата

Лични подаци

Име и презиме: Михаило (Аца Јован) Крстић
Место и датум рођења: Ниш, 20. 5. 1994.
Звање: мастер математичар
Електронска адреса: mihailo.krstic@matf.bg.ac.rs

Образовање

Михаило Крстић је основне академске студије на Природно математичком факултету, Универзитета у Нишу, уписао је 2013. године и дипломирао 2016. године са просечном оценом 9.70. Мастер академске студије на Природно математичком факултету, Универзитета у Нишу, модул Општа математика, уписао је 2016. године и дипломирао 2018. године са просечном оценом 9,58.

Докторске академске студије из Математике уписао је 2019. године на Математичком факултету Универзитета у Београду, где је са оценом 10 положио све испите и остварио 154 ЕСПБ.

Радно искуство

Михаило Крстић од 2018. године је у радном односу на Математичком факултету Универзитета у Београду, најпре као сарадник у настави, а након тога од 2019. године као асистент за ужу научну област Математичка анализа (поновни избор 2022. године).

Кандидат је до сада држао вежбе из следећих предмета на Математичком факултету: Анализа 1 (и практикум), Анализа 3А (за М, Н и В смер), Анализа 3Б (за М, Н и В смер), Функционална анализа, Одабрана поглавља реалне анализе. На Физичком

факултету Универзитета у Београду држао је вежбе из Математика 1Б, 1Ц, 2Б, 2Ц, 3Б и 3Ц. У току школске 2024/2025 и 2025/2026 године Михаило Крстић је ангажован и као професор Анализе са алгебром у Математичкој гимназији у Београду.

Учешће на конференцијама и пројектима

1. Конгрес Младих математичара, Нови Сад, Србија, 3. октобар - 5. октобар, 2019, учесник.
2. Конгрес Младих математичара, Нови Сад, Србија, 29. септембар - 1. октобар, 2022, учесник.
3. 8th International Conference on Algebraic Informatics, Ниш, Србија, 30. јун - 4. јул 2019, учесник.
4. XIV Симпозијум математика и примене, учесник и излагач, Београд, 6. и 7. децембар 2024. Излагање: Integration of functions with values in the space of complex measures
5. Трећи сусрет математичара Србије и Црне Горе, Петровац, 2. октобар - 5. октобар 2025. Излагање: Spectral radius subadditivity for integrals of operator-values function

Такође, кандидат је био ангажован као истраживач на научним пројектима „Проблеми нелинеарне анализе, теорије оператора, топологије и примене” (број 174025 Министарство просвете, науке и технолошког развоја) и „Простори функција и оператори на њима” (број 174017 Министарство просвете, науке и технолошког развоја).

2 Списак научних радова кандидата

Следећи научни радови кандидата Михаила Крстића су ушли у састав ове дисертације.

1. M. Krstić, M. Milović, S. Milošević, *Belonging of Gel'fand integral of positive operator valued functions to separable ideals of compact operators on Hilbert space*, Positivity **27** (2023)
<https://doi.org/10.1007/s11117-022-00958-2> (M22, IF 2023: 0.8)
2. M. Krstić, *Weak* integration of functions with values in the set of Hilbert space operators*, Filomat **38** (2024), 10567-10585.
<https://doi.org/10.2298/FIL2430567K> (M21, IF 2024: 0.9)
3. D. R. Jocić, Z. Lj. Golubović, M. Krstić, S. Milašinović, *Norm inequalities for the iterated perturbations of Laplace transformers generated by accretive N -tuples of operators in Q and Q^* ideals of compact operators*, Ann. Funct. Anal. **15** (2024).
<https://doi.org/10.1007/s43034-024-00364-7> (M21, IF 2024: 1.0)
4. M. Arsenović, M. Krstić, *A normed space of weakly integrable operator-valued functions and convergence theorems*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society **51** (2025).
<https://doi.org/10.1007/s41980-024-00965-x> (M22, IF 2024: 0.8)
5. M. Arsenović, V. I. Bogachev, M. Krstić, *Spaces of Measure-Valued Mappings Connected with Disintegrations*, Sib. Math. J. **66** (2025), 248-261.
<https://doi.org/10.1134/S0037446625020028> (M22, IF 2024: 0.7)
6. H. Stanković, M. Krstić, *Spectral radius subadditivity for integrals of operator-valued functions*, Anal. Math. **51** (2025), 997-1009.
<https://doi.org/10.1007/s10476-025-00111-7> (M22, IF 2024: 0.5)

7. M. Arsenović, V. I. Bogachev, M. Krstić, *Integration of functions with values in spaces of measures*, Proc. Steklov Inst. Math. (2025).

Прихваћен за публикување

(M23, IF 2024: 0.4)

3 Предмет дисертације

Предложени текст докторске дисертације разматра питања различитих типова интеграције оператор вредносних функција као и функција које узимају вредности у просторима мера. Ови простори, који су типично Банахови, представљају два битна простора у Функционалној анализи.

У првом делу дисертације биће разматране функције облика $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, при чему је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор. Међу разним разматраним питањима напменимо да је доказана некомплетност нормираног простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, где је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор бесконачне димензије.

Након тога презентовани су резултати и примене изложене теорије на Лапласове трансформере у идеалима компактних оператора. Конкретније, нека су Φ, Ψ симетрично нормирајуће функције, $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и нека је

$$\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A,B}X \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}[\mu](\Delta_{A,B})X \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t)$$

Лапласов трансформер генерисан генерализованом деривацијом

$$\Delta_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) : X \mapsto AX + XB,$$

при чему је μ Борелова вероватносна мера на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Ако се оба пара оператора $(A, C), (B, D) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^2$ састоје од међусобно комутирајућих акретивних оператора, тако да су $C - A$ и $D - B$ акретивни оператори и $(C - A)X + X(D - B) \in \mathcal{C}_\Psi(\mathcal{H})$ за неко $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тада је доказано да важи

$$\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A^*,A}(I) - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C^*,C}(I) \geq 0,$$

$$\mathcal{L}[\mu]\Delta_{B,B^*}(I) - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{D,D^*}(I) \geq 0,$$

а разматрана је и неједнакост

$$\left\| \sqrt{C^* + C - A^* - A} (\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A,B}X - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C,D}X) \sqrt{D^* + D - B^* - B} \right\|_\Psi \leq \left\| \sqrt{\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A^*,A}(I) - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C^*,C}(I)} (AX + XB - CX - XD) \sqrt{\mathcal{L}[\mu]\Delta_{B,B^*}(I) - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{D,D^*}(I)} \right\|_\Psi.$$

Такође, горња неједнакост је генерализована на поновљене пертурбације Лапласових трансформера.

Затим, разматрана је интеграција фамилије ограничених оператора који делују између два Банахова простора. Уводи се нови нови концепт интеграције. Прецизније, нека је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и нека су X и Y Банахови простори. Функција $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$, или фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ у $\mathcal{B}(X, Y)$, је *слабо мерљива* (*слабо μ -интеграбилна или pointwise Dunford integrable*) ако је скаларна функција $\varphi_{x,y^*}^{\mathcal{A}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ дата изразом

$$\varphi_{x,y^*}^{\mathcal{A}}(t) = \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \text{ за свако } t \in \Omega, \quad (1)$$

$\mathfrak{M}$ -мерљива (μ -интеграбилна) за свако $x \in X$ и свако $y^* \in Y^*$. Две слабо мерљиве фамилије $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ су μ -еквивалентне ако за свако $x \in X$ и свако $y^* \in Y^*$

имамо $\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle = \langle \mathcal{B}_t x, y^* \rangle$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Применом теореме о затвореном графику је показано да за овакве фамилије важи

$$\|\mathcal{A}\|_{pD} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) < +\infty.$$

Коначност горњег израза даје могућеност за нормирање таквог векторског простора, при чему вршимо идентификацију μ -еквивалентних функција. Добијени простор је означен са $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ (ознака pD потиче од pointwise Dunford).

У дисертацији је испитивана комплетност простора $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ у зависности од Ω , μ и простора X и Y , што проширује помињани резултат о некомплетности простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Напоменимо да је у досадашњој теорији (случај $X = Y = \mathcal{H}$) увек претпостављана сепарабилност Хилбертовог простора $\mathcal{H}$, што у описаним уопштењима није свуда нужно. Изложено је у којим тврђењима сепарабилност разматраних простора игра битну улогу и у одређеним ситуацијама су дати одговарајући контрапримери.

Значајан део излагања који је везан за нормиран простор $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ третира и теореме конвергенције за низове из простора $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$. Те теореме имају облик

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) = \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t),$$

при чему се претпоставља да важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t^{(n)} = \mathcal{A}_t$ за свако $t \in \Omega$. Треба напоменути да се ове граничне вредности разматрају у слабом, јаком и униформном смислу. Те теореме уопштавају стандардне резултате у скаларном случају, као што су теорема о доминантној конвергенцији и Виталијева теорема, на $\mathcal{B}(X, Y)$ -вредносни случај.

У последњем делу дисертација се бави интеграцијом функција које узимају вредности у просторима мера. Нека је на скупу X дата σ -алгебра $\mathcal{B}$ и нека је $\mathcal{A}$ σ -алгебра на скупу Y . Посматрајмо Банахов простор $ca(Y, \mathcal{A})$ свих комплексних мера на $\mathcal{A}$. У општем случају не постоји карактеризација дуалног простора Банаховог простора $ca(Y, \mathcal{A})$.

Са друге стране, сваки скуп $\mathcal{A} \ni A \subset Y$ генерише линеарни функционал $S_A \in ca(Y, \mathcal{A})^*$ изразом $S_A(\nu) = \nu(A)$ за свако $\nu \in ca(Y, \mathcal{A})$. Овако дефинисан функционал S_A је ограничен на $ca(Y, \mathcal{A})$ као и важи $\|S_A\| = 1$ за свако $\emptyset \neq A \in \mathcal{A}$. Зато, природно је посматрати функције $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} : X \rightarrow ca(Y, \mathcal{A})$ за које је функција $X \ni x \mapsto \lambda^x(A) \in \mathbb{C}$ елемент простора $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ за сваки фиксиран скуп $A \in \mathcal{A}$. Са $\mathcal{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ је означен векторски простор свих класа еквиваленције таквих функција, при чему се идентификација оваквих функција врши у следећем смислу. Функције (фамилије мера) $(\lambda^x)_{x \in X}$ и $(\eta^x)_{x \in X}$ на $\mathcal{A}$ су еквивалентне уколико за сваки фиксиран скуп $A \in \mathcal{A}$ важи једнакост $\lambda^x(A) = \eta^x(A)$ за μ -скоро свако $x \in X$. У дисертацији је показано да за свако $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in \mathcal{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ важи

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}} = \sup_{A \in \mathcal{A}} \int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x) < +\infty,$$

што ће послужити при нормирању векторског простора $\mathcal{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$.

За $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in \mathcal{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ и фиксиран скуп $B \in \mathcal{B}$ дефинише се коначно адитивна мера $\int_B \lambda^x d\mu(x) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ изразом

$$\left(\int_B \lambda^x d\mu(x) \right) (A) = \int_B \lambda^x(A) d\mu(x) \text{ за свако } A \in \mathcal{A}.$$

У дисертацији је доказана пребројива адитивност функције $\int_B \lambda^x d\mu(x)$.

Заједно са векторским простором $\mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$, посматраће се и векторски простор $L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A})) \subset \mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ у ком је норма уведена изразом

$$\|\Lambda\|_1 = \|(\lambda^x)_{x \in X}\|_1 = \int_X |\lambda^x|(Y) d\mu(x).$$

Показано је да је са овом нормом простор $L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ Банахов, под извесним претпоставкама које обезбеђују $\mathcal{B}$ -мерљивост функције која се налази под интегралом. Такође, битно је напоменути да простор $L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ није простор Бохнер интеграбилних функција у општем случају, што је значајно. У дисертацији су дати примери у којима функција $X \ni x \mapsto |\lambda^x|(Y) \in \mathbb{R}$ није $\mathcal{B}$ -мерљива. У дисертацији је дат и пример који показује да простори $L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ и $\mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ не морају бити једнаки.

Додатно, заједно са наведеном нормом, разматра се еквивалентна норма на простору $\mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ која је задата изразом

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{\substack{f \in B_1(X) \\ g \in B_1(Y)}} \left| \int_X f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right|,$$

где су $B_1(X)$ и $B_1(Y)$ скупови $\mathcal{B}$ -мерљивих тј. $\mathcal{A}$ -мерљивих функција из X тј. Y у $\mathbb{C}$ и које су по модулу ограничене са 1.

У последњем делу дисертација се бави просторима интеграбилних фамилија мера, где се нормирање врши преко Канторович-Рубинштајнове норме.

4 Научни циљ докторске дисертације

Научни циљ ове докторске дисертације је продубљивање теорије интеграције векторских функција уколико је кодомен функције чији се интеграл разматра једнак простору оператора $\mathcal{B}(X, Y)$ или простору мера $ca(Y, \mathcal{A})$.

Треба напоменути да добијени резултати, који су изложени у дисертацији, нису пре свега везани за теорију Бохнеровог интеграла и нису специјални случај опште теорије, тј. добијени резултати су оригинални и нови. Такође, у дисертацији постоје и оригинални резултати аутора који су везани за теорију Бохнеровог интеграла. Доказано је да уколико је фамилија $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X)$ Бохнер интеграбилна и састављена од међусобно комутирајућих оператора да је у том случају неједнакост

$$r \left(\int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right) \leq \int_{\Omega} r(\mathcal{A}_t) d\mu(t)$$

тачна (последњи интеграл је Бохнеров). Такође, напоменимо да је у дисертацији дат и пример да последња неједнакост не мора бити тачна за слабије типове интеграла оператор-вредносних функција.

Један од значајних научних циљева ове дисертације је развијање слабијег концепта интеграције од добро познатог Петисовог начина интеграције, јер се разматра интеграбилност скаларизоване функције само са једним делом дуалног простора.

Како су до сада били познати неки резултати о интеграцији фамилије оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, циљ дисертације је добијање нових резултата који се тичу интеграције фамилије оператора из $\mathcal{B}(X, Y)$, као што су нпр. резултати који се баве испитивањем комплетности простора $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ као и теорема о доминантној конвергенцији за низове функција из $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

Такође, један од циљева дисертације је примена изложене теорије, што је реализовано разним тврђењима која су везана за Лапласове трансформере у идеалима компактных оператора.

Крајњи циљ дисертације био је да сличан принцип буде примењен на интеграцију функција са вредностима у простору комплексних мера.

5 Приказ дисертације

Број страна дисертације је $vi+190$. Састоји се од увода, пет глава, литературе од 77 библиографских јединица и на крају је наведена биографија кандидата.

У првом поглављу дат је преглед основних појмова тврђења који су коришћени у остатку дисертације.

Друга, трећа, четврта и пета глава садрже оригиналне резултате дисертације.

У другом поглављу дат је преглед до сада већ познатих резултата везаних за интеграцију функција које узимају вредности у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, при чему је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор. Такође, у овом поглављу дисертације дати су и оригинални резултати који проширују већ постојећу теорију, од којих су до неких дошли кандидат сам или са коауторима.

У трећем поглављу дисертација се бави Лапласовим трансформацијама генерисаних генерализованим деривацијама. Разматране су операторне неједнакости оваквих трансформације у случају када су деривације индуковане акретивним операторима. Такође, разматрана су питања норма неједнакостима таквих трансформација у различитим идеалима компактных оператора.

Четврто поглавље продубљује резултате изложене у другом поглављу, јер се разматра интеграција функција које узимају вредности у простору $\mathcal{B}(X, Y)$, при чему су X и Y Банахови простори. Испитивана је комплетност таквог простора, где је у посебним случајевима показано да тај простор није комплетан. Даље су показане одговарајуће теореме конвергенције за низове у тим просторима, при чему добијени резултати представљају уопштене скаларних случајева, међу којима су теорема о доминантној конвергенцији и Виталијева теорема.

Резултати који су садржани у петом поглављу се баве интеграцијом функција које узимају вредности у просторима комплексних мера на задатој σ -алгебри. Уведени тип интеграције оваквих функција је општији него Петисов концепт интеграције.

6 Закључак и предлог комисије

Резултати кандидата Михаила Крстића који су приказани у дисертацији су оригинални и нетривијални и представљају значајан допринос областима теорије мере и интеграције, функционалне анализе и теорије оператора. У тези су, између осталог, разматрани нови типови интеграције функција које узимају вредности у просторима оператора или у просторима мера и показано је да су разматрани концепти интеграције у овим случајевима општији од добро познатог Петисовог типа интеграције у Банаховом простору.

Резултати приказани у дисертацији су публиковани у седам радова у часописима на SCI листи, од којих је један самостални. Неке од резултата је кандидат представио на XIV Симпозијуму математика и примене у Београду 2024. године и Трећем сусрету математичара Србије и Црне Горе у Петровцу 2025. године.

Докторска дисертација је урађена према одобреној пријави и представља оригинално и самостално научно дело, те констатујемо да су се стекли услови за њену јавну одбрану.

Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст „Неки типови интеграције оператор-вредносних функција и комплексних мера са применама на Лапласове трансформере у идеалима компактних оператора” као докторску дисертацију кандидата Михаила Крстића и одреди комисију за њену јавну одбрану.

У Београду, 10. 11. 2025. године

Чланови комисије:

др Милан Лазаревић, доцент
Математички факултет Универзитета у Београду

др Стефан Милошевић, доцент
Математички факултет Универзитета у Београду

др Петар Мелентијевић, доцент
Математички факултет Универзитета у Београду

проф. др Снежана Живковић Златановић, редовни професор
Природно-математички факултет Универзитета у Нишу

др Стефан Ивковић, научни сарадник
Математички институт САНУ