

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На 424. седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, одржаној 4. јула 2025. године, именовани смо у Комисију за оцену докторске дисертације

Слаба интеграција вектор-вредносних функција са вредностима у идеалима оператора и веза са елементарним операторима

кандидата Матије Миловића. Ментори ове докторске дисертације су проф. др Данко Јоцић, редовни професор Математичког факултета и др Стефан Милошевић, доцент Математичког факултета.

Комисија је прегледала приложени текст и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија кандидата

Лични подаци

Име и презиме: Матија (Вукашић) Миловић
Место и датум рођења: Београд, 22.2.1991.
Звање: мастер математичар
Електронска адреса: matija.milovic@matf.bg.ac.rs

Образовање

Матија Миловић је у трећем разреду основне школе постао члан Школе математике „Архимедес“ и већ од четвртог разреда активно се такмичио са великим успехом. У седмом разреду основне школе постаје део прве генерације огледног одељења Математичке гимназије, а у првом разреду средње школе придружио се „Д одељењу“ за обдарене ученике. Матија је освојио бројне награде, истичући се бронзаним медаљама на јуниорској Олимпијади из астрономије у Пекиngu и јуниорској Балканијади из математике у Кишињеву, као и првом наградом на Републичком такмичењу из математике у другом разреду средње школе. Као представник града Београда на Међународном математичком турниру градова, имао је прилику да учествује у летњој школи у Минску, где је додатно унапредио своје знање и вештине. Матија је 2010. године уписао Математички факултет, на којем је дипломирао 2016. године са изузетном просечном оценом 9,80 на смеру теоријска математика и примене. Исте године уписује мастер студије на Математичком факултету. Мастер рад под називом „Операторне и блок матрице и њихова примена“ одбрао је 2018. године са просечном оценом 10.0. Докторске студије уписује школске 2018/2019. године, при чему је положио све испите са просечном оценом 10.0.

Радно искуство

Матија Миловић од 2016. године почиње са радом на Математичком факултету као сарадник у настави, а затим и као асистент од 2018. године до данас. Матија има богато искуство као предавач, држећи различите курсеве, укључујући практикум из Анализе 1, као и вежбе из Анализе 2 (за И, В и Н смер). Анализе 3А и 3Б (за М, Н и В смерове), Теорију мере и интеграције (за Л смер), Математике 1Б и 1Ц (за студенте физике), Математике 2Б и 2Ц (за студенте физике), Математике 3Б и 3Ц (за студенте физике), Математике 4Б (за студенте физике), Математике 1 и 4 (за астрофизичаре и астроинформатичаре). Одабрана поглавља анализе, Одабрана поглавља реалне анализе и Одабрана поглавља матричне анализе (за математичаре).

Учешће на конференцијама и пројектима

1. М. Миловић, Weak integration of operator valued functions, 15. Српски математички конгрес, Београд, 2024.

Био је члан пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, „Простори функција и оператори на њима“ под бројем 174017 од 2018. године.

2 Списак научних радова кандидата

1. D. R. Jocić, M. Lazarević, M. Milović, *Perturbation norm inequalities for elementary operators generated by analytic functions with positive Taylor coefficients*, Positivity **26** (2022).
<https://doi.org/10.1007/s11117-022-00923-z> (M21, IF 2022: 1.0)
2. M. Krstić, M. Milović, S. Milošević, *Belonging of Gel'fand integral of positive operator valued functions to separable ideals of compact operators on Hilbert space*, Positivity **27** (2023).
<https://doi.org/10.1007/s11117-022-00958-2> (M21, IF 2023: 0.9)
3. M. Milović, *Weak integrability of operator valued functions with values in ideals of compact operators on Hilbert space*, Positivity **28** (2024).
<https://doi.org/10.1007/s11117-024-01047-2> (M21, IF 2024: 0.9)

3 Предмет дисертације

Предмет дисертације је интеграција функција са вредностима у простору ограничених линеарних оператора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, на сепарабилном Хилбертовом простору \mathcal{H} . Са $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ је означен идеал свих компактних линеарних оператора на \mathcal{H} . Свака симетрично нормирајућа (с.п.) функција Φ индукује симетричну норму дефинисану са $\|A\|_\Phi \stackrel{def}{=} \Phi((s_n(A))_{n \in \mathbb{N}})$, где су $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \dots \geq s_n(A) \geq \dots$ сингуларне вредности оператора A , тј. сопствене вредности оператора $|A| \stackrel{def}{=} (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. Свака с.п. норма је природно дефинисана на одговарајућем идеалу $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ оператора из $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ (осим у случају $\Phi \sim \ell^\infty$, када је норма дефинисана на простору свих ограничених оператора, при чему се тада означава са $\mathcal{B}_\Phi(\mathcal{H})$). Са Φ^* се означава адјунгована с.п. функција од Φ . Такође, за свако $p \geq 1$ су дефинисане с.п. функције $\Phi^{(p)}((z_n)_{n \in \mathbb{N}}) \stackrel{def}{=} (\Phi((|z_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}))^{\frac{1}{p}}$ које се

називају p -модификацијама с.п. функције Φ . У случају $p \geq 2$, норме $\|\cdot\|_{\Phi(p)}$ се називају Q норме, а њихове дуалне норме, које одговарају адјунгованој с.п. функцији $\Phi^{(p)*}$, су познате као Q^* норме.

Даље, за $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ је дефинисан оператор двостраног множења $A \otimes B: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}): X \mapsto AXB$. Такође, разматрају се елементарни трансформери, тј. пресликавања облика $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \otimes B_n$ за низове ограничених оператора $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$. За низ оператора $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ се каже да је јако квадратно сумабилан (ј.к.с.) ако је $\sum_{n=1}^{+\infty} \|A_n h\|^2 < +\infty$ за свако $h \in \mathcal{H}$. Први део дисертације се бави извођењем разних пертурбационих неједнакости елементарних трансформера, тј. оценама норми израза у којима фигурише $f(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \otimes B_n) - f(\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \otimes D_n)$, у зависности од ј.к.с. низова $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и њихових адјунгованих низова, њихове међусобне комутативности, као и с.п. функције која индукује задату норму.

Други део дисертације се бави слабом интегралношћу оператор-вредносних функција. Нека је $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ простор са мером и X Банахов простор. За пресликавање $f: \Omega \rightarrow X$ се каже да је слабо мерљиво (интегрално) ако је функција $t \mapsto \langle x^*, f(t) \rangle$ мерљива (интегрална) за свако $x^* \in X^*$. Ако додатно за свако $E \in \mathcal{M}$ постоји $x_E \in X$ такво да је $\langle x^*, x_E \rangle = \int_E \langle x^*, f(t) \rangle d\mu(t)$, каже се да је функција f Петис интегрална и њен Петисов интеграл x_E се означава са $(P) - \int_E f d\mu$. За две слабо мерљиве функције $f, g: \Omega \rightarrow X$ се каже да су слабо еквивалентне ако за свако $x^* \in X^*$ важи $\langle x^*, f(t) \rangle = \langle x^*, g(t) \rangle$ скоро свуда. Са $\mathbb{P}(\Omega, \mathcal{M}, \mu, X)$ је означен простор класа слабо еквивалентних Петис интегралних функција. Слично, за пресликавање $f: \Omega \rightarrow X^*$ се каже да је слабо* мерљиво (интегрално) ако је функција $t \mapsto \langle f(t), x \rangle$ мерљива (интегрална) за свако $x \in X$. Свака таква функција је и Гелфанд интегрална, тј. за свако $E \in \mathcal{M}$ постоји $x_E^* \in X^*$ такво да је $\langle x_E^*, x \rangle = \int_E \langle f(t), x \rangle d\mu(t)$. Гелфандов интеграл такве функције на $E \in \mathcal{M}$ је означен са $(G) - \int_E f d\mu$. Такође, за две слабо* мерљиве функције $f, g: \Omega \rightarrow X^*$ се каже да су слабо* еквивалентне ако за свако $x \in X$ важи $\langle f(t), x \rangle = \langle g(t), x \rangle$ скоро свуда. Простор класа слабо* еквивалентних Гелфанд интегралних функција је означен са $\mathbb{G}(\Omega, \mathcal{M}, \mu, X^*)$.

Са $\mathcal{C}_{\Phi}^{(o)}(\mathcal{H})$ се означава затворење простора оператора коначног ранга (у означи $\mathcal{K}(\mathcal{H})$) у идеалу $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$. Важи да је простор $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ сепарабилан ако и само ако се поклапа са простором $\mathcal{C}_{\Phi}^{(o)}(\mathcal{H})$, у ком случају се с.п. функција Φ назива мононормализујућом. У случају $\Phi \sim \ell^1$ важи дуалност $(\mathcal{C}_{\Phi}^{(o)}(\mathcal{H}))^* \cong \mathcal{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$, док је $(\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H}))^* \cong \mathcal{B}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ у случају $\Phi \sim \ell^1$. Наведене дуалности дају могућност слабе (или слабе*) интеграције оператор-вредносних функција $\mathcal{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$. Предмет дисертације ће бити испитивање потребних и довољних услова Гелфанд и Петис интегралности таквих функција, у зависности од тога да ли је Φ мононормализујућа, као и процена норме таквих пресликавања.

4 Приказ дисертације

Број страна дисертације је viii+77. Састоји се од четири главе и на крају је наведена литература од 35 библиографских јединица.

Прво поглавље је посвећено основним појмовима из теорије оператора на Хилбертовим просторима, теорији мере и интеграције на Банаховим просторима, као и неједнакостима Коши-Шварцовог типа.

У другом поглављу је изложена теорија пертурбација елементарних трансформера. Функције којима се врше пертурбације су индуковане апалитичким

функцијама са позитивним Тејлоровим коефицијентима. Посебно је примењена теорија на случај Шатен-фон Нојманових симетрично нормирајућих функција.

Треће поглавље се бави слабо* интеграцијом $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција као и индукованих $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних мера. Главни акценат је на позитивним оператор-вредносним функцијама које узимају вредности у Шатеновим идеалима. Дати су и одговарајући критеријуми за компактност и нуклеарност Гелфандовог интеграла.

Коначно, четврто поглавље се надовезује на претходно. У њему су изложени резултати везани за критеријуме припадности Гелфандовог интеграла произвољном идеалу компактних оператора. Додатно, користећи теорије симетрично нормирајућих функција и идеала, као и апстрактне интеграције на Банаховим просторима, представљени су резултати о Гелфанд и Петис интеграбилности $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ -вредносних функција

5 Закључак и предлог комисије

Резултати кандидата Матије Миловића који су приказани у дисертацији су оригинални и нетривијални и представљају значајан допринос области функционалне анализе и теорије оператора. У тези су, између осталог, добијени нови потребни и довољни услова Петис интеграбилности оператор-вредносних функција са вредностима у идеалима компактних оператора. Резултати приказани у дисертацији су публиковани у три рада у часописима на SCI листи, од којих је један самостални. Неке од резултата је кандидат представио на 15. Српском математичком конгресу у Београду.

Докторска дисертација је урађена према одобреној пријави и представља оригинално и самостално научно дело, те констатујемо да су се стекли услови за њену јавну одбрану. Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст „Слаба интеграција вектор-вредносних функција са вредностима у идеалима оператора и веза са елементарним операторима” као докторску дисертацију кандидата Матије Миловића и одреди комисију за њену јавну одбрану.

У Београду, 18.8.2025. године

Чланови комисије:

проф. др Милош Арсеновић, редовни професор
Математички факултет Универзитета у Београду

др Милаш Лазаревић, доцент
Математички факултет Универзитета у Београду

проф. др Драган Ђорђевић, редовни професор
Природно-математички факултет Универзитета у Нишу