

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Маша С. Ђорић

**ПОЛИНОМИЈАЛНА ЕНТРОПИЈА
ИНДУКОВАНИХ ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА
НА ХИПЕРПРОСТОРИМА**

докторска дисертација

Београд, 2026.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Maša S. Đorić

**POLYNOMIAL ENTROPY OF INDUCED
DYNAMICAL SYSTEMS ON HYPERSPACES**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2026.

Ментор:

др Јелена КАТИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

Чланови комисије:

др Дарко МИЛИНКОВИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Игор УЉАРЕВИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Борислав ГАЉИЋ, научни саветник
Математички институт САНУ у Београду

Датум одбране: _____

Захвалница

На почетку бих желела да се захвалим својој менторки, проф. Јелени Катић, која је 2022. године имала вере у мене и у мој нови почетак. Заједнички рад са њом донео ми је осећај испуњености и велику радост. Иако ова теза можда долази нешто касније него што је уобичајено, верујем да би свака друга путања до ње била мање вредна. Осећам се привилегованом што сам имала прилику да радим са неким ко је толико посвећен математици и ко јој приступа са толико страсти.

Велику захвалност дугујем и члановима комисије, чије су пажљиво читање и драгоцене сугестије допринели томе да ова теза буде јаснија, потпунија и кориснија будућим читаоцима.

Посебно желим да поменем и свог наставника математике из гимназије, Милана Међа, од кога сам много научила не само о математици, већ и о томе како се математика предаје. Према свом наставнику осећам велико поштовање, које са годинама постаје само веће. Пружио ми је много знања и подршке, а осећај који су његови часови математике у мени будили и данас памтим и брижљиво чувам од заборава.

Моји родитељи и ја одувек смо били тим. Уз њих сам имала слободу да будем оно што јесам и да сама бирам путеве за које верујем да су исправни. Хвала мами и тати за све партије преферанса, за сваку набављену књигу у неким тешким временима, за сваку трему коју су поделили са мном и за безграничну љубав коју сам осећала у сваком тренутку.

Хвала свим професорима, колегама, пријатељима и ђацима који су ме пратили на овом вијугавом путу. Увек сам имала на кога да се ослоним када је било тешко и од кога да чујем речи охрабрења. То никада не узимам здраво за готово и истински сам срећна што сам окружена таквим људима.

Највећу захвалност дугујем својој породици, која је са мном живела и све лепе и све тешке стране овог пута. Хвала мом супругу на стрпљењу, разумевању и подршци, нарочито онда када је за овај рад било потребно пронаћи време тамо где га, наизглед, није било. Хвала мојој деци што су ме свакога дана подсећала да постоји свет много већи од ове тезе и што су, не знајући то, учинила да јој се увек враћам са више ентузијазма.

На крају, скромно се надам да својим примером показујем својој деци, али и деци коју сам имала прилику да подучавам, како се истрајава и како се никада не губи животна радост. Настојим да будем добар амбасадор математике и да својим радом допринесем њеној популаризацији, настави и науци.

Маша Ђорић

Наслов дисертације: Полиномијална ентропија индукованих динамичких система на хиперпросторима

Резиме: У овој тези применили смо метод за израчунавање полиномијалне ентропије динамичких система са коначним нелутајућим скупом на одређене хиперпросторе интервала и круга. Потом смо резултате уопштили и на случај када нелутајући скуп није коначан. Доказали смо да је полиномијална ентропија индукованог пресликавања $C(f)$ једнака 2, $F_n(f)$ једнака n и 2^f једнака бесконачно, када је f хомеоморфизам интервала или круга. Осим тога, уопштили смо резултате за n -тоструки симетрични производ са интервала и круга на произвољан компактан метрички простор X и проширили их са резултатима на суспензији простора $F_n(X)$. Поред резултата на хиперпросторима, приказали смо и резултате који се тичу полиномијалне ентропије на одређеним једнодимензионалним континуумима, као што су локални дендрити и регуларне криве. Такође смо конструисали фамилију тачка-по-тачка периодичних хомеоморфизама на континууму чија полиномијална ентропија узима све вредности из $[0, +\infty]$.

Кључне речи: динамички системи, полиномијална ентропија, хиперпростори, регуларне криве, тачка-по-тачка периодични хомеоморфизми

Научна област: Математика

Ужа научна област: Диференцијалне једначине

Dissertation title: Polynomial entropy of induced dynamical systems on hyperspaces

Abstract: In this thesis, we applied a method for computing the polynomial entropy of dynamical systems with a finite non-wandering set to certain hyperspaces of the interval and the circle. We subsequently generalized these results to the case where the non-wandering set is not finite. We proved that the polynomial entropy of the induced map $C(f)$ is equal to 2, that of $F_n(f)$ is equal to n , and that of 2^f is infinite, when f is a homeomorphism of the interval or the circle. Furthermore, we generalized these results for the n -fold symmetric product of the interval and the circle to an arbitrary compact metric space X and extended them to the suspension of the space $F_n(X)$. In addition to the results on hyperspaces, we presented results concerning polynomial entropy on certain one-dimensional continua, such as local dendrites and regular curves. We also constructed a family of pointwise periodic homeomorphisms on a continuum whose polynomial entropy attains every value in $[0, +\infty]$.

Keywords: topological dynamical systems, polynomial entropy, hyperspaces, regular curves, pointwise periodic homeomorphisms

Research area: Mathematics

Research sub-area: Differential equations

Садржај

Увод	1
1 Основни појмови	3
1.1 Основни појмови тополошке динамике	3
1.2 Ротациони број и Поенкареова класификациона теорема	11
2 Полиномијална ентропија	16
2.1 Тополошка ентропија	16
2.2 Полиномијална ентропија	25
2.3 Кодирање и сингуларне тачке	29
3 Једнодимензионални континууми	37
3.1 Пеанови континууми	37
3.2 Дендрити	38
3.3 Регуларне криве	43
4 Хиперпростори	46
4.1 Важни хиперпростори и Вијеторисова топологија	46
4.2 Примери хиперпростора	50
4.3 Хаусдорфова метрика	54
4.4 Метризабилност хиперпростора $CL(X)$	57
4.5 Важне особине хиперпростора	59
4.6 Индуковани динамички системи на хиперпросторима	60
5 Полиномијална ентропија на регуларним кривама	63
6 Полиномијална ентропија тачка-по-тачка периодичних хомеоморфизама	67
6.1 Тачка-по-тачка периодични хомеоморфизми	67
6.2 Главни резултати	68
7 Полиномијална ентропија на хиперпросторима интервала и круга	79
7.1 $X = [0, 1]$	80
7.2 $X = S^1$	83
8 Полиномијална ентропија на $F_n(X)$ и $SF_n(X)$	91
8.1 Суспензије	91
8.2 Нелутајући скуп индукованих пресликавања	92
8.3 Главна теорема	96

9	Теме за даља истраживања	101
	Библиографија	106
	Биографија аутора	109

Увод

Проучавање сложености тополошких динамичких система представља једну од централних тема теорије динамичких система. Квалитативна анализа и класификација различитих облика динамичког понашања имају значај како са теоријског становишта, тако и у бројним применама. У ту сврху развијени су различити појмови и величине којима се описују и међусобно разликују динамички системи различитих нивоа сложености. Једна од основних и најпознатијих таквих величина је тополошка ентропија.

Тополошка ентропија представља квантитативну меру сложености динамичког система и, у одређеном смислу, описује експоненцијални раст броја међусобно различитих орбита. Њена повезаност са другим важним својствима динамичких система добро је проучена, а посебно место заузима варијациони принцип, који повезује тополошку ентропију са инваријантним мерама и ергодичком теоријом. Тополошка ентропија је израчуната за велики број значајних примера, док су за системе код којих се њена тачна вредност тешко одређује развијене различите методе њене процене.

Ипак, тополошка ентропија није довољно осетљива на разлике између система ниске сложености. Наиме, постоје бројни динамички системи који се са становишта свог понашања значајно разликују, а чија је тополошка ентропија једнака нули. То указује на ограничење експоненцијалног раста као мере сложености у случајевима када динамика не показује експоненцијалну сложеност. Системи са нултом тополошким ентропијом при томе нису без динамичког интереса; напротив, њихово детаљније разликовање захтева финије инваријанте које могу да региструју суптилније облике сложености.

Управо из ове потребе природно се јавља полиномијална ентропија. Она се добија одговарајућом модификацијом приступа који води до тополошке ентропије, при чему се уместо експоненцијалног посматра полиномијални раст броја суштински различитих орбита. На тај начин полиномијална ентропија омогућава разликовање динамичких система чија је тополошка ентропија једнака нули и пружа финију класификацију динамике ниске сложености.

Полиномијална ентропија је уведена релативно недавно у односу на тополошку ентропију, па је интересовање за њу у порасту. Још увек има динамичких система за које није израчуната, док су многа њена својства и даље предмет истраживања. Посебно су занимљиви системи код којих значајну улогу има лутајућа динамика. За разлику од тополошке ентропије, која је у потпуности одређена нелутајућим делом система, полиномијална ентропија може да региструје сложеност која потиче управо од лутајућих орбита. У том смислу, већ само присуство лутајућих тачака има директан утицај на вредност полиномијалне ентропије која у овом случају не може бити мања од 1.

Динамички системи на хиперпросторима представљају природно проширење динамике са простора тачака на просторе његових подскупова. Индукована пресликавања

на овим просторима омогућавају да се динамичка својства полазног система проучавају на сложенијим просторима објеката. При томе се јављају природна питања о томе како се својства као што су хаотичност, транзитивност и вредност тополошке ентропије преносе са базних на индукована пресликавања. Иако је динамика на хиперпросторима у некој мери одређена динамиком полазног система, прелазак са тачака на подскупове може довести до нових и суптилнијих динамичких појава. Због тога су индуковани динамички системи на хиперпросторима предмет бројних истраживања у савременој теорији динамичких система. Посебно је занимљиво испитати како се мере сложености, попут тополошке и полиномијалне ентропије, понашају при овом преласку. У том контексту, проучавање полиномијалне ентропије индукованих пресликавања представља природан наставак истраживања динамике система ниске сложености.

У Глави [1](#) дефинисани су основни појмови тополошке динамике који су нам неопходни за даљи рад, а потом и ротациони број који ће нам бити од значаја јер ћемо се у делу тезе бавити пресликавањима на кругу.

У Глави [2](#) говорили смо о основним особинама тополошке ентропије, како бисмо могли да дефинишемо централни појам, а то је полиномијална ентропија. Поред дефиниције и основних особина, показали смо технику за израчунавање полиномијалне ентропије, која укључује једно специфично кодирање и локализацију полиномијалне ентропије око сингуларних тачака. Овај алат ћемо користити у Глави [7](#).

Глава [3](#) посвећена је једнодимензионалним континуумима, који се појављују кроз примере простора на којима радимо током целе тезе. Посебна класа ових континуума под називом регуларне криве је тема којом се бавимо у Глави [5](#).

Последња глава која је уводног карактера, јер су готово сви резултати познати од раније, јесте Глава [4](#). У њој смо дефинисали хиперпросторе, Вијеторисову топологију на њима, као и Хаусдорфову метрику. Поред тога смо издвојили најважније хиперпросторе на којима ћемо рачунати полиномијалну ентропију, и указали на њихове најважније особине.

У Глави [5](#) и Глави [6](#) представљени су оригинални резултати који се већински тичу полиномијалне ентропије на просторима који нису хиперпростори, са понеком применом на одређене хиперпросторе. Централни резултат Главе [5](#) говори о горњем ограничењу полиномијалне ентропије хомеоморфизама на регуларним кривама, које је једнако 1. Поред тога, показали смо да полиномијална ентропија хомеоморфизама на локалним дендритима може узимати само две вредности - нула или један. У Глави [6](#) смо се бавили занимљивим питањем да ли је полиномијална ентропија тачка-по-тачка периодичног хомеоморфизма једнака нули. Дobili смо и више од негативног одговора, јер смо за сваку вредност $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ успели да конструишемо пример тачка-по-тачка периодичног хомеоморфизма чија је полиномијална ентропија једнака a .

Као што смо поменули, у Глави [7](#) смо применили технику рачунања полиномијалне ентропије које смо увели у Глави [2](#) и помоћу ње добили тачне вредности полиномијалне ентропије индукованих хомеоморфизама на хиперпросторима интервала $[0, 1]$ и круга S^1 . Наредна Глава [8](#) доноси резултате на n -тоструком симетричном производу произвољног компактног метричког простора, као и на његовој суспензији.

У последњој глави смо издвојили неколико отворених проблема који су тесно повезани са темама које смо обрађивали у тези. Како је полиномијална ентропија релативно нова величина, стара тек петнаестак година, ова област обилује лепим отвореним проблемима. Надамо се да резултати до којих смо дошли доприносе бољем разумевању полиномијалне ентропије, као и тумачењу сложености индукованих динамичких система на хиперпросторима.

Глава 1

Основни појмови

У овој глави дефинисаћемо основне појмове и навести најважније особине које ће нам бити потребне за даљи рад. Од обимне литературе која је доступна, ми ћемо се највише ослањати на [36]. У првом одељку говорићемо о основним појмовима тополошке динамике. У другом одељку тема ће нам бити хомеоморфизми на кругу, и специјално ротациони број.

1.1 Основни појмови тополошке динамике

Нека је X компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на њему. Под дискретним тополошким динамичким системом подразумевамо пар (f, X) . Итерације пресликавања f означаваћемо са

$$f^n(x) = f \circ \dots \circ f,$$

подразумевајући да је $f^0 = id$.

Дефиниција 1. *Позитивна орбита тачке $x \in X$ дефинисана је са*

$$\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ако је f инвертибилно (или, еквивалентно, реверзибилно) пресликавање, можемо дефинисати и негативну орбиту

$$\mathcal{O}^-(x) = \{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Орбита тачке је унија позитивне и негативне орбите

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^+(x) \cup \mathcal{O}^-(x).$$

Ако систем није инвертибилан, често ћемо позитивну орбиту називати краће орбитом. Такође, ако желимо да нагласимо и пресликавање, писаћемо $\mathcal{O}_f(x)$.

Дефиниција 2. *Тачка $x \in X$ је фиксна тачка пресликавања f ако је $f(x) = x$. Са $\text{Fix}(f)$ означавамо скуп свих фиксних тачака пресликавања f .*

Општије, од интереса су нам и тачке које су фиксне за неку итерацију од f .

Дефиниција 3. Тачка $x \in X$ је периодична тачка пресликавања f ако постоји $p \geq 1$ тако да је $f^p(x) = x$. Најмање такво p називамо периодом тачке x . Са $\text{Per}(f)$ означавамо скуи периодичних тачака пресликавања f .

Осим фиксних и периодичних тачака, занимају нас и неке друге врсте специфичних тачака, а у вези са понашањем система након много итерација.

Дефиниција 4. Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном X и $x \in X$ произвољна. Тачка y је ω -гранична тачка тачке x ако постоји низ природних бројева $n_k \rightarrow \infty$ такав да је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y.$$

Скуи свих ω -граничних тачака тачке x називамо њеним ω -граничним скуиом и означавамо са $\omega(x)$. Дакле,

$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i \geq n} f^i(x)}.$$

У случају реверзibilног система, можемо дефинисати α -гранични скуи:

$$\alpha(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i \geq n} f^{-i}(x)}.$$

Тачка $y \in \alpha(x)$ назива се α -гранична тачка.

Дефиниција 5. За тачку $x \in X$ кажемо да је рекурентна ако важи

$$x \in \omega(x).$$

Приметимо да се рекурентне тачке могу видети као уопштење периодичних. Наиме, код периодичних тачака је $f^n(x) = x$, за бесконачно много вредности $n \in \mathbb{N}$, док је код рекурентних $f^n(x)$ произвољно близу тачки x , за бесконачно много $n \in \mathbb{N}$. Скуп рекурентних тачака динамичког система (f, X) означаваћемо са $\text{Rec}(f)$.

На крају, дефинишимо нелутајуће тачке, које су уопштење рекурентних, а које ћемо често помињати у остатку тезе.

Дефиниција 6. Тачка $x \in X$ се назива нелутајућа ако за сваку околину $U \ni x$ постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Скуи свих нелутајућих тачака динамичког система означаваћемо са $\text{NW}(f)$.

За тачку која није нелутајућа кажемо да је лутајућа.

Пример 7. Наведимо пример динамичког система код кога је $\text{Rec}(f) \subsetneq \text{NW}(f)$. Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ даћо са $f(x) = 2x \bmod 1$. Тада тачка $x_0 = \frac{1}{2}$ није рекурентна, јер је $f^n(x_0) = 0$, за $n \geq 1$. Међушим, тачка x_0 јесте нелутајућа. Наиме, свака околина U тачке x_0 садржи интервал I , а f^n локално повећава дужину са фактором 2^n . За довољно велико n важиће да је $f^n(I) = \mathbb{S}^1$, па ће самим тим важити да је $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

Занима нас да ли скупови које смо управо дефинисали имају неке особине од значаја. У том циљу, уведемо појам инваријантности подскупа динамичког система.

Дефиниција 8. За $A \subset X$ кажемо да је унапред инваријантан, ако је

$$f^n(A) \subseteq A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ако је систем реверзибилан, за $A \subset X$ кажемо да је уназад инваријантан ако је

$$f^{-n}(A) \subseteq A, \quad n \in \mathbb{N},$$

и инваријантан ако је и унапред и уназад инваријантан, тј. ако је $f(A) = A$.

Као и пре, у случају неинвертибилних динамичких система, можемо позитивно инваријантан скуп краће називати само инваријантан.

Приметимо да је скуп периодичних тачака инваријантан. Такође, и скуп рекурентних тачака је инваријантан. Наиме, ако је $x \in \text{Rec}(f)$, постоји низ $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такав да је $f^{n_k}(x) \rightarrow x$. Али онда је и $f^{n_k}(f(x)) = f(f^{n_k}(x)) \rightarrow f(x)$, па је $f(x) \in \text{Rec}(f)$. Покажимо сада да су још неки важни скупови инваријантни.

Тврђење 9. Скупи $\omega(x)$ је затворен и инваријантан подскупи од X , за свако $x \in X$. Како је простор X компактан, то је $\omega(x)$ непразан скуп.

Доказ. Нека је $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ низ тачака из $\omega(x)$ који конвергира ка тачки y . Желимо да покажемо да је $y \in \omega(x)$. За свако $j \geq 1$ изаберимо k_j тако да је $d(y_{k_j}, y) < 2^{-j}$. Затим изаберимо бројеве n_j тако да је $d(f^{n_j}(x), y_{k_j}) < 2^{-j}$, као и да је $n_j < n_{j+1}$. Из неједнакости троугла следи да је $d(f^{n_j}(x), y) < 2^{1-j}$. Закључујемо да је $y \in \omega(x)$, односно да је $\omega(x)$ затворен скуп. Такође, инклузија $f(\omega(x)) \subseteq \omega(x)$ је очигледна. X је компактан, па низ $f^n(x)$ мора имати конвергентан подниз чија гранична тачка припада скупу $\omega(x)$. Дакле, $\omega(x)$ је непразан. $\square$

Тврђење 10. Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном X . Тада важи:

1. Скуп $\text{NW}(f)$ је затворен и инваријантан;
2. $\omega(x) \subseteq \text{NW}(f)$, за свако $x \in X$;
3. $\overline{\text{Rec}(f)} \subseteq \text{NW}(f)$;
4. Ако је систем реверзибилан онда је и $\text{NW}(f^{-1}) = \text{NW}(f)$.

Доказ. 1. Показаћемо да је комплемент скупа $\text{NW}(f)$ отворен. Нека је $x \notin \text{NW}(f)$ произвољна. Тада постоји околина $U \ni x$ таква да је $f^n(U) \cap U = \emptyset$, за свако $n \geq 1$. Међутим, тада је и свака тачка $y \in U$ лутајућа, па је $X \setminus \text{NW}(f)$ отворен, односно скуп $\text{NW}(f)$ је затворен.

Нека је $x \in \text{NW}(f)$ произвољна и $V \ni f(x)$ околина њене слике. Дефинишимо околину $U \ni x$ тако да је $U = f^{-1}(V)$. Тачка x је нелутајућа, па и за ову околину постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Али тада је и $f^{n-1}(V) \cap V \neq \emptyset$, па је $f(x)$ нелутајућа, односно скуп $\text{NW}(f)$ јесте инваријантан.

2. Нека је $x \in X$ произвољно и $y \in \omega(x)$. Нека је $U \ni y$ произвољна околина тачке y . Тада постоји растући низ $n_k \rightarrow \infty$ такав да $f^{n_k}(x) \rightarrow y$, па постоји $z = f^{n_{k_1}}(x) \in U$. Али из конвергенције низа $f^{n_k}(x)$ следи да мора постојати и $k_2 > k_1$ тако да је $f^{n_{k_2}}(x) \in U$. Дакле нашли смо тачку $z \in U$ тако да је $f^{n_{k_2}-n_{k_1}}(z) \in U$, односно $f^{n_{k_2}-n_{k_1}}(U) \cap U \neq \emptyset$, па је тачка y нелутајућа.

3. Све рекурентне тачке су по дефиницији ω -граничне, а како је $NW(f)$ затворен, наведена инклузија је очигледна.
4. Нека је $x \in X$ нелутајућа. Тада за сваку околину $U \ni x$ постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Пошто је систем реверзибилан, имамо да је

$$f^{-n}(f^n(U) \cap U) = U \cap f^{-n}(U)$$

односно $U \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$, па је $x \in NW(f^{-1})$. Овим смо показали да је $NW(f) \subseteq NW(f^{-1})$. Заменом улога f и f^{-1} добија се обрнута инклузија, то јест закључујемо да су нелутајући скупови пресликавања f и f^{-1} једнаки. $\square$

Поред нелутајућих тачака, још један скуп ће играти важну улогу у поглављу [8](#).

Дефиниција 11. Кажемо да је n -шорка $(y_1, \dots, y_n)$ ε -ланац ако је $d(f(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon$, $1 \leq i \leq n-1$. Тачка $x \in X$ је ε -псеудојериодична ако постоји ε -ланац који почиње и завршава се у x . Коначно, тачка $x \in X$ је ланчasto рекурентна ако је x ε -псеудојериодична за све $\varepsilon > 0$. Са $CR(f)$ означавамо скуп свих ланчasto рекурентних тачака.

Може се показати да је $CR(f)$ затворен и f -инваријантан скуп који садржи $NW(f)$ (в. Тврђење 3.15 у [\[36\]](#)).

Тврђење 12. За тополошки динамички систем (f, X) важе следеће инклузије:

$$\text{Fix}(f) \subseteq \text{Per}(f) \subseteq \text{Rec}(f) \subseteq \overline{\text{Rec}(f)} \subseteq NW(f) \subseteq CR(f).$$

Као што смо већ поменули, нелутајући скуп нам је веома важан, и то баш случај када је коначан. Приметимо да, ако је $NW(f)$ коначан, како је и инваријантан, мора бити да је $NW(f) = \text{Per}(f)$. Коришћењем одређених особина полиномијалне ентропије (в. 4. у Тврђењу [\[53\]](#) у Одељку [\[2.2\]](#)), моћи ћемо да сматрамо да се нелутајући скуп састоји само од коначно много фиксних тачака. То ће нам представљати велику олакшицу у раду. Наведимо сада још једно тврђење које додатно појашњава шта се дешава у динамичком систему када је $NW(f) = \text{Fix}(f) = \{p_1, \dots, p_k\}$.

Тврђење 13. Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном метричком простору X и нека је

$$NW(f) = \text{Fix}(f) = \{p_1, \dots, p_k\}.$$

Тада за свако $x \in X$ важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p_i, \quad p_i \in \text{Fix}(f).$$

Доказ. Нека је $x \in X$ произвољан. Како је X компактан, низ $f^n(x)$ има конвергентан подниз $f^{n_k}(x) \rightarrow y$. Приметимо да $y \in \omega(x) \subseteq NW(f)$, па мора бити $y = p_i$, за неко i .

Пресликавање f је непрекидно, па за свако $\varepsilon > 0$ можемо пронаћи $\delta > 0$ тако да за свако $1 \leq j \leq k$ важи:

$$d(x, p_j) < \delta \implies d(f(x), f(p_j)) = d(f(x), p_j) < \varepsilon.$$

1.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТОПОЛОШКЕ ДИНАМИКЕ

Нека је $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{d(p_i, p_j) \mid p_i, p_j \in \text{Fix}(f)\}$. Због коначности скупа фиксних тачака можемо изабрати довољно мало δ да за кугле $U_i = B(p_i, \delta)$ важи

$$d(U_j, U_l) \geq \varepsilon, \quad j \neq l.$$

За највише коначно много n важи

$$f^n(x) \notin \bigcup_{i=1}^k U_i,$$

иначе би постојао подниз који конвергира ка тачки која није у $\text{NW}(f)$. Нека је N највећи могући индекс за који важи $f^n(x) \notin \bigcup_{i=1}^k U_i$. Можемо изабрати довољно велико $n_k > N$ тако да је

$$d(f^{n_k}(x), p_j) < \delta,$$

за неко j . Пошто је $n_k > N$, знамо да је $f(f^{n_k}(x)) \in \bigcup_{i=1}^k U_i$. Из непрекидности и избора δ и ε следи да мора бити баш $f(f^{n_k}(x)) \in U_j$, па можемо закључити да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p_j.$$

□

Када говоримо о фиксним и периодичним тачкама, говоримо о тачкама које имају најмање могуће орбите. Сада желимо да посветимо пажњу другом екстрему, а то су тачке чија је орбита што је могуће већа. Како су орбите тачака највише пребројиви скупови, а динамички системи (X, f) од интереса су обично непребројиви, занимају нас тачке чија је орбита густа у X .

Дефиниција 14. Динамички систем $f : X \rightarrow X$ је (тополошки) транзитиван ако за све нејразне отворене U, V у X постоји $k \geq 0$ такво да је $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Може се показати да у случају транзитивног динамичког система заправо постоји бесконачно много $k \geq 0$ из претходне дефиниције. Ова „рекурентност” која се дешава је главни разлог зашто је динамика транзитивних динамичких система занимљива.

Тврђење 15. Нека је $f : X \rightarrow X$ динамички систем. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

(1) f је транзитивно.

(2) X се не може написати као дисјунктна унија $X = A \cup B$, где A и B имају нејразне унутрашњости и A је f -инваријантан.

(3) За сваки нејразан отворен $U \subseteq X$, скупи $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(U)$ је густ у X .

(4) За сваки нејразан отворен $U \subseteq X$, скупи $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U)$ је густ у X .

Доказ. Покажимо да из (1) следи (2). Претпоставимо да је $X = A \cup B$, при чему је $A \cap B = \emptyset$ и $f(A) \subseteq A$. Тада су A° и B° отворени скупови за које је $f^k(A^\circ) \cap B^\circ = \emptyset$, за све $k \geq 0$. Како је f транзитивно, то бар један од скупова A° и B° мора бити празан.

Докажимо сада да из (2) следи (3). Претпоставимо да је U непразан отворен. Дефинишимо $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(U)$ и $B := X \setminus A$. Јасно је да је A f -инваријантан и има непразну унутрашњост, јер садржи непразан отворен U . Закључујемо да B има празну унутрашњост, односно да је A густ у X .

Даље, (1) и (3) су очигледно еквивалентни, а еквивалентност (3) и (4) важи јер је $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ ако и само ако је $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$. $\square$

Доказ следеће последице следи директно из еквиваленције (3) и (4).

Последица 16. *Ако је f реверзибилан динамички систем, онда је f транзитивно ако и само ако је f^{-1} транзитивно.*

Доказ следећег тврђења може се наћи у [36] (в. Тврђење 2.9).

Тврђење 17. *Нека је $f : X \rightarrow X$ транзитиван динамички систем на сејарабилном метричком простору. Нека је*

$$\mathcal{D}(X) := \{x \in X \mid \mathcal{O}_f(x) \text{ је густа у } X\}.$$

Тада је $\mathcal{D}(X)$ густ у X (и специјално, непразан).

Важи и следеће тврђење које је скоро обрат претходног (в. Последицу 2.11 у [36]).

Тврђење 18. *Нека је $f : X \rightarrow X$ динамички систем на метричком простору X без изолованих тачака. Ако постоји $x \in X$ чија орбита је густа, онда је f транзитивно.*

Иако нећемо говорити о минималним динамичким системима, дефинисаћемо их, јер представљају веома важну класу динамичких система.

Дефиниција 19. *За динамички систем $f : X \rightarrow X$ кажемо да је минималан ако је за свако $x \in X$ орбита $\mathcal{O}_f(x)$ густа у X .*

Пример 20. *Покажимо да је ирационална ротација R_α , $\alpha \notin \mathbb{Q}$ на $\mathbb{S}^1$ минимална. Нека су $x, z \in \mathbb{S}^1$. Циљ нам је да покажемо да је z у зашворењу (позитивне) орбите тачке x , односно да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n \geq 0$ такво да је*

$$d(R_\alpha^n(x), z) < \varepsilon.$$

Посматрајући првих $[1/\varepsilon] + 1$ тачака са орбите $\mathcal{O}(x) = \{x, R_\alpha(x), R_\alpha^2(x), \dots\}$, а узимајући у обзир да је обим круга 1, видимо да постоје $l < k \leq [1/\varepsilon]$ такви да је $d(R_\alpha^k(x), R_\alpha^l(x)) < \varepsilon$. Ротација R_α^{-l} је изометрија, па важи и $d(R_\alpha^{k-l}(x), x) < \varepsilon$. Напоменимо да добијено растојање $d(R_\alpha^{k-l}(x), x)$ не зависи од x . Наиме, ако је $y \in \mathbb{S}^1$, тада је $y = R_{y-x}(x)$, па је

$$\begin{aligned} d(R_\alpha^{k-l}(y), y) &= d(R_\alpha^{k-l}(R_{y-x}(x)), R_{y-x}(x)) = d(R_{(k-l)\alpha+y-x}(x), R_{y-x}(x)) \\ &= d(R_{y-x}(R_\alpha^{k-l}(x)), R_{y-x}(x)) = d(R_\alpha^{k-l}(x), x). \end{aligned}$$

Дакле, можемо изабрати k и l независно од x . Нека је $\theta \in [-1/2, 1/2]$ такав да је

$$\theta = (k - l)\alpha \pmod{1}.$$

1.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТОПОЛОШКЕ ДИНАМИКЕ

Тада је $\rho := |\theta| < \varepsilon$, јер је $d(R_\alpha^{k-l}(x), x) < \varepsilon$, као и $R_\alpha^{k-l} = R_\theta$. Нека је сада $N = [1/\rho] + 1$ (приметимо да N не зависи од x). Тада гео орбите

$$\{R_\theta^i(x) \mid i = 0, 1, \dots, N\}$$

дели круг на интервале дужине мање од $\rho < \varepsilon$, па постоји и такав да је $d(R_\theta^i(x), z) < \varepsilon$. Како је $R_\theta^i = R_\alpha^{i(k-l)}$ и $i \leq N$, постоји $n \leq N(k-l)$ такав да је

$$d(R_\alpha^n(x), z) < \varepsilon.$$

Напоменимо да је минималност ирационалне ротације еквивалентна Кронекеровој теорему о апроксимацији, која каже да за ирационално α важи да је $\{n\alpha \bmod 1\}$ густ у $\mathbb{S}^1$.

Сада ћемо дефинисати веома важан појам, а то је тополошка конјугација два динамичка система.

Дефиниција 21. Нека су $f : X \rightarrow X$ и $g : Y \rightarrow Y$ два динамичка система. Кажемо да су f и g тополошки конјуговани ако постоји хомеоморфизам $H : X \rightarrow Y$ такав да важи

$$H \circ f = g \circ H,$$

односно, следећи дијаграм комутира.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Кажемо да су f и g тополошки полуконјуговани ако постоји непрекидна сурјекција $H : X \rightarrow Y$ таква да важи $H \circ f = g \circ H$. Тада g називамо фактором од f , а f екстензијом од g .

Тополошку конјугацију, која је релација еквиваленције, можемо видети и као „промену координата”, јер важи да је $f = H^{-1} \circ g \circ H$. Приметимо да када су f и g конјуговани, такви су и f^m и g^m , за природан (или цео, ако су пресликавања инвертибилна) m . Одавде се једноставно види да ако је p периодична тачка пресликавања f периода n , онда је $H(p)$ периодична тачка пресликавања g истог периода n . На сличан начин се многе важне особине преносе међу конјугованим системима, тј. кажемо да су оне инваријанте тополошке конјугованости. Како се и орбите чувају код тополошки конјугованих система, видећемо касније да су тополошка и полиномијална ентропија инваријанте конјугације. Другим речима, конјуговани динамички системи имају једнаке одговарајуће ентропије. Такође корисно, ако системи немају једнаке ентропије, они не могу бити конјуговани. У појединим ситуацијама је лакше израчунати ентропију, него директно показати да системи нису конјуговани, па можемо искористити претходну тврдњу како бисмо посредно закључили да системи нису конјуговани.

Полуконјугација f и g је можда мање интуитивно јасна од конјугације, али може се рећи да је динамика пресликавања f „садржана” у динамици пресликавања g . Примера ради, сурјективно непрекидно H пресликава периодичне тачке од f у периодичне тачке од g , али g може имати и периодичне тачке које нису потекле од пресликавања f .

Пример 22. Покажимо да су шаџор пресликавање

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

и логистичко пресликавање (за вредности параметра $\lambda = 4$)

$$L(x) = 4x(1 - x)$$

конјуговани динамички системи на $[0, 1]$.

Показаћемо да се конјугација остварује помоћу

$$H(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

односно да је

$$H \circ T = L \circ H.$$

Можемо се запитати одакле долази идеја за пресликавање H ? Израз $1 - x$ који учествује у дефиницији логистичког пресликавања, наводи нас да уведемо смену $x = \sin^2 \theta$, што на крају доводи до формуле $L(\sin^2 \theta) = \sin^2 2\theta$. Заправо се логистичко пресликавање може видети као дуплирање угла. Трансформацијом $[0, 1]$ на $[0, \pi/2]$ са $\theta = \frac{\pi x}{2}$, а затим увођењем смене $y = \sin^2 \theta$, добијамо H . На овај начин изучавање квадратне функције сводимо на гео-по-гео линеарну, што умногост олакшава рад.

Јасно је да је $H(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ непрекидна на $[0, 1]$. Како је $H'(x) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi x) > 0$, за све $0 < x < 1$, пресликавање H је строго растуће. Још је $H(0) = 0$ и $H(1) = 1$, па је $H : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ хомеоморфизам. Преостaje нам да утврдимо да је $H \circ T = L \circ H$.

Нека је прво $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Тада је $T(x) = 2x$, па је $(H \circ T)(x) = \sin^2(\pi x)$. Са групе стране је

$$(L \circ H)(x) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right).$$

Користећи познате тригонометријске идентитете $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ и $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$, добијамо да је

$$(L \circ H)(x) = \sin^2(\pi x).$$

Дакле, за $x \in [0, \frac{1}{2}]$ важи једнакост:

$$(L \circ H)(x) = \sin^2(\pi x) = (H \circ T)(x).$$

Нека је сада $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Тада је $T(x) = 2 - 2x$, па је $(H \circ T)(x) = \sin^2(\pi(1 - x))$. Како је $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, што је

$$(H \circ T)(x) = \sin^2(\pi x).$$

Истио као и малојре,

$$(L \circ H)(x) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin^2(\pi x),$$

односно добијамо да је

$$(H \circ T)(x) = (L \circ H)(x).$$

За крај овог одељка, дефинисаћемо фамилију метрика која има важну улогу у дефиницији (тополошке и полиномијалне) ентропије. Поред задате метрике d на компактном метричком простору X , можемо дефинисати динамичку метрику за свако $n \in \mathbb{N}$ на следећи начин:

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d(f^k(x), f^k(y)).$$

За фиксирано n , динамичка метрика нам даје информацију да ли тачке које су биле близу, остају близу након n итерација пресликавања f . Важна особина динамичке метрике дата је у следећем тврђењу.

Тврђење 23. *Динамичке метрике d_n су тополошки еквивалентне са метриком d .*

Доказ. Нека је $B_n(x, \varepsilon)$ отворена кугла у метрици d_n . Из саме дефиниције динамичке метрике следи да је

$$B_n(x, \varepsilon) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{y \in X \mid d_k(x, y) < \varepsilon\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{y \in X \mid d(f^k(x), f^k(y)) < \varepsilon\}.$$

Из непрекидности пресликавања f директно следи непрекидност f^k , за свако k , па је сваки скуп који учествује у пресеку отворен у топологији коју индукује метрика d , као инверзна слика отвореног. Пресек коначно много отворених скупова је отворен, па је $B_n(x, \varepsilon)$ отворен скуп и у топологији коју индукује метрика d .

Обрнуто, нека је U произвољан отворен скуп у топологији коју индукује метрика d . Тада за произвољно $x \in U$ постоји ε тако да је $B(x, \varepsilon) \subset U$. Како је растојање између две тачке у метрици d_n бар колико и растојање у метрици d , имамо да је $x \in B_n(x, \varepsilon) \subset U$. Видимо да је скуп U отворен и у топологији коју индукује метрика d_n . $\square$

1.2 Ротациони број и Поенкареова класификациона теорема

Један део резултата које ћемо представити у тези односи се на реверзибилне динамичке системе на кругу $\mathbb{S}^1$. Познато је да је тополошка ентропија реверзибилног $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ једнака нули (в. Тврђење 8.8 у [36]), па нам ова инваријанта тополошке конјугованости није од користи. Појам ротационог броја је од највеће важности за динамичке системе на кругу и помоћу њега веома добро можемо описати понашање система, а у зависности од тога да ли је ротациони број рационалан или не. Иако је ротациони број инваријанта тополошке конјугованости, он је у случају транзитивних реверзибилних система $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ који чувају оријентацију и комплетна динамичка инваријанта, у смислу да су два система конјугована ако и само ако имају исти ротациони број. О овоме, између осталог, говори Поенкареова класификациона теорема.

Вратимо се на основно пресликавање на кругу, а то је ротација. Ротација је, јасно, хомеоморфизам који чува оријентацију, али понашање овог пресликавања умногоме зависи од тога да ли ротацију вршимо за рационалан или ирационалан угао из $[0, 1)$. Наиме, при рационалној ротацији $R_{\frac{p}{q}}$, где су p и q узајамно прости, свака тачка је периодична са периодом q . Насупрот томе, ако посматрамо ирационалну ротацију R_α за угао α , онда ниједна тачка није периодична, а осим тога важи да је орбита сваке

тачке, поред тога што је очигледно бесконачна, и густа у $\mathbb{S}^1$ (види Пример 20). Водећи се примером ротације, изучаваћемо произвољне реверзибилне динамичке системе на $\mathbb{S}^1$ који чувају оријентацију.

Излагање у овој секцији ће већински бити без доказа. Циљ нам је да формулишемо Поенкареову теорему, јер ћемо је користити у доказу оригиналног резултата (в. Теорему 148 у Глави 7), али и да у најкраћим цртама укажемо на моћ ротационог броја да верно опише динамичке системе на кругу.

Нека је $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$ пројекција. За дато $z \in \mathbb{S}^1$ кажемо да је $x \in \mathbb{R}$ подизање од z ако је $\pi(x) = z$. Често нам је згодно да елементе $\mathbb{S}^1$ идентификујемо са представником класе из $[0, 1)$. Због тога узимамо $\pi(x) = x - [x]$. Следеће тврђење дајемо без доказа (в. Тврђење 15.1 у 36). Доказ користи познате чињенице из алгебарске топологије, као што је та да је $\mathbb{R}$ универзално наткривање $\mathbb{S}^1$.

Тврђење 24. *Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ реверзибилан динамички систем. Тада постоји реверзибилан динамички систем $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такав да је $\pi \circ F = f \circ \pi$. Пресликавање F је строго мононо и јединствено до на адитивну целобројну константу.*

Пресликавање F називамо подизањем пресликавања f . Приметимо да је f фактор пресликавања F .

Дефиниција 25. *Кажемо да реверзибилни динамички систем $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ чува оријентацију ако је F растуће за неко (а самим тим и свако) подизање F од f . Слично, кажемо да $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ мења оријентацију ако је подизање F од f опадајуће.*

Напоменимо да је ова дефиниција еквивалентна дефиницији да $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ чува оријентацију ако пресликава $[a, b]$ у $[f(a), f(b)]$, а мења оријентацију ако $[a, b]$ пресликава у $[f(b), f(a)]$, за све $a, b \in \mathbb{S}^1$. Под $[a, b]$ подразумевамо лук од тачке a до тачке b , крећући се у позитивном смеру. Ротација ρ_θ је пресликавање које чува оријентацију, јер је подизање $R_\theta = x + \theta$, $\theta \in [0, 1)$ растуће.

Следеће тврђење следи директно из доказа претходног.

Тврђење 26. *Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ реверзибилан динамички систем који чува оријентацију и нека је $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ његово подизање. Тада је $F(x + k) = F(x) + k$, за све $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$.*

Сада смо спремни да дефинишемо ротациони број.

Тврђење 27. *Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ реверзибилан динамички систем који чува оријентацију и нека је $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ његово подизање. Дефинишимо*

$$\text{rot}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F^k(x) - x}{k}.$$

Тада лимес $\text{rot}(F)$ постоји и коначан је реални број који не зависи од избора $x \in \mathbb{R}$. И више, ако је

$$\text{rot}(f) := \pi(\text{rot}(F)) \in \mathbb{S}^1,$$

онда $\text{rot}(f)$ не зависи од избора подизања F .

Доказ. Покажимо прво да $\text{rot}(F)$ не зависи од $x \in \mathbb{R}$. Како је $F(x+1) = F(x)+1$, довољно је да докажемо независност од $x \in [0, 1)$. Ако је $x, y \in [0, 1)$ тада је $|F(x) - F(y)| < 1$, па је и $|F^k(x) - F^k(y)| < 1$, за све $k \in \mathbb{N}$. За такве x, y је

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k}(F^k(x) - x) - \frac{1}{k}(F^k(y) - y) \right| &\leq \frac{1}{k} (|F^k(x) - F^k(y)| + |x - y|) \\ &\leq \frac{2}{k} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Докажимо да лимес постоји. Нека је $x \in \mathbb{R}$ фиксиран и $x_k := F^k(x)$. Ако дефинишемо $y_k := x_k - x$, тада је, због Тврђења 26, $y_k \geq \min_{t \in [0, 1]} (F(t) - t)$ Специјално, низ (y_k) је униформно ограничен одоздо. Рачунамо:

$$\begin{aligned} y_{k+n} &= F^{k+n}(x) - x \\ &= F^n(x_k) + x_k - x_k - x \\ &\stackrel{(*)}{=} \underbrace{F^n(x_k) - F^n(x + [y_k])}_{\leq 1} + \underbrace{F^n(x + [y_k]) - (x + [y_k])}_{= y_n} \\ &\quad + \underbrace{x_k - x}_{= y_k} + \underbrace{x - x_k + [y_k]}_{\leq 0} \\ &\leq 1 + y_n + y_k, \end{aligned}$$

при чему смо користили Тврђење 26 да увидимо једнакост са y_n у $(*)$. Хтели бисмо да применимо Фекетеову лему (в. Лему 38 у Поглављу 2), али низ (y_k) није субадитиван. Међутим, ако дефинишемо $a_k := y_k + 1$, онда (a_k) јесте субадитиван и ограничен одоздо. Сада можемо да закључимо да низ $(\frac{1}{k}a_k)$ конвергира ка $\inf_k \frac{1}{k}a_k$, па и $(\frac{1}{k}y_k)$ конвергира ка $\inf_k \frac{1}{k}y_k$. Овим смо доказали да је $\text{rot}(F)$ добро дефинисан (коначан) број.

За крај, нека је G друго подизање од f . Тада је $G = F + k$, за неко $k \in \mathbb{Z}$. Из дефиниције је јасно да је $\text{rot}(F + k) = \text{rot}(F) + k$, па је $\text{rot}(f) := \pi(\text{rot}(F))$ независан од избора подизања F . $\square$

Овим смо показали да постоји јединствено подизање F такво да је $\text{rot}(f) := \text{rot}(F)$, тј. постоји јединствено F за које је $\text{rot}(F) \in [0, 1)$.

Дефиниција 28. Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ реверзибилан динамички систем који чува оријентацију. Број $\text{rot}(f) \in \mathbb{S}^1$ називамо ротационим бројем пресликавања f .

Изрчунајмо ротациони број једноставног, али важног пресликавања.

Пример 29. Нека је $f = \rho_\theta$ ротација за угао θ . Како је подизање $R_\theta = x + \theta$, имамо да је:

$$\text{rot}(R_\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_\theta^k(x) - x}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\theta}{k} = \theta.$$

Ротациони број има веома важну особину, а то је да је инваријанта тополошке конјугуованости реверзибилних динамичких система који чувају оријентацију.

Тврђење 30. Ротациони број је инваријантан при тополошкој конјугацији која чува оријентацију.

Доказ. Нека је $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам који чува оријентацију. Показаћемо да је $\text{rot}(h^{-1}fh) = \text{rot}(f)$. Нека су $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ подизања пресликавања h и f , редом. Како је

$$\pi \circ H^{-1} = h^{-1} \circ h \circ \pi \circ H^{-1} = h^{-1} \circ \pi,$$

видимо да је H^{-1} подизање од h^{-1} . Слично, како је

$$\pi \circ H^{-1} \circ F \circ H = h^{-1} \circ \pi \circ F \circ H = h^{-1} \circ f \circ \pi \circ H = h^{-1} \circ f \circ h \circ \pi,$$

то је јасно да је $H^{-1}FH$ подизање од $h^{-1}fh$. Можемо претпоставити да је H изабрано тако да је $H(0) \in [0, 1)$. Желимо да оценимо

$$|(H^{-1}FH)^k(x) - F^k(x)| = |H^{-1}F^kH(x) - F^k(x)|.$$

За $x \in [0, 1)$ важи да је

$$-1 < H(x) - x \leq H(x) < H(1) < 2,$$

па, због периодичности, за све $x \in \mathbb{R}$ имамо

$$|H(x) - x| < 2.$$

Слично је и $|H^{-1}(x) - x| < 2$, за све $x \in \mathbb{R}$. Даље, покажимо да ако је $|y - x| < 2$, тада је $|F^k(y) - F^k(x)| < 3$. Заиста, ако је $|y - x| < 2$, тада је $|[y] - [x]| \leq 2$, па је

$$\begin{aligned} -3 &\leq [y] - [x] - 1 \stackrel{(\star)}{=} F^k([y]) - F^k([x] + 1) \\ &< F^k(y) - F^k(x) \\ &< F^k([y] + 1) - F^k([x]) \\ &= [y] + 1 - [x] \leq 3. \end{aligned}$$

У $(\star)$ смо опет користили Тврђење [26](#). Можемо закључити да је

$$\begin{aligned} |H^{-1}F^kH(x) - F^k(x)| &\leq |H^{-1}F^kH(x) - F^kH(x)| + |F^kH(x) - F^k(x)| \\ &\leq 2 + 3 = 5, \end{aligned}$$

односно да

$$\frac{|(H^{-1}FH)^k(x) - F^k(x)|}{k} \rightarrow 0.$$

Овим смо показали да је

$$\text{rot}(H^{-1}FH) = \text{rot}(F).$$

□

Нека је сада ротациони број рационалан. Детаљан опис реверзиблиних динамичких система са рационалним ротационим бројем који чувају оријентацију може се наћи у Поглављу 16 у [\[36\]](#). Овде ћемо навести само основно тврђење које карактерише рационалан ротациони број.

Тврђење 31. Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ реверзибилан динамички систем који чува оријентацију. Тада је $\text{Per}(f) \neq \emptyset$ ако и само ако је $\text{rot}(f)$ рационалан број.

Посветимо сада пажњу случају када је ротациони број ирационалан. На основу Тврђења [31] закључујемо да реверзибилни динамички системи који чувају оријентацију и имају ирационални ротациони број немају периодичне орбите. Доказ следећег тврђења може се наћи у [53] (в. Тврђење 6.1 и Теорему 6.3), а поред тога и прилично детаљан опис динамичких система на кругу са ирационалним ротационим бројем.

Тврђење 32. *Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ реверзибилан динамички систем који чува оријентацију, са ирационалним ротационим бројем. Тада се ω -гранични скупови свих тачака из $\mathbb{S}^1$ поклапају. Ако универзални ω -гранични скуп означимо са E , тада је $E = \mathbb{S}^1$ или је E Канторов скуп.*

Сваки компактан тотално неповезан метрички простор без изолованих тачака је хомеоморфан Канторовом скупу (в. Примедбу 4.17 у [36]). У том смислу се у претходној теорему као универзални ω -гранични скуп добија Канторов скуп.

У случају када је $E = \mathbb{S}^1$, то нас, видећемо оправдано, подсећа на ирационалну ротацију. Када је E Канторов скуп, онда постоји бесконачно много интервала у $\mathbb{S}^1 \setminus E$ који не садрже граничне тачке ниједне орбите. Ово понашање се јасно разликује од понашања ирационалне ротације, код које су све орбите густе. Претходни опис говори у прилог разлици између конјугације и полукоњугације које ћемо остварити у Поенкареовој теорему.

Теорема 33. *(Поенкаре) Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ реверзибилан динамички систем који чува оријентацију, са ирационалним ротационим бројем θ . Тада је ирационална ротација R_θ фактор од f . И више, ако је f транзитивно, онда је f конјуговано са R_θ .*

Сумирајмо сада све резултате у облику који ће нама бити од користи.

- Ако је $\text{rot}(f)$ рационалан, $\text{rot}(f) = p/q$, тада је $\text{NW}(f) = \text{Per}(f)$. Такође, постоји периодична тачка и све периодичне тачке имају исти период q . Ако не постоје непериодичне тачке, онда су све тачке периодичне (са периодом q), па је $f^q = \text{Id}$. Може се показати да се ово дешава ако и само ако су f и ротација $R_{\text{rot}(f)}$ конјуговани.
- Ако је $\text{rot}(f) \notin \mathbb{Q}$, тада постоје две могућности. Ако је f транзитивно, тада је f конјуговано ротацији $R_{\text{rot}(f)}$ и $\text{NW}(f) = \mathbb{S}^1$. Ако не, скуп $\text{NW}(f)$ је хомеоморфан Канторовом скупу. У оба случаја, ω и α -гранични скуп не зависе од конкретне тачке и поклапају се са нелутајућим скупом.

Глава 2

Полиномијална ентропија

2.1 Тополошка ентропија

Иако је централна тема ове главе полиномијална ентропија, не можемо говорити о њој, а да нисмо прво говорили о тополошкој ентропији. Тополошка ентропија, у данашње време већ класична величина која је добро проучена и за коју се везује мноштво занимљивих резултата, јесте једна мера неуређености динамичког система. Она мери експоненцијални раст суштински различитих орбита, а дефинисана је индиректно по угледу на Шенонову дефиницију ентропије у теорији информација.

Подразумеваћемо да је (X, d) компактан метрички простор и да је пресликавање $f : X \rightarrow X$ непрекидно. Иако је тополошка ентропија, као што јој и само име каже, првобитно дефинисана за тополошке просторе, у нашим разматрањима најчешће ћемо се бавити случајем када је X метрички простор.

Почнимо са формалном дефиницијом коју су дали Бовен ([11]) и Динабург ([17]) седамдесетих година 20. века. Дефинисаћемо три величине, и објаснити како су међусобно повезане, а затим и како се помоћу њих дефинише тополошка ентропија.

Дефиниција 34. Са $\text{cov}(n, \varepsilon; f)$ означаћемо минималан број скупова дијаметра мањих од ε који покривају простор X у (динамичкој) метрици d_n .

Дефиниција 35. За скупи $A \subseteq X$ кажемо да је $(n, \varepsilon; f)$ -раздвојен ако за сваке две различите тачке $x, y \in A$ важи да је $d_n(x, y) > \varepsilon$. Са $\text{sep}(n, \varepsilon; f)$ означавамо максималну кардиналност $(n, \varepsilon; f)$ -раздвојеног скупа.

Дефиниција 36. За скупи $A \subseteq X$ кажемо да је $(n, \varepsilon; f)$ -разајнићући (или да је $(n, \varepsilon; f)$ -мрежа) ако за сваку тачку $x \in X$ постоји $y \in A$ тако да је $d_n(x, y) < \varepsilon$. Са $\text{span}(n, \varepsilon; f)$ означавамо минималну кардиналност $(n, \varepsilon; f)$ -разајнићуће скупа.

Важно је да приметимо да су бројеви $\text{cov}(n, \varepsilon; f)$, $\text{sep}(n, \varepsilon; f)$ и $\text{span}(n, \varepsilon; f)$ коначни за фиксирано n и ε , јер је простор X компактан. Напоменимо да ћемо када не постоји ризик од забуне користити и скраћене ознаке $\text{cov}(n, \varepsilon)$, $\text{sep}(n, \varepsilon)$ и $\text{span}(n, \varepsilon)$.

Лема 37. Важи следећи низ неједнакости:

$$\text{cov}(n, 2\varepsilon) \leq \text{span}(n, \varepsilon) \leq \text{sep}(n, \varepsilon) \leq \text{span}(n, \varepsilon/2) \leq \text{cov}(n, \varepsilon/2).$$

Доказ. Нека је $A \subseteq X$ (n, ε) -разапињући скуп минималне кардиналности. Тада је фамилија кугли $\{B(x, \varepsilon) \mid x \in A\}$ покривач простора X скуповима дијаметра 2ε , па је

$$\text{cov}(n, 2\varepsilon) \leq \text{span}(n, \varepsilon).$$

Нека је сада $B \subseteq X$ (n, ε) -раздвојен скуп максималне кардиналности. Приметимо да је B и (n, ε) -разапињући скуп. Наиме, ако би постојао $x \in X$ такав да је $d_n(x, y) \geq \varepsilon$ за свако $y \in B$, тада би скуп $B \cup \{x\}$ био (n, ε) -раздвојен скуп веће кардиналности од максималне.

Покажимо сада трећу неједнакост. Нека је $A \subseteq X$ $(n, \frac{\varepsilon}{2})$ -разапињући скуп минималне кардиналности и $B \subseteq X$ произвољан (n, ε) -раздвојен скуп. Дефинишимо инјективно пресликавање $\phi : B \rightarrow A$ на следећи начин: за $x \in B$ постоји бар један елемент $y \in A$ такав да је $d_n(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Изаберимо једно такво y и дефинишимо $\phi(x) = y$. Ако је $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, тада из неједнакости троугла следи:

$$d_n(x_1, x_2) \leq d_n(x_1, \phi(x_1)) + d_n(\phi(x_2), x_2) < \varepsilon.$$

Како је B (n, ε) -раздвојен скуп, мора бити да је $x_1 = x_2$. Закључујемо да је ϕ инјективно, па кардиналност скупа B није већа од кардиналности скупа A . Одавде следи да је $\text{sep}(n, \varepsilon) \leq \text{span}(n, \frac{\varepsilon}{2})$.

На крају, докажимо и последњу неједнакост. Нека је $\{U_1, \dots, U_k\}$ било које покривање од X које се састоји од скупова чији је d_n -дијаметар мањи од ε . Нека су $x_i \in U_i$ произвољне. Тада је скуп $\{x_1, \dots, x_n\}$ (n, ε) -разапињући. Одавде се види да је $\text{span}(n, \frac{\varepsilon}{2}) \leq \text{cov}(n, \frac{\varepsilon}{2})$. $\square$

Следећа лема, чији доказ нећемо наводити, потребна нам је како бисмо показали постојање лимеса који учествује у дефиницији тополошке ентропије.

Лема 38. (Фекеџе) Нека је $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ субадитиван низ, тј. низ за који важи да је $a_{m+n} \leq a_m + a_n$, за свако m и n . Тада постоји лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ и важи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.

Тврђење 39. Нека је $f : X \rightarrow X$ нејрекидно пресликавање на компактном метричком простору X и нека је $\varepsilon > 0$. Тада лимес

$$h_\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{cov}(n, \varepsilon)}{n}$$

постоји и коначан је.

Доказ. Показаћемо да је низ $\log \text{cov}(n, \varepsilon)$ субадитиван. Нека је U скуп d_n -дијаметра мањег од ε и V скуп d_m -дијаметра мањег од ε . Тврдимо да је тада и скуп $U \cap f^{-n}(V)$ d_{n+m} -дијаметра мањег од ε . Нека су $x, y \in U \cap f^{-n}(V)$ произвољни. Тада, пошто је $x, y \in U$, имамо да важи:

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon.$$

Такође, како је $f^n(x), f^n(y) \in V$, имамо да је:

$$\max_{0 \leq i \leq m-1} d(f^i(f^n(x)), f^i(f^n(y))) < \varepsilon.$$

Дакле, важи да је:

$$d_{n+m}(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n+m-1} d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon.$$

Нека је $\{U_i\}_{i \in I}$ покривач скупа X минималне кардиналности, чији су елементи скупови d_n -дијаметра највише ε и $\{V_j\}_{j \in J}$ покривач скупа X минималне кардиналности, чији су елементи скупови d_m -дијаметра највише ε . Тада се покривач скупа X дефинисан са:

$$\{U_i \cap f^{-n}(V_j) \mid (i, j) \in I \times J\}$$

састоји од скупова чији је d_{n+m} -дијаметар највише ε . Кардиналност овог покривача није већа од производа кардиналности покривача $\{U_i\}_{i \in I}$ и $\{V_j\}_{j \in J}$. Одавде одмах следи да је

$$\text{cov}(n+m, \varepsilon) \leq \text{cov}(n, \varepsilon) \text{cov}(m, \varepsilon),$$

па логаритмовањем обе стране добијамо

$$\log \text{cov}(n+m, \varepsilon) \leq \log \text{cov}(n, \varepsilon) + \log \text{cov}(m, \varepsilon).$$

Закључак изводимо из Леме [38](#). □

Како је низ $\text{cov}(n, \varepsilon)$ монотонно растући када ε опада, а исто важи и за $\varepsilon \mapsto h_\varepsilon(f)$, оправдана је дефиниција:

Дефиниција 40. Нека је $f : X \rightarrow X$ нејрекидно пресликавање на компактном метричком простору X . Лимес

$$h_{\text{top}}(f) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_\varepsilon(f)$$

постоји и назива се тополошка ентропија пресликавања f .

Напоменимо одмах да из Леме [37](#) следи да се тополошка ентропија може дефинисати на још два еквивалентна начина, користећи величине $\text{sep}(n, \varepsilon; f)$ и $\text{span}(n, \varepsilon; f)$.

Последица 41. Тополошка ентропија нејрекидног пресликавања $f : X \rightarrow X$ на компактном метричком простору X гата је са:

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{cov}(n, \varepsilon)}{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{span}(n, \varepsilon)}{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{sep}(n, \varepsilon)}{n}.$$

Из практичних разлога на сва три места пишемо лимес супериор, иако смо видели да када је $\text{cov}(n, \varepsilon; f)$ у питању и обичан лимес постоји. То није случај код $\text{sep}(n, \varepsilon; f)$ и $\text{span}(n, \varepsilon; f)$, већ је неопходно користити горњи лимес (в. пример у [26](#)). Све три дефиниције тополошке ентропије су у употреби, а од ситуације до ситуације зависи која ће бити најпогоднија за коришћење.

Као прву особину тополошке ентропије, докажимо да је она заиста тополошки појам, односно да не зависи од метрике, већ само од топологије на простору X .

Тврђење 42. Нека је $f : X \rightarrow X$ нејрекидно пресликавање на компактном метричком простору X . Тополошка ентропија пресликавања f не зависи од избора метрике која генерише исту топологију на X .

2.1. ТОПОЛОШКА ЕНТРОПИЈА

Доказ. Нека су d_1 и d_2 две метрике на простору X које генеришу исту топологију. За $\varepsilon > 0$ дефинишимо

$$\eta(\varepsilon) = \sup \{d_2(x, y) \mid d_1(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Како је X компактан, имамо да када $\varepsilon \rightarrow 0$, тада и $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$. Зато можемо израчунати тополошку ентропију и на овај начин:

$$h_{\text{top}}(f, d_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{cov}_{d_2}(n, \eta(\varepsilon))}{n}.$$

Приметимо да ако произвољан скуп има $(d_1)_n$ -дијаметар мањи од ε , онда има и $(d_2)_n$ -дијаметар мањи од $\eta(\varepsilon)$. Одавде добијамо да важи

$$\text{cov}_{d_2}(n, \eta(\varepsilon)) \leq \text{cov}_{d_1}(n, \varepsilon).$$

Када пустимо одговарајуће лимесе, а користећи чињеницу да када $\varepsilon \rightarrow 0$, тада и $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$, закључујемо да важи неједнакост:

$$h_{\text{top}}(f, d_2) \leq h_{\text{top}}(f, d_1).$$

Заменом улога метрика d_1 и d_2 , добијамо и обрнуту неједнакост. □

Директно из претходног тврђења изводимо следећу последицу.

Последица 43. *Тополошка ентропија на компактном метричком простору је инваријантна тополошке конјугованости.*

Доказ. Нека су $f : X \rightarrow X$ и $g : Y \rightarrow Y$ два динамичка система тополошки конјугована помоћу $H : X \rightarrow Y$. Нека је d метрика на простору Y . Из Тврђења 42 следи да на X можемо задати одговарајућу метрику $\tilde{d}$ са

$$\tilde{d}(x_1, x_2) := d(H(x_1), H(x_2)).$$

Метрика $\tilde{d}$ генерише исту топологију на X као и метрика d , јер је H хомеоморфизам. Приметимо да је у метрици $\tilde{d}$ пресликавање H изометрија. Одавде следи да је за $x_1, x_2 \in X$:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_n(x_1, x_2) &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \tilde{d}(f^i(x_1), f^i(x_2)) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(H(f^i(x_1)), H(f^i(x_2))) \\ &= \max_{0 \leq i \leq n-1} d(g^i(H(x_1)), g^i(H(x_2))) = d_n(H(x_1), H(x_2)). \end{aligned}$$

Како је H бијекција, јасно је да $\text{cov}(n, \varepsilon; \star)$ (а исто важи и за $\text{sep}(n, \varepsilon)$ и $\text{span}(n, \varepsilon)$) узима исте вредности за пресликавања f и g . Сада можемо да закључимо да је $h_{\text{top}}(f, X) = h_{\text{top}}(g, Y)$. □

У следећем тврђењу дате су основне особине тополошке ентропије.

Тврђење 44. *Нека $f : X \rightarrow X$ нејрекидно пресликавање на компактном метричком простору X .*

1. $h_{\text{top}}(f^k) = kh_{\text{top}}(f)$ за сваки $k \in \mathbb{N}$.
2. Ако је f инвертибилно пресликавање, онда је $h_{\text{top}}(f^{-1}) = h_{\text{top}}(f)$.
3. Ако су $A_1, A_2, \dots, A_k$ затворени и унапред f -инваријантни скупови такви да у унији дају цео простор X , тада је

$$h_{\text{top}}(f) = \max \left\{ h_{\text{top}}(f|_{A_i}) \mid 1 \leq i \leq k \right\}$$

Специјално, за затворен инваријантан скуп A важи да је $h_{\text{top}}(f|_A) \leq h_{\text{top}}(f)$.

4. Ако је (Y, d') компактан метрички простор и $g : Y \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање, тада важи да је

$$h_{\text{top}}(f \times g) = h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g).$$

Простор $X \times Y$ посматрамо са следећом метриком:

$$\tilde{d}((x, y), (x', y')) = \max \{d(x, x'), d'(y, y')\}.$$

Доказ. 1. Нека је $k \in \mathbb{N}$ фиксиран. За произвољне $x, y \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ имамо да важи:

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^{ki}(x), f^{ki}(y)) \leq \max_{0 \leq j \leq kn-1} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Одавде следи да је

$$\begin{aligned} \text{sep}(n, \varepsilon; f^k) &\leq \text{sep}(kn, \varepsilon; f) \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{sep}(n, \varepsilon; f^k)}{n} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} k \frac{\log \text{sep}(kn, \varepsilon; f)}{kn}. \end{aligned}$$

На овај начин добили смо једну неједнакост:

$$h_{\text{top}}(f^k) \leq kh_{\text{top}}(f).$$

Са друге стране, за свако $\varepsilon > 0$ можемо дефинисати $\eta(\varepsilon)$, као у доказу Тврђења 42. Користећи чињеницу да су d и d_n еквивалентне метрике, имамо да је $d_n(x, y) < \varepsilon$ кад год је $d(x, y) < \eta(\varepsilon)$. Одавде је

$$\begin{aligned} \text{span}(n, \eta(\varepsilon); f^k) &\geq \text{span}(kn, \varepsilon; f) \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{span}(n, \eta(\varepsilon); f^k)}{n} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} k \frac{\log \text{span}(kn, \varepsilon; f)}{kn}, \end{aligned}$$

односно добили смо и обрнуту неједнакост:

$$h_{\text{top}}(f^k) \geq k h_{\text{top}}(f).$$

2. Покажимо да важи

$$\text{sep}(n, \varepsilon; f) = \text{sep}(n, \varepsilon; f^{-1}),$$

одакле тврђење одмах следи.

Нека су $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ фиксирани и нека је E (n, ε) -раздвојен скуп. За свако $x, y \in E$ важи:

$$d_n(x, y) > \varepsilon,$$

али имамо да важи и

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\} = \max_{0 \leq j \leq n-1} \{d(f^{-j}(f^{n-1}(x)), f^{-j}(f^{n-1}(y)))\}.$$

Одавде је јасно да је $f^{n-1}(E)$ (n, ε) -раздвојен скуп за f^{-1} . Како је пресликавање f бијекција, ова два скупа су исте кардиналности.

Аналогно, ако је F (n, ε) -раздвојен скуп за f^{-1} тада је $f^{-n+1}(F)$ (n, ε) -раздвојен скуп за f . Сада директно закључујемо да је $\text{sep}(n, \varepsilon; f) = \text{sep}(n, \varepsilon; f^{-1})$.

3. Како је сваки (n, ε) -раздвојен скуп у A_i јасно раздвојен и у X , одмах видимо да је

$$h_{\text{top}}(f|_{A_i}) \leq h_{\text{top}}(f).$$

Приметимо да је унија (n, ε) -разапињућих скупова за A_i један (n, ε) -разапињући скуп за X . Одавде следи да важи неједнакост:

$$\text{span}(n, \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^k \text{span}_i(n, \varepsilon) \leq k \max \{\text{span}_i(n, \varepsilon)\},$$

при чему смо са $\text{span}_i(n, \varepsilon)$ означили минималан (n, ε) -разапињући скуп за A_i . Сада имамо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{span}(n, \varepsilon)}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log k}{n} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \max \{\text{span}_i(n, \varepsilon)\}}{n}.$$

За фиксирано k , сабирак са десне стране тежи ка нули, а тврђење следи када пустимо $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Метрика задата са

$$\tilde{d}((x, y), (x', y')) = \max \{d(x, x'), d'(y, y')\}$$

генерише топологију производа на $X \times Y$. За сваки $n \in \mathbb{N}$ важи да је

$$\tilde{d}_n((x, y), (x', y')) = \max \{d_n(x, x'), d'_n(y, y')\}.$$

Ако су $U \subset X$ и $V \subset Y$ скупови чији је дијаметар мањи од ε у одговарајућим метрикама d и d' , тада је и $U \times V$ скуп чији је $\tilde{d}$ -дијаметар мањи од ε . Закључујемо да је

$$\text{cov}(n, \varepsilon; f \times g) \leq \text{cov}(n, \varepsilon; f) \text{cov}(n, \varepsilon; g)$$

односно

$$h_{\text{top}}(f \times g) \leq h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g).$$

Покажимо и обрнуту неједнакост. Ако су $E_1 \subset X$ и $E_2 \subset Y$ (n, ε) -раздвојени скупови, онда је и њихов производ $E_1 \times E_2$ (n, ε) -раздвојен у метрици $\tilde{d}$. Јасно је да онда важи:

$$\text{sep}(n, \varepsilon; f \times g) \geq \text{sep}(n, \varepsilon; f) \text{sep}(n, \varepsilon; g).$$

Одавде можемо закључити да је:

$$\begin{aligned} \text{cov}(n, \varepsilon/2; f \times g) &\geq \text{sep}(n, \varepsilon; f \times g) \geq \text{sep}(n, \varepsilon; f) \text{sep}(n, \varepsilon; g) \\ &\geq \text{cov}(n, 2\varepsilon; f) \text{cov}(n, 2\varepsilon; g), \end{aligned}$$

одакле добијамо:

$$h_{\text{top}}(f \times g) \geq h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g).$$

□

Још једна важна, и можда на први поглед неочекивана особина тополошке ентропије $h_{\text{top}}(f)$ јесте да зависи само од вредности рестрикције пресликавања f на нелутајући скуп. Дакле, лутајући део динамичког система нема утицаја на $h_{\text{top}}(f)$, док је за полиномијалну ентропију он од највећег значаја, као што ћемо видети у Напомени 69. Доказ наредног тврђења може се наћи у 47.

Тврђење 45. Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном метричком простору X . Важи да је

$$h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(f|_{NW(f)}).$$

Како је тополошка ентропија на коначном скупу тривијално једнака нули, можемо закључити да важи следећа последица.

Последица 46. Ако је нелутајући скуп $NW(f)$ коначан, онда је $h_{\text{top}}(f) = 0$.

Тврђење 47. Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном метричком простору X . Ако постоји метрика d која индукује топологију простора X , таква да је пресликавање f изометрија, онда је $h_{\text{top}}(f) = 0$.

Доказ. Ако је метрика d таква да је пресликавање f изометрија, онда је $d_n^f = d$, за све $n \in \mathbb{N}$, па је $\text{cov}(n, \varepsilon; f) = \text{cov}(1, \varepsilon; f)$, за све $n \in \mathbb{N}$. Одавде следи да је за свако ε :

$$h_\varepsilon(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{cov}(n, \varepsilon; f)}{n} = 0,$$

а онда и да је $h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(f) = 0$.

□

Из претходног тврђења директно следи наредна последица.

Последица 48. Тополошка ентропија произвољне ротације на $\mathbb{S}^1$ једнака је нули.

Занимљиво је да важи и јаче тврђење.

Тврђење 49. Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ реверзибилан динамички систем. Тада је $h_{\text{top}}(f) = 0$.

Доказ. Како је f непрекидно пресликавање, знамо да пресликава лукове у лукове, јер су у питању повезани подскупови од $\mathbb{S}^1$. Нека је $\varepsilon > 0$ фиксирано и $B(k, \varepsilon)$ -раздвојен скуп за пресликавање f максималне кардиналности $\text{sep}(f, k, \varepsilon)$. Нека је $n = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ и изаберимо скуп $Y \subset \mathbb{S}^1$ који се састоји од $n + 1$ једнако распоређених тачака на кружници. Тада за две суседне тачке $z, w \in Y$ важи да је $d(z, w) < \varepsilon$. Дефинишимо скуп:

$$Y_k := \bigcup_{i=0}^{k-1} f^{-i}(Y).$$

Важи да је $|Y_k| \leq k(n+1)$.

Нека је сада I лук у $\mathbb{S}^1 \setminus B$ чије су крајње тачке $x, y \in B$. Тада је $d(f^i(x), f^i(y)) \geq \varepsilon$ за неко $0 \leq i \leq k-1$. Растојање $d(f^i(x), f^i(y))$ је дужина мањег од лукова $f^i(I)$ и $\mathbb{S}^1 \setminus f^i(I)$, па закључујемо да $f^i(I)$ има дужину бар ε . Одавде следи да лук $f^i(I)$ садржи бар једну тачку из скупа Y , а самим тим и да лук I садржи бар једну тачку скупа Y_k .

Овим смо показали да је кардиналност скупа B , која је иста као кардиналност скупа повезаних компонената од $\mathbb{S}^1 \setminus B$, мања или једнака од $|Y_k|$. Дакле

$$\text{sep}(k, \varepsilon; f) \leq k(n+1),$$

одакле следи да је

$$h_{\text{top}}(f) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(k(n+1)) = 0.$$

□

На крају, вратимо се поново на саму дефиницију тополошке ентропије. Историјски прву дефиницију тополошке ентропије на компактном Хаусдорфовом тополошком простору дали су Адлер, Конхајм и Мекендрју у [3], користећи отворене покриваче. Ова општија дефиниција, која не подразумева да је простор метрички, дата је по угледу на дефиницију ентропије на простору са мером (више о ентропији на простору са мером може се наћи у Поглављу 27 у [36]). Навешћемо је не улазећи у детаље и доказе, али напоменимо да је ова дефиниција и даље у употреби, што ћемо илустровати доказом Тврђења [50].

Нека је $\mathcal{V}$ отворени покривач простора X . Са $N(\mathcal{V})$ означимо минималну кардиналност потпокривача од $\mathcal{V}$. Како је X компактан, број $N(\mathcal{V})$ је увек коначан. За два покривача $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ дефинишимо

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

Нека је

$$\mathcal{U}^n = \mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U}),$$

при чему је за све $k \in \mathbb{N}$:

$$f^{-k}(\mathcal{U}) = \{f^{-k}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Може се показати (в. Тврђење 10.16 у [36]) да за сваки отворени покривач $\mathcal{U}$ простора X постоји гранична вредност

$$\tilde{h}(f, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\mathcal{U}^n)}{n}.$$

Ентропија се дефинише на следећи начин:

$$\tilde{h}(f) = \sup_{\mathcal{U}} \left\{ \tilde{h}(\mathcal{U}, f) \right\}$$

где се супремум узима по свим отвореним покривачима простора X .

Еквиваленцију дефиниције ентропије преко отворених покривача и Дефиниције [40] доказао је Бовен у [12], а доказ се може видети и у [36]. Дакле, $\tilde{h}(f) = h_{\text{top}}(f)$.

Тврђење 50. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ реверзибилан динамички систем. Тада је $h_{\text{top}}(f) = 0$.

Доказ. Без умањења општости, узмимо да је f растуће на $[0, 1]$, јер ако f није растуће, онда f^2 јесте и важи да је $h_{\text{top}}(f) = \frac{1}{2}h_{\text{top}}(f^2)$. Нека је $\mathcal{U}$ покривач који се састоји од отворених интервала. Тада $f^{-k}(\mathcal{U})$ има исту кардиналност као и $\mathcal{U}$, за све $k \in \mathbb{N}$. Ако говоримо о горњој граници за $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V})$, она је у општем случају производ кардиналности покривача $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Међутим, када је $X = [0, 1]$ и када се покривачи састоје од отворених интервала, ово горње ограничење је грубо. Тврдимо да за произвољне коначне покриваче $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ важи да је $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq N(\mathcal{U}) + N(\mathcal{V}) - 1$. Ако ово покажемо, онда имамо да важи:

$$N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U})) \leq 2N(\mathcal{U}),$$

па је и:

$$N(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{U})) \leq nN(\mathcal{U}).$$

Одавде следи да је:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\mathcal{U}^n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(nN(\mathcal{U}))}{n} = 0,$$

па је и супремум по свим покривачима такође једнак нули, односно $h_{\text{top}}(f) = 0$.

Покажимо сада да је $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq N(\mathcal{U}) + N(\mathcal{V}) - 1$. Издвојимо минималан потпокривач $\mathcal{U}_0 = \{U_1, \dots, U_m\}$ из $\mathcal{U}$ и минималан потпокривач $\mathcal{V}_0 = \{V_1, \dots, V_n\}$ из $\mathcal{V}$. Можемо уредити интервале из оба покривача тако да им леви крајеви чине неоппадајући низ. Приметимо и да свака два суседна интервала из истог потпокривача имају непразан пресек, јер су чланови минималног покривача. Са $l(U_i)$ означаваћемо леви крај интервала, а са $r(U_i)$ десни. За почетак изаберимо интервале U_{i_0} и V_{j_0} који садрже тачку 0. Њихов пресек такође садржи 0. Посматрајмо сада (непразан) $U_i \cap V_j$. Важи да је $r(U_i \cap V_j) = \min\{r(U_i), r(V_j)\}$. Ако је $r(U_i) < r(V_j)$, заменимо U_i са U_{i+1} , а задржавамо V_j . Ако је $r(V_j) < r(U_i)$, онда заменимо V_j са V_{j+1} , а задржавамо U_i . Ако је $r(U_i) = r(V_j)$, пређимо на U_{i+1} и V_{i+1} . У сваком кораку бар један од индекса скупова који учествују у пресеку расте. Примера ради, одабир може да изгледа овако: $U_0 \cap V_0$, $U_1 \cap V_0$, $U_1 \cap V_1$, $U_2 \cap V_1$, $U_2 \cap V_2, \dots$ Како индекси скупова U_i могу да се повећају највише $m - 1$ пута, а индекси V_j највише $n - 1$ пута, минимални потпокривач од $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ има највише $1 + m - 1 + n - 1 = m + n - 1$ елемената. Напоменимо да овако конструисана фамилија скупова облика $U_i \cap V_j$ заиста покрива $[0, 1]$, јер сваки наредни изабрани интервал почиње пре него што се покривени део заврши. □

Како читалац не би стекао погрешан утисак, напоменимо да није тачно да је тополошка ентропија реверзибилног динамичког система на произвољном компактном метричком простору увек једнака нули (као што смо показали да јесте на сегменту и кругу). Најкласичнији контрапример су хиперболички торусни аутоморфизми, чија је тополошка ентропија једнака логаритму веће сопствене вредности линеарног пресликавања које индукује пресликавање на торусу. Дефиниције и докази тврђења у вези са хиперболичким торусним аутоморфизмима могу се наћи, на пример, у Поглављу 8 у [36].

За крај овог одељка наведимо тврђење које дефиницију тополошке ентропије преко отворених покривача чини оперативнијом (в. Тврђење 10.22 у [36]). Са $\text{diam}(\mathcal{U})$

означићемо дијаметар покривача $\mathcal{U}$, односно:

$$\text{diam}(\mathcal{U}) = \sup \{ \text{diam}(U) \mid U \in \mathcal{U} \}.$$

Тврђење 51. *Нека је X компактан метрички простор и нека је $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ отворених покривача такав да $\text{diam}(\mathcal{U}_n) \rightarrow 0$. Тада постоји лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(f, \mathcal{U}_n)$ и важи једнакост:*

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}(f, \mathcal{U}_n).$$

2.2 Полиномијална ентропија

У претходном одељку видели смо да је тополошка ентропија било ког реверзибилног динамичког система на кругу једнака нули. Међутим, јасно је да међу њима постоје системи који су једноставнији, као и они који су сложенији. Узмимо, на пример, пресликавања са рационалним и ирационалним ротационим бројем. Осим тога, Брауверови хомеоморфизми равни (хомеоморфизми равни који чувају оријентацију и немају фиксне тачке) сви имају тополошку ентропију једнаку нули, јер се може показати да им је нелутајући скуп празан. Овој класи припадају како транслација, тако и компликованија пресликавања. Постоји још много примера нискосложених система чија је тополошка ентропија једнака нули, као што су конвексни билијари, осцилатори, Морс-Смејлови дифеоморфизми на површима,... У покушају да разликујемо елементе ових класа и квантитативно, не само по „интуицији”, уведена је полиномијална ентропија, која мери сложеност на субекспоненцијалној, односно полиномијалној скали.

Појам полиномијалне ентропије се први пут појавио код Курке у [29], а касније у радовима Марка [35] и [33], у контексту интеграбилних Хамилтонових система на површима, где су показане основне особине полиномијалне ентропије. Он је показао да је полиномијална ентропија хармонијског осцилатора мања од полиномијалне ентропије нехармонијског осцилатора, а она мања од полиномијалне ентропије клатна. Такође је показао у [34] да је полиномијална ентропија строго конвексног билијара са аналитичком границом једнака 1 ако и само ако је та граница круг. Осим тога, полиномијална ентропија билијара чија је граница елипса једнака је 2, а у свим осталим случајевима је бар 2.

У [31] је показано, између осталог, да је полиномијална ентропија хомеоморфизма на кругу једнака 0 или 1, а једнака нули ако и само ако је хомеоморфизам конјугован ротацији.

У раду [23] је проучавана полиномијална ентропија Брауверових хомеоморфизама. Показано је да је полиномијална ентропија транслације једнака 1, а да је полиномијална ентропија Брауверовог хомеоморфизма који није конјугован транслацији већа или једнака од 2. Такође, за свако $\alpha \in [2, +\infty]$ конструисан је Брауверов хомеоморфизам f такав да му је полиномијална ентропија једнака α .

Сама дефиниција полиномијалне ентропије веома је слична дефиницији тополошке, али уместо експоненцијалног раста суштински различитих орбита, меримо њихов полиномијални раст. Користећи Лему [37], можемо одмах увести полиномијалну ентропију на три еквивалентна начина.

Дефиниција 52. *Нека је $f : X \rightarrow X$ нејрекидно пресликавање на компактном метричком простору (X, d) . Полиномијална ентропија пресликавања f је даћа са*

$$h_{\text{pol}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{cov}(n, \varepsilon)}{\log n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{span}(n, \varepsilon)}{\log n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{sep}(n, \varepsilon)}{\log n}.$$

Очекивано, због велике сличности између дефиниција тополошке и полиномијалне ентропије, многе особине су им исте. Пошто су докази аналогни, нећемо их изводити, али ћемо навести сама тврђења. Докази се могу пронаћи у раду [35], где је Марко систематично проучавао и дефинисао полиномијалну ентропију.

Тврђење 53. *Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном метричком простору X . Тада важе следећа тврђења:*

1. *Полиномијална ентропија не зависи од избора метрике која генерише даћу топологију на простору X .*
2. *Полиномијална ентропија је инваријантна тополошке конјугованости.*
3. *Ако су $f : X \rightarrow X$ и $g : X' \rightarrow X'$ полуконјуговани, односно ако постоји непрекидна сурјекција $\varphi : X \rightarrow X'$ компактних простора и $g \circ \varphi = \varphi \circ f$, тада је $h_{\text{pol}}(f) \geq h_{\text{pol}}(g)$.*
4. $h_{\text{pol}}(f^k) = h_{\text{pol}}(f)$, за сваки $k \in \mathbb{N}$.
5. *Ако је f инвертибилно пресликавање, онда је $h_{\text{pol}}(f^{-1}) = h_{\text{pol}}(f)$.*
6. *Ако су $A_1, A_2, \dots, A_k$ затворени унапред f -инваријантни скупови, тада је њихова унија даје цео простор X , тада је*

$$h_{\text{pol}}(f) = \max \left\{ h_{\text{pol}}(f|_{A_i}) \mid 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Специјално, за инваријантан $A \subset X$ важи да је $h_{\text{pol}}(f|_A) \leq h_{\text{pol}}(f)$.

7. *Ако је и (Y, d') компактан метрички простор и $g : Y \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање, тада важи да је*

$$h_{\text{pol}}(f \times g) = h_{\text{pol}}(f) + h_{\text{pol}}(g).$$

Напоменимо одмах да је за разлику од тополошке ентропије, полиномијална ентропија пресликавања f^k иста као и полиномијална ентропија пресликавања f . Ова особина ће нам поједноставити израчунавање $h_{\text{pol}}(f)$, јер ћемо у случају коначног нелутајућег скупа прећи са f на f^k . Тиме ћемо постићи да све периодичне тачке пресликавања f заправо постану фиксне тачке пресликавања f^k , за погодно одабрано $k \in \mathbb{N}$. На крају овог поглавља објаснићемо детаљније како ћемо користити технике уведене у овом поглављу, а први корак биће управо прелазак на f^k , за одговарајуће $k \in \mathbb{N}$.

Још једна важна разлика између полиномијалне и тополошке ентропије јесте у односу према бесконачној унији. Наиме, као што смо већ поменули, ако је $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, при чему су X_n затворени унапред f -инваријантни скупови, тада важи:

$$h_{\text{top}}(f) = \sup \left\{ h_{\text{top}}(f|_{X_n}) \mid n \geq 1 \right\}.$$

Ова особина се не преноси на полиномијалну ентропију.

Можда и најважнија разлика између тополошке и полиномијалне ентропије са теоријске тачке гледишта јесте такозвани варијациони принцип, који важи за тополошку ентропију, али не и за полиномијалну. Варијациони принцип повезује тополошку ентропију и ентропију простора са мером, чиме се успоставља важна веза између теорије динамичких система, прецизније ергодичке теорије, и теорије бројева.

Теорема 54. Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Тада важи:

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f(X)} h_{\mu}(f),$$

где $\mathcal{M}_f(X)$ означава скуп свих f -инваријантних Борелових вероватносних мера на X , а $h_{\mu}(f)$ је Колмогоров-Синај ентропија пресликавања f у односу на меру μ .

Ради потпуности, наведимо укратко како се дефинише ентропија $h_{\mu}(f)$ на простору са мером. Нека је $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, где је X скуп, $\mathcal{B}$ σ -алгебра на X , $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ вероватносна мера и $T : X \rightarrow X$ мерљива трансформација која чува меру.

За дату партицију $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ (чији су елементи, по дефиницији, мерљиви међусобно дисјунктни скупови који у унији дају цео простор) можемо дефинисати

$$T^{-1}\mathcal{Q} = \{T^{-1}Q_1, \dots, T^{-1}Q_k\}.$$

Ако имамо и другу партицију $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$, дефинишемо:

$$\mathcal{Q} \vee \mathcal{R} = \{Q_i \cap R_j \mid i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, m\}, \mu(Q_i \cap R_j) > 0\}.$$

Ентропија партиције $\mathcal{Q}$ се дефинише на следећи начин:

$$H(\mathcal{Q}) = - \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mu(Q) \log \mu(Q).$$

Ентропија динамичког система у односу на партицију $\mathcal{Q}$ дата је са:

$$h_{\mu}(T, \mathcal{Q}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=0}^n T^{-k}\mathcal{Q}\right)}{n}.$$

Колмогоров-Синај ентропија динамичког система у простору са мером је:

$$h_{\mu}(T) = \sup \{h_{\mu}(T, \mathcal{Q})\},$$

где се супремум узима по свим коначним партицијама $\mathcal{Q}$.

Сада се јасно види сличност између дефиниције тополошке ентропије и ентропије на простору са мером.

Вратимо се сада на разлику која нас највише занима, а то је однос полиномијалне ентропије према нелутајућем, односно лутајућем скупу. За почетак, докажимо тврђење из рада [31], где видимо да постојање само једне лутајуће тачке обезбеђује да полиномијална ентропија не буде мања од један. Напоменимо да ћемо наредно тврђење користити веома често за доњу оцену полиномијалне ентропије.

Тврђење 55. Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам. Ако пресликавање f има лутајућу тачку, онда важи да је

$$h_{\text{pol}}(f) \geq 1.$$

Доказ. Означимо са $x \in X$ лутајућу тачку пресликавања f . Тада постоји $\varepsilon_0 > 0$ тако да за свако $k \in \mathbb{N}$ важи да је

$$f^k(B(x, \varepsilon_0)) \cap B(x, \varepsilon_0) = \emptyset.$$

Одавде следи да је за свако $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и за свако $k \in \mathbb{N}$

$$d(x, f^k(x)) \geq \varepsilon.$$

Нека је $n \in \mathbb{N}$ фиксиран. Тада за свако k , $1 \leq k \leq n$ важи

$$d_n(x, f^{-k}(x)) \geq d(f^k(x), x) \geq \varepsilon.$$

Одавде следи да је за свако $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и свако $n \in \mathbb{N}$ следећи скуп тачака (n, ε) -раздвојен:

$$\{x, f^{-1}(x), \dots, f^{-n}(x)\}.$$

Закључујемо да је

$$\text{sep}(n, \varepsilon) \geq n,$$

па је $h_{\text{pol}}(f) \geq 1$. □

Обрат овог тврђења не важи. Наиме, претпоставимо да имамо динамички систем f чија је тополошка ентропија позитивна. Ако посматрамо рестрикцију f на $\text{NW}(f)$, тополошка ентропија се не мења, али постижемо да више нема лутајућих тачака. На овај начин смо добили динамички систем чија је полиномијална ентропија већа од 1 (јер је бесконачна), а да систем нема ниједну лутајућу тачку.

У Тврђењу 47 показали смо да је тополошка ентропија изометрије једнака нули. Из доказа је јасно да исто важи и за полиномијалну ентропију. Интересује нас да ли постоје још неке класе пресликавања за које је полиномијална ентропија једнака нули.

Дефиниција 56. Хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ је еквинепрекидан ако за све $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такав да ако је $x, y \in X$, $d(x, y) < \delta$, тада је $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, за све $n \in \mathbb{Z}$. Другим речима, f је еквинепрекидан ако је фамилија $\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ еквинепрекидна.

За еквинепрекидан хомеоморфизам на компактном метричком простору постоји компатибилна метрика која га чини изометријом - $d'(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} d(f^n(x), f^n(y))$. Због тога јасно важи следеће тврђење:

Тврђење 57. Нека је $f : X \rightarrow X$ еквинепрекидан хомеоморфизам на компактном метричком простору X . Тада је $h_{\text{top}}(f) = h_{\text{pol}}(f) = 0$.

Можемо се запитати да ли важи обрнуто. У 6 је дат пример динамичког система чија је полиномијална ентропија једнака нули, а који није еквинепрекидан.

Следеће тврђење може нам бити од користи, а илустроваћемо га једним једноставним примером.

Тврђење 58. Нека је $f : X \rightarrow X$ неепрекидно пресликавање на компактном метричком простору (X, d) . Ако постоји $x_0 \in X$ тако да за свако $x \in X$ важи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$, тада је $h_{\text{pol}}(f) = 0$.

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ фиксирано. Постоји n_0 такав да је за свако $n \geq n_0$ и свако $x \in X$

$$f^n(x) \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

X је компактан метрици у d , па је компактан и у метрици d_{n_0} . Компактан простор има коначан $(n_0, \varepsilon; f)$ -разапињујући скуп. За свако $n \geq n_0$ и за свако $x, y \in X$ важи да

је $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, па је $(n_0, \varepsilon; f)$ -разапињујући скуп такође разапињујући скуп за свако $n \geq n_0$. Можемо закључити да је $\text{span}(n, \varepsilon; f) = \text{span}(n_0, \varepsilon; f)$, за $n \geq n_0$ па је:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log s(n, \varepsilon)}{\log n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log s(n_0, \varepsilon)}{\log n} = 0.$$

Када у претходну једнакост пустимо лimes $\varepsilon \rightarrow 0$, добијамо да је $h_{\text{pol}}(f) = 0$ $\square$

Пример 59. Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ контракција. Пресликавање f је контракција ако постоји $k \in [0, 1)$ за које важи да је

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),$$

за све $x, y \in X$. Због Банахове теореме о фиксној тачки, пресликавање f има јединствену фиксну тачку x_0 . Како за све тачке из X важи да $f^n(x) \rightarrow x_0$, када $n \rightarrow \infty$, на основу Тврђења 58 важи да је $h_{\text{pol}}(f) = 0$.

2.3 Кодирање и сингуларне тачке

У овом одељку описаћемо технику кодирања, као и локализацију полиномијалне ентропије око сингуларних тачака, чији се детаљни описи и докази могу наћи у [27]. Ми ћемо ове технике користити у Поглављу 7, како бисмо израчунали полиномијалну ентропију индукованих хомеоморфизама на одређеним хиперпросторима. Конструкција из рада [27] коју ћемо описати заправо је уопштење резултата из [23], који су дати за хомеоморфизме са тачно једном нелутајућом тачком.

За почетак, уведимо полиномијалну ентропију на произвољном скупу $Y \subseteq X$. Са $\text{sep}(n, \varepsilon; f; Y)$ означаваћемо максималну кардиналност скупа тачака које припадају $(n, \varepsilon; f)$ -раздвојеном скупу простора X и које су садржане у Y , и краће са $\text{sep}(n, \varepsilon; Y)$ када је јасно о ком се пресликавању ради.

Дефиниција 60. Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном метричком простору (X, d) , и нека је $Y \subseteq X$. Полиномијална ентропија пресликавања f на скупу Y даје се са:

$$h_{\text{pol}}(f; Y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{sep}(n, \varepsilon; Y)}{\log n}.$$

Јасно, претходна дефиниција може се дати и преко бројева $\text{cov}(n, \varepsilon; Y)$ и $\text{span}(n, \varepsilon; Y)$.

Напоменимо да важи следеће тврђење (в. [35]) са претпоставком да су скупови X_i инваријантни, али не обавезно и затворени. Тиме је довољно да поделимо простор X на инваријантне подскупове, који не морају бити компактни.

Тврђење 61. Ако је $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$, где су скупови X_i инваријантни, тада важи да је

$$h_{\text{pol}}(f) = \max \{h_{\text{pol}}(f; X_i) \mid i = 1, \dots, k\}.$$

Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање са коначним нелутајућим скупом:

$$\text{NW}(f) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}.$$

Када је нелутајући скуп коначан, он се због инваријантности заправо састоји од периодичних тачака. Нека је сада $Y \subseteq X$ f -инваријантан скуп који садржи тачно једну нелутајућу тачку: $Y \cap \text{NW}(f) = \{p_j\}$. У овом случају је p_j фиксна тачка.

Нека је $\mathcal{F} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_l\}$ коначна фамилија непразних подскупова од $X \setminus \text{NW}(f)$. Нека је $\cup \mathcal{F}$ унија свих елемената из $\mathcal{F}$, односно $\cup \mathcal{F} = Y_1 \cup \dots \cup Y_l$ и

$$Y_\infty = Y \setminus \cup \mathcal{F}.$$

Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољан (фиксиран) и

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

произвољан низ тачака из Y . Са

$$\underline{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

означићемо низ елемената из $\mathcal{F} \cup \{Y_\infty\}$ такав да је за $0 \leq k \leq n-1$ $x_k \in \omega_k$.

Кажемо да је $\underline{\omega}$ кодирање низа $\underline{x}$ у односу на фамилију $\mathcal{F}$. За $\underline{\omega}$ још кажемо и реч, а за ω_i слова. Напоменимо да кодирање није јединствено, јер не захтевамо да елементи фамилије $\mathcal{F}$ буду међусобно дисјунктни.

Са $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)$ означићемо скуп свих могућих кодирања свих орбита дужине n $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ тачака из Y . Дефинишимо полиномијалну ентропију скупа Y у односу на фамилију $\mathcal{F}$ на следећи начин:

$$h_{\text{pol}}(f, \mathcal{F}; Y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)|}{\log n}.$$

Користићемо и скраћени запис $h_{\text{pol}}(\mathcal{F}; Y)$, изостављајући пресликавање f , када је јасно о чему се ради. Такође, ако је фамилија $\mathcal{F}$ једночлана, односно $\mathcal{F} = \{K\}$, писаћемо $h_{\text{pol}}(K; Y)$.

Пример 62. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ распућући хомеоморфизам такав да је $f(x) < x$, за $x \in (0, 1)$ (тада је $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$). Нека је $Y = [0, 1]$. Дефинишимо $Y_1 = [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon] \subset [0, 1] \setminus \text{NW}(f)$, за $\varepsilon > 0$ довољно мало тако да је испуњено да је $f(Y_1) \cap Y_1 = \emptyset$. Нека је $\mathcal{F} = \{Y_1\}$. Елементи скупа $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)$ су речи облика $(Y_\infty, \dots, Y_\infty, Y_1, Y_\infty, \dots, Y_\infty)$, као и реч $(Y_\infty, Y_\infty, \dots, Y_\infty)$. Наиме, за све $k \in \mathbb{N}$, можемо изабрати $x \in (0, 1)$ такав да је $f^k(x) \in Y_1$. Одавде следи да $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)$ садржи речи дужине n у којима се Y_1 налази на било којој позицији i , $1 \leq i \leq n$, док се реч $(Y_\infty, Y_\infty, \dots, Y_\infty)$ добија као кодирање орбите тачке $x = 0$. Такође, слово Y_1 се у речи може појавити највише једном, јер је $f(Y_1) \cap Y_1 = \emptyset$. Сада имамо да је $|\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)| = n + 1$, па је $h_{\text{pol}}(\mathcal{F}; Y) = 1$. Наравно, $Y_1 \subset [0, 1] \setminus \text{NW}(f)$ може бити било који интервал који задовољава услов $f(Y_1) \cap Y_1 = \emptyset$.

Уведимо још једну величину. За компактан скуп $Z \subseteq X \setminus \text{NW}(f)$ са $M(Z)$ означаваћемо максималан број тачака неке орбите који припадају скупу Z . Прецизније:

$$M(Z) = \sup_{x \in X} |\{n \mid f^n(x) \in Z\}|.$$

Напоменимо да орбита сваког елемента сече произвољан лутајући скуп највише једном. Како је Z компактан, он се може покрити коначним покривачем који се састоји од отворених лутајућих скупова, па је $M(Z)$ обавезно коначан број.

Следећа тврђења дајемо без доказа (који се могу пронаћи у [27] и [47]), али ћемо се трудити да објаснимо њихов значај и како ћемо их користити у Поглављу 7.

Лема 63. Нека су $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ две коначне фамилије подскупова од $X \setminus \text{NW}(f)$ за које важи да је $M(\cup \mathcal{F}) < \infty$ и $M(\cup \mathcal{F}') < \infty$. Нека је $Y \subset X$ f -инваријантан скупи који садржи тачно једну нелуцајућу тачку. Тада важе следећа тврђења:

1. (монононосћ) Ако за свако $Y'_i \in \mathcal{F}'$ постоји $Y_i \in \mathcal{F}$ тако да је $Y'_i \subset Y_i$ тада је

$$h_{\text{pol}}(\mathcal{F}'; Y) \leq h_{\text{pol}}(\mathcal{F}; Y).$$

2. (адиитивност)

$$h_{\text{pol}}(\cup \mathcal{F}; Y) = h_{\text{pol}}(\mathcal{F}; Y).$$

3. (луцајућа адиитивност) Ако је фамилија $\mathcal{F} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ таква да је скупи $Y_1 \cup Y_2$ луцајући, тада важи

$$h_{\text{pol}}(\mathcal{F}; Y) = \max \{h_{\text{pol}}(\{Y_1, Y_3, \dots, Y_k\}; Y), h_{\text{pol}}(\{Y_2, Y_3, \dots, Y_k\}; Y)\}.$$

Први циљ нам је да полиномијалну ентропију рачунамо помоћу полиномијалне ентропије мањих (и лепших) скупова. Зато ћемо дефинисати такозвану локалну полиномијалну ентропију. Нека је $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ коначан скуп тачака у $X \setminus \text{NW}(f)$. За свако x_i из овог скупа изаберимо опадајући низ околина $\{U_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ које чине базу околина x_i . На основу Леме 63, прецизније особине монотоности, низ $\{h_{\text{pol}}(\{U_n^1, U_n^2, \dots, U_n^k\}; Y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ је опадајући низ ограничен одоздо, па је и конвергентан. Осим тога, ова гранична вредност не зависи од избора околина, такође због монотоности, већ само од скупа $\mathcal{S}$. Дакле, оправдана је следећа дефиниција:

Дефиниција 64. Нека је $Y \subset X$ f -инваријантан скупи који садржи тачно једну нелуцајућу тачку. Нека је $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ коначан скупи тачака у $X \setminus \text{NW}(f)$. За свако x_i , $1 \leq i \leq k$, нека је $\{U_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ опадајући низ околина које формирају базу околина. Локална полиномијална ентропија у тачкама $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ даје се са:

$$h_{\text{pol}}^{\text{loc}}(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = h_{\text{pol}}^{\text{loc}}(\mathcal{S}; Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\text{pol}}(\{U_n^1, U_n^2, \dots, U_n^k\}; Y).$$

Питамо се у каквој је вези уведена локална полиномијална ентропија са полиномијалном ентропијом на скупу Y . У ту сврху, наводимо две леме.

Лема 65. За сваки компактан скупи $K \subseteq X \setminus \text{NW}(f)$ и за свако $\varepsilon > 0$ постоје дисјунктни, компактни подскупови $Y_1, Y_2, \dots, Y_l \subseteq K$ дијаметра мање од ε такви да је:

$$h_{\text{pol}}(K; Y) = h_{\text{pol}}(\{Y_1, Y_2, \dots, Y_l\}; Y).$$

Лема 66. За сваки компактан скупи $K \subseteq X \setminus \text{NW}(f)$ важи

$$h_{\text{pol}}(K; Y) \leq h_{\text{pol}}(f; Y).$$

На основу претходних лема може се доказати следеће тврђење, које ће заиста олакшати рачунање полиномијалне ентропије, нарочито након дефинисања такозваних сингуларних тачака.

Тврђење 67. Нека је $Y \subset X \setminus \text{NW}(f)$ f -инваријантан и садржи тачно једну нелуштајућу тачку. Тада важи:

$$\begin{aligned} h_{\text{pol}}(f; Y) &= \sup \{ h_{\text{pol}}(K; Y) \mid K \subseteq X \setminus \text{NW}(f), K \text{ је компактан} \} \\ &= \sup \{ h_{\text{pol}}(K \cap Y; Y) \mid K \subseteq X \setminus \text{NW}(f), K \text{ је компактан} \} \\ &= \sup \{ h_{\text{pol}}^{\text{loc}}(\mathcal{S}; Y) \mid \mathcal{S} \subseteq X \setminus \text{NW}(f), \mathcal{S} \text{ је коначан} \} \\ &= \sup \{ h_{\text{pol}}^{\text{loc}}(\mathcal{S}; Y) \mid \mathcal{S} \subseteq \bar{Y} \setminus \text{NW}(f), \mathcal{S} \text{ је коначан} \}. \end{aligned}$$

Следећу последицу смо већ доказали (в. Тврђење 55), а сада дајемо другачији доказ користећи претходно тврђење.

Последица 68. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на компактном метричком простору X . Ако f има бар једну луштајућу тачку, онда је $h_{\text{pol}}(f) \geq 1$.

Доказ. Нека је $\mathcal{F} = \{Z\}$, при чему је Z произвољан компактан лутајући скуп. Како орбита тачке може само једном да пресеке Z , видимо да има $n + 1$ могућих кодирања, па је $|\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; X)| = n + 1$. Одавде следи да је $h_{\text{pol}}(\mathcal{F}; X) = 1$. Из Тврђења 67 затим следи да је $h_{\text{pol}}(f) \geq 1$. $\square$

Застанемо сада како бисмо прокоментарисали неколико ствари.

Напомена 69. Лако се може видети да за фамилију $\mathcal{F}$ чији су елементи скупови дијаметра мањег од ε важи да је $\text{sep}(n, \varepsilon; Y) \leq |\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)|$, јер никоје две тачке из $\text{sep}(n, \varepsilon; Y)$ не могу имати исто кодирање. Такође, јасно је да се слово Z у кодирању појављује највише $M(Z)$ пута, па је $|\mathcal{A}_n(Z; Y)| \leq n^{M(Z)}$, за довољно велико n . Закључујемо да је раст $\text{sep}(n, \varepsilon; Y)$ највише полиномијалан. Дакле, полиномијална ентропија је добра мера комплексности за луштајући гео динамичког система, јер је раст луштајућих орбита увек највише полиномијалан (а најмање линеаран).

Сада ћемо прећи на дефинисање сингуларних скупова, који су од велике важности за израчунавање полиномијалне ентропије.

Дефиниција 70. За коначно мноштво скупова $U_1, \dots, U_k \in X \setminus \text{NW}(f)$ кажемо да су међусобно сингуларни ако за сваки реалан број M постоји тачка x и времена $n_1, \dots, n_k$ таква да за свако i важи да је $f^{n_i}(x) \in U_i$, као и да за $i \neq j$ следи да је $|n_i - n_j| > M$.

За коначан скуп тачака $\{x_1, \dots, x_k\} \in X \setminus \text{NW}(f)$ кажемо да је сингуларан ако им је свака фамилија одговарајућих околина међусобно сингуларна.

Напоменимо да је једночлан скуп по дефиницији увек сингуларан скуп. Такође, ако су $U_1, \dots, U_k$ међусобно сингуларни компактни скупови, тада постоји сингуларан скуп $\{x_1, \dots, x_k\}$ такав да је $x_i \in U_i$, $1 \leq i \leq k$.

Следеће тврђење (Тврђење 92 у 47) је важно јер повезује локалну полиномијалну ентропију и сингуларне скупове, а његове последице ће нам бити од велике користи за израчунавање полиномијалне ентропије на хиперпросторима, нарочито Последица 73.

Тврђење 71. Нека је $Y \subset X$ f -инваријантан скуп који садржи тачно једну нелуштајућу тачку. Тада је

$$h_{\text{pol}}(Y) = \sup \{ h_{\text{pol}}^{\text{loc}}(\mathcal{S}; Y) \mid \mathcal{S} \subset \bar{Y}, \mathcal{S} \text{ је сингуларан} \}.$$

Последица 72. *Важи да је $h_{\text{pol}}(f; Y)$ ограничена одозго максималном кардиналношћу сингуларног скупа садржаног у $\bar{Y}$.*

Доказ. Доказ следи из тога што је локална полиномијална ентропија коначног скупа $\{x_1, \dots, x_k\} \subset X \setminus \text{NW}(f)$ ограничена одозго његовом кардиналношћу. Наиме, можемо изабрати лутајуће околине $Y_i \ni x_i$ тако да се свако слово Y_i појављује у кодирању произвољне орбите $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ највише једном. Закључујемо да има највише $n(n-1) \cdots (n-k+1) \leq n^k$ могућих кодирања. Одавде следи да је:

$$\begin{aligned} h_{\text{pol}}^{loc}(\{x_1, \dots, x_k\}; Y) &\leq h_{\text{pol}}^{loc}(\{Y_1, \dots, Y_k\}; Y) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{A}_n(\{Y_1, \dots, Y_k\}; Y)|}{\log n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n^k}{\log n} \\ &= k. \end{aligned}$$

Узимајући супремум по свим скуповима међусобно сингуларних тачака и користећи претходно тврђење, закључујемо да $h_{\text{pol}}(f; Y)$ није већа од максималне кардиналности сингуларног скупа садржаног у $\bar{Y}$. $\square$

Ако је максимална кардиналност сингуларног скупа једнака два, можемо доказати и прецизнији резултат.

Тврђење 73. *Нека је $Y \subseteq X$ f -инваријантан скуп који садржи тачно једну нелутајућу тачку. Претпоставимо да сингуларни скуп у $\bar{Y}$ максималне кардиналности има тачно два елемента. Ако за сваки сингуларни скуп $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\} \subset Y$ и сваки отворени скуп $Y_j \ni x_j$, $Y_j \subset X \setminus \text{NW}(f)$, постоји $L \in \mathbb{N}$ такав да за све $k \geq L$ важи $f^k(Y_1) \cap Y_2 \neq \emptyset$, тада је $h_{\text{pol}}(f; Y) = 2$.*

Доказ. Из претходне последице следи да је $h_{\text{pol}}(f; Y) \leq 2$, па нам је циљ да покажемо да је и доње ограничење једнако 2. Приметимо да из претпостављеног услова за Y_1 и Y_2 следи да за све $m \in \mathbb{N}$ и за све $k \geq L$, постоји x такав да је $f^m(x) \in Y_1$, $f^{m+k}(x) \in Y_2$. Закључујемо да за све $k \geq L$ постоји кодирање облика

$$(\underbrace{Y_\infty, \dots, Y_\infty}_m, Y_1, \underbrace{Y_\infty, \dots, Y_\infty}_k, Y_2, Y_\infty, \dots, Y_\infty),$$

где је $m \in \mathbb{N}$ произвољан и $k \geq L$. Одавде даље следи:

$$|\mathcal{A}_n(\{Y_1, Y_2\}; Y)| \geq \sum_{m=0}^{n-L-1} (n-L-m) \sim \frac{1}{2}n^2,$$

па је $h_{\text{pol}}(\{Y_1, Y_2\}; Y) \geq 2$. Како ово важи за све Y_j за које је $x_j \in Y_j \subset X \setminus \text{NW}(f)$, $j = 1, 2$, важи и за $h_{\text{pol}}(\{x_1, x_2\}; Y)$. $\square$

Напоменимо да је важно да супремум локалних ентропија узимамо по сингуларним скуповима затворења $\bar{Y}$. Могуће је да се елементи сингуларног скупа налазе на граници скупа Y , па ако Y није затворен, можемо извести погрешан закључак.

Докажимо сада и тврђење које ћемо користити у Глави 8, а које нам омогућава да технику кодирања применимо на некомпактне скупе, под одређеним условима.

Тврђење 74. Нека су $f_1 : X_1 \rightarrow X_1$ и $f_2 : X_2 \rightarrow X_2$ хомеоморфизми на компактним метричким просторима X_1 и X_2 . Нека су $A \subset X_1$ и $B \subset X_2$ инваријантни (не обавезно компактни) скупови који садрже тачно једну нелутајућу тачку пресликавања f_1 и f_2 , редом. Ако постоји хомеоморфизам $H : A \rightarrow B$, који је конјугација између f_1 и f_2 , тада је $h_{\text{pol}}(f_1; A) = h_{\text{pol}}(f_2; B)$.

Доказ. Приметимо да хомеоморфизам H индукује бијекцију између

$$\{K \cap A \mid K \subset X_1 \setminus NW(f_1), K \text{ компактан}\}$$

и

$$\{L \cap B \mid L \subset X_2 \setminus NW(f_2), L \text{ компактан}\}.$$

Ако је $\underline{w} = (w_0, \dots, w_{n-1})$ кодирање орбите $(x, f_1(x), \dots, (f_1)^{n-1}(x))$ у A (које се састоји од слова $K \cap A$ и $Y_\infty := A \setminus K$), тада је $(H(w_0), \dots, H(w_{n-1}))$ кодирање орбите $(H(x), f_2(H(x)), \dots, (f_2)^{n-1}(H(x)))$ у B (које се састоји од слова $H(K \cap A)$ и $Y_\infty := X_2 \setminus H(K \cap A)$), и обрнуто. Дакле, за фиксиран компактан K , скупови $\mathcal{A}_n(\{K \cap A\}; A)$ и $\mathcal{A}_n(\{H(K \cap A)\}; B)$ имају исти број елемената. Доказ је завршен када применимо прву пропозицију из Тврђења [67](#). $\square$

Објаснимо сада како ћемо заправо користити уведени апарат. Претпоставимо да је f непрекидно пресликавање на компактном метричком простору које има коначно много нелутајућих тачака. Тада су све нелутајуће тачке заправо периодичне, па постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да су све периодичне тачке фиксне тачке пресликавања f^m . Како важи да је $h_{\text{pol}}(f) = h_{\text{pol}}(f^m)$ можемо сматрати да радимо са динамичким системом који има коначно много фиксних тачака, а све остале тачке су лутајуће. Користећи Тврђење [13](#), закључујемо да низ $f^n(x)$ конвергира ка фиксној тачки. Цео простор можемо поделити на следећи природан начин:

$$X = \bigsqcup_{p \in \text{Fix}(f)} W^s(p),$$

где је

$$W^s(p) = \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p \right\}.$$

Скупови $W^s(p)$ су f -инваријантни и садрже тачно једну фиксну тачку. Дакле, полиномијалну ентропију можемо израчунати на следећи начин:

$$h_{\text{pol}}(f) = \max \{ h_{\text{pol}}(W^s(p)) \mid p \in \text{Fix}(f) \}.$$

За крај ћемо представити важан пример из [23](#).

Пример 75. Нека је $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ даћо са:

$$f((x, y)) = \left(2x, \frac{y}{2} \right).$$

Простор X биће Александровљева компактификација равни (компактификација равни једном тачком), односно $X = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, а f ћемо природно додефинисати са $f(\infty) = \infty$. Додефинисано пресликавање је и даље непрекидно. Лако се види да су једине нелутајуће тачке заправо фиксне тачке 0 и ∞ :

$$NW(f) = \{0, \infty\}.$$

2.3. КОДИРАЊЕ И СИНГУЛАРНЕ ТАЧКЕ

Поделићемо простор X на инваријантне подскупове са тачно једном нелушајућом тачком на следећи начин:

$$Y_1 = X \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \quad Y_2 = X \setminus Y_1.$$

Скуп Y_2 садржи нелушајућу тачку $(0, 0)$, и све остале тачке из Y_2 теже ка координатном почетку при итерацијама хомеоморфизма $f|_{Y_2}$. Закључујемо да не постоје две међусобно сингуларне тачке међу лушајућим тачкама, јер све тачке из околине прве тачке након неког времена напуштају и околину друге тачке. Одавде следи да је $h_{\text{pol}}(f; Y_2) \leq 1$, а како Y_2 садржи лушајућу тачку важи и обрнута неједнакост $h_{\text{pol}}(f; Y_2) \geq 1$. Дакле,

$$h_{\text{pol}}(f; Y_2) = 1.$$

Пређимо сада на скуп Y_1 који није затворен. Као и мало пре, у самом скупу Y_1 не постоје две међусобно сингуларне тачке. Овде бисмо попрешно закључили да је полиномијална ентропија пресликавања f једнака 1. Као што смо већ напоменули, морамо посматрати број сингуларних тачака у $\bar{Y}_1$. Није тешко видети да су две тачке (различите од координатног почетка), од којих једна припада x -оси, а друга y -оси, међусобно сингуларне. Одавде следи да је $h_{\text{pol}}(f; Y_1) \leq 2$. Покажимо сада обрнуту неједнакост.

Уочимо два диска $B_1((x_1, 0), r_1)$ и $B_2((0, y_1), r_2)$ који не садрже координатни почетак, довољно малих полупречника да буду лушајући скупови (в. слику). Ако покажемо да је

$$h_{\text{pol}}(\{B_1, B_2\}; Y_1) = 2,$$

онда ће бити $h_{\text{pol}}(f; Y_1) \geq 2$, а самим тим и $h_{\text{pol}}(f; Y_1) = 2$. Закључујемо да је $h_{\text{pol}}(f) = \max\{1, 2\} = 2$.

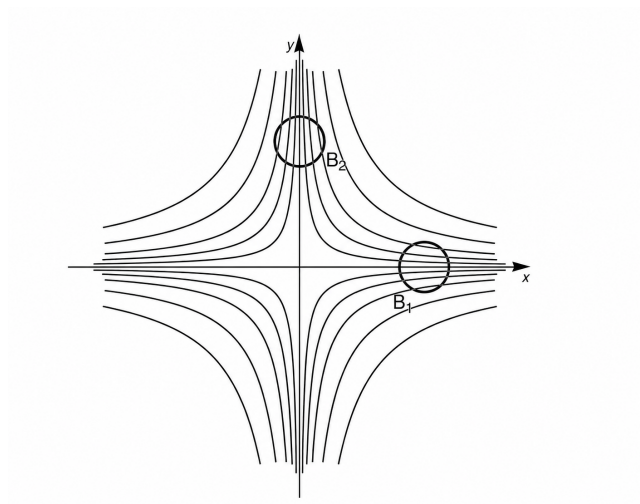
Речи у $\mathcal{A}_n(\{B_1, B_2\}; Y_1)$ су облика

$$(Y_\infty, \dots, Y_\infty, B_1, Y_\infty, \dots, Y_\infty, B_2, Y_\infty, \dots, Y_\infty),$$

при чему је $Y_\infty = (X \setminus \text{NW}(f)) \setminus (B_1 \cup B_2)$. Због тога је $|\mathcal{A}_n(\{B_1, B_2\}; Y_1)| \leq n(n-1)$, па закључујемо да је

$$h_{\text{pol}}(\{B_1, B_2\}; Y_1) \leq 2,$$

Уочимо и да постоји $L \in \mathbb{N}$ тако да за свако $n \geq L$ важи да је $f^n(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$. Испињени су услови Тврђења 73, па можемо одмах да закључимо да је $h_{\text{pol}}(\{B_1, B_2\}; Y_1) = 2$. Овај пример је био инспирација за формулацију Тврђења 73, које ћемо искористити у Поглављу 7.



Слика 2.1: Пример

Глава 3

Једнодимензионални континууми

Теорија континуума, за чији су развој великим делом заслужни Сем Надлер и Алехандро Иланес, представља важан спој (опште) топологије и динамичких система. Бави се изучавањем повезаних компактних простора, што је и сама дефиниција континуума, али ова кратка реченица, иако тачна, не може ни изблиза да опише област теорије континуума. У овом поглављу дефинисаћемо дендрите, графове, локалне дендрите и регуларне криве. Научићемо да их разликујемо уз помоћ пригодних слика, издвојићемо особине које су нам од важности, а онда се и осврнути на ове просторе са динамичке тачке гледишта.

3.1 Пеанови континууми

Дефиниција 76. *Метрички простор X је Пеанов простор ако за свако $x \in X$ и сваку околину U тачке x постоји повезан отворен скуп V такав да је $x \in V \subset U$.*

Кажемо да је метрички простор континуум ако је непразан, компактан и повезан. У складу са претходном дефиницијом, за метрички простор X кажемо да је Пеанов континуум ако је истовремено континуум и Пеанов простор, односно ако је непразан, компактан, повезан и локално повезан метрички простор. Пеанов континуум је дегенерисан ако се састоји од једне тачке. Постоји још еквивалентних дефиниција, али нам нису потребне и немамо простора да улазимо у терминологију теорије континуума. Може се показати (в. Теорему 8.4 у [49]) да је X Пеанов континуум ако и само ако се за свако $\varepsilon > 0$ може представити као унија коначно много подконтинуума чији је дијаметар мањи од ε .

Формулишимо и познату Теорему Хана и Мазуркиевича, која карактерише Пеанове континууме и која се често узима као дефиниција.

Теорема 77. *Непразан Хаусдорфов тополошки простор је Пеанов континуум ако и само ако је непрекидна слика сегмента $[0, 1]$.*

Пре него што пређемо на још једну важну особину Пеанових континуума, желимо да разјаснимо један појам. Наиме, добро нам је познато да је простор X путно повезан ако су сваке две различите тачке $x, y \in X$ повезане путем, тј. ако постоји непрекидно $f : [0, 1] \rightarrow X$ за које је $f(0) = x$ и $f(1) = y$. Поред тога можемо говорити и о простору који је повезан луковима (енглески *arcwise connected*), где захтевамо да су сваке две тачке повезане луком. Лук је слика сегмента $[0, 1]$ при хомеоморфизму. Дакле, ова два

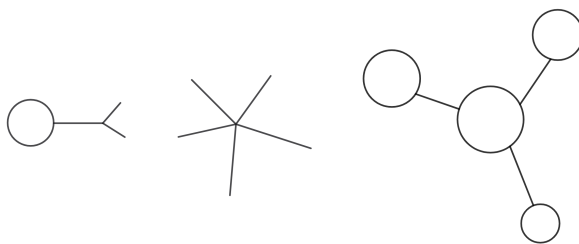
појма, иако слични, нису исти. Простор који је повезан луковима је и путно повезан. Обрнуто важи за просторе који су Хаусдорфови (в. [14]). Како се ми, а и већи део теорије континуума, бавимо метричким просторима, користимо термин путно повезан јер је природнији у српском језику. Доказ следеће теореме може се наћи у [49] (в. Теорему 8.123).

Теорема 78. *Сваки Пеанов континуум је путно повезан.*

Може се показати да су Пеанови континууми и локално путно повезани (в. теорему 8.25 у [49]). Дефинишимо сада три основна типа Пеанових континуума, а то су граф, дрво и дендрит.

Дефиниција 79. *За континуум X кажемо да је (тополошки) граф ако се може написати као коначна унија лукова, при чему су свака два лука дисјунктна или се секу у једном или оба њихова краја.*

Неформално говорећи, граф се састоји од коначно много лукова и кругова. На слици 3.1 је неколико примера графова.



Слика 3.1: Графови

Дефиниција 80. *За континуум X кажемо да је (тополошко) дрво, ако је граф који не садржи просте затворене криве.*

Дакле, дрво се састоји само од коначно много сегмената, а пример једног дрвета је у средини слике изнад.

Нама најзанимљивија класа Пеанових континуума јесу дендрити и њима ће бити посвећен следећи одељак.

3.2 Дендрити

Дефиниција 81. *Пеанов континуум који не садржи просте затворене криве назива се дендрић.*

Из овог описа не може се, као у случају графова и дрвета, директно закључити шта је заправо дендрит, осим што је јасно да не садржи кругове. Поред тога, приметимо да се нигде не помиње услов коначности, тако да класа дендрита обухвата много више „различитих типова” простора. Јасно је да је свако дрво и дендрит. У раду [16] дато је преко 40 еквивалентних дефиниција за појам дендрита. Самим тим се може наслутити колико важних и лепих особина имају дендрити. Навешћемо неколико познатих твђења без доказа, а поменућемо и резултат из [48], који говори о флексибилности

полиномијалне ентропије на дендритима. Овај резултат се може довести у везу са Тврђењем [128] које ћемо представити у Глави 5.

Нека је X континуум. За тачку $p \in X$ кажемо да је крајња тачка од X ако за сваку отворену околину U тачке p постоји отворен $V \subset U$ такав да је $p \in V$ и ∂V има тачно један елемент. Скуп свих крајњих тачака означимо, пратећи ознаке из [49], са $X^{[1]}$. Еквивалентна дефиниција је да је $p \in X$ крајња тачка дендрита ако је $X \setminus \{p\}$ повезан. Следеће тврђење нам је од користи, јер нам помаже да визуализујемо дендрите у равни са бесконачно много лукова (в. Последицу 10.28 у [49]).

Тврђење 82. *Ако је X недегенерисани дендрит са бесконачно много лукова, тада је:*

$$X = X^{[1]} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right),$$

при чему је сваки A_i лук са крајевима p_i и q_i , $\text{diam}(A_i) \rightarrow 0$ и за свако $i \in \mathbb{N}$ важи:

$$A_{i+1} \cap \left(\bigcup_{j=1}^i A_j \right) = \{p_{i+1}\},$$

Доказ следећа два тврђења може се наћи у [32].

Тврђење 83. *Нека је (A_n) низ неупразних повезаних скупова у дендриту X при чему је $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$. Тада је:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0.$$

За различите тачке x и y у X , постоји тачно један лук који их спаја и лежи у X . Означимо тај лук са $[x, y]$.

Тврђење 84. *За свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такав да за све $x, y \in X$ за које је $d(x, y) < \delta$ следи да је*

$$\text{diam}([x, y]) < \varepsilon.$$

Последица 85. *Нека је (x_n) низ тачака у $X \setminus \{x\}$ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Тада важи:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}([x_n, x]) = 0.$$

На слици [3.2] налази се неколико примера дендрита.



Слика 3.2: Дендрити

Наведимо и неколико тврђења која ближе описују особине хомеоморфизама на недегенерисаним дендритима. Доказ следећег тврђења може се наћи у [39].

Тврђење 86. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на дендритиу X . Тада за сваки лук $[x, y]$ у X важи:

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)].$$

Више детаља и доказ следеће теореме може се видети у [1].

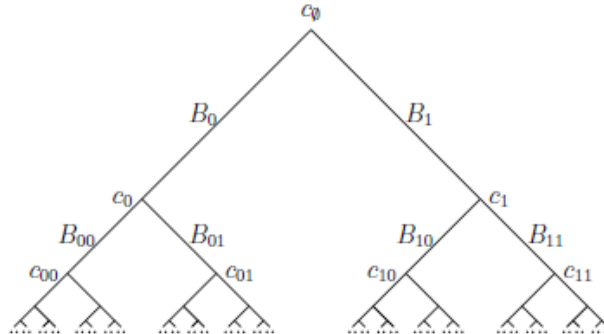
Теорема 87. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на дендритиу X и $x \in X$. Тада је $\omega(x)$ или периодична орбита или Канторов скуп.

За крај наведимо још једно добро познато својство (в. [54]).

Тврђење 88. Хомеоморфизам на дендритиу има својство фиксне тачке.

У следећем примеру описаћемо Гехманов дендрит, који је занимљив и сам по себи, а ми ћемо га користити у одељку 3.2. Гехман је овај, испоставиће се, веома важан дендрит дефинисао у раду из 1925. године.

Пример 89. Са G ћемо означаваати Гехманов дендрит приказан на слици испод. То је дендрит чији је скуп крајњих тачака Канторов скуп, па је самим тим нејребројив. Осим тога, свака тачка гранања је реда 3. Важи тврђење (в. Теорему 4.1 у [4]) да је Гехманов дендрит јединствени (до на хомеоморфизам) континуум чији је скуп крајњих тачака хомеоморфан Канторовом скупу и свака тачка гранања је реда 3. Осим тога, важи тврђење (в. Тврђење 6.8 у [4]) да сваки дендрит чији је скуп крајњих тачака нејребројив обавезно садржи копију Гехмановог дендрита. Ознаке код шмена и лукова које се налазе на слици 3.3 биће објашњене у одељку 3.2.



Слика 3.3: Гехманов дендрит

Завршићемо општу причу о дендритима податком да се сваки дендрит може уложити у $\mathbb{R}^2$. Прецизније, постоји такозвани универзални дендрит Вазевског, који садржи копију сваког дендрита који постоји. Више је начина да се конструише овај универзални дендрит, а један преко инверзних лimesа је дат у секцији 10.37 у [49].

За крај овог одељка дефинишимо једну ширу класу Пеанових континуума.

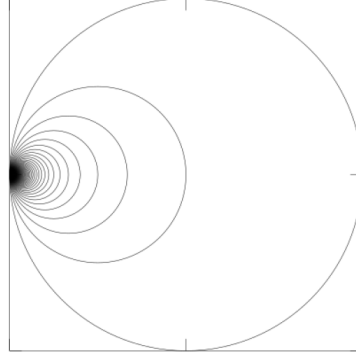
Дефиниција 90. За континуум X кажемо да је локални дендрит ако свака тачка $x \in X$ има околину која је дендрит.

Сваки локални дендрит је Пеанов континуум који садржи коначно много кругова. Дендрити, графови и дрвета јесу локални дендрити. Наведимо пример простора који није локални дендрит, а иначе је познат као један од најједноставнијих примера простора који нема универзално наткривање.

Пример 91. Дефинишимо простор:

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\},$$

који је даи на слици 3.4, а познаи је под именом хавајска минђуша.



Слика 3.4: Хавајска минђуша

H је Пеанов континуум, а јасно је да тачка $(0, 0)$ нема околину која је дендрии, па хавајска минђуша заиста није локални дендрии.

Флексибилност полиномијалне ентропије на дендритима

Наведимо укратко основну терминологију и једно тврђење које ће нам бити потребни у овом одељку. Нека је A коначан скуп који називамо азбуком и за чије елементе кажемо да су слова. Означимо са $A^{\mathbb{Z}}$ скуп свих двостраних низова $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, са Тихоновљевој топологијом. Простор $A^{\mathbb{Z}}$ је метрички, а метрика је дата са:

$$d(x, y) := 2^{-m},$$

где је

$$m = \min\{|n| \mid x_n \neq y_n\}.$$

Простор $A^{\mathbb{Z}}$ са овом метриком је компактан тотално неповезан метрички простор без изолованих тачака. Шифт пресликавање је дефинисано на следећи начин:

$$\sigma : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}, \quad \{\sigma(x)\}_n = x_{n+1},$$

и јесте један хомеоморфизам. За затворени инваријантни подскуп $\Sigma \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ кажемо да је подшифт.

Нека је Σ подшифт. Дефинишимо скуп речи дужине n :

$$\mathcal{L}^n(\Sigma) := \{(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}) \in A^n \mid x \in \Sigma, k \in \mathbb{Z}\} \subseteq A^n,$$

и на њему функцију комплексности:

$$p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad p(n) := |\mathcal{L}^n(\Sigma)|.$$

Доказ следећег тврђења може се пронаћи у [45].

Тврђење 92. Нека је Σ *подшифт*. Тада је $h_{\text{pol}}(\Sigma, \sigma) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p(n)}{\log n}$.

Може се показати (в. [48]) да полиномијална ентропија непрекидних пресликавања на сегменту узима целобројне вредности, ако је коначна. Са друге стране, важи да полиномијална ентропија непрекидних пресликавања на континуумима постиже произвољне вредности из $[0, \infty]$ (в. Теорему 37 у [48]). Циљ овог одељка је да представимо резултате из секције 5.2 у [48], где је показано да непрекидна пресликавања на дендритима узимају произвољне вредности из $[2, \infty]$. Осим тога, жеља нам је да бар дотакнемо симболичку динамику, која може бити добар извор техника за рачунање полиномијалне ентропије. Напоменимо да и даље остаје отворено питање да ли постоји непрекидно пресликавање на дендриту чија је полиномијална ентропија број из $[0, 2)$, а различита је од 0 и 1. Ово није једини пример динамичког система код ког питање постизања вредности полиномијалне ентропије није у потпуности разрешено или је разрешено негативно за интервал $(1, 2)$. У [23] показано је да не постоји Брауверов хомеоморфизам равни чија је полиномијална вредност реалан број из $(1, 2)$. У [34], Марко је показао да је полиномијална ентропија (конвексног) билијара бар 2, осим у случају кружног билијара код кога је полиномијална ентропија једнака 1. Видећемо мало касније како се доводе у везу подшифт и Гехманов дендрит. Поменимо још да се релативно лако може закључити да не постоји подшифт чија је полиномијална ентропија реалан број из $(0, 1)$. Ако је подшифт коначан, онда је функција комплексности ограничена, па је полиномијална ентропија једнака нули. Ако је подшифт бесконачан, онда важи теорема Морса и Хедлунда која каже да је $p(n) \geq n + 1$, што даље даје да је полиномијална ентропија бар један. Ово излагање се лепо може повезати са коментаром после Тврђења 93.

Нека је $X \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$. Посматрајмо подшифт (X, σ) чија је полиномијална ентропија $h_{\text{pol}}(\sigma) \in (1, 2)$. Према Тврђењу 3 из [48], то се може урадити. Главна идеја је да се шифт $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}, \sigma)$ уложи у динамички систем на Гехмановом дендриту, а да се потом пређе на одговарајући поддендрит G_X , који је индукован подшифтом (X, σ) . Пратећи ознаке са слике 3.3, G садржи корен $c_\emptyset$, тачке гранања c_x , за сваку непразну коначну реч $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ и крање тачке e_x , за сваку бесконачну реч $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$. За сваку непразну коначну реч $x \in \{0, 1\}^{<\infty}$ означимо са B_x лук $[c_{\beta(x)}, c_x]$, где је $\beta(x_0 \cdots x_{n-2} x_{n-1}) = x_0 \cdots x_{n-2}$ и $\beta(0) = \beta(1) = \emptyset$. G_X се састоји од свих лукова у G који спајају $c_\emptyset$ са тачкама e_x , $x \in X$. Важи да тачка $c_x \in G_X$ ако и само ако се коначна реч x појављује као подреч неког елемента у простору X . Динамика пуног шифта се остварује на скупу крајњих тачака путем непрекидног пресликавања $F : G \rightarrow G$, за које важи да је $F(e_x) = e_{\sigma(x)}$ и $F(c_x) = c_{\sigma(x)}$, при чему F продужавамо линеарно на сваком луку B_x . Са F_X означавамо рестрикцију пресликавања F на G_X . Напоменимо да је G_X F -инваријантан, по конструкцији. Важи следеће тврђење:

Тврђење 93. За сваки *подшифт* (X, σ) , $X \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ важи да је:

$$h_{\text{pol}}(F_X) = h_{\text{pol}}(\sigma|_X) + 1.$$

За разлику од полиномијалне ентропије, тополошка ентропија произвољног подшифта X и одговарајућег пресликавања на дендриту F_X су једнаке, тј. $h_{\text{top}}(F_X) = h_{\text{top}}(\sigma|_X)$. Ово је можда први, али свакако не и последњи пут, да у овој тези видимо „+1” код израза за полиномијалну ентропију, у односу на сличну формулу за тополошку ентропију.

Из претходног тврђења следи да за сваки реалан $\alpha \in (2, 3)$ постоји дендрит D и непрекидна сурјекција $f : D \rightarrow D$ за коју је $h_{\text{pol}}(f) = \alpha$. Овај резултат се може уопштити на дендрите који су Гехмановог типа, како би се добила било која вредност из $[2, \infty]$.

3.3 Регуларне криве

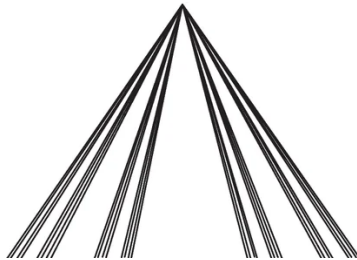
У последњем одељку ћемо дефинисати најопштији континуум о ком ћемо говорити у тези, а то су регуларне криве. Може се показати (в. Теорему 10.20. у [49]) да су дендрити регуларне криве.

Дефиниција 94. Нека је X континуум. Кажемо да је X регуларна крива ако за свако $x \in X$ и сваку отворену околину U од x у X постоји отворена околина V од x у X таква да је $V \subset U$ и граница ∂V је коначан скуи.

Дакле, дендрити (а тиме и дрвета), графови и локални дендрити јесу регуларне криве.

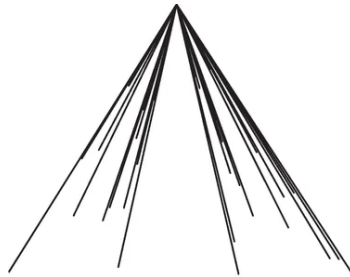
Пример 95. Наведимо сада неколико занимљивих примера једнодимензионалних континуума који нису регуларне криве.

- (1) На слици 3.5 је приказана Канторова лепеза $X = \bigcup_{c \in C} A_c$, где је $C \subset [0, 1]$ Канторов скуи и за свако $c \in C$ A_c је семени који спаја $(0, 0)$ и $(c, -1)$. Очигледно је да је у $(0, 0)$ нарушен услов регуларности.



Слика 3.5: Канторова лепеза

- (2) Лелекова лепеза Y на слици 3.6 је подконтинуум Канторове лепезе за који важи да је затворање скуиа крајњих шачака једнако Y . Ова лепеза је јединствени (до на хомеоморфизам) подконтинуум Канторове лепезе са овом особином. Може се показати да се Лелекова лепеза може уложити у Канторову (лакше), али и да се Канторова лепеза може уложити у Лелекову (теже).



Слика 3.6: Лелекова лепеза

Циљ нам је да докажемо да је тополошка ентропија хомеоморфизама на регуларним кривама једнака нули. Доказ ове теореме може се наћи у [52], али како је рад тешко доступан, а доказ доприноси разумевању регуларних кривих и дефиниције ентропије помоћу отворених покривача, представимо га овде. За почетак су нам потребне две леме.

Лема 96. Нека је $\mathcal{A}$ отворени покривач континуума X и нека је P скуп свих граничних тачака елемената из $\mathcal{A}$. Ако је $\mathcal{A}$ минимални покривач, тада је број елемената покривача $\mathcal{A}$ мањи или једнак од броја елемената скупа P .

Доказ. Како је $\mathcal{A}$ минималан, он нема потпокривач. Због тога мора бити коначан, јер је X компактан. Нека је a број елемената у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} = \{A_i\}_{1 \leq i \leq a}$. Нека је $A_j \in \mathcal{A}$ и $V = \bigcup_{i \neq j} A_i$. Приметимо да је V отворен као унија отворених скупова. Како је $\mathcal{A}$ минималан, закључујемо да је $X \setminus V \neq \emptyset$, па је $\partial(V) \neq \emptyset$, због повезаности простора X . Даље је $\partial(V) \subseteq P$, јер је V коначна унија елемената из $\mathcal{A}$. Како је V отворен, важи да је $\partial(V) \cap V = \emptyset$, па је $\partial(V) \subseteq A_j$. Заправо смо показали да за сваки $A_j \in \mathcal{A}$ постоји непразан подскуп од P који лежи у A_j , али је дисјунктан са осталим елементима из $\mathcal{A}$. Ово значи да је кардиналност скупа $\mathcal{A}$ мања или једнака од кардиналности P . $\square$

Лема 97. Нека је $h : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на регуларној кривој X . Нека је $\mathcal{A}$ минимални отворени покривач од X са бар два елемента, такав да сваки елемент покривача има коначну границу. Са $L_{\mathcal{A}}$ означимо број свих тачака са границе елемената из $\mathcal{A}$. За свако $n \in \mathbb{N}$, нека је $\mathcal{M}_n$ минимални попокривач од $\bigvee_{i=0}^{n-1} h^{-i}(\mathcal{A})$ и P_n унија граничних тачака од $\bigcup_{i=0}^{n-1} h^{-i}(\mathcal{A})$. Тада важи:

(1) За свако $n \in \mathbb{N}$, свака гранична тачка скупа из покривача $\mathcal{M}_n$ припада P_n .

(2)

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} h^{-i}(\mathcal{A})\right) \leq nL_{\mathcal{A}}.$$

Доказ. Докажимо (1). Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \partial M$, $M \in \mathcal{M}_n$. Из дефиниције $\mathcal{M}_n$ следи да за свако $0 < i \leq n$, постоји $V_i \in \mathcal{M}_i$ такав да је $M = \bigcap_{i=1}^{n-1} V_i$. Нека је B отворен скуп који садржи x . Тада је $B \cap M \neq \emptyset$, па је $B \cap V_i \neq \emptyset$ за све V_i . Али тада за свако V_i мора бити или $x \in \partial(V_i)$ или $x \in V_i$. Ако би сваки V_i садржао x , онда би $x \in M$, што би било у контрадикцији са $x \in \partial(M)$, јер је M отворен. Дакле, $x \in \partial V_i$, за бар један V_i , па је $x \in P_n$.

Докажимо сада (2). Нека је $n \in \mathbb{N}$. Како је h хомеоморфизам, број елемената у граници скупа $h^j(\mathcal{A})$ једнака је $L_{\mathcal{A}}$ за сваки j . Због саме дефиниције скупа P_n , број његових елемената је највише $nL_{\mathcal{A}}$. Како је свака гранична тачка елемената из $\mathcal{M}_n$ у P_n , према делу (1) и како $\mathcal{M}_n$ нема прави потпокривач, из Леме [96] следи да постоји највише $nL_{\mathcal{A}}$ елемената у $\mathcal{M}_n$. $\square$

Сада можемо да пређемо на доказ теореме:

Теорема 98. Ако је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на регуларној кривој X , тада је $h_{\text{top}}(f) = 0$.

Доказ. Нека је $\mathcal{A}$ минимални отворени покривач од X , који садржи бар два елемента и такав да сваки елемент покривача има коначну границу. Нека је $L_{\mathcal{A}}$ број граничних тачака елемената из $\mathcal{A}$. Из дела (2) Леме 97 следи да је

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(h, \mathcal{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} h^{-i}(\mathcal{A}) \right) \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(nL_{\mathcal{A}}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Како је $\mathcal{A}$ био произвољан минимални покривач са бар два елемента и чији сваки елемент има коначну границу, видимо да је ентропија h у односу на сваки такав покривач једнака нули. Можемо применити Тврђење 51 на низ оваквих покривача чији дијаметар тежи ка нули и закључити да је $h_{\text{top}}(f) = 0$. $\square$

Дакле, доказали смо да је тополошка ентропија хомеоморфизама на регуларним кривама једнака нули, а тиме и хомеоморфизама на графовима, дендритима и локалним дендритима. Закључујемо да су ови динамички системи ниске сложености, па је полиномијална ентропија добра мера комплексности за њих.

За крај, доказаћемо тврђење које нам је од велике важности за примену Тврђења 127 у доказу Теореме 128.

Теорема 99. *Ако је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на регуларној кривој X , тада је $\text{NW}(f) = \text{Rec}(f)$.*

Доказ. Знамо да је увек $\text{Rec}(f) \subseteq \text{NW}(f)$, па докажимо обрнуту инклузију. Нека је $x \in \text{NW}(f)$ произвољна. Тада постоји низ тачака $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из X и низ природних бројева $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{k_n}(x_n)$. Претпоставимо да x није рекурентна. Тада постоји $\delta > 0$ за које је $d(f^n(x), x) > \delta$, за све $n \in \mathbb{N}$. Како је X регуларна крива, постоји отворена околина $U \subset B(x, \delta)$ тачке x са коначном границом. Нека је $\varepsilon > 0$. X је локално путно повезан, па за довољно велико n постоји лук I_n у $B(x, \varepsilon) \cap U$ који спаја x и x_n . Одавде следи да је $f^{k_n}(I_n) \cap \partial U \neq \emptyset$. Како је ∂U коначна, постоји тачка $b_\varepsilon \in \partial U$ за коју је $\alpha_f(b_\varepsilon) \cap \overline{B}(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Опет, како је ∂U коначна и ε је произвољно, постоји $b \in \partial U$ такво да је $x \in \alpha_f(b)$. Може се показати (в. Теорему 1.1 у [40]) да је сваки α -гранични скуп хомеоморфизма на регуларној кривој минималан. Како је свака тачка минималног скупа рекурентна, добијамо да је $x \in \text{Rec}(f)$. $\square$

Глава 4

Хиперпростори

У овом поглављу упознаћемо се са појмом хиперпростора, њиховим основним особинама, као и важним примерима. Имајући у виду да је ово првенствено тополошка тема и да нам није од значаја да улазимо у детаље, нећемо дати доказе свих тврђења, нити говорити о неким специфичностима које нам нису од користи за изучавање динамичких система на хиперпросторима. Одличан извор информација о хиперпросторима, као и књига коју смо користили за писање овог поглавља јесте [25]. У њој се, поред детаљно засноване теорије, може пронаћи мноштво примера, али и (још увек) отворених проблема на тему хиперпростора.

Често су нам у сврху тражења примера и контрапримера, као и изучавања неких појмова, потребни веома комплексни простори. Неки од начина да их добијемо су добро познати Декартов производ простора или количнички простори. Хиперпростори се овде природно уклапају. Наиме, рецимо да желимо да опишемо све могуће положаје n идентичних честица гаса које се слободно крећу у простору X . Сваки положај био би облика $\{x_1, \dots, x_n\}$, па би простор свих положаја био скуп чији су елементи $\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \in X$. Сматраћемо да су скупови добијени „малим” померањем свих честица близу један другом, при чему „мало” померање зависи од топологије простора X . Простори овог типа често се називају конфигурацијски простори. Ова конструкција би се формално описала на следећи начин:

$$C_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j\} / S_n,$$

где је S_n група пермутација свих координата. Као што ћемо видети, овај пример простора је веома близак хиперпростору $F_n(X)$.

Елементи хиперпростора су непразни подскупови полазног простора X и као такви имају велику примену у питањима која се тичу понашања „групе” елемената, насупрот понашању појединачних тачака. Заинтересовани смо да ли се особине које важе на базном простору X преносе на хиперпросторе и обрнуто. Такође нас интересује сложеност хиперпростора, односно да ли се увек, и у којој мери, дешава да је динамика на хиперпростору комплекснија него она на базном простору X .

4.1 Важни хиперпростори и Вијеторисова топологија

Нека је X тополошки простор са топологијом $\mathcal{T}$. Хиперпростор простора X је одређена фамилија подсупова од X , са Вијеторисовом топологијом коју ћемо убрзо

4.1. ВАЖНИ ХИПЕРПРОСТОРИ И ВИЈЕТОРИСОВА ТОПОЛОГИЈА

дефинисати. Узима се да $\emptyset$ није елемент хиперпростора, јер бисмо у супротном касније наишли на проблеме при дефинисању метрике на хиперпростору. Такође, у динамичком смислу не губимо ништа искључивањем празног скупа, јер би он био само једна фиксна тачка индикованог пресликавања (види секцију 4.6) на хиперпростору.

Ако бисмо кренули од простора чији су елементи сви непразни подскупови од X :

$$N(X) = \{A \subset X \mid A \neq \emptyset\},$$

такав хиперпростор не би имао лепе тополошке особине. Штавише, $N(X)$ није T_1 простор осим ако $(X, \mathcal{T})$ није дискретан простор. Зато је највећи хиперпростор који ћемо посматрати онај чији су елементи затворени подскупови од X :

$$CL(X) = \{A \subset X \mid A \neq \emptyset, A \text{ је затворен}\},$$

са Вијеторисовом топологијом.

Дефиниција 100. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. Вијеторисова топологија на $CL(X)$ је најмања топологија $\mathcal{T}_V$, за коју $CL(X)$ има следеће природно својство: за све $U \in \mathcal{T}$ је $\{A \in CL(X) \mid A \subset U\} \in \mathcal{T}_V$ и за све B који су затворени у топологији $\mathcal{T}$ $\{A \in CL(X) \mid A \subset B\}$ је затворен.

Уведимо следећу ознаку у циљу дефинисања базе Вијеторисове топологије: за коначно много подскупова $S_1, \dots, S_n$ од X нека је

$$\langle S_1, \dots, S_n \rangle := \{A \in CL(X) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^n S_i, A \cap S_i \neq \emptyset \text{ за све } i = 1, \dots, n\}.$$

Теорема 101. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и нека је

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle \mid U_i \in \mathcal{T} \text{ за све } i = 1, \dots, n \text{ и произвољно } n \in \mathbb{N}\}.$$

Тада је $\mathcal{B}_V$ база за топологију $\mathcal{T}_V$.

Скупови које смо користили у самој дефиницији Вијеторисове топологије $\mathcal{T}_V$ могу се написати помоћу нотације коју смо увели у претходној дефиницији за чланове $\mathcal{B}_V$, и то на следећи начин: за све $U \in \mathcal{T}$ и све $\mathcal{T}$ -затворене скупове B ,

$$\{A \in CL(X) : A \subset U\} = \langle U \rangle;$$

$$\{A \in CL(X) : A \subset B\} = CL(X) \setminus \langle X, X \setminus B \rangle.$$

Прва једнакост је очигледна, а објаснимо сада зашто важи друга.

$$\begin{aligned} \{A \in CL(X) : A \subset B\} &= \{A \in CL(X) \mid B^c \subset A^c\}, \\ &= \{A \in CL(X) \mid X \setminus B \cap A = \emptyset\}, \\ &= CL(X) \setminus \{A \in CL(X) \mid X \setminus B \cap A \neq \emptyset\} \\ &= CL(X) \setminus \langle X, X \setminus B \rangle. \end{aligned}$$

Другим речима, дефиниција 100 каже да је $\mathcal{T}_V$ најмања топологија на $CL(X)$ која садржи све скупове облика $\langle U \rangle$ и $\langle X, U \rangle$ за $U \in \mathcal{T}$. Пређимо сада на доказ Теореме 101.

Доказ. Дефинишимо

$$\mathcal{S} = \{\langle U \rangle : U \in \mathcal{T}\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \mathcal{T}\}.$$

Тада је фамилија $\mathcal{S}$ предбаза топологије $\mathcal{T}_V$, што значи да је фамилија $\mathcal{S}^*$ свих коначних пресека чланова $\mathcal{S}$ база топологије $\mathcal{T}_V$.

Закључујемо да је довољно доказати да је

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{B}_V.$$

Покажимо прво да је

$$\mathcal{B}_V \subset \mathcal{S}^*.$$

Нека су $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$. Приметимо да је

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n U_i \rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \langle X, U_i \rangle \right),$$

па је јасно $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \in \mathcal{S}^*$. Одавде следи да је $\mathcal{B}_V \subset \mathcal{S}^*$.

Покажимо сада да је $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_V$.

За почетак покажимо да ако $U, W \in \mathcal{B}_V$, онда $U \cap W \in \mathcal{B}_V$. У ту сврху претпоставимо да је $U = \langle U_1, \dots, U_k \rangle$ и $W = \langle W_1, \dots, W_m \rangle$, за неке $U_i, W_i \in \mathcal{T}$. Нека је $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$ и $W = \bigcup_{j=1}^m W_j$. Лако се види да је

$$U \cap W = \langle U_1 \cap W, \dots, U_k \cap W, W_1 \cap U, \dots, W_m \cap U \rangle,$$

па можемо закључити да је $U \cap W \in \mathcal{B}_V$.

Дакле, да бисмо доказали да је $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_V$, довољно је да докажемо да је пресек произвољна два елемента из $\mathcal{S}$ такође елемент $\mathcal{B}_V$.

Нека су $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Тада важи:

$$\langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2 \rangle,$$

$$\langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle,$$

и

$$\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle.$$

Уверили смо се да сваки пресек коначне фамилије елементата из $\mathcal{S}$ припада $\mathcal{B}_V$, те стога $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_V$. Закључујемо да је $\mathcal{S}^* = \mathcal{B}_V$, па је $\mathcal{B}_V$ база Вијеторисове топологије $\mathcal{T}_V$. $\square$

Теорема 102. *Ако је $X \approx Y$, онда је $CL(X) \approx CL(Y)$.*

Доказ. Нека је h хомеоморфизам из X у Y . Дефинишимо функцију $h^* : CL(X) \rightarrow CL(Y)$ на следећи начин:

$$h^*(A) = h(A),$$

за свако $A \in CL(X)$. Како је h затворено пресликавање, h^* пресликава $CL(X)$ у $CL(Y)$. Такође, h^* је сурјективно, јер за свако $B \in CL(Y)$ важи $h^{-1}(B) \in CL(X)$ и $h^*(h^{-1}(B)) = B$. Како је h инјекција, такво је и h^* .

Приметимо да важе следеће две неједнакости испод. Прва једнакост важи јер је h затворено пресликавање, док друга важи јер је h непрекидна инјекција која пресликава X на Y .

$$(h^*)^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle) = \langle h^{-1}(W_1), \dots, h^{-1}(W_n) \rangle, \text{ при чему је сваки } W_i \text{ отворен у } Y;$$

$$h^*(\langle U_1, \dots, U_m \rangle) = \langle h(U_1), \dots, h(U_m) \rangle, \text{ при чему је сваки } U_i \text{ отворен у } X.$$

Користећи прву једнакост, непрекидност h и Теорему 101, видимо да је h^* непрекидно. Користећи другу једнакост, Теорему 101, као и чињеницу да је h отворено пресликавање, видимо да је h^* отворено пресликавање. Закључујемо да је $(h^*)^{-1}$ непрекидно. Овим смо показали да је h^* хомеоморфизам простора $CL(X)$ и $CL(Y)$. $\square$

Обрат претходне теореме не важи, али уведемо прво још неке појмове, да бисмо у секцији 4.5 навели једну важну теорему из које ће се јасно видети да $CL(X) \approx CL(Y)$ може да важи и када није $X \approx Y$.

Посматрајући затворене скупове са још неким додатним особинама, долазимо до дефиниције неких важних хиперпростора. Сваки од хиперпростора који ћемо дефинисати посматрамо са топологијом потпростора, која се наслеђује од $(CL(X), \mathcal{T}_V)$.

Хиперпростор затворених и повезаних подскупова од X означавамо са $CLC(X)$. Хиперпростор компактних подскупова од X означавамо са 2^X . Хиперпростор повезаних компактних подскупова од X означавамо са $C(X)$. Са $F_n(X)$ означавамо хиперпростор непразних подскупова са највише n елемената, а са $F(X) = \cup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ хиперпростор коначних подскупова од X .

Дефиниција 103. Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки T_1 -простор. Тада дефинишемо следеће хиперпросторе:

$$\begin{aligned} CLC(X) &= \{A \in CL(X) \mid A \text{ је повезан}\}, \\ 2^X &= \{A \in CL(X) \mid A \text{ је компактан}\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X \mid A \text{ је повезан}\}, \\ F_n(X) &= \{A \subset X \mid 1 \leq |A| \leq n\}, \\ F(X) &= \{A \subset X \mid A \text{ је коначан}\}. \end{aligned}$$

Напоменимо да је за коректну дефиницију простора $F_n(X)$ потребно да X буде тополошки простор који је бар T_1 , како би једночлани скупови били затворени. У већем делу тезе простор X , чије ћемо хиперпросторе посматрати, биће метрички простор, па ће самим тим бити избегнуте готово све могуће патологије. Простор $F_n(X)$ назива се n -тоструки симетрични производ од X и не треба га мешати са веома сличним простором који се често среће у литератури из алгебре и топологије, а то је $\text{Sym}^n(X) = X^n/S_n$. Простор $\text{Sym}^n(X)$ је простор неуређених n -торки, при чему су дозвољена понављања. Ако је, примера ради, $X = \{a, b\}$, тада је $F_3(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, док је $\text{Sym}^3(X) = \{\{a, a, a\}, \{a, b, a\}, \{a, b, b\}, \{b, b, b\}\}$. Постоји (само) непрекидна сурјекција $\pi : \text{Sym}^n(X) \rightarrow F_n(X)$, не и хомеоморфизам.

Приметимо још да важи следећи низ инклузија:

$$X \approx F_1(X) \subset F_2(X) \subset F_3(X) \subset \dots F(X).$$

За крај, напоменимо да Теорема 102 важи и за хиперпросторе које смо малочас дефинисали ($CLC(X)$, 2^X , $F_n(X)$ и $F(X)$). Наиме, хомеоморфизам h^* пресликава

одговарајући хиперпростор на самог себе, јер хомеоморфизам слика компакте у компакте, повезане скупове у повезане скупове и скупове са највише n елемената у скупове са највише n елемената.

4.2 Примери хиперпростора

Почнимо са једним једноставним, али занимљивим примером. Нека је $(X, \mathcal{T})$ простор Сјерпинског, односно нека је $X = \{0, 1\}$ и $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Тада је $CL(X) = \{\emptyset, X, \{1\}\}$, односно хиперпростор затворених подскупова је опет простор Сјерпинског. Иначе је хиперпростор $CL(X)$, разуме се, много већи од полазног простора X .

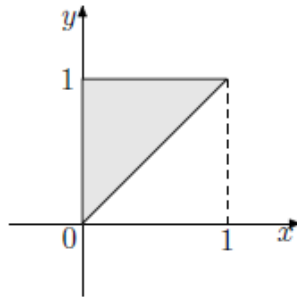
Како се одређени део резултата који ће бити представљени у овој тези односи на хиперпросторе сегмента $[0, 1]$ и круга $\mathbb{S}^1$, описаћемо неке од њихових хиперпростора.

Хиперпростори сегмента $[0, 1]$

Нека је $X = [0, 1]$. Приметимо да су елементи хиперпростора $C([0, 1])$ затворени интервали $[a, b]$, $0 \leq a \leq b \leq 1$ (овде су укључени и дегенерисани интервали, односно тачке, као и цео сегмент $[0, 1]$). Посматрајмо функцију h из $C([0, 1])$ у $\mathbb{R}^2$ дефинисану на следећи начин:

$$h([a, b]) = (a, b),$$

за све $[a, b] \in C([0, 1])$. Дакле, сваком сегменту додељујемо тачку у равни чије су координате баш (a, b) . Слика $C([0, 1])$ при h је троугао T у $\mathbb{R}^2$, са теменима $(0, 0)$, $(0, 1)$, и $(1, 1)$, као на слици 4.1.



Слика 4.1: Троугао T

Једноставно се види да је h инјекција и да је $h(C([0, 1])) = T$. Да бисмо показали да је h хомеоморфизам приметимо следеће: ако је $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ низ у $C([0, 1])$, тада $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ конвергира у $C([0, 1])$ ка $[a, b]$ ако и само ако низ $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ конвергира у $\mathbb{R}^2$ ка (a, b) . У одељку 4.4 ћемо видети да је $C([0, 1])$ заиста метрички простор, па је ова провера непрекидности помоћу низова у реду.

Одредимо сада $F_2([0, 1])$. Елементи овог простора су непразни највише двочлани подскупови сегмента $[0, 1]$. Дефинишимо пресликавање h на $F_2([0, 1])$ на следећи начин:

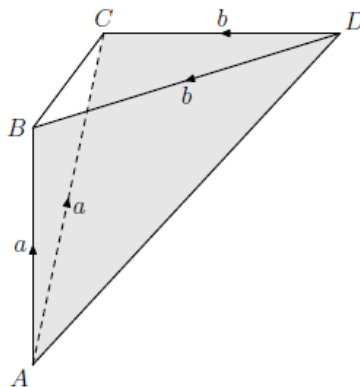
$$h(\{a, b\}) = (a, b),$$

за свако $0 \leq a \leq b \leq 1$. Слика $F_2([0, 1])$ при h је, као и малопре, троугао T у $\mathbb{R}^2$, са теменима $(0, 0)$, $(0, 1)$, и $(1, 1)$. Осим тога, $F_1([0, 1])$ се слика у страну троугла која лежи на $y = x$. Интересантно, у случају сегмента $[0, 1]$, добили смо да је $C([0, 1]) = F_2([0, 1])$, што, наравно, не важи у општем случају.

И, за крај, погледајмо детаљније хиперпростор $F_3([0, 1])$. Његови елементи су непразни највише трочлани подскупови сегмента $[0, 1]$. Једночлани подскупови $\{x\}$ су у бијективној кореспонденцији са уређеним тројкама (x, x, x) , док су трочлани подскупови $\{x, y, z\}$ у бијективној кореспонденцији са уређеним тројкама (x, y, z) . До нарушавања бијективности са простором $\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ долази код двочланих подскупова, јер скупу $\{x, z\}$ одговарају две уређене тројке - (x, x, z) и (x, z, z) (узимајући у обзир да је $x \leq z$). Одавде је јасно да је:

$$F_3([0, 1]) = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\} / (x, x, z) \sim (x, z, z).$$

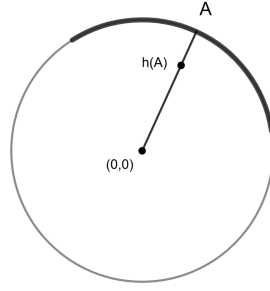
Скуп $\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ је тетраедар T са теменима $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$ и $D(1, 1, 1)$, као на слици 4.2. Простор $F_3([0, 1])$ добијамо лепљењем страна ABD (тачке облика (x, x, z)) и ACD (тачке облика (x, z, z)), и то тако да се B идентификује са C , AB са AC и BD са CD . Након идентификације добијамо два пуна конуса чији су врхови A и D , залепљена по основама, што је тополошки гледано једна лопта. Једночлани подскупови леже на пречнику AD .



Слика 4.2: Тетраедар T

Хиперпростори круга

Нека је сада $X = \mathbb{S}^1$ јединични круг у равни, $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Почећемо од описа хиперпростора $C(\mathbb{S}^1)$, чији су елементи непразни компактни повезани подскупови кружнице $\mathbb{S}^1$. То су лукови, цела кружница и дегенерисани лукови, односно једночлани подскупови кружнице. Дефинишимо хомеоморфизам h , из $C(\mathbb{S}^1)$ на јединични диск $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Почнимо од дефиниције $h(A)$ када је A произвољан лук у $\mathbb{S}^1$. Са $\ell(A)$ означимо дужину лука A у $\mathbb{S}^1$. Нека је $m(A)$ тачка на A која дели лук A на два подлука једнаке дужине. Нека је сада $h(A)$ тачка која лежи на дужи која спаја центар круга $(0, 0)$ и средиште лука $m(A)$, а чије је еуклидско растојање $\ell(A)/2\pi$ од $m(A)$ (види слику 4.3).



Слика 4.3: Хомеоморфизам h

Другим речима, сматрајући да је $m(A)$ вектор, дефинишимо:

$$h(A) = \left(1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}\right) m(A).$$

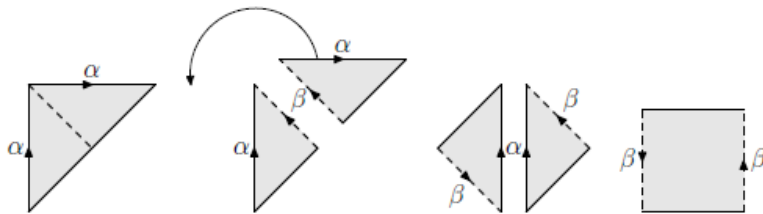
Дакле, h пресликава све лукове дужине t на $\mathbb{S}^1$ на круг са центром у $(0,0)$, полупречника $1 - (t/2\pi)$. Јасно је да је само један начин да дефинишемо h на остатку простора $C(\mathbb{S}^1)$ тако да буде хомеоморфизам. $h(\{x\}) = x$ за све $\{x\} \in F_1(\mathbb{S}^1)$ и $h(\mathbb{S}^1) = (0,0)$. Лако се види да је h хомеоморфизам из $C(\mathbb{S}^1)$ на диск D . Такође, h пресликава $F_1(\mathbb{S}^1)$ на ∂D .

Напоменимо да исти резултат добијамо и за произвољне просте затворене криве, јер постоји хомеоморфизам између сваке просте затворене криве и круга.

Одредимо сада хиперпростор $F_2(\mathbb{S}^1)$. Круг $\mathbb{S}^1$ можемо добити од сегмента $[0,1]$ идентификацијом његових крајева. Због тога, простор $F_2(\mathbb{S}^1)$ можемо добити од $F_2([0,1])$ идентификацијом 0 и 1. То значи да је:

$$F_2(\mathbb{S}^1) = F_2([0,1]) / (0,x) \sim (x,1).$$

У претходној формули користимо да је $F_2([0,1])$ хомеоморфан троуглу T , а наведена идентификација довешће до Мебијусове траке (в. слику 4.4). Једночлани подскупови пресликаће се у границу Мебијусове траке.

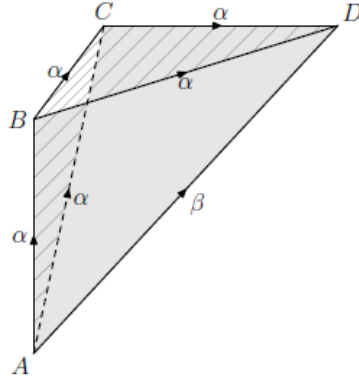


Слика 4.4: Простор $F_2(\mathbb{S}^1)$

За крај, одредимо и $F_3(\mathbb{S}^1)$. Као и у случају хиперпростора $F_2(\mathbb{S}^1)$, кренућемо од $F_3([0,1])$ и извршићемо одговарајућу идентификацију:

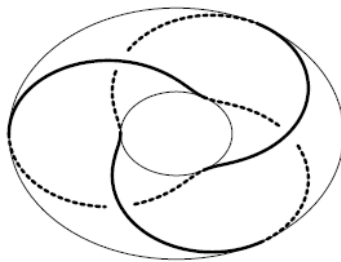
$$F_3(\mathbb{S}^1) = F_3([0, 1]) / (0, y, z) \sim (y, z, 1).$$

У претходном одељку видели смо да је $F_3([0, 1])$ тетраедар са одређеним идентификацијама, а овде сада додајемо још једну - залепићемо ABC (тачке облика $(0, y, z)$) и BCD (тачке облика $(y, z, 1)$), тако да се ивице AB , BC и CA идентификују са BC , CD и DB , редом, као на слици 4.5.



Слика 4.5: Простор $F_3(\mathbb{S}^1)$

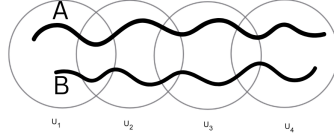
Последња идентификација доноси највише компликација, и на овај начин нећемо успети да видимо шта је заправо, тополошки гледано, простор $F_3(\mathbb{S}^1)$. Занимљиво је да је Карол Борсук (1905-1982) објавио рад 1949. године у ком је погрешно доказао да је $F_3(\mathbb{S}^1)$ хомеоморфан са $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Грешку је увидео и исправио Раул Бот (1923-2005) доказавши да је простор $F_3(\mathbb{S}^1)$ простоповезан и да је заправо $F_3(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{S}^3$. Како смо ми заправо добили ћелијску декомпозицију простора $F_3(\mathbb{S}^1)$, релативно је једноставно израчунати његову фундаменталну групу. Детаљно извођење може се наћи у [2], а наведимо само да из чињенице да је $F_3(\mathbb{S}^1)$ компактна многострукост са тривијалном фундаменталном групом, из Поенкареове хипотезе за димензију 3 следи да простор $F_3(\mathbb{S}^1)$ мора бити баш $\mathbb{S}^3$. И овде се можемо питати како потпростор $F_1(\mathbb{S}^1)$, за који знамо да је $\mathbb{S}^1$, лежи у једнотачковној компактификацији $\mathbb{R}^3$, што је заправо $\mathbb{S}^3$. За кружницу у простору $\mathbb{R}^3$ кажемо да је чвор, а одговор на ово питање дао је Јакоб Мостовој у [38] тек 2004. године. У питању је тролисни чвор дат на слици 4.6. Упућујемо заинтересованог читаоца на поменуте радове, али и на занимљиву област хиперпростора, у којој је и даље велики број отворених и занимљивих проблема.



Слика 4.6: Тролисни чвор

4.3 Хаусдорфова метрика

У првом одељку описали смо базу Вијеторисове топологије. Претпоставимо сада да је X метрички простор са метриком d . Хоћемо да, уколико је то могуће, дефинишемо растојање на хиперпростору, које би индуковало Вијеторисову топологију. На слици 4.7 су две тачке A и B из хиперпростора $CL(X)$ припадају истом базном скупу $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$.



Слика 4.7: Базни скуп $\langle U_1, \dots, U_4 \rangle$

То нам сугерише да је растојање између A и B мање од неког реалног r , ако су испуњена два услова:

- (1) за свако $a \in A$ постоји $b \in B$ тако да је $d(a, b) < r$ и
- (2) за свако $b \in B$ постоји $a \in A$ тако да је $d(b, a) < r$.

Природно би било дефинисати растојање између A и B да буде инфимум по свим $r \in \mathbb{R}$ који задовољавају претходна два услова. Међутим, ако бар један од скупова A и B није ограничен, тада неће постојати r који задовољава један од услова. Овај проблем се може решити претпостављањем да је d ограничена метрика на X . Тако не бисмо умањили општост јер се метрика d увек може заменити тополошки еквивалентном ограниченом метриком $\frac{d}{1+d}$. Пређимо сада и на формалну дефиницију такозване Хаусдорфове метрике, као и на проверу да ли је дефинисано растојање заиста метрика на хиперпростору $CL(X)$.

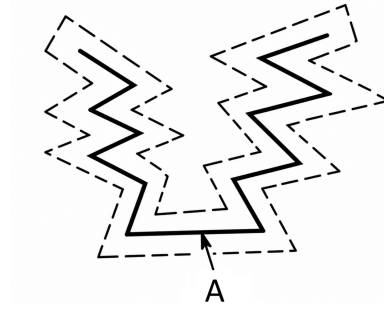
Нека је (X, d) метрички простор. За $x \in X$ и $A \in CL(X)$, нека је

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

стандардно растојање тачке од скупа. За $r > 0$ и $A \in CL(X)$ нека је са

$$N_d(r, A) = \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$$

дефинисана генералисана отворена d -лопта у X око A , полупречника r (види слику 4.8).



Слика 4.8: Генералисана d -лопта око A

Са овако уведеном ознаком услови (1) и (2) заправо кажу да је $A \subset N_d(r, B)$ и $B \subset N_d(r, A)$, редом. Дефинишимо сада Хаусдорфово растојање између два елемента $A, B \in CL(X)$.

Дефиниција 104. Нека је (X, d) ограничени метрички простор. Хаусдорфова метрика на $CL(X)$ индукована метриком d , у ознаци H_d , дефинише се на следећи начин:

$$H_d(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset N_d(r, B), B \subset N_d(r, A)\}.$$

Теорема 105. Ако је (X, d) ограничени метрички простор, онда је H_d метрика на $CL(X)$.

Доказ. За почетак приметимо да је H_d реално-вредносна (јер је d ограничена метрика) ненегативна функција. Такође, очигледно је да је H_d симетрична функција, тј. $H_d(A, B) = H_d(B, A)$, за све $A, B \in CL(X)$. Покажимо сада недегенерисаност. Нека су $A, B \in CL(X)$ такви да је $H_d(A, B) = 0$. Тада је $A \subset N_d(\varepsilon, B)$ за све $\varepsilon > 0$. Дакле, за фиксирано $p \in A$, постоји низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B$ такав да је $d(p, b_n) < \frac{1}{n}$. Закључујемо да низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира ка p . Како је B затворен у X следи да је $p \in B$, па је $A \subset B$. Аналогно добијамо да је $B \subset A$. Дакле, $H_d(A, B) = 0$ повлачи да је $A = B$. Из саме дефиниције Хаусдорфове метрике директно следи да је $H_d(A, A) = 0$, за све $A \in CL(X)$. Преостаје да покажемо неједнакост троугла за H_d .

Користићемо следећу једноставну последицу дефиниције H_d . За све $K, L \in CL(X)$ и $\varepsilon > 0$ важи:

$$(4.1) \quad K \subset N_d(H_d(K, L) + \varepsilon, L).$$

Нека су сада $A, B, C \in CL(X)$. Докажимо да је

$$H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C).$$

Нека је $\varepsilon > 0$ и нека је $a \in A$. Из (4.1) следи да постоји $b \in B$ тако да

$$(4.2) \quad d(a, b) < H_d(A, B) + \varepsilon.$$

Како је $b \in B$, опет користећи (4.1) постоји $c \in C$ такав да је

$$(4.3) \quad d(b, c) < H_d(B, C) + \varepsilon.$$

Из (4.2) и (4.3) и неједнакости троугла за d имамо да је

$$(4.4) \quad d(a, c) < H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon.$$

Елемент a је произвољно изабран, па смо заправо доказали да је

$$(4.5) \quad A \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, C).$$

Ако кренемо од произвољног елемента $c \in C$, аналогно добијамо

$$(4.6) \quad C \subset N_d(H_d(C, B) + H_d(B, A) + 2\varepsilon, A).$$

Као што смо видели, H_d је симетрична функција, па (4.6) постаје

$$(4.7) \quad C \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, A).$$

Сада из (4.5) и (124), као и саме дефиниције Хаусдорфове метрике, следи да је $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon$. Како је $\varepsilon > 0$ било произвољно, показали смо да је $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$.

□

Наведимо и еквивалентну дефиницију Хаусдорфове метрике, која је можда оперативнија за израчунавања:

$$H_d(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\},$$

за $A, B \in 2^X$.

Пример 106. У циљу бољег упознавања са Хаусдорфовом метриком, израчунаћемо неколико растојања између скупова, смањирајући да су подскупови ограничених скупова у $\mathbb{R}$, односно у $\mathbb{R}^2$.

- Нека је $A = [0, 1]$ и $B = [2, 4]$. Тада је $H_d(A, B) = \max \{2, 3\} = 3$.
- Нека је $A = [0, 1]$ и $B = [0, 2]$. Тада је $H_d(A, B) = \max \{0, 1\} = 1$.
- Нека је $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ и $B = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 3\}$. Тада је $H_d(A, B) = \max \{2, 1\} = 2$.
- Нека је $A = \{0, 2\}$ и $B = \{1, 3\}$. Тада је $H_d(A, B) = \max \{1, 1\} = 1$.

4.4 Метризабилност хиперпростора $CL(X)$

Видели смо да је Хаусдорфова метрика природно растојање које уочавамо посматрајући отворене скупе у Вијеторисовој топологији. Уз додатну претпоставку да је метрика на базном простору ограничена, очекивало би се да је простор $CL(X)$ са Вијеторисовом топологијом метризабилан, и то баш Хаусдорфовом метриком. Међутим, ово није случај. Хиперпростор $CL(X)$ није метризабилан (ни са једном метриком) ако X није компактан. Такође није метризабилан ни са једном метриком ни ако X није метрички. Следећа лема обезбедиће главни аргумент у доказу да је компактност неопходан услов за метризабилност $CL(X)$.

Лема 107. *Ако је Y бесконачан дискретан простор, онда Вијеторисова топологија на $CL(Y)$ нема пребројиву базу.*

Доказ. Нека је $\mathcal{B}$ база Вијеторисове топологије на $CL(Y)$. Приметимо да је сваки $A \in CL(Y)$ и отворен у Y . Дакле, за свако $A \in CL(Y)$ постоји $\mathcal{B}_A \in \mathcal{B}$ такав да је

$$A \in \mathcal{B}_A = \langle A \rangle.$$

Одавде лако видимо да је за свако $A \in CL(Y)$

$$(4.8) \quad A = \bigcup \mathcal{B}_A.$$

Из 4.8 директно следи да за $A, A' \in CL(Y)$, $A \neq A'$, важи да је $\mathcal{B}_A \neq \mathcal{B}_{A'}$. Другим речима, функција $A \mapsto \mathcal{B}_A$ јесте инјекција из $CL(Y)$ у $\mathcal{B}$. Дакле,

$$(4.9) \quad |CL(Y)| \leq |\mathcal{B}|.$$

Како је Y дискретан простор, заправо је $CL(Y) = \{A \subset Y \mid A \neq \emptyset\}$. По претпоставци је Y бесконачан скуп, па је $CL(Y)$ непребројив. Из 4.9 директно следи да је база $\mathcal{B}$ непребројива. $\square$

Теорема 108. *Нека је $(X, \mathcal{T})$ T_1 -простор. Ако је $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ метризабилан, тада је $(X, \mathcal{T})$ компактан метризабилан простор.*

Доказ. Како је $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ метризабилан и $X \cong F_1(X)$, видимо да и $(X, \mathcal{T})$ мора бити метризабилан. Докажимо да је $(X, \mathcal{T})$ компактан.

Претпоставимо да $(X, \mathcal{T})$ није компактан. Тада, пошто је $(X, \mathcal{T})$ метризабилан, постоји пребројив, затворен и дискретан потпростор $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ од $(X, \mathcal{T})$. За затворен Y важи да је Вијеторисова топологија на $CL(Y)$ добијена од Вијеторисове топологије $\mathcal{T}_V$ на $CL(X)$, односно $(\mathcal{T}|_Y)_V = (\mathcal{T}|_V)|_{CL(Y)}$.

Како је Y затворен у X , на основу претходног имамо да је $CL(Y)$ са својом Вијеторисовом топологијом $(\mathcal{T}|_Y)_V$ потпростор од $(CL(X), \mathcal{T}_V)$. Пошто смо претпоставили да је $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ метризабилан, имамо да је $(CL(Y), (\mathcal{T}|_Y)_V)$ метризабилан.

Даље, како је $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ дискретан, то је $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ T_1 -простор. Такође је $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ сепарабилан, јер је Y пребројив. Важи тврђење да је T_1 -простор X сепарабилан ако и само ако је $CL(X)$ сепарабилан. Закључујемо да је онда $(CL(Y), (\mathcal{T}|_Y)_V)$ сепарабилан.

Показали смо да је $(CL(Y), (\mathcal{T}|_Y)_V)$ метризабилан и сепарабилан, одакле би следило да има пребројиву базу. Међутим, како је Y бесконачан дискретан простор, то је немогуће због претходне леме. Дакле, $(X, \mathcal{T})$ је компактан. $\square$

Као што смо већ поменули, нама ће од највећег значаја бити случај када је (X, d) метрички простор. У даљем излагању видећемо да је хиперпростор 2^X са Вијеторисовом топологијом метризабилан, и то Хаусдорфовом метриком. Пре него што пређемо на доказ овог тврђења, задржимо се на кратко на Хаусдорфовој метрици када је X метрички простор. Нека су A и B непразни компактни подскупови од X , тј $A, B \in 2^X$. Тада постоји реалан $r > 0$ такав да је $A \subset N_d(r, B)$ и $B \subset N_d(r, A)$. Можемо узети, на пример, $r = 1 + \text{diam}(A \cup B)$. Дакле, није важно да ли је метрика d ограничена или не, функција H_d ће увек узимати коначне вредности. У остатку доказа да је H_d метрика нисмо користили претпоставку да је d ограничена, па у случају када је X метрички простор није потребна додатна претпоставка да је d ограничена метрика.

Теорема 109. *Ако је (X, d) метрички простор, тада је $(2^X, \mathcal{T}_V)$ метризабилан и $\mathcal{T}_V = \mathcal{T}_{H_d}$.*

Доказ. Докажимо за почетак да је $\mathcal{T}_{H_d} \supset \mathcal{T}_V$. Сетимо се да је $\mathcal{T}_V$ топологија на 2^X генерисана са $\langle U \rangle$ и $\langle X, U \rangle$, за све $U \in \mathcal{T}$, при чему је $\mathcal{T}$ топологија на X . Дакле, да бисмо доказали да је $\mathcal{T}_{H_d} \supset \mathcal{T}_V$, довољно је да покажемо да је $\langle U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$ и $\langle X, U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$ за све $U \in \mathcal{T}$. Нека је $U \in \mathcal{T}$. Хоћемо да се уверимо да је $\langle U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$. Приметимо да ако је $U = X$, тада је $\langle U \rangle = 2^X$ па је $\langle U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$. Нека је надаље $U \neq X$. Узмимо $A \in \langle U \rangle$. Дефинишимо

$$\varepsilon = d(A, X \setminus U) = \inf\{d(a, x) : a \in A, x \in X \setminus U\}.$$

Приметимо да је ε постоји јер су A и $X \setminus U$ непразни, а $\varepsilon > 0$ јер је A компактан подскуп отвореног U . Даље, можемо видети да је $B_{H_d}(\varepsilon, A) \subset \langle U \rangle$, јер: ако је $B \in B_{H_d}(\varepsilon, A)$, тада је $H_d(A, B) < \varepsilon$ па следи да је $B \subset N_d(\varepsilon, A)$. Из саме дефиниције ε видимо да је $B \subset U$, тј. $B \in \langle U \rangle$. Показали смо да полазећи од $A \in \langle U \rangle$, добијамо да је $B_{H_d}(\varepsilon, A) \subset \langle U \rangle$ за неко $\varepsilon > 0$. Овим смо показали да је

$$\langle U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}.$$

Покажимо сада да је $\langle X, U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$. Нека је $A \in \langle X, U \rangle$. Тада је $A \cap U \neq \emptyset$. Нека је $p \in A \cap U$. Како је $p \in U$ и $U \in \mathcal{T}$, постоји $\delta > 0$ такав да је

$$N_d(\delta, \{p\}) \subset U.$$

Доказаћемо да је $B_{H_d}(A, \delta) \subset \langle X, U \rangle$. Нека је $B \in B_{H_d}(A, \delta)$. Тада је $H_d(A, B) < \delta$, па је $A \subset N_d(\delta, B)$. Одавде следи, пошто је $p \in A$, да постоји $b \in B$ такав да је $d(b, p) < \delta$. Ако се сетимо како смо изабрали δ , видимо да је $b \in U$. Дакле, $B \cap U \neq \emptyset$, што показује да је $B \in \langle X, U \rangle$. Овим смо показали да је $B_{H_d}(A, \delta) \subset \langle X, U \rangle$. Полазећи од $A \in \langle X, U \rangle$, добили смо да је $B_{H_d}(A, \delta) \subset \langle X, U \rangle$, за неко $\delta > 0$. Тиме смо показали да је

$$\langle X, U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}.$$

За свако $U \in \mathcal{T}$ важи да је $\langle U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$ и $\langle X, U \rangle \in \mathcal{T}_{H_d}$, па је $\mathcal{T}_{H_d} \supset \mathcal{T}_V$.

Покажимо сада да је $\mathcal{T}_{H_d} \subset \mathcal{T}_V$. Довољно је да покажемо да за сваку отворену лопту $B_{H_d}(A, r)$ у метрици H_d постоји коначно много отворених скупова $U_1, \dots, U_n$ у X таквих да је

$$A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset B_{H_d}(A, r).$$

4.5. ВАЖНЕ ОСОБИНЕ ХИПЕРПРОСТОРА

Нека је $A \in 2^X$ и $r > 0$. Како је A компактан и непразан, постоји коначно много отворених скупова $U_1, \dots, U_n$ у X који задовољавају:

- (1) $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$;
- (2) $A \cap U_i \neq \emptyset$, за све i ;
- (3) $\text{diam}(U_i) < r$ за све i .

Из (1) и (2) видимо да је $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Преостало је да докажемо да је $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset B_{H_d}(A, r)$.

Нека је $K \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Тада је $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, па из (2) и (3) следи да је

$$K \subset N_d(r, A).$$

Такође, како је $K \cap U_i \neq \emptyset$ за све i , из (1) и (3) закључујемо да је

$$A \subset N_d(r, K).$$

Сада је јасно да је $H_d(A, K) < r$, па је $K \in B_{H_d}(A, r)$. Овим је завршен доказ да је $T_{H_d} \subset \mathcal{T}_V$. $\square$

Важи и обрат претходне теореме.

Теорема 110. *Нека је $(X, \mathcal{T})$ T_1 -простор. Тада је $(2^X, \mathcal{T}_V)$ метризабилан ако и само ако је $(X, \mathcal{T})$ метризабилан.*

Доказ. Претпоставимо да је $(2^X, \mathcal{T}_V)$ метризабилан. Како је $F_1(X) \subset 2^X$ и $X \approx F_1(X)$, видимо да је $(X, \mathcal{T})$ метризабилан. $\square$

4.5 Важне особине хиперпростора

Можда и најважније својство хиперпростора, које, између осталог, омогућава употребу стандардне апаратуре за изучавање динамичких система на хиперпросторима, јесте компактност. Следећу теорему дајемо без доказа.

Теорема 111. *Ако је $(X, \mathcal{T})$ компактан метризабилан простор, тада је $(CL(X), \mathcal{T}_V)$ компактан.*

Можемо закључити да ако је (X, d) компактан метрички простор, онда је то и $(2^X, H_d)$. Напоменимо да на основу доказаног метрика која индукује топологију на X није од важности, и да је Хаусдорфова метрика дефинисана помоћу ма које метрике која индукује топологију на X . Зато се често може писати и $(2^X, H)$, без наглашавања метрике на простору X .

И следећи резултат за чији доказ је потребно увођење немало нових појмова дајемо без доказа (који се може пронаћи у [25], в. Теорему 14.9).

Теорема 112. *Ако је (X, d) континуум, тада су 2^X и $C(X)$ тесно повезани простори.*

Поменули смо да обрат теореме [102] не важи. Сада можемо да формулишемо Куртис-Шори теорему из које ово директно следи, али која, разуме се, има и друге примене (в. Теорему 11.3 у [25]).

Теорема 113. Нека је (X, d) недегенерисани Пеанов континуум. Тада је 2^X Хилбертова коцка. Поред тога, ако X нема слободни лук, $C(X)$ је такође Хилбертова коцка.

За крај наведимо тврђење које говори о значају хиперпростора $F(X)$.

Теорема 114. Нека (X, d) компактан метрички простор. Тада је хиперпростор свих коначних подскупова $F(X)$ густ у 2^X .

Доказ. Нека је $A \in 2^X$ произвољан и нека је $\varepsilon > 0$. Како је A компактан, то постоји k тачака у A , $a_1, \dots, a_k$ таквих да је $A \subset \bigcup_{i=1}^k B(a_i, \varepsilon)$. Одавде одмах следи да је

$$A \subset N_d(\varepsilon, \{a_1, \dots, a_k\})$$

и

$$\{a_1, \dots, a_k\} \subset N_d(\varepsilon, A).$$

Закључујемо да је $H_d(A, \{a_1, \dots, a_k\}) < \varepsilon$, а како је $\{a_1, \dots, a_k\} \in F(X)$, следи тврђење. $\square$

4.6 Индуковани динамички системи на хиперпросторима

До сада смо говорили о хиперпросторима, али наш циљ су заправо динамички системи на њима. У ту сврху нам је потребно и пресликавање на хиперпростору 2^X . Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Тада је, на природан начин, индуковано пресликавање 2^f на хиперпростору 2^X на следећи начин:

$$2^f : 2^X \rightarrow 2^X, \quad 2^f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Такође можемо посматрати индукована пресликавања на претходно дефинисаним затвореним потпросторима од 2^X :

$$\begin{aligned} C(f) : C(X) &\rightarrow C(X), & C(f)(A) &:= \{f(x) \mid x \in A\} \\ F_n(f) : F_n(X) &\rightarrow F_n(X), & F_n(f)(A) &:= \{f(x) \mid x \in A\} \\ F(f) : F(X) &\rightarrow F(X), & F(f)(A) &:= \{f(x) \mid x \in A\}. \end{aligned}$$

Као што смо већ помињали, индукована пресликавања су добро дефинисана, јер непрекидно пресликавање слика компакте у компакте, повезане скупове у повезане скупове, као и скупове са највише n елемената у скупове са највише n елемената. Следећа једноставна теорема нам је од велике важности, јер показује да индуковано пресликавање има лепе особине, ако их има полазно пресликавање.

Теорема 115. Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Тада је 2^f непрекидно пресликавање на 2^X . Такође, ако је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам, онда је то и 2^f .

Доказ. Нека су $W_1, \dots, W_n$ отворени скупови у X . Како је f непрекидно пресликавање из компактног простора у Хаусдорфов, то је f затворено пресликавање. Због тога је:

$$(2^f)^{-1}(\langle W_1, \dots, W_n \rangle) = \langle f^{-1}(W_1), \dots, f^{-1}(W_n) \rangle.$$

Како је f непрекидно, заиста је инверзна слика отвореног скупа при 2^f отворен скуп, па је 2^f непрекидно пресликавање.

Нека је сада f хомеоморфизам. Како је $(2^f)^{-1} = 2^{f^{-1}}$, то је и инверзно индуковано пресликавање непрекидно, па је 2^f заиста хомеоморфизам. $\square$

Претходна теорема важи када 2^X заменимо било којим од дефинисаних хиперпростора, јер је рестрикција непрекидног пресликавања на затворен подскуп такође непрекидно пресликавање.

Пре него што пређемо на још неке примере преношења особина са пресликавања f на индукована пресликавања, напомнимо једну важну ствар. Нису сва (непрекидна) пресликавања на хиперпростору 2^X настала од пресликавања $f : X \rightarrow X$. Узмимо, на пример, константно пресликавање на 2^X :

$$F : A \mapsto X,$$

за сваки $A \in 2^X$. Јасно је да не постоји $f : X \rightarrow X$ које индукује ово пресликавање. Резултати добијени у овој тези и, генерално, у радовима који се баве динамичким системима на хиперпросторима обично се односе специјално на оне који су индуковани пресликавањем f на базном простору. Ово умањење општости није неразумно, јер нас заправо често занима веза са базним простором и особинама које важе на њему.

Тврђење 116. *Ако је $f : X \rightarrow X$ изометрија на компактном метричком простору (X, d) , тада је и индуковано пресликавање $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ изометрија.*

Доказ. Нека су $A, B \in 2^X$ и означимо $r = d_H(A, B)$. Како је $A \subset U(B, r)$ и f је изометрија, имамо да је $f(A) \subset U(f(B), r)$. Аналогно добијамо да је $f(B) \subset U(f(A), r)$, па је $d_H(2^f(A), 2^f(B)) \leq r$. Нека је $0 < s < r$. Можемо пронаћи $a \in A$ и $b \in B$ такве да је $d(f(a), f(b)) = d(a, b) > s$. Због овога не може бити $f(A) \subset U(f(B), s)$, па је $d_H(2^f(A), 2^f(B)) = r = d_H(A, B)$. $\square$

Сетимо се да еквинепрекидна пресликавања имају (тополошку и полиномијалну) ентропију једнаку нули (в. Поглавље 2). Важно нам је да знамо да ли се ова особина пресликавања преноси на хиперпростор и обрнуто.

Тврђење 117. *Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном метричком простору X . Тада је f еквинепрекидно ако и само ако је 2^f еквинепрекидно.*

Доказ. Нека је $f : X \rightarrow X$ еквинепрекидно. Нека је $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такав да за све $x, y \in X$ за које је $d(x, y) < \delta$ важи да је $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, за све $n \geq 0$. Нека су $A, B \in 2^X$ такви да је $H(A, B) < \delta$. За $a \in A$ постоји $b \in B$ такав да је $d(a, b) < \delta$, а онда и $d(f^n(a), f^n(b)) < \varepsilon$, за све $n \geq 0$. Закључујемо да је скуп $f^n(A)$ садржан у $N_d(\varepsilon, f^n(B))$, и ово важи за свако $n \geq 0$. Слично добијамо и да је $f^n(B) \subset N_d(\varepsilon, f^n(A))$, за све $n \geq 0$. Одавде следи да је

$$H((2^f)^n(A), (2^f)^n(B)) < \varepsilon,$$

за све $n \geq 0$, чиме смо показали да је 2^f еквинепрекидно.

Претпоставимо сада да је $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ еквинепрекидно. Нека је $\varepsilon > 0$. Изаберимо $\delta > 0$ такво да када је $H(A, B) < \delta$, важи да је $H((2^f)^n(A), (2^f)^n(B)) < \varepsilon$, за све $n \geq 0$. Нека су $x, y \in X$ такви да је $d(x, y) < \delta$. Дефинишимо скупове $A = \{x\}$ и $B = \{y\}$. Тада су A и B јасно елементи простора 2^X за које је $H(A, B) < \delta$. Одавде следи да је за све $n \geq 0$ испуњено да је $H((2^f)^n(A), (2^f)^n(B)) < \varepsilon$. Закључујемо да је $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, односно да је f еквинепрекидно. $\square$

Као што смо већ рекли, хиперпростори су обимна тема, а за крај издвојимо још чињеницу да 2^f има својство фиксне тачке.

Тврђење 118. *Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном метричком простору (X, d) . Тада јосиоји непразан затворен $A \subset X$ такав да је $f(A) = A$.*

Доказ. За свако $n \geq 0$ посматрајмо скуп

$$A_n = f^n(X).$$

Како је $f(X) \subset X$, имамо да је $f^{n+1}(X) \subset f^n(X)$, односно $A_{n+1} \subset A_n$. Сваки скуп $A_n = f^n(X)$ је затворен и непразан. Нека је

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X) = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Важи тврђење које наводимо без доказа, а то је да је за непрекидна пресликавања f на компактном метричком простору испуњено

$$f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f(A_n),$$

када је (A_n) опадајући низ непразних затворених скупова. Зато је даље:

$$\begin{aligned} f(A) &= f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f(f^n(X)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{n+1}(X) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = X \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X) = A. \end{aligned}$$

Овим смо показали да је $f(A) = A$. □

Последица 119. *Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на компактном метричком простору (X, d) . Тада индуковано пресликавање $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ има својство фиксне тачке.*

Доказ. На основу претходног тврђења закључујемо да постоји компактан

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X),$$

такав да је $2^f(A) = A$. □

Ми ћемо се хиперпросторима бавити у контексту (полиномијалне) ентропије, па напомнимо за крај овог поглавља, а за почетак бављења ентропијом на хиперпросторима, следеће једноставно својство. Како је $X \approx F_1(X)$ затворен у 2^X , то је ентропија индукованог пресликавања на хиперпростору увек већа или једнака од ентропије на базном простору. Доказ следеће теореме може се пронаћи у [10].

Теорема 120. *За свако $M \in [0, +\infty]$ јосиоји динамички сисџем (X, f) такав да је $h_{\text{top}}(f) = 0$ и $h_{\text{top}}(2^f) > M$.*

Глава 5

Полиномијална ентропија на регуларним кривама

Најопштији једнодимензионални континуум који смо дефинисали у поглављу 3 јесте регуларна крива. Поред дефиниције и основних примера, видели смо да је тополошка ентропија хомеоморфизама на регуларним кривама једнака нули. У овом поглављу представимо резултате рада 44, у ком смо показали да је полиномијална ентропија хомеоморфизама на регуларним кривама ограничена одозго са 1. Такође, једнакост се постиже у случају хомеоморфизама са бар једном лутајућом тачком. Главни резултат који смо добили говори о ригидности хомеоморфизама на локалним дендритима - њихова полиномијална ентропија је једнака 0 или 1. То је јасно у контрасту са резултатом који смо представили у Поглављу 3, а тиче се флексибилности полиномијалне ентропије непрекидних пресликавања на дендритима.

Нека је X компактан метрички простор. Са $\text{Comp}(Y)$ означимо скуп свих повезаних компонената од Y . За непрекидно $f : X \rightarrow X$ и $n \in \mathbb{N}$ дефинишемо:

$$\varphi(f, n) := \sup_{x \in X} \{|\text{Comp}(f^{-n}(x))|\}.$$

Приметимо да ако је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам, тада је $\varphi(f, n) = 1$.

Като је у свом технички веома захтевном раду 28 извео горњу оцену за тополошку ентропију непрекидног пресликавања на регуларној кривој. Пратећи његов доказ и уводећи неопходне промене како бисмо прешли са тополошке на полиномијалну ентропију, можемо показати да важи следећа теорема.

Теорема 121. *Нека је $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање на регуларној кривој X . Тада је*

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, n)}{\log n}.$$

Доказ. За $\varepsilon > 0$, изаберимо коначно отворено покривање $\{U_1, \dots, U_k\}$ такво да је $\text{diam}(U_j) < \varepsilon$ и граница $\partial(U_j)$ је коначан скуп за свако j (овакав покривач постоји, јер је X регуларна крива). Нека је

$$A_1 := \overline{U}_1, \quad A_{j+1} := \overline{U_{j+1}} \setminus \bigcup_{i=1}^j U_i, \quad \text{за } j \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Скуп $\mathcal{A} := \{A_1, \dots, A_k\}$ је коначан затворени покривач од X такав да је $\partial(A_j)$ коначан скуп за свако j . Означимо са L кардиналност скупа

$$\bigcup \{\partial(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

У доказу Теореме 2.1 у [28], Като је конструисао (n, ϵ) -разапињући скуп чија је кардиналност мања или једнака од $L \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f, i)$, за све $n \in \mathbb{N}$. Важно је да приметимо да константа L не зависи од n , већ само од ϵ . За свако n изаберимо i_n , $0 \leq i_n \leq n-1$ тако да је $\max \{\varphi(f, i) \mid i = 0, 1, \dots, n-1\} = \varphi(f, i_n)$. Бирамо такво i_n за које је $i_n \leq i_{n+1}$. Прецизније, i_{n+1} је или i_n или n .

Користећи нотацију из поменутог Катоовог рада, а узимајући да је у имениоцу $\log n$ уместо n , нека је $r(\epsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{span}(n, \epsilon)}{\log n}$. Тада важи:

$$\begin{aligned} r(\epsilon) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{span}(n, \epsilon)}{\log n} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log (n \cdot L \cdot \max \{\varphi(f, i) \mid i = 0, 1, \dots, n-1\})}{\log n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n + \log L + \log \varphi(f, i_n)}{\log n} \\ &= 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, i_n)}{\log n}. \end{aligned}$$

Разликујемо два случаја: или је (i_n) ограничен (и као такав, константан почевши од неког n_0), или је неограничен. У првом случају имамо да је $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, i_n)}{\log n} = 0$, па је свакако испуњено

$$r(\epsilon) \leq 1 \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, n)}{\log n}.$$

Ако је (i_n) неограничен, можемо претпоставити да је $i_n \geq 2$, па је:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, i_n)}{\log n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, i_n)}{\log i_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, n)}{\log n}.$$

Објаснимо последњу неједнакост. Постоји строго растући низ природних бројева (j_n) такав да је $i_{j_n+1} = j_n$. Ово је заправо низ свих „скокова” који се дешавају у низу (i_n) . Нека је

$$L := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, i_n)}{\log i_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, i_{k_n})}{\log i_{k_n}},$$

за неки подниз (i_{k_n}) низа (i_n) . Издвојимо строго растући подниз од (i_{k_n}) и означимо га са (m_n) . Приметимо да (m_n) мора бити подниз од (j_n) , јер $\{i_{k_n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{j_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, па даље важи:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, i_{k_n})}{\log i_{k_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, m_n)}{\log m_n} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, j_n)}{\log j_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, n)}{\log n}. \end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је у оба случаја:

$$r(\varepsilon) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, n)}{\log n}.$$

Сада можемо да закључимо да је:

$$h_{\text{pol}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, n)}{\log n}.$$

□

Последица 122. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на регуларној кривој X . Тада је $h_{\text{pol}}(f) \leq 1$.

Доказ. Као што смо већ поменули, када је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам, тада је $\varphi(f, n) = 1$. Из претходне теореме одмах следи да је:

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, n)}{\log n} = 1.$$

□

Последица 123. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на регуларној кривој X који има бар једну лутајућу тачку. Тада је $h_{\text{pol}}(f) = 1$.

Доказ. Једна неједнакост је јасна на основу претходне последице. Како $f : X \rightarrow X$ има лутајућу тачку, онда према Тврђењу 55, имамо да је $h_{\text{pol}}(f) \geq 1$. Закључујемо да је $h_{\text{pol}}(f) = 1$. □

Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ирационална ротација. Како је f изометрија, имамо да је $h_{\text{pol}}(f) = 0$. Приметимо да је у овом случају $NW(f) = \mathbb{S}^1$, па f нема ниједну лутајућу тачку.

Следеће тврђење је један од главних резултата у [20]. Ми је добијамо као последицу Теореме 121.

Тврђење 124. Нека је $f : I \rightarrow I$ непрекидно гео-по-гео моноџоно пресликавање. Нека је c_n број максималних интервала моноџоносии n -те итерације f^n . Тада је

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n}{\log n}.$$

Доказ. Приметимо да никоје две различите тачке из истог интервала монотоности не могу да се сликају у исту тачку. Одавде директно следи да је $\varphi(f, n) \leq c_n$, а затим и

$$h_{\text{pol}}(f) \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, n)}{\log n} \leq 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n}{\log n}.$$

□

Сада можемо да побољшамо резултат из [45], када наметнемо додатни услов да је X регуларна крива:

Последица 125. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на регуларној кривој X који има бар једну лутајућу тачку. Тада је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$.

Доказ. Под овим претпоставкама имамо да је $h_{\text{pol}}(f) = 1$. Како је $F_n(f)$ фактор од $f^{\times n}$, важи да је:

$$h_{\text{pol}}(F_n(f)) \leq h_{\text{pol}}(f^{\times n}) = nh_{\text{pol}}(f) = n.$$

Из Теореме 6 у [45] добијамо да је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) \geq n$, па је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$. $\square$

Последица 126. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на регуларној кривој X који има бар једну лутајућу тачку. Тада је $h_{\text{pol}}(2^f) = +\infty$.

Доказ. Знамо да је $F_n(X)$ затворен и 2^f -инваријантан подскуп од 2^X , при чему је $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$. Зато је

$$h_{\text{pol}}(2^f) \geq h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n,$$

за све $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Резултат у Последици [126] може се добити и из претходно познатих резултата. На пример, Теорема 20 у [30] каже да за сурјективно пресликавање чије позитивно рекурентне тачке нису густе у X важи да је $h_{\text{top}}(2^f) \geq \log 2$. Када је f хомеоморфизам који има бар једну лутајућу тачку, тада је испуњено да позитивно рекурентне тачке не могу бити густе у X , јер је скуп лутајућих тачака отворен. Зато можемо закључити да је тополошка ентропија пресликавања 2^f строго позитивна, па је његова полиномијална ентропија бесконачна.

Добијене резултате за регуларне криве можемо применити на локалне дендрите. Нека је X локални дендрит и $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам. Као што смо видели у [3], локални дендрити јесу регуларне криве, па је $h_{\text{pol}}(f) \leq 1$, према Последици [122]. Ако f има лутајућу тачку, тада је $h_{\text{pol}}(f) = 1$. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам који нема лутајуће тачке. Према Теорему [99], за хомеоморфизме на регуларним кривама важи да је $\text{NW}(f) = \text{Rec}(f)$, па је у овом случају свака тачка из X заправо рекурентна. За пресликавање f кажемо да је тачка-по-тачка рекурентно ако за свако $x \in X$ важи да је $x \in \text{Rec}(f)$. Следећи резултат је доказан у [51] (в. Тврђење 1.2):

Тврђење 127. Свако непрекидно тачка-по-тачка рекурентно пресликавање на локалном дендрићу је еквинепрекидно.

Користећи Тврђење [57], добијамо следећу теорему:

Теорема 128. Нека је X локални дендрић и $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам. Тада је $h_{\text{pol}}(f) \in \{0, 1\}$. И више, $h_{\text{pol}}(f) = 1$ ако и само ако f има лутајућу тачку.

Последица 129. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам без лутајућих тачака на локалном дендрићу X . Тада је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = 0$.

Доказ. Како је

$$h_{\text{pol}}(F_n(f)) \leq h_{\text{pol}}(f^{\times n}) = nh_{\text{pol}}(f) = 0,$$

важи да је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = 0$. $\square$

Последица 130. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам без лутајућих тачака на локалном дендрићу X . Тада је $h_{\text{pol}}(2^f) = 0$.

Доказ. Како f нема лутајуће тачке, користећи Тврђење [127], имамо да је f еквинепрекидно. Из Тврђења [117] следи да је и 2^f еквинепрекидно, па је $h_{\text{pol}}(2^f) = 0$. $\square$

Глава 6

Полиномијална ентропија тачка-по-тачка периодичних хомеоморфизама

Јасно је да периодични хомеоморфизми имају и тополошку и полиномијалну ентропију једнаку нули. То су они хомеоморфизми $f : X \rightarrow X$ за које постоји $n \in \mathbb{N}$ такав да је $f^n(x) = x$, за све $x \in X$. Занимљиво је да постоје тачка-по-тачка периодични хомеоморфизми, за које је $\text{Per}(f) = X$, али који нису периодични. Прецизније, кажемо да је хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ тачка-по-тачка периодичан ако за свако $x \in X$ постоји $n(x) \in \mathbb{N}$ такво да је $f^{n(x)}(x) = x$. За ове хомеоморфизме прилично је лако закључити да је тополошка ентропија једнака нули, јер важи особина коју смо помињали:

$$h_{\text{top}}(f) = \sup \left\{ h_{\text{top}}(f|_{P_n}) \mid n \geq 1 \right\},$$

где је P_n скуп тачака у X са минималним периодом једнаким n . Како се ова особина не преноси на полиномијалну ентропију, остаје питање да ли се и она мора анулирати за тачка-по-тачка периодичне хомеоморфизме. У Тврђењу [128] доказали смо да хомеоморфизми без лутајућих тачака на локалним дендритима имају полиномијалну ентропију једнаку нули, а тачка-по-тачка периодични хомеоморфизми задовољавају услов ове теореме. Такође, добро позната Монтгомеријева теорема из [37] тврди да тачка-по-тачка периодични хомеоморфизми на повезаним многострукостима морају бити периодични, па стога имају полиномијалну (и тополошку) ентропију једнаку нули. Дакле, на великим класама простора важи да је полиномијална ентропија ових хомеоморфизама једнака нули. Природно се јавља питање да ли је ово увек тачно, односно да ли је полиномијална ентропија тачка-по-тачка периодичног хомеоморфизма једнака нули на произвољном компактном метричком простору. Одговор је не, јер смо у раду [46] конструисали пример тачка-по-тачка периодичног хомеоморфизма на континууму, инспирисан конструкцијом из [6], који има позитивну полиномијалну ентропију. Штавише, за свако $a \in [0, +\infty]$ постоји тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ на континууму X , такав да је $h_{\text{pol}}(f) = a$.

6.1 Тачка-по-тачка периодични хомеоморфизми

Нека је X компактан метрички простор. Као што смо рекли, хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ је тачка-по-тачка периодичан ако за свако $x \in X$ постоји $n(x) \in \mathbb{N}$ такво да

је $f^{n(x)}(x) = x$. У том случају је $\text{Per}(f) = X$, па пресликавање f нема лутајуће тачке. Пошто можемо написати $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$, где је P_n скуп тачака у X са минималним периодом једнаким n , користећи поменуто својство σ -уније тополошке ентропије и чињеницу да је $h_{\text{top}}(f, P_n) = 0$, закључујемо да је $h_{\text{top}}(f, X) = 0$.

Постоје многи примери тачка-по-тачка периодичних хомеоморфизама који нису периодични. Међутим, када је X повезана многострукост, то није случај (видети [37]):

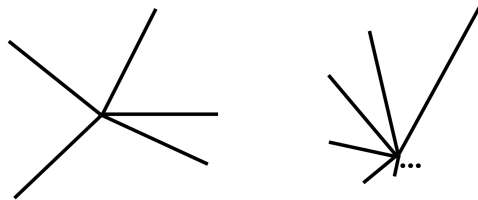
Теорема 131. *Сваки тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам на повезаној многострукости је периодичан.*

Један од најприроднијих примера непериодичног тачка-по-тачка периодичног хомеоморфизма јесте на дендриту.

Пример 132. *За почешак, рецимо да је n -звезда унија n дужи, од којих се сваке две секу само у својој заједничкој крајњој тачки x_0 .*

Нека је X дендрић дефинисан на следећи начин: X је унија пресечног мноства правих дужи у равни, при чему се било које две секу само у својој заједничкој крајњој тачки x_0 , и таквих да за свако $\varepsilon > 0$ постоји највише коначно мноство дужи чија је дужина већа од ε . X се може представити као унија пресечног мноства a_n -звезда, где је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неки строго растући низ.

Дефинишемо $f : X \rightarrow X$ као ротацију R_{a_n} на свакој a_n -звезди. На овај начин добијемо тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам који није периодичан.



Слика 6.1: 5-звезда (лево) и дендрит X (десно)

Упркос томе што претходни пример није периодичан, његова полиномијална ентропија је и даље једнака нули, као што показује следеће тврђење.

Тврђење 133. *Нека је X локални дендрић и $f : X \rightarrow X$ тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам. Тада је $h_{\text{pol}}(f) = 0$.*

Доказ. За тачка-по-тачка периодичне хомеоморфизме важи да је $\text{Per}(f) = X$, па f нема лутајуће тачке. Користећи Тврђење [128] из Главе [5], закључујемо да је $h_{\text{pol}}(f) = 0$. $\square$

6.2 Главни резултати

Циљ нам је да докажемо следећа два тврђења.

Теорема 134. *За свако $\alpha > 2$ постоји континуум X и тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ такав да је $h_{\text{pol}}(f) = \frac{1}{\alpha}$.*

Последица 135. За свако $a \in [0, +\infty]$ постоји тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ на континууму X такав да је $h_{\text{pol}}(f) = a$.

Почећемо разматрањем нешто општијег проблема, а затим конструисати пример који доказује главну Теорему 134. Направићемо везу између полиномијалне ентропије и димензије Минковског за специфичну фамилију простора. Да бисмо олакшали израчунавање $\text{sep}(n, \varepsilon)$ и $\text{span}(n, \varepsilon)$, уводимо специјалну метрику (еквивалентну еуклидској метрици) дефинисану помоћу поларних координата (по угледу на метрику дефинисану у [5]).

Метрика

Нека је $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Дефинишимо $d_{\mathbb{S}^1}$ на стандардан начин. Прецизније, нека су $\varphi, \psi \in \mathbb{S}^1$, а $t, s \in [0, 1)$ представници одговарајућих класа еквиваленције. Тада је

$$d_{\mathbb{S}^1}(\varphi, \psi) := \min \{|t - s|, 1 - |t - s|\}.$$

Сада ћемо дефинисати метрику на диску D . Нека (ρ, φ) означава поларне координате на D и нека је $x = (\rho_1 \cos(2\pi\varphi_1), \rho_1 \sin(2\pi\varphi_1))$ и $y = (\rho_2 \cos(2\pi\varphi_2), \rho_2 \sin(2\pi\varphi_2))$. Дефинишимо d_D на следећи начин:

$$d_D(x, y) := |\rho_1 - \rho_2| + \min \{\rho_1, \rho_2\} d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Иако поларне координате нису глобално дефинисане, метрика d_D је добро дефинисана. Заиста, тачка $(0, 0)$ (у еуклидским координатама) одговара тачки $(0, \varphi)$ у поларним координатама за свако $\varphi \in \mathbb{S}^1$. Ако је $x = (0, \varphi)$ и $y = (\rho_2, \psi)$ (у поларним координатама), тада:

$$d_D(x, y) = \rho_2,$$

што заиста не зависи од φ .

Тврђење 136. d_D је метрика на D .

Доказ. Очигледно је да је d_D симетрична и недегенерисана. Докажимо неједнакост троугла. За $x_j = (\rho_j, \varphi_j)$, $j = 1, 2, 3$, желимо да покажемо:

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2),$$

односно

$$(6.1) \quad |\rho_1 - \rho_2| + \min \{\rho_1, \rho_2\} d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_2) \leq |\rho_1 - \rho_3| + \min \{\rho_1, \rho_3\} d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) + |\rho_3 - \rho_2| + \min \{\rho_3, \rho_2\} d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_3, \varphi_2).$$

Извешћемо доказ разматрањем поретка тачака ρ_1, ρ_2 и ρ_3 . Пошто је неједнакост (6.1) симетрична у односу на ρ_1 и ρ_2 , разматрамо само положај ρ_3 у односу на ρ_1 и ρ_2 . Прецизније, разликујемо три случаја:

$$(a) \quad \rho_1 \leq \rho_3 \leq \rho_2$$

$$(b) \quad \rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3$$

$$(v) \quad \rho_3 \leq \rho_1 \leq \rho_2.$$

Претпоставимо да важи поредак (а). Тада имамо

$$\begin{aligned}
 d_D(x_1, x_2) &= |\rho_1 - \rho_2| + \rho_1 d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_2) \\
 &\stackrel{(\heartsuit)}{\leq} |\rho_1 - \rho_3| + |\rho_3 - \rho_2| + \rho_1 [d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) + d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_2, \varphi_3)] \\
 &\stackrel{(\clubsuit)}{\leq} |\rho_1 - \rho_3| + |\rho_3 - \rho_2| + \rho_1 d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) + \rho_3 d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_2, \varphi_3) \\
 &\stackrel{(\diamondsuit)}{=} |\rho_1 - \rho_3| + |\rho_3 - \rho_2| + \min\{\rho_1, \rho_3\} d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) + \min\{\rho_2, \rho_3\} d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_2, \varphi_3) \\
 &= d_D(x_1, x_3) + d_D(x_3, x_2).
 \end{aligned}$$

Неједнакост $(\heartsuit)$ представља неједнакост троугла за $|\cdot|$ и $d_{\mathbb{S}^1}$, док $(\clubsuit)$ и $(\diamondsuit)$ важе због претпостављеног поретка $\rho_1 \leq \rho_3 \leq \rho_2$.

Случај (б) слично разматрамо:

$$\begin{aligned}
 d_D(x_1, x_2) &= |\rho_1 - \rho_2| + \rho_1 d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_2) \\
 &\leq |\rho_1 - \rho_3| + |\rho_3 - \rho_2| + \rho_1 [d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) + d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_2, \varphi_3)] \\
 &\leq |\rho_1 - \rho_3| + |\rho_3 - \rho_2| + \rho_1 d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) + \rho_2 d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_2, \varphi_3) \\
 &= |\rho_1 - \rho_3| + |\rho_3 - \rho_2| + \min\{\rho_1, \rho_3\} d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) + \min\{\rho_2, \rho_3\} d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_2, \varphi_3) \\
 &= d_D(x_1, x_3) + d_D(x_3, x_2).
 \end{aligned}$$

Нека је сада распоред као у (в), односно нека је $\rho_3 \leq \rho_1 \leq \rho_2$. Тада неједнакост (6.1) постаје:

$$\rho_2 - \rho_1 + \rho_1 d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_2) \leq \rho_1 - \rho_3 + \rho_3 d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) + \rho_2 - \rho_3 + \rho_3 d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_3, \varphi_2),$$

или, еквивалентно:

$$\rho_3 [2 - d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) - d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_3, \varphi_2)] \leq \rho_1 [2 - d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_2)].$$

Последња неједнакост очигледно важи, јер:

$$\rho_3 \leq \rho_1, \quad d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_2) \leq d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_1, \varphi_3) + d_{\mathbb{S}^1}(\varphi_3, \varphi_2) \leq 1 < 2.$$

□

Тврђење 137. d_D је (тополошки) еквивалентна стандардној еуклидској метрици d_E .

Доказ. Показаћемо да су конвергентни низови у једној метрици такође конвергентни у другој, са истом граничном вредношћу. Ако се гранична вредност x разликује од координатног почетка, изводимо закључак директно, јер је координата φ добро дефинисана као непрекидна функција еуклидских координата у околини тачке x . Нека је $x_n = (\rho_n, \varphi_n)$ низ који у еуклидској метрици конвергира ка координатном почетку. Тада имамо

$$d_D(x_n, 0) = \rho_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Обрнуто, из $|\rho_n| \leq d_D(x_n, 0)$ добијамо другу неједнакост.

□

Димензија Минковског

Нека је (X, d) компактан метрички простор и нека $N(A, \delta)$ означава минималан број отворених лопти полупречника δ потребних да се покрије компактан скуп $A \subset X$. Димензија Минковског скупа A дефинише се на следећи начин:

$$\dim_B(A) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(A, \delta)}{\log(1/\delta)}.$$

Димензија Минковског представља начин додељивања димензије просторима који немају добро дефинисану димензију у уобичајеном смислу. Стандардан је резултат да је димензија Минковског n -димензионалне тополошке многострукости једнака n . Дакле, за правилне просторе димензија Минковског се поклапа са уобичајеним појмом димензије.

Израчунаћемо димензију Минковског скупа у наредном примеру, не само да бисмо показали како се рачуна, већ и зато што ће нам бити потребна у доказу главне Теореме [134](#).

Пример 138. Нека је $a_k = \frac{1}{[k^\alpha]}$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. Тада је димензија Минковског скупа $A := \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup 0$ једнака $\frac{1}{\alpha+1}$.

Најпре ћемо доказати да је $\dim_B(A) \geq 1/(\alpha+1)$.

Како је $(k+1)^\alpha - k^\alpha = \alpha \xi_k^{\alpha-1}$, за неко $\xi_k \in (k, k+1)$, разломљени део $\{\cdot\}$ ограничен, као и $\alpha > 1$, имамо да важи:

$$\begin{aligned} [(k+1)^\alpha] - [k^\alpha] &= (k+1)^\alpha - k^\alpha - \{(k+1)^\alpha\} + \{k^\alpha\} \\ &= \alpha \xi_k^{\alpha-1} - \{(k+1)^\alpha\} + \{k^\alpha\} \\ &\sim \alpha k^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

када $k \rightarrow \infty$, где $\sim$ означава асимптотску еквиваленцију два низа.

Рачунамо

$$a_k - a_{k+1} = \frac{[(k+1)^\alpha] - [k^\alpha]}{[(k+1)^\alpha][k^\alpha]} \sim \frac{\alpha k^{\alpha-1}}{k^{2\alpha}} = \frac{\alpha}{k^{\alpha+1}},$$

када $k \rightarrow \infty$. Изаберимо $k_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $k \geq k_0$ важи

$$a_k - a_{k+1} \geq \frac{1}{2} \frac{\alpha}{k^{\alpha+1}}.$$

Закључујемо да за $k \geq k_0$ и свако $\varepsilon > 0$ имамо:

$$\frac{\alpha}{k^{\alpha+1}} \geq 2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_k - a_{k+1} \geq \varepsilon,$$

или, еквивалентно,

$$k \in \left[k_0, (\alpha/2\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right] \quad \Rightarrow \quad a_k - a_{k+1} \geq \varepsilon.$$

Према томе, потребно је најмање

$$\left[(\alpha/2\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right] - k_0$$

интервала да се покрије подскуп

$$\left\{ a_k \mid k \in \left[k_0, (\alpha/2\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right] \right\} \subset A.$$

Одавде следи да је $N(A, \varepsilon) \geq \left[(\alpha/2\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right] - k_0$, па је

$$\dim_B(A) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \left(\left[(\alpha/2\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right] - k_0 \right)}{\log(1/\varepsilon)} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Сада желимо да оценимо $\dim_B(A)$ одозго. За фиксирано $\varepsilon \in (0, \alpha/2)$ нека је $k_1 := \left[\left(\frac{\alpha}{2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right]$. Скуп $\{a_k \mid k \leq k_1\}$ може се покрићи са k_1 интервала. Пошто је $[x] \geq x/2$ за $x > 1$, важи да је:

$$a_{k_1} = \frac{1}{\left[\left(\frac{\alpha}{2\varepsilon} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]} \leq \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2\varepsilon} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} = 2 \left(\frac{2\varepsilon}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Интервал

$$\left[0, 2 \left(\frac{2\varepsilon}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]$$

можемо покрићи са

$$\frac{2 \left(\frac{2\varepsilon}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{\varepsilon} + 1 = c(\alpha) \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha+1}} + 1$$

интервала дужине ε , где $c(\alpha)$ зависи само од α , а не од ε . Одавде закључујемо да је:

$$\begin{aligned} N(A, \varepsilon) &\leq k_1 + c(\alpha) \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha+1}} + 1 \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + c(\alpha) \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha+1}} + 1 \\ &= c_1(\alpha) \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha+1}} + 1. \end{aligned}$$

Дакле, добијамо:

$$\dim_B(A) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(A, \varepsilon)}{-\log \varepsilon} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(c_1(\alpha) \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha+1}} + 1)}{-\log \varepsilon} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Тврђење 139. Нека је $A \subset [0, 1]$ компактн скуп такав да $0 \in A$. Означимо са D_a јединични диск у хоризонталној равни на висини a , а са I вертикалну дуж која повезује центре свих дискова. Нека је

$$X := \left(\bigcup_{a \in A} D_a \right) \cup I,$$

са метриком d дефинисаном на следећи начин:

$$d((x, a_1), (y, a_2)) = d_D(x, y) + |a_1 - a_2|.$$

Дефинишимо пресликавање $f : X \rightarrow X$ да буде ротација за угао a на сваком диску D_a , $a \neq 0$, $f|_{D_a} := R_a$, а идентичко пресликавање на I и D_0 , $f|_I := \text{Id}_I$, $f|_{D_0} := \text{Id}_{D_0}$. Тада је $h_{\text{pol}}(f, X) \leq \dim_B(A)$.

Пре него што пређемо на доказ овог тврђења, формулисаћемо и доказати помоћну лему.

Лема 140. Нека су D_a и D_b јединични дискови на висинама a и b ресективно, такви да је $|a - b| < \frac{\varepsilon}{2n}$, за неко $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon < 1$. Ако је скупи $S = (x_1, a), (x_2, a), \dots, (x_p, a)$ $\frac{\varepsilon}{2}$ -мрежа за диск D_a у метрици d , тада је исти скуп S ε -мрежа за $D_a \cup D_b$ у динамичкој метрици d_n^f .

Доказ. Како је f ротација на сваком диску, а самим тим изометрија, одмах видимо да је скуп S $\frac{\varepsilon}{2}$ -мрежа за D_a и у динамичкој метрици. Да бисмо доказали ову лему довољно је да докажемо да за свако $(y, b) \in D_b$ постоји $(x_i, a) \in S$ такво да је $d_n^f((y, b), (x_i, a)) < \varepsilon$.

Означимо са $S' = \{(x_1, b), (x_2, b), \dots, (x_p, b)\} \subset D_b$ скуп тачака на диску D_b које имају исте поларне координате као тачке из S , са једином разликом у висини на којој леже. Јасно је да је, као и за диск D_a , S' $\frac{\varepsilon}{2}$ -мрежа за D_b . На основу тога постоји $(x_i, b) \in S'$ такво да је $d((y, b), (x_i, b)) < \frac{\varepsilon}{2}$, и поново, пошто је ротација изометрија, $d_n^f((y, b), (x_i, b)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Сада, користећи неједнакост троугла, добијамо

$$d_n^f((y, b), (x_i, a)) \leq d_n^f((y, b), (x_i, b)) + d_n^f((x_i, b), (x_i, a)) < \frac{\varepsilon}{2} + d_n^f((x_i, b), (x_i, a)).$$

Доказ је завршен ако покажемо да је $d_n^f((x_i, b), (x_i, a)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Пошто је $|a - b| < \frac{\varepsilon}{2n}$, имамо да је $d((x_i, b), (x_i, a)) < \frac{\varepsilon}{2n}$. Такође, ротација не мења растојање тачке x_i од центра диска, па само промена угла утиче на промену динамичког растојања $d_n^f((x_i, b), (x_i, a))$. Дакле, за свако $k \in \mathbb{N}$:

$$d(f^k(x_i, a), f^k(x_i, b)) = d_D(f^k(x_i, a), f^k(x_i, b)) + |a - b| \leq 0 + 1 \cdot d_{\mathbb{S}^1}(ka, kb) + |a - b|.$$

Како је $\varepsilon < 1$, односно $\varepsilon/2 < 1/2$, максимално растојање $d_D(f^k(x_i, a), f^k(x_i, b))$ постиже се за $k = n - 1$. У том случају је:

$$d_D(f^k(x_i, a), f^k(x_i, b)) \leq d_{\mathbb{S}^1}(ka, kb) = d_{\mathbb{S}^1}(0, k|a - b|) \leq (n - 1) \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Коначно, видимо да је:

$$d_n^f((x_i, a), (x_i, b)) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d(f^k(x_i, a), f^k(x_i, b)) < (n - 1) \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Докажимо сада Тврђење 139.

Доказ. Можемо конструисати $\frac{\varepsilon}{2}$ -мрежу S_a у метрици d_D , за сваки диск $D_a \subset X$, тако да тачке у свакој мрежи имају исте прве две координате, али се налазе на различитим висинама. Означимо са $N_D(\frac{\varepsilon}{2})$ кардиналност такве мреже. Означимо са $N(A, \frac{\varepsilon}{2n})$ минималан број отворених лопти B_j , $1 \leq j \leq N(A, \frac{\varepsilon}{2n})$, полупречника $\frac{\varepsilon}{2n}$ потребних да се покрије A .

За свако j , $1 \leq j \leq N(A, \frac{\varepsilon}{2n})$, изаберимо једно $a_j \in B_j$ и размотримо конструисану $\frac{\varepsilon}{2}$ -мрежу у метрици d_D на диску D_{a_j} . Из претходне леме следи да је за свако j , скуп S_{a_j} ε -мрежа за унију дискова D_a , $a \in B_j$, у динамичкој метрици d_n^f . Закључујемо да ће унија ових мрежа бити ε -мрежа целог простора X у односу на динамичку метрику d_n^f . Сходно томе, добили смо (n, ε) -разапињући скуп за X и зато је

$$\text{span}(n, \varepsilon) \leq N_D\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) N\left(A, \frac{\varepsilon}{2n}\right).$$

Приметимо да нисмо покрили цео I . Међутим, f је идентичко пресликавање на I , па кардиналност (n, ε) -разапињућег скупа на I не зависи од n , и самим тим нема утицаја на вредност полиномијалне ентропије.

Сада можемо да закључимо да важи:

$$\begin{aligned}
 h_{\text{pol}}(f) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(N_D(\frac{\varepsilon}{2}) N(A, \frac{\varepsilon}{2n}))}{\log n} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log N_D(\frac{\varepsilon}{2}) + \log N(A, \frac{\varepsilon}{2n})}{\log n} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log N(A, \frac{\varepsilon}{2n})}{\log n} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log N(A, \frac{\varepsilon}{2n})}{\log(\frac{2n}{\varepsilon}) \frac{\log n}{\log(\frac{2n}{\varepsilon})}} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log N(A, \frac{\varepsilon}{2n})}{\log(\frac{2n}{\varepsilon})} \\
 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(A, \delta)}{\log(1/\delta)} \\
 &= \dim_B(A).
 \end{aligned}$$

□

Тврђење 141. Нека је $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ низ различитих елемената из $[0, 1]$ који конвертира ка нули и нека је $A := \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup 0$. Означимо са D_a јединични диск на висини a , а са I вертикалну дуж која повезује центре свих дискова. Нека је $f : X \rightarrow X$ ротација за угао a на сваком диску D_a , $a \neq 0$, $f|_{D_a} = R_a$, а идентичко пресликавање на I и D_0 , $f|_I := \text{Id}_I$, $f|_{D_0} := \text{Id}_{D_0}$. Нека је (в. слику 6.2)

$$X := \left(\bigcup_{a \in A} D_a \right) \cup I,$$

са метриком d дефинисаном на следећи начин:

$$d((x, a_1), (y, a_2)) = d_D(x, y) + |a_1 - a_2|.$$

Тада је $h_{\text{pol}}(f) \geq \dim_B(A)$.

Доказ. Можемо претпоставити да је (a_k) строго опадајући (у супротном можемо преименовати низ). Такође претпостављамо да је $|a_{j+1} - a_j| < 1/2$ (ако није, одбацимо коначно много чланова тако да овај услов буде испуњен). Нека је $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$ фиксиран. Нека је $Y := \{y_1, \dots, y_r\} \subset D \setminus \{0\}$ скуп максималне кардиналности за који важи:

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad d_D(y_i, y_j) \geq \varepsilon_0.$$

За $a \in A$ нека је:

$$Y_a := Y \times \{a\} \subset X.$$

Како је f ротација на сваком диску, сваки Y_a је (n, ε_0) -раздвојен, за свако $n \in \mathbb{N}$. Означимо са ρ_0 минималну еуклидску норму тачака y_j , $j \in \{1, \dots, r\}$.

Сада фиксирајмо

$$(6.2) \quad \varepsilon < \min \{\varepsilon_0, \rho_0/2\},$$

$n \in \mathbb{N}$ и изаберимо $\{z_1, \dots, z_m\} \subset A$ као $\varepsilon/((n-1)\rho_0)$ -раздвојен скуп у A максималне кардиналности. Дефинишимо

$$S := S(n, \varepsilon) := \bigcup_{j=1}^m Y_{z_j}.$$

Тврдимо да је $S(n, \varepsilon)$ -раздвојен скуп. Нека су $p = (x, a), q = (y, b) \in S$. Ако је $x \neq y$, тада је:

$$d(p, q) \geq d_D(x, y) \geq \varepsilon_0 > \varepsilon.$$

Ако је $x = y = (\rho, \varphi)$, тада важи:

$$d(f^j(p), f^j(q)) = |a - b| + \rho d_{\mathbb{S}^1}(\varphi + ja, \varphi + jb) \geq \rho_0 d_{\mathbb{S}^1}(ja, jb) = \rho_0 d_{\mathbb{S}^1}(0, j|a - b|).$$

Да бисмо закључили да је $S(n, \varepsilon)$ -раздвојен, применићемо следећу лему на $\alpha := |a - b|$.

Лема 142. За $\alpha \in (\varepsilon/((n-1)\rho_0), 1/2)$ постоји $j \in \{1, \dots, n-1\}$ такво да важи:

$$d_{\mathbb{S}^1}(0, j\alpha) > \frac{\varepsilon}{\rho_0}.$$

Доказ. Ако је $\alpha > \varepsilon/\rho_0$, готови смо. Ако је $\alpha \leq \varepsilon/\rho_0$, тада, пошто је $\varepsilon/\rho_0 < 1/2$ (в. (6.2)), имамо

$$d_{\mathbb{S}^1}(0, 2\alpha) = 2\alpha.$$

Ако је $2\alpha > \varepsilon/\rho_0$, готови смо. У супротном, понављамо исти корак. Како је $\alpha > \varepsilon/((n-1)\rho_0)$, лема следи. $\square$

Настављамо доказ Тврђења 141. Како је $\{z_1, \dots, z_m\}$ $\varepsilon/((n-1)\rho_0)$ -раздвојен скуп у A максималне кардиналности, важи да је:

$$|S| = m \cdot r > m \geq N(A, \varepsilon/((n-1)\rho_0)),$$

где, као и раније, $N(A, \delta)$ означава минималну кардиналност δ -мреже скупа A .

S је (n, ε) -раздвојен скуп, па важи:

$$\text{sep}(n, \varepsilon) \geq |S| \geq N(A, \varepsilon/((n-1)\rho_0)),$$

и према томе

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{sep}(n, \varepsilon)}{\log n} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, \varepsilon/((n-1)\rho_0))}{\log n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, \varepsilon/((n-1)\rho_0))}{\log((n-1)\rho_0/\varepsilon)} \cdot \frac{\log((n-1)\rho_0/\varepsilon)}{\log n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, \varepsilon/((n-1)\rho_0))}{\log((n-1)\rho_0/\varepsilon)} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, 1/n)}{\log n} \\ &\stackrel{(*)}{=} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(A, \delta)}{\log(1/\delta)} \\ &= \dim_B(A). \end{aligned}$$

Објаснимо зашто важи једнакост (*). Горњи лимес по непрекидној променљивој је увек већи или једнак од горњег лимеса по неком низу. Показаћемо другу (нетривијалну) неједнакост. Нека је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да $x_n \rightarrow 0$ и

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(A, \delta)}{\log(1/\delta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, x_n)}{\log(1/x_n)} = \dim_B(A).$$

Нека је $m_n \in \mathbb{N}$ такав да

$$x_n \in \left[\frac{1}{m_n + 1}, \frac{1}{m_n} \right].$$

Очигледно $m_n \rightarrow \infty$, када $n \rightarrow \infty$. Функција $\delta \mapsto N(A, \delta)$ је опадајућа, а $\log x$ растућа функција, па можемо закључити да важи:

$$(6.3) \quad \frac{\log N(A, 1/m_n)}{\log(m_n + 1)} \leq \frac{\log N(A, x_n)}{\log(1/x_n)} \leq \frac{\log N(A, 1/(m_n + 1))}{\log m_n}.$$

Из $m_n \rightarrow \infty$ имамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(m_n + 1)}{\log m_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log m_n + \log(1 + 1/m_n)}{\log m_n} = 1,$$

и према томе

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, 1/m_n)}{\log m_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, 1/m_n)}{\log(m_n + 1)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, 1/(m_n + 1))}{\log m_n}.$$

Ако пустимо $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ у (6.3), добијамо:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, 1/m_n)}{\log m_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, x_n)}{\log(1/x_n)} = \dim_B(A).$$

Сада (*) следи из чињенице да

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, 1/n)}{\log n} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, 1/m_n)}{\log m_n}.$$

□

На крају овог одељка представићемо следећи резултат, који представља уопштење Тврђења 3.3 у [6].

Тврђење 143. *Постоји хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ на континууму X који није еквинепрекидан и који је такав да је $h_{\text{pol}}(f) = 0$.*

Доказ. Применићемо Тврђење [139] и Тврђење [141], за одговарајуће изабран низ $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $a_k = \frac{1}{[e^k]}$ и $A = a_k \mid k \in \mathbb{N} \cup 0$. Нека су f и (X, d) као у Тврђењу [139]. Докажимо прво да пресликавање f није еквинепрекидно.

Нека је $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. За произвољно $\delta > 0$, изаберимо k_0 такав да је $\frac{1}{[e^{k_0}]} < \delta$ и да је $[e^{k_0}]$ паран број. Ако узмемо две тачке $p(1, 0, 0)$ и $q(1, 0, \frac{1}{[e^{k_0}]})$, тада је $d(p, q) < \delta$. Узмимо $n = \frac{[e^{k_0}]}{2}$. Тада

$$f^n(p) = p, \quad f^n(q) = \left(1, \frac{[e^{k_0}]}{2} \frac{1}{[e^{k_0}]}, \frac{1}{[e^{k_0}]} \right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{[e^{k_0}]} \right),$$

па имамо да је $d(f^n(p), f^n(q)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{[e^{k_0}]} > \varepsilon$.

Да бисмо показали да је $h_{\text{pol}}(f) = 0$, довољно је показати да је $\dim_B(A) = 0$, због Тврђења [139](#). Нека је $\varepsilon > 0$. Занимају нас они $k \in \mathbb{N}$ за које је $a_k < \varepsilon$.

$$a_k = \frac{1}{[e^k]} < \varepsilon \iff [e^k] > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Како је $[x] > \frac{x}{2}$, имамо да је $[e^k] > \frac{e^k}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$, а последња неједнакост важи за $k > \log \frac{2}{\varepsilon}$.

Закључујемо да за $k > \log \frac{2}{\varepsilon}$ елементи a_k припадају лопти са центром у 0 и полупречником ε , па се A може покрити са $[\log \frac{2}{\varepsilon}] + 1$ лопти. Сада можемо израчунати димензију Минковског скупа A :

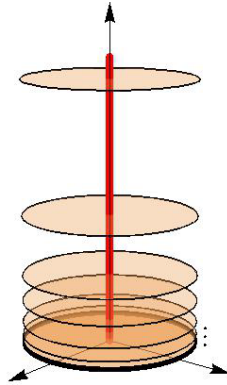
$$\dim_B(A) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(A, \varepsilon)}{-\log \varepsilon} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log ([\log \frac{2}{\varepsilon}] + 1)}{-\log \varepsilon} = 0.$$

□

Доказ главног резултата

Докажимо најпре Теорему [134](#). Нека је $a_k = \frac{1}{[k^\alpha]}$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, и $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N} \cup 0\}$. Нека је D_k јединични диск у хоризонталној равни на висини a_k , D_0 је јединични диск у равни $z = 0$, а I је вертикална дуж која повезује центре свих дискова. Тада је (в. слику [6.2](#)):

$$X := D_0 \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k \right) \cup I.$$



Слика 6.2: Простор X

Нека је $R_{a_k} : D_k \rightarrow D_k$ ротација. Дефинишемо сада хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ тако да је $f|_{D_k} := R_{a_k}$, $f|_I := \text{Id}_I$ и $f|_{D_0} := \text{Id}_{D_0}$. Ово је заиста тачка-по-тачка периодично пресликавање, а сада ћемо се уверити да је $h_{\text{pol}}(f) = \frac{1}{\alpha+1}$.

Израчунали смо димензију Минковског скупа $A = \left\{ \frac{1}{[k^\alpha]} \mid k \in \mathbb{N} \right\} \cup 0$ у Примеру [138](#) и добили да је $\dim_B(A) = \frac{1}{\alpha+1}$. Сада, користећи Пропозицију [139](#), имамо да важи:

$$h_{\text{pol}}(f, X) \leq \dim_B(A) = \frac{1}{\alpha+1}.$$

На сличан начин, користећи Пропозицију [141], добијамо да је:

$$h_{\text{pol}}(f) \geq \dim_B(A) = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Пређимо сада на доказ Последице [135]. Најпре, нека је $a \neq +\infty$. Као што смо видели, ако је $a \in (0, 1/2)$, постоји тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ на континууму X такав да је $h_{\text{pol}}(f) = a$. Добијамо га узимањем $\alpha = \frac{1}{a} - 1$ у Примеру [138]. Такође, узимањем f као у доказу Пропозиције [143], добијамо $h_{\text{pol}}(f) = 0$.

Приметимо да, ако су $f, g : X \rightarrow X$ тачка-по-тачка периодични хомеоморфизми, тада је $f \times g : X \times X \rightarrow X \times X$ такође тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам и $h_{\text{pol}}(f \times g) = h_{\text{pol}}(f) + h_{\text{pol}}(g)$. Јасно је да можемо узети коначан производ од l пресликавања и добити $h_{\text{pol}}(f_1 \times f_2 \times \dots \times f_l) = h_{\text{pol}}(f_1) + \dots + h_{\text{pol}}(f_l)$. На овај начин можемо конструисати тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам са произвољном коначном полиномијалном ентропијом.

На крају, конструишимо континуум X и тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам такав да је $h_{\text{pol}}(f) = +\infty$. Нека је (X_m, ρ_m) компактан метрички простор и $f_m : X_m \rightarrow X_m$ тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам са бар једном фиксном тачком p_m и за који је $h_{\text{pol}}(f_m) = m$. Примера ради, можемо узети простор који смо управо конструисали у Последици [135]. Дефинишимо нову метрику d_m на X_m са $d_m(x, y) := 1/m\rho_m(x, y)$ и простор X као букет простора X_m . Прецизније:

$$X := \bigsqcup_{m=1}^{\infty} X_m / \sim, \quad \text{где } p_m \sim p_n$$

за све $m, n \in \mathbb{N}$. Сада можемо да дефинишемо d на X на стандардан начин (в. [15]):

$$d(x, y) := \begin{cases} d_m(x, y), & x, y \in X_m \\ d_m(x, p_m) + d_n(y, p_n), & x \in X_m, y \in X_n. \end{cases}$$

Директно се показује да је простор (X, d) компактан метрички простор и да се сваки X_m може идентификовати са својим затвореним подскупом (па можемо сматрати да је $X_m \subset X$).

Дефинишимо $f : X \rightarrow X$ на природан начин:

$$f|_{X_m} := f_m.$$

Лако је видети да је f хомеоморфизам који је тачка-по-тачка периодичан. Како је сваки X_m f -инваријантан, имамо да важи:

$$h_{\text{pol}}(f) \geq h_{\text{pol}}(f|_{X_m}) = m,$$

за свако m , одакле следи да је $h_{\text{pol}}(f) = \infty$.

Овим је конструкција примера завршена, а тиме и доказ Последице [135].

Подсетимо се да тачка-по-тачка периодични хомеоморфизми на локалним дендритима имају полиномијалну ентропију једнаку 0. Можемо се запитати да ли постоји једнодимензионални континуум X такав да тачка-по-тачка периодични хомеоморфизам $f : X \rightarrow X$ ипак има позитивну полиномијалну ентропију.

Глава 7

Полиномијална ентропија на хиперпросторима интервала и круга

У овом поглављу израчунаћемо полиномијалну ентропију на хиперпросторима 2^X , $F_n(X)$ и $C(X)$ у случају када је пресликавање на базном простору хомеоморфизам интервала, односно круга, под одређеним претпоставкама. Главни резултати садржани су у следећим теоремама и објављени у [43], али ћемо их допунити и случајем када нелутајући скуп није обавезно коначан ([42]).

Теорема 144. *Нека је $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ хомеоморфизам са коначним нелутајућим скупом. Тада је $h_{\text{pol}}(C(f)) = 2$, $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$ и $h_{\text{pol}}(2^f) = \infty$.*

Теорема 145. *Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам са коначним нелутајућим скупом. Тада је $h_{\text{pol}}(C(f)) = 2$, $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$ и $h_{\text{pol}}(2^f) = \infty$.*

Како бисмо могли да користимо резултате из Главе 2, неопходно је да установимо да су скупови $NW(C(f))$ и $NW(F_n(f))$ заиста коначни. Имајући у виду да је $h_{\text{pol}}(f^m) = h_{\text{pol}}(f)$, за све $m \in \mathbb{N}$ можемо претпоставити да је $NW(f) = \text{Fix}(f)$.

Тврђење 146. *Нека је $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ или $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам такав да је $NW(f) = \text{Fix}(f)$ коначан. Тада су $NW(C(f)) = \text{Fix}(C(f))$ и $NW(F_n(f)) = \text{Fix}(F_n(f))$, $n \geq 1$ такође коначни.*

Доказ. Докажимо прво тврђење за $C(f)$, $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Скуп $\text{Fix}(C(f))$ је коначан јер се састоји од интервала $[a, b] \subseteq [0, 1]$, где су $a, b \in \text{Fix}(f)$. Приметимо да услов $NW(f) = \text{Fix}(f)$ имплицира да је f растућа. Увек важи да је $\text{Fix}(C(f)) \subseteq NW(C(f))$. Претпоставимо да постоји $[x, y] \in NW(C(f)) \setminus \text{Fix}(C(f))$, што значи да бар један од крајева није фиксна тачка пресликавања f ; нека је то $x \notin \text{Fix}(f)$. Како је $NW(f) = \text{Fix}(f)$, из Тврђења 13 следи да постоје $a, b \in \text{Fix}(f)$ (можда и једнаки) такви да је

$$f^k(x) \rightarrow a, \quad f^k(y) \rightarrow b, \quad k \rightarrow \infty.$$

Нека је $\varepsilon < d(x, a)/2$. За $k \geq k_0$, где је k_0 довољно велико, важи да је $d(f^k(x), a) < \varepsilon$, $d(f^k(y), b) < \varepsilon$, па имамо

$$\begin{aligned} d_H(C(f)^k([x, y]), [x, y]) &\geq d_H([a, b], [x, y]) - d_H(C(f)^k([x, y]), [a, b]) \\ &\geq d(a, x) - \varepsilon > \varepsilon. \end{aligned}$$

Користили смо да је $d_H([a, b], [x, y]) = \max\{|a - x|, |b - y|\}$.

Докажимо сада тврђење за $F_n(f)$, при чему је $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ растућа функција (ако је опадајућа, можемо посматрати f^2 , или извести доказ директно за опадајуће f). Скуп $\text{Fix}(F_n(f))$ је коначан, јер се састоји од елемената облика $\{x_1, \dots, x_l\}$, $l \leq n$ и $x_i \in \text{Fix}(f)$. Посматрајмо скуп $A = \{x_0, x_1, \dots, x_l\}$, $A \in F_n([0, 1])$, чији бар један елемент x_0 (узмимо најмањи такав ако их има више) није фиксна тачка пресликавања f . Како је x_0 лутајућа тачка пресликавања f , постоји њена околина U за коју важи да је $f^k(U) \cap U = \emptyset$, за све $k \geq 1$. Јасно је да постоји околина од A у $F_n([0, 1])$ која је лутајућа, јер можемо изабрати околину $U_A = \langle U, U_1, \dots, U_l \rangle \cap F_n([0, 1])$ за коју је $(F_n)^k(U_A) \cap U_A = \emptyset$, за све $k \geq 1$. Потребно је да изаберемо да су U_i довољно мале да не секу U , а како је f растуће, околина U_A не може да „се врати” и пресече саму себе.

Докази за круг се изводе аналогно. Можемо претпоставити да f чува оријентацију, јер прелазак на f^2 не мења полиномијалну ентропију, чије је израчунавање заправо циљ. $\square$

7.1 $X = [0, 1]$

У овом одељку ћемо доказати Теорему 144. Нека је скуп $NW(f)$ коначан и $I := [0, 1]$. Можемо да претпоставимо да је f растућа, јер ако није, онда f^2 то јесте. Израчунајмо полиномијалну ентропију пресликавања $C(f)$.

Простор $C(I)$ можемо идентификовати са скупом

$$\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\},$$

за који видимо да је горњи троугао A у квадрату $[0, 1] \times [0, 1]$. Хомеоморфизам $\varphi : C(I) \rightarrow A$ је дат са $\varphi : [x, y] \rightarrow (x, y)$. Пресликавање $C(f)$ је конјуговано са $f \times f|_A$ помоћу φ , где је

$$f \times f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1], \quad (f \times f)(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Означимо доњи троугао у $[0, 1] \times [0, 1]$ са B . Како су A и B затворени и $f \times f$ -инваријантни, имамо да је

$$h_{\text{pol}}(f \times f) = \max\{h_{\text{pol}}(f \times f|_A), h_{\text{pol}}(f \times f|_B)\}.$$

Са друге стране је

$$h_{\text{pol}}(f \times f) = 2h_{\text{pol}}(f).$$

Како су $f \times f|_A$ и $f \times f|_B$ тополошки еквивалентни системи (пресликавање $(x, y) \mapsto (y, x)$ реализује конјугацију), важи да је

$$(7.1) \quad h_{\text{pol}}(C(f)) = 2h_{\text{pol}}(f).$$

Можемо закључити да је $h_{\text{pol}}(C(f)) = 2$, након што покажемо да је $h_{\text{pol}}(f) = 1$.

Нека су $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_k = 1$ фиксне тачке. Применићемо својство полиномијалне ентропије $h_{\text{pol}}(f) = \max_j h_{\text{pol}}(f|_{[p_{j-1}, p_j]})$. Имамо да је $h_{\text{pol}}(f|_{[p_{j-1}, p_j]}) \geq 1$, јер $f|_{[p_{j-1}, p_j]}$ има бар једну лутајућу тачку (в. Тврђење 55). Скуп $Y = (p_{j-1}, p_j]$ је $f|_{[p_{j-1}, p_j]}$ -инваријантан и садржи тачно једну нелутајућу тачку. Дакле, на основу Последице 72 и чињенице да f има само једну сингуларну тачку у $[p_{j-1}, p_j]$, добијамо:

$$h_{\text{pol}}(f|_{[p_{j-1}, p_j]}) = \max\{h_{\text{pol}}(f|_{[p_{j-1}, p_j]}; (p_{j-1}, p_j]), h_{\text{pol}}(f|_{\{p_{j-1}\}})\} \leq 1.$$

7.1. $X = [0, 1]$

Докажимо сада да је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$. Како су $f^{\times n} := f \times \dots \times f$ и $F_n(f)$ полукоњуговани преко $\pi : I^n \rightarrow F_n(I)$:

$$\pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \{x_1, \dots, x_n\},$$

имамо да је

$$(7.2) \quad h_{\text{pol}}(F_n(f)) \leq h_{\text{pol}}(f^{\times n}) = n.$$

Сада желимо да покажемо обрнуту неједнакост. За пермутацију σ скупа $\{1, \dots, n\}$, дефинишимо

$$A_\sigma := \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid x_{\sigma(1)} \leq \dots \leq x_{\sigma(n)}\}.$$

Приметимо да је $I^n = \bigcup_\sigma A_\sigma$, а да су сви A_σ $f^{\times n}$ -инваријантни, па је

$$h_{\text{pol}}(f^{\times n}) = \max_\sigma \{h_{\text{pol}}(f^{\times n}|_{A_\sigma})\}.$$

Како су сви $f^{\times n}|_{A_\sigma}$ међусобно коњуговани, имамо да је

$$h_{\text{pol}}(f^{\times n}|_{A_\sigma}) = h_{\text{pol}}(f^{\times n}|_{A_\rho})$$

за сваке две пермутације σ и ρ , те је стога

$$h_{\text{pol}}(f^{\times n}|_{A_\sigma}) = \max_\sigma \{h_{\text{pol}}(f^{\times n}|_{A_\sigma})\} = h_{\text{pol}}(f^{\times n}) = n,$$

за све σ .

Дефинишимо:

$$\begin{aligned} A(n) &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid x_1 \leq \dots \leq x_n\} \\ \widehat{A}(n, I) &:= \{\{x_1, \dots, x_n\} \in F_n(I) \mid x_1 < \dots < x_n\}. \end{aligned}$$

Када не постоји ризик од забуне, писаћемо скраћено $\widehat{A}(n) = \widehat{A}(n, I)$. Ако је $n = 2$, доказ је завршен, јер је $\pi|_{A(2)} : A(2) \rightarrow F_2(I)$ хомеоморфизам компактних скупова, па је

$$h_{\text{pol}}(F_2(f)) = h_{\text{pol}}(f^{\times 2}|_{A(2)}) = 2.$$

За случај када је $n > 2$ потребна нам је следећа помоћна лема.

Лема 147. *Нека је $\text{Fix}(f) = \{0, 1\}$. Тада је $h_{\text{pol}}(F_n(f); \widehat{A}(n)) = n$.*

Остатак доказа следи директно из Леме 147. Заиста, ако је $\text{Fix}(f) = \{0, 1\}$, тада важи:

$$h_{\text{pol}}(F_n(f)) \geq h_{\text{pol}}(F_n(f); \widehat{A}(n)) = n \stackrel{(7.2)}{\Rightarrow} h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n.$$

Ако је $\text{Fix}(f) = \{0, p_1, \dots, p_{k-1}, 1\}$ при чему $0 < p_1 < \dots < p_{k-1} < 1$, дефинишимо

$$T := \{\{x_1, \dots, x_j\} \mid j \in \{1, \dots, n\}, x_i \in [0, p_1]\} \subset F_n(I)$$

и применимо Лему 147 на $f|_{[0, p_1]}$. Како је скуп T $F_n(f)$ -инваријантан, закључујемо да је

$$h_{\text{pol}}(F_n(f)) \geq h_{\text{pol}}(F_n(f)|_T) = h_{\text{pol}}(F_n((f|_{[0, p_1]}))) \geq h_{\text{pol}}(F_n((f|_{[0, p_1]}); \widehat{A}(n, [0, p_1]))) = n.$$

Одавде и из (7.2) добијамо $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$.

Преостаје нам да покажемо помоћну Лему 147:

Доказ. Посматрајмо следећи покривач од $A(n)$:

- $\tilde{A}(n) := \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid x_1 < \dots < x_n\}$
- $A_j(n) := \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid x_1 \leq \dots \leq x_j = x_{j+1} \leq \dots \leq x_n\}$, за $j = 1, \dots, n-1$.

Очигледно је да су $\tilde{A}(n)$ и $A_j(n)$ $f^{\times n}$ -инваријантни. Дакле, важи

$$h_{\text{pol}}(f^{\times n}) = h_{\text{pol}}(f^{\times n}|_{A(n)}) = \max \left\{ h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \tilde{A}(n)), h_{\text{pol}}(f^{\times n}|_{A_j(n)}) \right\}.$$

Приметимо да је $f^{\times n}|_{A_j(n)}$ конјугован са $f^{\times(n-1)}|_{A(n-1)}$, па је

$$h_{\text{pol}}(f^{\times n}|_{A_j(n)}) = h_{\text{pol}}(f^{\times(n-1)}|_{A(n-1)}) = n-1.$$

Како је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}) = n$ и $h_{\text{pol}}(f^{\times n}|_{A_j(n)}) = n-1$, закључујемо да је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \tilde{A}(n)) = n$.

Уочимо да је

$$\pi|_{\tilde{A}(n)} : \tilde{A}(n) \rightarrow \hat{A}(n)$$

хомеоморфизам који остварује конјугацију између $f^{\times n}|_{\tilde{A}(n)}$ и $F_n(f)|_{\hat{A}(n)}$. Како скупови $\hat{A}(n)$ и $\tilde{A}(n)$ нису компактни, применићемо Тврђење 74 како бисмо доказали да је

$$h_{\text{pol}}(F_n(f); \hat{A}(n)) = h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \tilde{A}(n)) = n.$$

За $n > 2$ скупови $\tilde{A}(n)$ и $\hat{A}(n)$ не садрже ниједну нелутајућу тачку. Можемо додати $(0, \dots, 0)$ у скуп $\tilde{A}(n)$ и $\{0\}$ у скуп $\hat{A}(n)$, не мењајући ознаке; ова промена неће утицати на вредност ентропије и π ће и даље бити хомеоморфизам. Сада видимо да су испуњени услови тврђења и тиме завршавамо доказ леме. $\square$

Коначно, како бисмо доказали да је $h_{\text{pol}}(2^f) = \infty$, приметимо да је $F_n(X)$ затворен и 2^f -инваријантан подскуп од 2^X , као и да је $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$, за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле,

$$h_{\text{pol}}(2^f) \geq h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n,$$

за све $n \in \mathbb{N}$, па је јасно да је $h_{\text{pol}}(2^f) = \infty$.

Овим је завршен доказ Теореме 144.

Напоменимо да се резултат за хомеоморфизам на $I = [0, 1]$ са коначним нелутајућим скупом може уопштити и на случај када је нелутајући скуп бесконачан, али није једнак целом I . За почетак приметимо да је полиномијална ентропија пресликавања f и даље једнака 1. Јасно је, као и пре, да је $h_{\text{pol}}(f) \geq 1$. Обрнута неједнакост следи из Тврђења 124. Наиме, важи да је полиномијална ентропија део-по-део монотоног пресликавања ограничена одозго са $1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(c_n)}{\log n}$, где је c_n број максималних интервала монотоности пресликавања f^n . Када је f хомеоморфизам, тада је $c_n = 1$, па је $h_{\text{pol}}(f) \leq 1$. Тврђење за пресликавање $C(f)$ следи директно из (7.1).

Како је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) \leq h_{\text{pol}}(f^{\times n})$, имамо да је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) \leq n$. Обрнута неједнакост следи из Леме 147 примењене на $f|_{[p_1, q_1]}$. Заиста, као и пре, дефинишимо

$$T := \{\{x_1, \dots, x_j\} \mid j \in \{1, \dots, k\}, x_i \in [p_1, q_1]\} \subset F_n(I)$$

и приметимо да је $T F_n(f)$ -инваријантан. Важи да је

$$h_{\text{pol}}(F_n(f)) \geq h_{\text{pol}}(F_n(f)|_T) = h_{\text{pol}}((F_n(f)|_{[p_1, q_1]})) \geq h_{\text{pol}}(F_n((f|_{[p_1, q_1]})) ; \widehat{A}(n, [p_1, q_1])) = n.$$

Сада је јасно да је и $h_{\text{pol}}(2^f) = \infty$.

Претпоставимо сада да је $NW(f) = I$, али да f није идентитет. Ако је пресликавање f опадајуће, посматрајмо f^2 . Дакле, нека је $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ растуће пресликавање и $NW(f) = I$. Ако је $f(x) > x$, за неко x , јасно је да око x можемо пронаћи лутајућу околину. Међутим, по претпоставци су све тачке нелутајуће, па смо добили контрадикцију. Исто резонујемо и у случају када је $f(x) < x$. Другим речима, ако је f растуће пресликавање на I , чије су све тачке нелутајуће, онда f мора бити идентитет.

Дакле, израчунали смо полиномијалну ентропију на индукованим хиперпросторима у случају произвољног хомеоморфизма $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (ако је f идентитет, онда је и изометрија, па је полиномијална ентропија пресликавања f једнака нули, а самим тим и свих индукованих пресликавања).

7.2 $X = \mathbb{S}^1$

Докажимо сада Теорему [145](#).

Нека је $NW(f)$ коначан. Израчунајмо прво полиномијалну ентропију пресликавања $C(f)$. Разликујемо следећа три случаја:

- (1) скуп $\text{Fix}(f)$ је једночлан;
- (2) скуп $\text{Fix}(f)$ садржи бар три различите тачке;
- (3) скуп $\text{Fix}(f)$ садржи тачно две различите тачке.

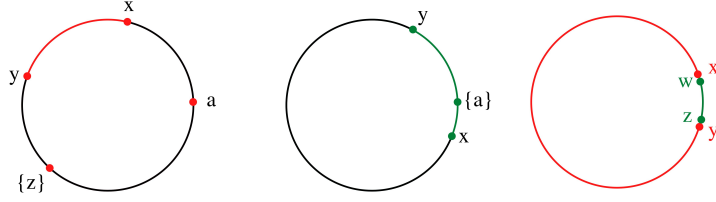
Случај (1). Како f има тачно једну фиксну тачку, f чува оријентацију на кругу. Ако је $\text{Fix}(f) = \{a\}$, индуковано пресликавање $C(f)$ има тачно две нелутајуће тачке - $\{a\}$ и $\mathbb{S}^1$. Поделићемо скуп $C(\mathbb{S}^1)$ на два затворена инваријантна подскупа:

- P је скуп свих $[x, y]$ таквих да је тачка x између a и y у смеру супротном од казаљке на сату, укључујући и дегенерисане случајеве када су две или све три тачке међусобно једнаке (што значи да су $[x, a]$, $\{x\}$, $[a, y]$ и $\mathbb{S}^1$ у P). Приметимо да $[x, y]$ не садржи a као унутрашњу тачку, за $x \neq y$. Види круг лево на слици [7.1](#).
- Q је скуп свих $[x, y]$ таквих да је тачка y између a и x у смеру супротном од казаљке на сату, укључујући и дегенерисане случајеве када су две или све три тачке међусобно једнаке (што значи да су $[x, a]$, $\{a\}$, $[a, y]$ и $\mathbb{S}^1$ у Q). Приметимо да $[x, y]$ садржи a . Види круг у средини на слици [7.1](#).

Сада је јасно да је за $[x, y], [z, w] \in P$ или $[x, y], [z, w] \in Q$, следеће тачно:

$$d(x, z) < r \quad \text{и} \quad d(y, w) < r \Rightarrow d_H([x, y], [z, w]) < r.$$

(У општем случају ово не мора да важи, пошто крајеви лукова $[x, y] \in P$ и $[z, w] \in Q$ могу бити близу, али не и одговарајући лукови у хиперпростору. Види круг десно на слици [7.1](#).)

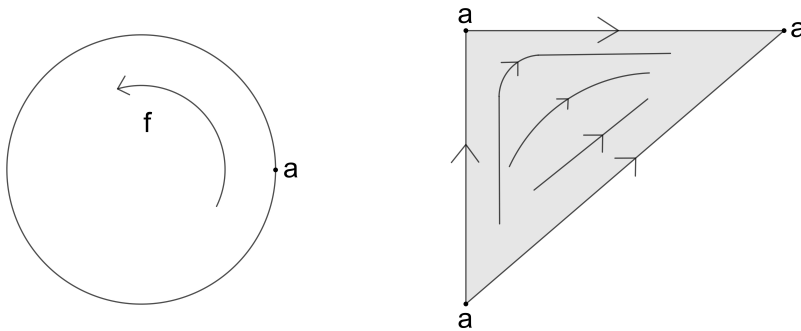


Слика 7.1: Елементи скупова P (лево) и Q (средина); лукови $[x, y]$ и $[z, w]$ (десно)

Претпоставимо да f помера тачке у $\mathbb{S}^1$ у позитивном смеру, као на слици [7.2](#). Други случај се разматра на исти начин.

Прво ћемо посматрати пресликавање $C(f)|_P$. Динамика овог пресликавања представљена је на слици [7.2](#). Разликујемо следеће могућности:

- $x \neq a$ и $y \neq a \Rightarrow C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \{a\}$
- $x \neq a$ и $y = a \Rightarrow C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{a\}$ и $C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \mathbb{S}^1$
- $[x, y] = \{x\} \Rightarrow C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \{a\}$
- $x = a$ и $y \neq a \Rightarrow C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{S}^1$, $C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \{a\}$
- $[x, y] = \mathbb{S}^1 \Rightarrow C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \mathbb{S}^1$.



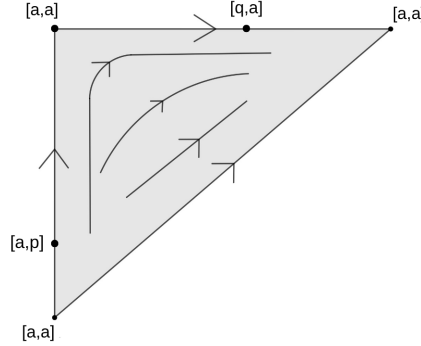
Слика 7.2: Смер f (лево) и динамика $C(f)|_P$ (десно)

Можемо поделити P на скупове $\{\mathbb{S}^1\}$ и $Y := P \setminus \{\mathbb{S}^1\}$, па израчунати:

$$h_{\text{pol}}(C(f)|_P) = \max \{h_{\text{pol}}(C(f)|_P; Y), h_{\text{pol}}(C(f)|_P; \{\mathbb{S}^1\})\} = h_{\text{pol}}(C(f)|_P; Y),$$

јер је $h_{\text{pol}}(C(f)|_P; \{\mathbb{S}^1\}) = h_{\text{pol}}(C(f)|_{\{\mathbb{S}^1\}}) = 0$.

Тврдимо да лукови $[a, p]$, за $p \neq a$ и $[q, a]$ за $q \neq a$ јесу две међусобно сингуларне тачке x_1 и x_2 , које задовољавају услов из Тврђења 73 (в. Сliku 7.3).



Слика 7.3: Сингуларне тачке $[a, p]$ и $[q, a]$

Докажимо прво да су $[a, p]$ и $[q, a]$ међусобно сингуларне. Нека је $\varepsilon > 0$ фиксиран, такав да је $\varepsilon < \min\{d(a, p), d(a, q)\}$ и $M > 0$. Изаберимо произвољан $y \in B(p, \varepsilon) \subset \mathbb{S}^1$. Пошто $f^n(y) \rightarrow a$, када $n \rightarrow \infty$, постоји ненегативан $n_1 > M$ такав да за $n \geq n_1$ важи $d(f^n(y), a) < \varepsilon$. Нека је $\alpha \in B(q, \varepsilon) \subset \mathbb{S}^1$ произвољна. Пошто $f^{-n}(\alpha) \rightarrow a$, када $n \rightarrow \infty$, постоји $n_2 \geq n_1$ такав да је $d(f^{-n_2}(\alpha), a) < \varepsilon$. Уколико је потребно, можемо повећати n_2 како бисмо постигли да је тачка $f^{-n_2}(\alpha)$ између a и y , као и да је $f^{-n_2}(\alpha) \neq y$. Изаберимо $x := f^{-n_2}(\alpha)$ и нека је $I := [x, y]$. Тврдимо да орбита I пресеца ε -кугле око $[a, p]$ и $[q, a]$ у временима која се разликују за више од M . Заиста, имамо:

$$d_H(I, [a, p]) \leq \max\{d(x, a), d(y, p)\} < \varepsilon,$$

па је $I \in B([a, p], \varepsilon)$ и

$$d(f^{n_2}(I), [q, a]) \leq \max\{d(f^{n_2}(x), q), d(f^{n_2}(y), a)\} = \max\{d(\alpha, q), d(f^{n_2}(y), a)\} < \varepsilon.$$

Дакле, $f^{n_2}(I) \in B([q, a], \varepsilon)$.

Следећи корак је да покажемо да никоја друга два лука, осим оних облика $[a, p]$ и $[q, a]$, не могу бити међусобно сингуларни. Претпоставимо да су $[p_1, q_1]$ и $[p_2, q_2]$ два различита лука таква да је $p_j \neq a$ и $q_j \neq a$, $j = 1, 2$. Разликујемо следеће две могућности (а) и (б):

(а) Ако $[p_1, q_1]$ и $[p_2, q_2]$ нису на истој орбити пресликавања $C(f)$, довољно је да покажемо да постоје околине $U \ni [p_1, q_1]$ и $V \ni [p_2, q_2]$ такве да

$$C(f)^n(U) \cap V = \emptyset, \quad \text{за све } n \in \mathbb{Z}.$$

Нека је ε позитиван реалан број са следећим особинама:

- $\varepsilon < d_H([p_2, q_2], \mathcal{O}([p_1, q_1]))$, где је $d_H([p_2, q_2], \mathcal{O}([p_1, q_1]))$ растојање од $[p_2, q_2]$ до орбите $\mathcal{O}([p_1, q_1])$, које је строго позитивно, јер $C(f)^n([p_1, q_1])$ конвергира ка $\{a\}$, када $n \rightarrow \pm\infty$
- Кугле (у $C(S^1)$) полупречника ε око $[p_2, q_2]$ и $\{a\}$ су дисјунктне.

Како $C(f)^n([p_1, q_1])$ конвергира ка $\{a\}$, када $n \rightarrow \pm\infty$, и исто важи за све $[p, q]$ довољно близу $[p_1, q_1]$, можемо наћи $\delta > 0$ и n_0 такве да:

$$[p, q] \in B([p_1, q_1], \delta), |n| \geq n_0 \Rightarrow C(f)^n([p, q]) \in B(\{a\}, \varepsilon).$$

Можемо смањити δ уколико је потребно како бисмо постигли:

$$[p, q] \in B([p_1, q_1], \delta), |n| \leq n_0 \Rightarrow C(f)^n([p, q]) \notin B([p_2, q_2], \varepsilon).$$

Закључујемо да скупови

$$U := B([p_1, q_1], \delta), \quad V := B([p_2, q_2], \varepsilon)$$

имају тражене особине, па $[p_1, q_1]$ и $[p_2, q_2]$ не могу бити међусобно сингуларне.

(б) Ако су $[p_1, q_1]$ и $[p_2, q_2]$ на истој орбити од $C(f)$, довољно је да покажемо да постоје околине $U \ni [p_1, q_1]$ и $V \ni [p_2, q_2]$, $U, V \subset Y \setminus NW(C(f))$ и $M > 0$, такве да:

$$(7.3) \quad C(f)^n(U) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow |n| < M, \quad \text{за све } n \in \mathbb{Z}.$$

Заиста, из [7.3](#) следи да U и V нису међусобно сингуларне, па онда то нису ни $[p_1, q_1]$ и $[p_2, q_2]$. Зато узмимо $U \subset W^s(\{a\}) \cap Y$, V и U' да буду било које три кугле са центрима у $[p_1, q_1]$, $[p_2, q_2]$ и $\{a\}$ редом, тако да $V \cap U' = \emptyset$. Постоји природан n_0 такав да, за све $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq n_0$, $C(f)^n(U) \subset U'$. Видимо да за $|n| \geq n_0$ важи да је $C(f)^n(U) \cap V = \emptyset$.

Да бисмо показали да су $[a, p]$, за $p \neq a$, и $[q, a]$, за $q \neq a$, једине могуће међусобно сингуларне тачке, размотрићемо следеће четири могућности (подсетимо се да су сингуларне тачке, по дефиницији, обавезно лутајуће):

- (i) $[a, p]$ и $[p_1, q_1]$, за $p \neq a$, $p_1 \neq a$ и $q_1 \neq a$, али могуће $p_1 = q_1$
- (ii) $[q, a]$ и $[p_1, q_1]$, за $q \neq a$, $p_1 \neq a$ и $q_1 \neq a$, али могуће $p_1 = q_1$
- (iii) $[a, p_1]$ и $[a, p_2]$, за $p_i \neq a$ и $p_1 \neq p_2$
- (iv) $[q_1, a]$ и $[q_2, a]$, за $q_i \neq a$ и $q_1 \neq q_2$.

Случајеви (i) и (ii) могу се разматрати слично као у случају (а) горе, а случајеви (iii) и (iv) слично као у (б).

Преостаје да покажемо да за сваке две међусобно сингуларне тачке облика $[a, p]$ и $[q, a]$, где $p, q \neq a$ и сваки отворен $Y_1 \ni [a, p]$, $Y_2 \ni [q, a]$, $Y_j \subset P \setminus NW(C(f))$, $j = 1, 2$, постоји позитиван L такав да за све $n \geq L$ важи $C(f)^n(Y_1) \cap Y_2 \neq \emptyset$. Тада ћемо моћи да применимо Тврђење [73](#) и завршимо доказ.

Нека је $\varepsilon > 0$ фиксиран и нека је $Y_1 := B([a, p], \varepsilon) \subset P \setminus NW(C(f))$ и $Y_2 := B([q, a], \varepsilon) \subset P \setminus NW(C(f))$. Посматрајмо дуж

$$l := \{[x, p] \mid d(x, a) < \varepsilon\} \subset Y_1.$$

Приметимо да

$$C(f)^n(l) = \{[f^n(x), f^n(p)] \mid x \in B(a, \varepsilon)\}.$$

Како $f^n(p) \rightarrow a$ и $f^n(B(a, \varepsilon)) \rightarrow \mathbb{S}^1$, када $n \rightarrow \infty$, постоји n_0 такав да за све $n \geq n_0$ важи и $d(f^n(p), a) < \varepsilon$ и $f^n(B(a, \varepsilon)) \ni q$. Означимо са $x_1 \in B(a, \varepsilon)$ такав да $f^n(x_1) = q$. Закључујемо да $d_H([f^n(p), f^n(x_1)], [q, a]) < \varepsilon$, па је и $C(f)^n(Y_1) \cap Y_2 \neq \emptyset$.

Динамика пресликавања $C(f)|_Q$ је следећа:

- $x \neq a$ и $y \neq a \Rightarrow C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \mathbb{S}^1$
- $x = a$ и $y \neq a \Rightarrow C(f)^n([a, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{S}^1$ и $C(f)^n([a, y]) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \{a\}$
- $[x, y] = \{a\} \Rightarrow C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \{a\}$
- $y = a$ и $x \neq a \Rightarrow C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{a\}$ и $C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \mathbb{S}^1$
- $[x, y] = \mathbb{S}^1 \Rightarrow C(f)^n([x, y]) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \mathbb{S}^1$.

Исти начин размишљања може се применити и на $C(f)|_Q$, па је доказ случаја (1) завршен.

Случај (2). Нека је $\text{Fix}(f) = \{a_1, \dots, a_m\}$, а између тачака a_j и a_{j+1} нема других фиксних тачака. Означимо са $C_j := [a_j, a_{j+1}]$. Очигледно је да су скупови C_j f -инваријантни, па су онда скупови

$$D_{ij} := \{[x, y] \mid x \in C_i, y \in C_j\}$$

$C(f)$ -инваријантни. Лако се види да су сви D_{ij} затворени, као и да је $C(\mathbb{S}^1) = \bigcup_{i,j} D_{i,j}$. Доказ Теореме [145](#) је завршен у случају простора $C(\mathbb{S}^1)$ ако покажемо да је $h_{\text{pol}}(C(f)|_{D_{ij}}) = 2$, за све i, j .

Видимо да $D_{i,j}$ можемо поистоветити са $[a_i, a_{i+1}] \times [a_j, a_{j+1}]$, а како је $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$, $C(f)$ је конјугован са $f \times f$. Дакле, можемо свести проблем на израчунавање полиномијалне ентропије

$$f \times f : [a_i, a_{i+1}] \times [a_j, a_{j+1}] \rightarrow [a_i, a_{i+1}] \times [a_j, a_{j+1}], \quad f \times f(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Како је $h_{\text{pol}}(f \times g) = h_{\text{pol}}(f) + h_{\text{pol}}(g)$, имамо да је $h_{\text{pol}}(C(f)|_{D_{ij}}) = h_{\text{pol}}(f|_{[a_i, a_{i+1}]}) + h_{\text{pol}}(f|_{[a_j, a_{j+1}]})$. Слично као у доказу Теореме [144](#), важи $h_{\text{pol}}(f|_{[a_i, a_{i+1}]}) = h_{\text{pol}}(f|_{[a_j, a_{j+1}]}) = 1$.

Случај (3). Претпоставимо да су a_1 и a_2 једине фиксне тачке. Тада f пресликава $[a_1, a_2]$ и $[a_2, a_1]$ у себе саме, или један у другог. Ако је у питању потоње, тада f^2 пресликава оба лука у себе саме, па можемо претпоставити да ово важи (пошто је $h_{\text{pol}}(C(f^2)) = h_{\text{pol}}(C(f)^2) = h_{\text{pol}}(C(f))$). Сада можемо применити исти аргумент као у Случају (2). Наиме, $C_1 = [a_1, a_2]$ и $C_2 = [a_2, a_1]$ су f -инваријантни, па су и D_{12} и D_{21} $C(f)$ -инваријантни. Пратећи рачун из Случаја (2), поново ћемо добити да је $h_{\text{pol}}(C(f)) = 2$.

Докажимо сада тврђење за $F_n(f)$. Подсетимо се да је $h_{\text{pol}}(f) = 1$. Ово се може доказати помоћу кодирања (није тешко видети да f нема две међусобно сингуларне тачке), или, другачије, позивајући се на Теорему 2 у [31](#), која каже да је полиномијална ентропија хомеоморфизма f на кругу једнака 1 ако и само ако f није конјуговано ротацији.

Дефинишимо релацију $\leq$ на $\mathbb{S}^1$ поистовећујући $\mathbb{S}^1$ са $[0, 1)$. Поново можемо претпоставити да f чува оријентацију, јер у супротном, f^2 то чини и важи

$$h_{\text{pol}}((F_n(f^2))) = h_{\text{pol}}((F_n(f))^2) = h_{\text{pol}}(F_n(f)).$$

Дакле, можемо сматрати да је f растући хомеоморфизам на $[0, 1]$, при чему је $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$ (можемо претпоставити да је 0 фиксна тачка пресликавања f). Као и

пре, пресликавање $\pi : (\mathbb{S}^1)^n \rightarrow F_n(\mathbb{S}^1)$ остварује полукоњугованост, па закључујемо да је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) \leq n$. За $n = 2$, због поменуте идентификације $\mathbb{S}^1$ са $[0, 1]$, можемо применити исто закључивање као у доказу Теореме 144 и закључити да је $h_{\text{pol}}(F_2(f)) = h_{\text{pol}}(f^{\times 2}|_{A(2)}) = 2$.

Ако f има бар две фиксне тачке, a и b , можемо дефинисати B као подскуп од $F_n(\mathbb{S}^1)$ који се састоји од скупова тачака из интервала $[a, b]$ и идентификовати пресликавање $F_n(f)|_B$ са $F_n(f|_{[a,b]})$. Одавде следи да је

$$h_{\text{pol}}(F_n(f)) \geq h_{\text{pol}}(F_n(f)|_B) = h_{\text{pol}}(F_n(f|_{[a,b]})) = n$$

(последња једнакост следи из доказа Теореме 144), па је доказ завршен.

Ако f има тачно једну фиксну тачку, 0, можемо дефинисати скупе $\tilde{A}(n)$ и $\hat{A}(n)$ као у доказу Теореме 144, закључити да је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \tilde{A}(n)) = n$, и потом доказати да је $h_{\text{pol}}(F_n(f); \hat{A}(n)) = n$, као у доказу Леме 147. Последње тврђење, $h_{\text{pol}}(2^f) = \infty$, следи на исти начин као и у случају интервала. Овим смо завршили доказ Теореме 145.

Размотримо сада случај када нелутајући скуп није обавезно коначан.

Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам коњугован ротацији R . Тада је и $F_n(f)$ коњугован са $F_n(R)$. Како је $F_n(R)$ изометрија, јер је то и R , полиномијална ентропија пресликавања $F_n(f)$ је једнака нули.

Посматрајмо сада нетривијални случај када пресликавање f није коњуговано ротацији. Знамо да је тада $h_{\text{pol}}(f) = 1$ (в. 31), па је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) \leq n$.

Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам који није коњугован ротацији и који чува оријентацију (иначе, посматрајмо f^2 уместо f). Ако је ротациони број $\rho(f)$ рационалан, онда је или $f^q = \text{Id}$, па је полиномијална ентропија у том случају једнака нули, или је $f^q \neq \text{Id}$, па f има лутајућу тачку (в. крај одељка 1.2) и $h_{\text{pol}}(F_n(f)) \geq n$ (в. Теорему 6 у 45), тј. $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$. Поново директно следи да је $h_{\text{pol}}(2^f) = \infty$.

Ако је ротациони број $\rho(f)$ ирационалан, а претпоставили смо да f није коњуговано ротацији, нелутајући скуп је Канторов, па мора постојати лутајућа тачка. Опет закључујемо да је $h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$ и $h_{\text{pol}}(2^f) = \infty$.

Овим разматрањем нисмо дошли до одговора која је вредност полиномијалне ентропије на хиперпростору $C(\mathbb{S}^1)$ у случају када је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам са бесконачним нелутајућим скупом. Резултати које ћемо сада изложити су изложени у раду 42. Циљ нам је да докажемо следећу теорему:

Теорема 148. *Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам. Ако је f коњуговано ротацији, онда је $h_{\text{pol}}(C(f)) = 0$, иначе је $h_{\text{pol}}(C(f)) = 2$.*

Докажимо прво два кључна тврђења.

Тврђење 149. *Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам који чува оријентацију. Тада је*

$$h_{\text{pol}}(C(f)) \leq 2.$$

Доказ. Пратићемо доказ леме 4.1 у 24, што је тврђење које се тиче тополошке ентропије. Нека је $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Нека је $N = \text{cov}\left(n, \frac{\varepsilon}{2}, f\right)$ и претпоставимо да су $I_0, I_1, \dots, I_{N-1}$ лукови (нумерисани супротно од казаљке на сату), чији је d_n -дијаметар мањи од $\varepsilon/2$ и који покривају $\mathbb{S}^1$. Циљ нам је да конструишемо покривач од $C(\mathbb{S}^1)$ са не више од N^2 елемената чији је $d_{H,n}^{C(f)}$ -дијаметар мањи од ε . За свако I_j , дефинишемо

фамилије лукова $M_k(I_j)$, за све $k = 0, \dots, N-1$ на следећи начин (сматрамо да је $I_j = I_{j \bmod N}$):

$$\begin{aligned} M_0(I_j) &:= C(I_j) \\ M_1(I_j) &:= \{I \in C(I_j \cup I_{j-1}) \mid I \supset I_j \cap I_{j-1}\} \\ M_2(I_j) &:= \{I \in C(I_{j+1} \cup I_j \cup I_{j-1}) \mid I \supset I_j\} \\ M_3(I_j) &:= \{I \in C(I_{j+1} \cup I_j \cup I_{j-1} \cup I_{j-2}) \mid I \supset I_j \cup I_{j-1}\} \\ M_4(I_j) &:= \{I \in C(I_{j+2} \cup I_{j+1} \cup I_j \cup I_{j-1} \cup I_{j-2}) \mid I \supset I_{j+1} \cup I_j \cup I_{j-1}\} \\ &\dots\dots\dots \\ M_{N-1}(I_j) &:= \{I \in C(\mathbb{S}^1) \mid I \supset \mathbb{S}^1 \setminus I_{j+N/2}\}. \end{aligned}$$

Јасно је да је $d_{H,C(f)}^n$ -дијаметар сваког $M_k(I_j)$ мањи од ε . Такође, фамилија $\{M_k(I_j) \mid k = 0, \dots, N-1, j = 0, \dots, N-1\}$ јесте покривач од $C(\mathbb{S}^1)$. заиста, узмимо произвољан $[a, b] \in C(\mathbb{S}^1)$ и нека је j_1 најмањи индекс такав да је $a \in I_{j_1}$. Ако је $b \in I_{j_1}$, имамо да је $[a, b] \in M_0$. Иначе, нека је $j_2 > j_1$ најмањи индекс такав да је $b \in I_{j_2}$. Видимо да је $[a, b] \in M_k$, где је $k := j_2 - j_1$.

Закључујемо да је $\text{cov}(n, \varepsilon, C(f)) \leq N^2$, а онда и да је

$$h_{\text{pol}}(C(f)) \leq 2.$$

□

Тврђење 150. Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам који чува оријентацију и који има бар једну лушајућу шачку. Тада је $h_{\text{pol}}(C(f)) \geq 2$.

Доказ. У [45] доказали смо да под претпоставкама Пропозиције [150], $h_{\text{pol}}(F_2(f)) \geq 2$. Како је $C(f)$ хомеоморфизам, скупови $\{\mathbb{S}^1\}$ и $Y := C(\mathbb{S}^1) \setminus \{\mathbb{S}^1\}$ су $C(f)$ -инваријантни и њихова унија је цео простор $C(\mathbb{S}^1)$. Због тога важи:

$$\begin{aligned} h_{\text{pol}}(C(f)) &= \max\{h_{\text{pol}}(C(f)|_Y), h_{\text{pol}}(C(f)|_{\{\mathbb{S}^1\}})\} = \\ &= \max\{h_{\text{pol}}(C(f)|_Y), 0\} = h_{\text{pol}}(C(f)|_Y). \end{aligned}$$

Посматрајмо непрекидну сурјекцију $\pi : Y \rightarrow F_2(\mathbb{S}^1)$ дату са:

$$\pi : K \rightarrow \partial(K),$$

за свако $K \in Y$, где $\partial(K)$ означава границу K . Очигледно важи

$$\pi \circ C(f)|_Y = F_2(f) \circ \pi,$$

па је

$$(7.4) \quad h_{\text{pol}}(C(f)) = h_{\text{pol}}(C(f)|_Y) \geq h_{\text{pol}}(F_2(f)) \geq 2.$$

Приметимо да неједнакост $h_{\text{pol}}(C(f)|_Y) \geq h_{\text{pol}}(F_2(f))$ не следи директно из особина полиномијалне ентропије, јер простор Y није компактан. Међутим, π је Липшицово пресликавање са Липшицовом константом 1. Због тога, ако је $E = \{A_1, \dots, A_N\} \subset F_2(\mathbb{S}^1)$ (n, ε) -раздвојен скуп такав да је $\text{sep}(n, \varepsilon; F_2(f)) = |E|$, нека је $K_j \in C(\mathbb{S}^1)$ такав да је $\pi(K_j) = A_j$. Важи:

$$\begin{aligned} d(C(f)^k(K_i), C(f)^k(K_j)) &\geq d(\pi(C(f)^k(K_i)), \pi(C(f)^k(K_j))) = \\ &= d(F_2(f)^k(\pi(K_i)), F_2(f)^k(\pi(K_j))) = d(F_2(f)^k(A_i), F_2(f)^k(A_j)), \end{aligned}$$

па је

$$d_n^{C(f)}(K_i, K_j) \geq d_n^{F_2(f)}(A_i, A_j).$$

Одавде следи да је

$$\tilde{E} := \{K_1, \dots, K_N\} \subset C(\mathbb{S}^1)$$

(n, ε) -раздвојен скуп. Закључујемо

$$\text{sep}(n, \varepsilon; C(f)) \geq \text{sep}(n, \varepsilon; F_2(f)),$$

па неједнакост (7.4) важи. □

Сада можемо да докажемо Теорему 148.

Доказ. Можемо да претпоставимо да f чува оријентацију; иначе f^2 чува оријентацију и имамо да важи:

$$h_{\text{pol}}(C(f^2)) = h_{\text{pol}}(C(f)^2) = h_{\text{pol}}(C(f)).$$

Ако је f конјуговано ротацији ρ_α , тада је $C(f)$ конјуговано изометрији $C(\rho_\alpha)$ (јер је ρ_α изометрија), па је $h_{\text{pol}}(C(f)) = 0$.

Претпоставимо да f није конјуговано ротацији. Тада из Пропозиције 149 следи да је $h_{\text{pol}}(C(f)) \leq 2$.

Ако је ротациони број пресликавања f рационалан, онда из дискусије на крају одељка 1.2 закључујемо да f има лутајућу тачку. Дакле, из Пропозиције 150 добијамо да је $h_{\text{pol}}(C(f)) \geq 2$.

Ако је ротациони број пресликавања f ирационалан, разликујемо два случаја: нелутајући скуп од f је или $\mathbb{S}^1$ или хомеоморфан Канторовом скупу. У првом случају, f је конјуговано ротацији, и полиномијална ентропија је једнака нули. У другом случају опет закључујемо да f има лутајућу тачку, па на основу Пропозиције 150 добијамо да је $h_{\text{pol}}(C(f)) \geq 2$. □

Глава 8

Полиномијална ентропија на $F_n(X)$ и $\mathcal{S}F_n(X)$

У овом поглављу представићемо резултате рада [41]. Поред n -тоструког симетричног производа X , говорићемо и о његовој суспензији. Надлер је дефинисао суспензију произвољног континуума X (в. 3.16 у [49]), а Бараган је са коауторима у неколико радова (в. [7], [8], [9]) изучавао конкретно суспензију n -тоструког симетричног производа. Осим особина саме суспензије, са тачке гледишта теорије континуума, бавио се и изучавањем индукованих динамичких система на суспензији и генералисаној суспензији. Ми ћемо показати да се полиномијална ентропија индукованог хомеоморфизма на n -тоструком симетричном производу и на његовој суспензији поклапају, као и да су једнаке $nh_{\text{pol}}(f)$, под одређеним претпоставкама.

8.1 Суспензије

Нека је X компактан метрички простор и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Дефиниција 151. *Суспензија n -тоструког симетричног производа континуума X је количнички простор*

$$\mathcal{S}F_n(X) = F_n(X)/F_1(X),$$

са количничком топологијом.

Означимо количничко пресликавање са $q : F_n(X) \rightarrow \mathcal{S}F_n(X)$ и $q(F_1(X)) = F_X$. Приметимо да је

$$\mathcal{S}F_n(X) = \{\{A\} \mid A \in F_n(X) \setminus F_1(X)\} \cup \{F_X\},$$

при чему смо са $\{A\}$ означили класу скупа A , а да рестрикција пресликавања q остварује хомеоморфизам између $\mathcal{S}F_n(X) \setminus \{F_X\}$ и $F_n(X) \setminus F_1(X)$. Може се доказати да је $\mathcal{S}F_n(X)$ компактан метрички простор. (в. 3.10 у [49]).

Дефинишимо сада индуковано пресликавање $\mathcal{S}F_n(f) : \mathcal{S}F_n(X) \rightarrow \mathcal{S}F_n(X)$ на суспензији $\mathcal{S}F_n(X)$ на следећи начин:

$$(8.1) \quad \mathcal{S}F_n(f)(\mathcal{A}) = \begin{cases} q(F_n(f)(q^{-1}(\mathcal{A}))), & \text{ако } \mathcal{A} \neq F_X; \\ F_X, & \text{ако } \mathcal{A} = F_X. \end{cases}$$

Ако је $f : X \rightarrow X$ непрекидно, тада је и $\mathcal{S}F_n(f)$ непрекидно (в. страну 126 у [18]) и следећи дијаграм комутира:

$$\begin{array}{ccc} F_n(X) & \xrightarrow{F_n(f)} & F_n(X) \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ \mathcal{S}F_n(X) & \xrightarrow{\mathcal{S}F_n(f)} & \mathcal{S}F_n(X) \end{array}$$

Ако је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам, онда је то и $\mathcal{S}F_n(f)$. Наиме, како је q инјекција на $F_n(X) \setminus F_1(X)$ и $\mathcal{S}F_n(f)^{-1}(F_X) = F_1$, закључујемо да је $\mathcal{S}F_n(f)$ инјективно. Пошто је q сурјекција, $\mathcal{S}F_n(f)$ је непрекидна бијекција из компактног простора у Хаусдорфов, па је хомеоморфизам. Јасно је да је $(\mathcal{S}F_n(f), \mathcal{S}F_n(X))$ фактор од $(F_n(f), F_n(X))$, па је $h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f)) \leq h_{\text{pol}}(F_n(f))$. Циљ нам је да докажемо обрнуту неједнакост, односно да је $h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f)) \geq h_{\text{pol}}(F_n(f))$.

Пример 152. Ако је $X = [0, 1]$, тада се $\mathcal{S}F_2(X)$ добија тако што $F_1(X)$ колапсирамо у тачку, па је овај простор отиш троугао T (в. одељак 4.2). Ако је $X = \mathbb{S}^1$, тада је $\mathcal{S}F_2(X)$ хомеоморфан количничком простору Мебијусове шраке, при чему границу колапсирамо у тачку. Ово је познати модел реалној пројективној простору $\mathbb{R}P^2$. На примеру круга видимо да су простор и његова суспензија тополошки различити, па има смисла проучавањем суспензију.

Поред суспензије, Бараган је дефинисао и генералисану суспензију.

Дефиниција 153. Нека је $n > m \geq 1$. Количнички простор $\mathcal{S}F_n^m(X) = \mathcal{S}F_n^m(X) = F_n(X)/F_m(X)$, са количничком топологијом, називамо генералисаном суспензијом.

Индуковано пресликавање $\mathcal{S}F_n^m(f)$ је непрекидно на компактном $\mathcal{S}F_n^m(X)$, када је f непрекидно на компактном метричком простору X (в. [9]).

8.2 Нелутајући скуп индукованих пресликавања

Да бисмо применили метод из [23], односно [27], нелутајући скуп пресликавања $F_n(f)$ и $\mathcal{S}F_n(f)$ мора бити коначан. Као што се може видети из Примера 14 и 15 у [21], нелутајући скуп пресликавања $F_n(f)$ није у директној вези са $\text{NW}(f)$, као што би се могло помислити. Један од начина да постигнемо да $\text{NW}(F_n(f))$ и $\text{NW}(\mathcal{S}F_n(f))$ буду коначни, јесте да претпоставимо да је $\text{CR}(f)$ коначан, што ћемо и доказати. Важна класа динамичких система који имају коначан ланчато рекурентни скуп јесу Морс-Смејлови динамички системи (в. [10] и [47]).

Покажимо за почетак једну помоћну лему. Напоменимо да ћемо масним словима означавати елементе простора $X^{\times N}$, као и метрику на њему. У употреби су метрика d на простору X , $\mathbf{d}$ на $X^{\times N}$, као и d_H на $F_N(X)$.

Лема 154. Нека је X компактан метрички простор. Нека су $A, B \in F_N(X)$, $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, $1 \leq m, k \leq N$. Тада постоји ε_0 такав да за све $\varepsilon < \varepsilon_0$ важи следеће: ако је $d_H(A, B) < \varepsilon$, тада постоје N -торке $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \pi^{-1}(A)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in \pi^{-1}(B)$ за које је $\mathbf{d}((\alpha_1, \dots, \alpha_N), (\beta_1, \dots, \beta_N)) < \varepsilon$.

Доказ. Нека је $\delta := \min_{i \neq j} d(a_i, a_j)$, $\varepsilon_0 := \delta/2$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ и претпоставимо да је $d_H(A, B) < \varepsilon$. Тада из дефиниције Хаусдорфове метрике следи:

$$(\forall i \in \{1, \dots, k\})(\exists j_i \in \{1, \dots, m\}) d(a_i, b_{j_i}) < \varepsilon.$$

Приметимо даље да за $i \neq l$ имамо да је $b_{j_i} \neq b_{j_l}$. Наиме,

$$\begin{aligned} \delta &\leq d(a_i, a_l) \leq d(a_i, b_{j_i}) + d(b_{j_i, b_{j_l}}) + d(b_{j_l}, a_l) \\ &< 2\varepsilon + d(b_{j_i}, b_{j_l}) < \delta + d(b_{j_i}, b_{j_l}). \end{aligned}$$

Закључујемо да је $d(b_{j_i}, b_{j_l}) > 0$, па је $b_{j_i} \neq b_{j_l}$. Одавде следи да мора бити $m \geq k$.

Објаснимо сада како дефинишемо $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \pi^{-1}(A)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in \pi^{-1}(B)$. Прво, $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = (a_1, \dots, a_k)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_k) = (b_{j_1}, \dots, b_{j_k})$. Нека су даље $\{\beta_{k+1}, \dots, \beta_m\}$ елементи из $\{b_1, \dots, b_m\} \setminus \{b_{j_1}, \dots, b_{j_k}\}$. Одговарајући $\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m\}$ могу се изабрати из $\{a_1, \dots, a_k\}$, тако да је $d(\alpha_p, \beta_p) < \varepsilon$, за $p \in \{k+1, \dots, m\}$. Заиста, ако ово не би био случај, онда би $d_H(A, B) \geq \varepsilon$. За преостале парове координата, ако их има ($m < N$), можемо да поновимо неки од парова који смо искористили. На овај начин смо добили N -торке које су близу када су њихове пројекције у $F_N(X)$ близу.

□

Теорема 155. Нека је X компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање за које је $\text{CR}(f) = \text{Fix}(f) = \text{NW}(f)$ коначан скуп. Тада важи:

$$\text{NW}(F_N(f)) = \text{Fix}(F_N(f)) = \{ \{x_1, \dots, x_k\} \mid 1 \leq k \leq N, x_j \in \text{Fix}(f) \}.$$

Доказ. Нека је $A \in \text{NW}(F_N(f))$, $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, $k \leq N$. Ако покажемо да је $(a_1, \dots, a_k) \in \text{CR}(f^{\times k})$, $f^{\times k} : X^{\times k} \rightarrow X^{\times k}$, тада користећи да је $\text{CR}(f \times g) = \text{CR}(f) \times \text{CR}(g)$, можемо да закључимо да је $a_i \in \text{CR}(f)$, $1 \leq i \leq k$. По претпоставци је $\text{CR}(f) = \text{Fix}(f)$, па је $A \in \text{Fix}(F_N(f))$.

Покажимо да је $(a_1, \dots, a_k) \in \text{CR}(f^{\times k})$. Прецизније, конструисаћемо ε -ланац који почиње и завршава се у $(a_1, \dots, a_k)$, за произвољно $\varepsilon > 0$. Приметимо да је довољно да нађемо ε -ланац који почиње и завршава се у некој пермутацији $(a_1, \dots, a_k)$.

Како је A нелутајући за $F_N(f)$, за свако $n \in \mathbb{N}$, изаберимо $B(A, 1/n)$. Тада постоје $B_n \in F_N(X)$ и $m_n \in \mathbb{N}$ такви да је

$$d_H(A, B_n) < 1/n, \quad d_H(A, F_N^{m_n}(f)(B_n)) < 1/n.$$

Можемо изабрати да $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ буде строго растући низ.

Ако означимо са $\pi^{-1}(A) = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} \subseteq X^{\times N}$, тада постоји P , који зависи од N , такав да је $p \leq P$. Такође, постоји Q такав да ако означимо са $\pi^{-1}(B_n) = \{\mathbf{b}_1^n, \dots, \mathbf{b}_{q(n)}^n\} \subseteq X^{\times N}$, имамо да је $q(n) \leq Q$. Користећи Лему 154, можемо да закључимо да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоје $i_n, j_n \in \{1, \dots, p\}$ и $l_n, r_n \in \{1, \dots, q(n)\}$ такви да важи:

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}_{i_n}, \mathbf{b}_{r_n}^n) < 1/n, \quad \mathbf{d}(\mathbf{a}_{j_n}, (f^{\times N})^{m_n}(\mathbf{b}_{l_n}^n)) < 1/n.$$

Како је скуп $\{1, \dots, p\}$ коначан, постоје $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ и подниз (p_n) од (n) такви да важи:

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{b}_{r_{p_n}}^{p_n}) < 1/p_n.$$

Слично, постоје $r_0 \in \{1, \dots, q(n)\}$ и подниз (k_n) од (p_n) такви да је:

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{b}_{r_0}^{k_n}) < 1/k_n.$$

Преласком на подниз (k_n) имамо да важи:

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}_{j_{k_n}}, (f^{\times N})^{m_{k_n}}(\mathbf{b}_{l_{k_n}}^{k_n})) < 1/k_n.$$

Понаваљући исто резонување као малопре, можемо наћи нови подниз од (k_n) , у ознаци (s_n) , као и индекс $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ тако да је:

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}_{j_0}, (f^{\times N})^{m_{s_n}}(\mathbf{b}_{l_{s_n}}^{s_n})) < 1/s_n.$$

Као последњи корак, постоји $l_0 \in \{1, \dots, Q\}$ и подниз (t_n) од (s_n) за које је:

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}_{j_0}, (f^{\times N})^{m_{t_n}}(\mathbf{b}_{l_0}^{t_n})) < 1/t_n.$$

Постигли смо да важи:

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{b}_{r_0}^{t_n}) < 1/t_n, \quad \mathbf{d}(\mathbf{a}_{j_0}, (f^{\times N})^{m_{t_n}}(\mathbf{b}_{l_0}^{t_n})) < 1/t_n.$$

Ако означимо $\mathbf{a}_{i_0} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ и $\mathbf{b}_{r_0}^{t_n} = (\beta_1^{t_n}, \dots, \beta_N^{t_n})$, тада је $d(\alpha_j, \beta_j^{t_n}) < 1/t_n$, за све $1 \leq j \leq N$. Слично, ако је $\mathbf{a}_{j_0} = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ и $\mathbf{b}_{l_0}^{t_n} = (\delta_1^{t_n}, \dots, \delta_N^{t_n})$, имамо да је $d(\gamma_j, f^{m_{t_n}}(\delta_j^{t_n})) < 1/t_n$, за све $1 \leq j \leq N$.

Обе N -торке $\mathbf{a}_{i_0}$ и $\mathbf{a}_{j_0}$ имају тачно k међусобно различитих координата. Одбацимо све низове $(\beta_j^{t_n})$, као и низове $f^{m_{t_n}}(\delta_j^{t_n})$, који имају исти лимес, и оставимо само по једног представника. На овај начин нам је преостало k низова $(\beta_j^{t_n})$ и k низова $(f^{m_{t_n}}(\delta_j^{t_n}))$. Пређимо сада на једноставније ознаке за добијене неједнакости. Имамо да је $d(p_j, c_j^n) < 1/t_n$ и $d(r_j, f^{u_n}(d_j^n)) < 1/t_n$, за све $1 \leq j \leq k$. Напоменимо да је $A = \{a_1, \dots, a_k\} = \{p_1, \dots, p_k\} = \{r_1, \dots, r_k\}$ и $\{c_1^n, \dots, c_k^n\} = \{d_1^n, \dots, d_k^n\}$. Као и пре, означимо са $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k)$, $\mathbf{c}^n = (c_1^n, \dots, c_k^n)$ и $\mathbf{d}^n = (d_1^n, \dots, d_k^n)$.

Нека су $x, y \in X^{\times k}$. За свако $\varepsilon > 0$ изаберимо $\delta < \varepsilon/2$ за које је:

$$(8.2) \quad \mathbf{d}(x, y) < \delta \Rightarrow \mathbf{d}(f^{\times k}(x), f^{\times k}(y)) < \varepsilon$$

и $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је:

$$\mathbf{d}(\mathbf{p}, \mathbf{c}^n) < \delta, \quad \mathbf{d}(\mathbf{r}, (f^{\times k})^{u_n}(\mathbf{d}^n)) < \varepsilon/2$$

за све $n \geq n_0$. Одавде се јасно види да и за сваку пермутацију $\mu \in S_k$ реда l , $s \in \{0, \dots, l-1\}$ и $n \geq n_0$ важи да је:

$$(8.3) \quad \mathbf{d}(\mu^s(\mathbf{r}), (f^{\times k})^{u_n}(\mu^s(\mathbf{d}^n))) < \varepsilon/2,$$

јер се растојање не мења ако сваку k -торку пермутујемо на исти начин.

Нека је ν пермутација из S_k која пресликава $(c_1^{n_0}, \dots, c_k^{n_0}) = \mathbf{c}^{n_0}$ у $(d_1^{n_0}, \dots, d_k^{n_0}) = \mathbf{d}^{n_0}$ и нека је m такав да је $\nu^m = Id$. Означимо са $\mathbf{p}_1 = \nu(\mathbf{p})$. Нека је μ пермутација из S_k која пресликава $\mathbf{p}_1$ у $(r_1, \dots, r_k) = \mathbf{r}$ и нека је l такав да је $\mu^l = Id$.

Имамо да важи:

$$(8.4) \quad \mathbf{d}(\mathbf{p}, \mathbf{c}^{n_0}) < \delta \Leftrightarrow \mathbf{d}(\nu(\mathbf{p}), \nu(\mathbf{c}^{n_0})) < \delta \Leftrightarrow \mathbf{d}(\mathbf{p}_1, \mathbf{d}^{n_0}) < \delta.$$

Ако применимо (8.2) на (8.4), добијамо да важи:

$$(8.5) \quad \mathbf{d}(f^{\times k}(\mathbf{p}_1), f^{\times k}(\mathbf{d}^{n_0})) < \varepsilon.$$

Такође је:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\mu(\mathbf{d}^{n_0}), (f^{\times k})^{u_{n_0}}(\mathbf{d}^{n_0})) &\leq \mathbf{d}(\mu(\mathbf{d}^{n_0}), \mathbf{r}) + \mathbf{d}(\mathbf{r}, (f^{\times k})^{u_{n_0}}(\mathbf{d}^{n_0})) \\ &= \mathbf{d}(\mathbf{d}^{n_0}, \mu^{-1}\mathbf{r}) + \mathbf{d}(\mathbf{r}, (f^{\times k})^{u_{n_0}}(\mathbf{d}^{n_0})) \\ &= \mathbf{d}(\mathbf{d}^{n_0}, \mathbf{p}_1) + \mathbf{d}(\mathbf{r}, (f^{\times k})^{u_{n_0}}(\mathbf{d}^{n_0})) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

Закључујемо да за свако $s \in \{0, \dots, l-1\}$ важи:

$$(8.6) \quad \mathbf{d}(\mu^s(\mathbf{d}^{n_0}), (f^{\times k})^{u_{n_0}}(\mu^{s-1}(\mathbf{d}^{n_0}))) < \varepsilon.$$

Сада смо спремни да направимо ε -ланац који почиње и завршава се у $\mathbf{p}_1$ (што заиста јесте пермутација $(a_1, \dots, a_k)$). Ланац смо поделили у редове, при чему је тривијално да су елементи сваког реда заиста чланови ланца. Објаснићемо сада како се из сваког реда прелази у наредни. Из првог реда у други можемо да пређемо због (8.5). За наредних $l-2$ примењујемо (8.6). На крају, користимо (8.3), за $s = l-1$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}_1, \\ &f^{\times k}(\mathbf{d}^{n_0}), (f^{\times k})^2(\mathbf{d}^{n_0}), \dots, (f^{\times k})^{u_{n_0}-1}(\mathbf{d}^{n_0}), \\ &\mu(\mathbf{d}^{n_0}), f^{\times k}(\mu(\mathbf{d}^{n_0})), (f^{\times k})^2(\mu(\mathbf{d}^{n_0})), \dots, (f^{\times k})^{u_{n_0}-1}(\mu(\mathbf{d}^{n_0})), \\ &\mu^2(\mathbf{d}^{n_0}), f^{\times k}(\mu^2(\mathbf{d}^{n_0})), (f^{\times k})^2(\mu^2(\mathbf{d}^{n_0})), \dots, (f^{\times k})^{u_{n_0}-1}(\mu^2(\mathbf{d}^{n_0})), \\ &\dots \\ &\mu^{l-1}(\mathbf{d}^{n_0}), f^{\times k}(\mu^{l-1}(\mathbf{d}^{n_0})), (f^{\times k})^2(\mu^{l-1}(\mathbf{d}^{n_0})), \dots, (f^{\times k})^{u_{n_0}-1}(\mu^{l-1}(\mathbf{d}^{n_0})), \\ &\mu^{l-1}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_1 \end{aligned}$$

□

Циљ нам је да покажемо слично тврђење и за $\mathcal{SF}_n(f)$. Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам са коначно много ланчасто рекурентних тачака на компактном метричком простору X . Како је $\text{CR}(f)$ коначан и инваријантан, закључујемо да се састоји само од периодичних тачака. Можемо да пређемо са f на f^k , за неко $k \geq 1$, тако да све ланчасто рекурентне тачке буду фиксне. Ова промена не утиче на полиномијалну ентропију, пошто важи да је $h_{\text{pol}}(f^k) = h_{\text{pol}}(f)$. Јасно је да је ово тачно и за пресликавање $F_n(f)$, односно важи

$$h_{\text{pol}}(F_n(f^k)) = h_{\text{pol}}(F_n(f)^k) = h_{\text{pol}}(F_n(f)).$$

Покажимо да је и полиномијална ентропија индукованог пресликавања на суспензији имуна на ову промену. Нека је $\mathcal{A} \in \mathcal{SF}_n(X)$. Тада, имајући у виду да је одговарајућа рестрикција пресликавања q хомеоморфизам, имамо:

$$\begin{aligned}
(8.7) \quad (\mathcal{S}F_n(f))^k(\mathcal{A}) &= (qF_n(f)q^{-1})^k(\mathcal{A}) \\
&= \begin{cases} qF_n(f)^k q^{-1}(\mathcal{A}) & \text{иФ } \mathcal{A} \neq F_X \\ F_X & \text{иФ } \mathcal{A} = F_X \end{cases} \\
&= \mathcal{S}F_n(f^k)(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Видимо да је

$$\begin{aligned}
h_{\text{pol}}((\mathcal{S}F_n(f^k)), \mathcal{S}F_n(X)) &= h_{\text{pol}}((\mathcal{S}F_n(f)^k), \mathcal{S}F_n(X)) \\
&= h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f), \mathcal{S}F_n(X)),
\end{aligned}$$

па можемо, од сада надаље, посматрати хомеоморфизме f код којих је $\text{CR}(f) = \text{Fix}(f)$.

Тврђење 156. Нека је X компактан простор и $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам са коначним ланчастио рекурентним скупом $\text{CR}(f) = \text{Fix}(f)$. Тада $\mathcal{S}F_n(f)$ има коначан нелутајући скуп и $\text{NW}(\mathcal{S}F_n(f)) = \text{Fix}(\mathcal{S}F_n(f))$, за све $n \geq 2$.

Доказ. Скуп $\text{Fix}(\mathcal{S}F_n(f))$ је коначан јер је садржан у коначном скупу $(\text{Fix}(F_n(X)) \setminus \{F_1\}) \cup \{F_X\}$. Нека је $\mathcal{A} \in \mathcal{S}F_n(X)$ такав да $\mathcal{A} \in \text{NW}(\mathcal{S}F_n(f)) \setminus \text{Fix}(\mathcal{S}F_n(f))$. Како је $\mathcal{A} \neq F_X$, имамо да је $\mathcal{A} = q(A)$, за неко A који је бар двочлан. Нека је U околина од A у $F_n(X)$. Тада је $q(U)$ околина од $\mathcal{A}$. Дефинишимо $\mathcal{U} := q(U) \setminus F_X$. Имајући у виду да је $\mathcal{A}$ нелутајућа тачка, постоји $k \geq 1$ тако да је

$$(\mathcal{S}F_n(f))^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset.$$

Даље, из дефиниције пресликавања $\mathcal{S}F_n(f)$ и једноставног својства да је $(\mathcal{S}F_n(f))^k \circ q = q \circ (F_n(f))^k$, имамо да важи:

$$\emptyset \neq (\mathcal{S}F_n(f))^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = (\mathcal{S}F_n(f))^k(q(U)) \cap q(U) = q((F_n(f))^k(U)) \cap q(U).$$

Како је q бијекција на $F_n(X) \setminus F_1(X)$, можемо закључити да је:

$$(F_n(f))^k(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Пошто је U произвољна околина од A , видимо да је $A \in \text{NW}(F_n(X))$. Из Теореме 155 следи да је $\text{NW}(F_n(X)) = \text{Fix}(F_n(X))$. Коначно:

$$\mathcal{S}F_n(f)(\mathcal{A}) = q(F_n(f))q^{-1}(\mathcal{A}) = q(F_n(f))(A) = q(A) = \mathcal{A},$$

што показује да је $\mathcal{A} \in \text{Fix}(\mathcal{S}F_n(f))$. □

8.3 Главна теорема

Теорема 157. Нека је X компактан простор, $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам са коначним ланчастио рекурентним скупом и $n \geq 2$. Тада је

$$h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f), \mathcal{S}F_n(X)) = h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(X)) = nh_{\text{pol}}(f, X).$$

Доказ. Као што смо објаснили, можемо без умањења општости сматрати да су све ланчато рекурентне тачке заправо фиксне. Нека је

$$G_n := \{\{x_1, \dots, x_n\} \mid x_i \in X, x_i \neq x_j, i, j \in \{1, \dots, n\}\} \subset F_n(X).$$

Како је f бијекција, G_n је f -инваријантан. Слично, $\mathcal{S}F_n(f)$ и рестрикција од q су бијекције, па је $q(G_n)$ $\mathcal{S}F_n(f)$ -инваријантан. Применићемо Тврђење 74 на:

$$\begin{aligned} X_1 &:= F_n(X), & A &:= G_n, & f_1 &:= F_n(f), \\ X_2 &:= \mathcal{S}F_n(X), & B &:= q(G_n), & f_2 &:= \mathcal{S}F_n(f), \\ H &:= q. \end{aligned}$$

Ако f има тачно n фиксних тачака $\{x_1, \dots, x_n\}$, тада скупови G_n и $q(G_n)$ садрже тачно једну нелутајућу тачку $\{x_1, \dots, x_n\}$. Ако f има мање од n фиксних тачака, тада скупови G_n и $q(G_n)$ не садрже нелутајуће тачке. У том случају, додаћемо скуп $\{\tilde{x}\}$, $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ у скуп G_n и F_1 у скуп $q(G_n)$, не мењајући нотацију, а све како бисмо испунили услове Тврђења 74. Ова промена неће утицати на вредности полиномијалне ентропије, а q ће остати хомеоморфизам на G_n . Такође, G_n и $q(G_n)$ остају f - и $\mathcal{S}F_n(f)$ -инваријантни, редом. Ако f има више од n фиксних тачака, рецимо k , тада постоје $\binom{k}{n}$ нелутајућих тачака у G_n . Поново, не мењајући ознаке, уклонимо све нелутајуће тачке из G_n , а додаћемо скуп $\{\tilde{x}\}$, $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ у G_n и F_1 у $q(G_n)$. Како су све тачке које смо уклонили фиксне, преостале тачке у G_n чине f -инваријантан скуп. Исто важи и за $q(G_n)$, да је $\mathcal{S}F_n(f)$ -инваријантан.

Пошто су сви услови испуњени, имамо да је:

$$(8.8) \quad h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f); q(G_n)) = h_{\text{pol}}(F_n(f); G_n).$$

Још једном ћемо применити Тврђење 74, али овог пута на:

$$\begin{aligned} X_1 &:= X^{\times n}, & A &:= \pi^{-1}(G_n), & f_1 &:= f^{\times n}, \\ X_2 &:= F_n(X), & B &:= G_n, & f_2 &:= F_n(f), \\ H &:= \pi. \end{aligned}$$

Приметимо прво да је $\pi^{-1}(G_n)$ ис $f^{\times n}$ -инваријантан, јер су f и рестрикција од π бијекције. Размишљајући исто као малопре, постоји или тачно једна нелутајућа тачка или не постоји ниједна (или одмах, или након уклањања свих), па ћемо додати по једну тачку скуповима $\pi^{-1}(G_n)$ и G_n - тачке $(\tilde{x}, \dots, \tilde{x})$ и $\{\tilde{x}\}$, редом. H ће остати хомеоморфизам и ентропија се неће променити. Можемо закључити да је

$$(8.9) \quad h_{\text{pol}}(F_n(f); G_n) = h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \pi^{-1}(G_n)).$$

Користећи основне особине полиномијалне ентропије, као и (8.8) и (8.9), имамо да је:

$$\begin{aligned} h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f), \mathcal{S}F_n(X)) &\geq h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f); q(G_n)) \\ &= h_{\text{pol}}(F_n(f); G_n) \\ &= h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \pi^{-1}(G_n)). \end{aligned}$$

Дакле, довољно је да покажемо да важи:

$$(8.10) \quad h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \pi^{-1}(G_n)) = h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(X)).$$

Приметимо да ако докажемо да је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \pi^{-1}(G_n)) = nh_{\text{pol}}(f, X)$, тада је (8.10) тачно. Наиме,

$$(8.11) \quad \begin{aligned} h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(X)) &\leq h_{\text{pol}}(f^{\times n}, X^{\times n}) \\ &= nh_{\text{pol}}(f, X), \end{aligned}$$

$$(8.12) \quad \begin{aligned} h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(X)) &\geq h_{\text{pol}}(F_n(f); G_n) \\ &\stackrel{(8.9)}{=} h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \pi^{-1}(G_n)) \\ &= nh_{\text{pol}}(f, X), \end{aligned}$$

па закључујемо да је $h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(X)) = nh_{\text{pol}}(f, X)$.

Докажимо сада следећу једнакост:

Лема 158. $h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \pi^{-1}(G_n)) = nh_{\text{pol}}(f, X)$.

Доказ. Једна неједнакост је тривијално тачна:

$$h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \pi^{-1}(G_n)) \leq h_{\text{pol}}(f^{\times n}, X^{\times n}) = nh_{\text{pol}}(f, X).$$

Приметимо да је $\pi^{-1}(G_n)$ скуп свих n -торки чије су све координате међусобно различите. Због тога је,

$$X^{\times n} = \pi^{-1}(G_n) \cup (\cup G_{k, \alpha(k)}) \cup (\text{Fix}(f^{\times n}) \cap \pi^{-1}(G_n)),$$

при чему је унија по свим k и $\alpha(k)$, где је $k \geq 2$ најмањи број међусобно различитих координата и $\alpha(k)$ скуп параметара који одређују позиције ових координата. Како бисмо били што јаснији, наведимо експлицитно један скуп G (који ћемо користити и касније у доказу) из фамилије $G_{k, \alpha(k)}$:

$$G := G_{2, (1, 2)} = \{(x, x, x_3, \dots, x_n) \mid x, x_i \in X, i \in \{3, \dots, n\}\}.$$

За фиксирано n имамо коначно много скупова $G_{k, \alpha(k)}$ и сви су $f^{\times n}$ -инваријантни и компактни. Напоменимо да не морају бити обавезно дисјунктни, али и да то не представља препреку за примену својства полиномијалне ентропије (в. 53). Како је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}, \text{Fix}(f^{\times n}) \cap \pi^{-1}(G_n)) = 0$, имамо да важи:

$$nh_{\text{pol}}(f, X) = h_{\text{pol}}(f^{\times n}, X^{\times n}) = \max_{k, \alpha(k)} \{h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \pi^{-1}(G_n)), h_{\text{pol}}(f^{\times n}; G_{k, \alpha(k)})\}.$$

Можемо закључити да је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}; \pi^{-1}(G_n)) = nh_{\text{pol}}(f, X)$ након што докажемо да је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}; G_{k, \alpha(k)}) \leq (n-1)h_{\text{pol}}(f, X)$. За почетак покажимо да је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}; G) = (n-1)h_{\text{pol}}(f, X)$. Из следећег дијаграма, где је $\phi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ хомеоморфизам, следи да је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}; G) = h_{\text{pol}}(f^{\times (n-1)}, X^{\times (n-1)}) = (n-1)h_{\text{pol}}(f, X)$.

$$\begin{array}{ccc} X^{\times(n-1)} & \xrightarrow{f^{\times(n-1)}} & X^{\times(n-1)} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ G & \xrightarrow{f^{\times(n-1)}} & G \end{array}$$

Такође, $h_{\text{pol}}(f^{\times n}; G_{2,\alpha(k)}) = h_{\text{pol}}(f^{\times n}; G)$, за све $\alpha(k)$, јер су G и $G_{2,\alpha(k)}$ хомеоморфни. Хомеоморфизам је пресликавање које замењује места одговарајућим координатама. Због тога имамо да је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}, G_{2,\alpha(k)}) = (n-1)h_{\text{pol}}(f, X)$. Коначно, нека је $k > 2$. Тада је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}, G_{k,\alpha(k)}) = (n-k+1)h_{\text{pol}}(f, X)$, користећи исто резонување као малопре, па имамо да је $h_{\text{pol}}(f^{\times n}, G_{k,\alpha(k)}) \leq (n-1)h_{\text{pol}}(f, X)$. □

Овим смо завршили и доказ теореме, јер смо показали да је $h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f), \mathcal{S}F_n(X)) \geq h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(X))$, као и да је $h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(X)) = nh_{\text{pol}}(f, X)$. □

Пратећи доказ претходне теореме, аналогно можемо закључити да исти резултати важе и за динамички систем $(\mathcal{S}F_n^m(f), \mathcal{S}F_n^m(X))$.

Теорема 159. *Нека је X компактан простор, $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам са коначним ланчастио рекурентним скупом и $n > m \geq 1$. Тада је*

$$h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n^m(f), \mathcal{S}F_n^m(X)) = h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(X)) = nh_{\text{pol}}(f, X).$$

□

Као директну последицу, издвојићемо резултате за случај када је простор $X = [0, 1]$, као и када је $X = \mathbb{S}^1$. Приметимо да овде коначност $\text{NW}(F_n(f))$ следи из Тврђења 146, па је довољно да претпоставимо да је $\text{NW}(f)$ коначан. Следећа два резултата следе директно из Теореме 157 и чињенице да је $h_{\text{pol}}(f, [0, 1]) = h_{\text{pol}}(f, \mathbb{S}^1) = 1$.

Последица 160. *Нека је $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ хомеоморфизам са коначним нелутајућим скупом. Тада је $h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f)) = h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$, за све $n \geq 2$.*

Последица 161. *Нека је $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ хомеоморфизам са коначним нелутајућим скупом. Тада је $h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f)) = h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$, за све $n \geq 2$.*

Посматрајмо сада хомеоморфизме $f : X \rightarrow X$ на компактном простору X чији нелутајући скуп није обавезно коначан. У 45 смо проучавали хомеоморфизме са бар једном лутајућом тачком и добили доње ограничење за полиномијалну ентропију $(F_n(f), F_n(X))$. Показаћемо слично тврђење за $\mathcal{S}F_n(f)$, уз додатну претпоставку.

Теорема 162. *Нека је X компактан простор и $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам са бар једном лутајућом тачком x_0 . Ако су скупови $\alpha_f(x_0)$ и $\omega_f(x_0)$ коначни, тада је $h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f)) \geq n$, за све $n \geq 2$.*

Доказ. Користићемо исте ознаке као у доказу Теореме 6 у 45. Дефинишимо низ $x_n = (f^n(x_0))$, $n \in \mathbb{Z}$ и скуп

$$Y := \overline{O_f(x_0)} = \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \alpha_f(x_0) \cup \omega_f(x_0).$$

Скуп Y је компактан и садржи коначно много нелутајућих тачака - тачке из $\alpha_f(x_0) \cup \omega_f(x_0)$. Како је $\mathcal{S}F_n(Y)$ $\mathcal{S}F_n(f)$ -инваријантан подскуп од $\mathcal{S}F_n(X)$, имамо да је

$$h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f), \mathcal{S}F_n(X)) \geq h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f), \mathcal{S}F_n(Y)) \stackrel{T \text{ [157]}}{=} h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(Y)).$$

Даље, пратећи поменути доказ из [45], у коме конструишемо полуконјугацију са подшифтом, закључујемо да је

$$h_{\text{pol}}(F_n(f), F_n(Y)) \geq n.$$

□

На исти начин поново можемо доказати сличан резултат за генералисану суспензију $\mathcal{S}F_n^m(X)$:

Теорема 163. *Нека је X компактн простор и $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам са бар једном лутајућом тачком x_0 . Ако су скупови $\alpha_f(x_0)$ и $\omega_f(x_0)$ коначни, тада је $h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n^m(f)) \geq n$, за све $n > m \geq 1$.*

Последица 164. *Нека је $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ хомеоморфизам за који је $f \neq \text{Id}$ и $f^2 \neq \text{Id}$. Тада је $h_{\text{pol}}(\mathcal{S}F_n(f)) = h_{\text{pol}}(F_n(f)) = n$, за све $n \geq 2$.*

Доказ. Можемо претпоставити да је f строго растућа и да је $f \neq \text{Id}$ (иначе, посматраћемо f^2 уместо f). Како је у овом случају $\text{Fix}(f) = \text{NW}(f)$, постоји бар једна лутајућа тачка x_0 . Да бисмо доказали последицу потребно је само да прокоментаришемо да су $\alpha_f(x_0)$ и $\omega_f(x_0)$ заправо једночлани скупови, пошто лимеси $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f^n(x_0)$ постоје. □

Приметимо да неће сви хомеоморфизми $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ са бар једном лутајућом тачком $\{x_0\}$ који чувају оријентацију, испунити услов коначности скупова $\alpha_f(x_0)$ и $\omega_f(x_0)$. Ако је ротациони број $\rho(f)$ ирационалан, тада знамо да је универзални ω -гранични скуп или $\mathbb{S}^1$ или Канторов скуп. У потоњем случају, f има лутајућу тачку (види Тврђење 6.8 у [53]), али ω_f није коначан.

За крај овог поглавља, вратимо се још једном на коначност нелутајућег скупа индукованог пресликавања $F_N(f)$. Како су контрапримери које смо поменули (Примери 14 и 15 у [21]) дати на простору који није континуум, остаје питање да ли при претпоставци да је $\text{NW}(f) = \text{Fix}(f) = \{p_1, \dots, p_k\}$ можда ипак важи да је $\text{NW}(F_N(f)) = \text{Fix}(F_N(f)) = \{\{x_1, \dots, x_k\} \mid 1 \leq k \leq N, x_j \in \text{Fix}(f)\}$ ако је f хомеоморфизам на континууму X .

Глава 9

Теме за даља истраживања

У овом поглављу издвојићемо неколико отворених проблема и могућих праваца даљег истраживања који произилазе из резултата ове тезе. Кретаћемо се у оквирима полиномијалне ентропије, индукованих динамичких система на хиперпросторима, али и у ширем контексту одређивања комплексности динамичких система помоћу других инваријанти.

Полиномијална ентропија на хиперпростору $C_n(X)$

Поред хиперпростора које смо дефинисали у поглављу [4](#), постоје још неки хиперпростори са лепим особинама. Један такав је простор $C_n(X)$, који се дефинише као простор компактних скупова у X са највише n компонената повезаности:

$$C_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ има највише } n \text{ компонената повезаности}\}.$$

Можемо се запитати да ли важи да је

$$h_{\text{pol}}(C_n(f), C_n(X)) = nh_{\text{pol}}(C(f), C(X)),$$

као и под којим претпоставкама. Видели смо да је коначност нелутајућег скупа од важности за примену метода које смо користили у поглављу [8](#). Требало би испитати каква је веза између нелутајућег скупа базног пресликавања $f : X \rightarrow X$ и индукованог пресликавања $C_n(f)$ (овде је укључен и случај за $n = 1$ када говоримо о хиперпростору $C(X)$).

Нека је $f : X \rightarrow X$ хомеоморфизам на компактном метричком простору X . Да ли је и под којим претпоставкама $h_{\text{pol}}(C_n(f), C_n(X)) \leq nh_{\text{pol}}(C(f), C(X))$? Нека је $\sigma : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ пресликавање дефинисано са:

$$\sigma(A) = \bigcup_{A \in A} A.$$

Надлер је доказао у [50](#) да је пресликавање σ непрекидно. Такође, приметимо да је $\sigma(F_n(C(X))) = C_n(X)$. Лако се види да следећи дијаграм комутира када је f хомеоморфизам, као и да је σ непрекидна сурјекција.

$$\begin{array}{ccc} F_n(C(X)) & \xrightarrow{F_n(C(f))} & F_n(C(X)) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ C_n(X) & \xrightarrow{C_n(f)} & C_n(X) \end{array}$$

Користећи већ добро познато својство полиномијалне ентропије закључујемо да је $h_{\text{pol}}(C_n(f), C_n(X)) \leq h_{\text{pol}}(F_n(C(f)), F_n(C(X)))$. Да бисмо применили главни резултат из поглавља 8 на простор $C(X)$ и закључили да је $h_{\text{pol}}(F_n(C(f)), F_n(C(X))) = nh_{\text{pol}}(C(f), C(X))$, мора да важи да је $NW(C(f))$ коначан. Под каквим претпоставкама наметнутим на базни динамички систем (f, X) ће ово бити испуњено?

Што се тиче обрнуте неједнакости, могли бисмо да покушамо да имитирамо идеју из Поглавља 8 и да уочимо подскуп (означимо га са G_n) од $C_n(X)$ на ком би се заправо остварила ентропија $nh_{\text{pol}}(C(f), C(X))$. Тада би важило:

$$\begin{aligned} h_{\text{pol}}(C_n(f), C_n(X)) &\geq h_{\text{pol}}(C_n(f), G_n(X)) \\ &= h_{\text{pol}}(C(f) \times \dots \times C(f), C(X) \times \dots \times C(X)) \\ &= nh_{\text{pol}}(C(f), C(X)). \end{aligned}$$

Било би одлично када бисмо могли да дефинишемо G_n тако да је затворен и инваријантан, али то нисмо успели ни у случају простора $F_n(X)$. Једна идеја је да G_n буде простор компактних скупова који имају тачно n компонената повезаности. Такав G_n би био инваријантан, али не и затворен. Зато бисмо морали да користимо Тврђење 74, које има своје претпоставке о броју нелутајућих тачака које се налазе у скупу G_n .

Аморфна комплексност

Као што смо већ видели, једна од мера комплексности за системе чија је тополошка ентропија једнака нули јесте полиномијална ентропија. Ова величина успешно разликује многе нискосложене системе, нарочито оне који имају лутајуће тачке. Међутим и полиномијална ентропија је једнака нули за неке системе чија комплексност долази из рекурентног, а не лутајућег понашања. Да би описали ову врсту комплексности, Фурман, Грогер и Јегер дефинисали су аморфну комплексност у [19]. Уместо да мери полиномијални раст међусобно различитих коначних сегмената орбита, аморфна комплексност пореди орбите према асимптотској учесталости са којом остају раздвојене за унапред задато растојање и мери њихов полиномијални раст не у односу на време, већ у односу на учесталост раздвајања. Због овога је аморфна комплексност прилагођена системима чија је тополошка ентропија једнака нули, али је асимптотско понашање рекурентних орбита и даље богато.

Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ непрекидно. За $\delta > 0$, $\nu \in (0, 1]$, и $x, y \in X$, дефинишемо

$$S_n(f, \delta, x, y) = |\{0 \leq k < n : d(f^k(x), f^k(y)) \geq \delta\}|.$$

Пар тачака (x, y) назива се (f, δ, ν) -раздвојен ако важи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(f, \delta, x, y)}{n} \geq \nu.$$

Са $\text{Sep}(f, \delta, \nu)$ означимо максималну кардиналност (f, δ, ν) -раздвојеног скупа у X . Ако је $\text{Sep}(f, \delta, \nu)$ коначан за све δ и $\nu \in (0, 1]$, кажемо да f има коначне сепарационе бројеве. Грубо говорећи, коначни, али неограничени сепарациони бројеви, говоре у прилог динамици средње сложености. Када се систем понаша хаотично, рецимо у смислу позитивне ентропије, сепарациони бројеви су бесконачни (в. Теорему 1.1 у [19]).

Доња и горња аморфна комплексност дефинишу се на следећи начин:

$$\underline{\text{ac}}(f) = \sup_{\delta > 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\log \text{Sep}(f, \delta, \nu)}{-\log \nu},$$

и

$$\overline{\text{ac}}(f) = \sup_{\delta > 0} \overline{\lim}_{\nu \rightarrow 0} \frac{\log \text{Sep}(f, \delta, \nu)}{-\log \nu}.$$

Ако је $\underline{\text{ac}}(f) = \overline{\text{ac}}(f)$, тада је дефинисана аморфна комплексност пресликавања f , у ознаци $\text{ac}(f)$. За основне особине аморфне комплексности видети Тврђење 1.3 у [19]. У одељку 3.7 у [19] примерима је показано да може важити и $\text{ac}(f) < h_{\text{pol}}(f)$ и $\text{ac}(f) > h_{\text{pol}}(f)$. Дакле, не постоји директна веза између полиномијалне ентропије и аморфне комплексности.

Било би занимљиво израчунати аморфну комплексност индукованих пресликавања на хиперпросторима које смо помињали. Такође, било би од значаја када бисмо показали да за неку класу динамичких система чија је полиномијална ентропија једнака нули, аморфна комплексност даје другачије вредности.

Полиномијална ентропија на инверзним лимесима

Нека су X_i компактни Хаусдорфови простори и $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ непрекидне сурјекције за све $i \in \mathbb{N}$. Нека је

$$X_\infty = \varprojlim (X_i, f_i)_{i=1}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) : f_i(x_{i+1}) = x_i, \text{ за све } i \geq 1\}.$$

Простор X_∞ назива се инверзни лимес пресликавања $\{f_i\}_{i=1}^\infty$, док се $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ називају повезујућа пресликавања. Важи да је X_∞ компактан Хаусдорфов простор.

Ако је $g_i : X_i \rightarrow X_i$ непрекидно и задовољава $g_i \circ f_i = f_i \circ g_{i+1}$, за све $i \in \mathbb{N}$, тада $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ индукује непрекидно пресликавање g_∞ (које се назива индуковано пресликавање) на инверзном лимесу X_∞ на следећи начин:

$$g_\infty(x) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \dots),$$

за сваки $x = (x_1, x_2, \dots) \in X_\infty$.

Специјално, ако су $X_i = X$ и $f_i = g_i = f$, за све $i \geq 1$, тада се простор

$$X_f = \varprojlim (X, f) = \{(x_1, x_2, \dots) : f(x_{i+1}) = x_i, \text{ за све } i \geq 1\}$$

назива инверзни лимес од f и f индукује хомеоморфизам $\hat{f}$ на X_f , који се назива шифт хомеоморфизам. Дефинишимо

$$f_{i,j} = \begin{cases} f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i, & \text{ако је } i = j, \\ f_i \circ f_{i+1} \circ \dots \circ f_j : X_{j+1} \rightarrow X_i, & \text{ако је } i < j. \end{cases}$$

Приметимо да је $g_i^k \circ f_{i,j} = f_{i,j} \circ g_{j+1}^k$, за све $k \geq 0$.

За све $i \in \mathbb{N}$ дефинишимо $\pi_i : X_\infty \rightarrow X_i$, са $\pi_i(x) = x_i$, за све $x = (x_1, x_2, \dots) \in X_\infty$. Пресликавање π_i је отворена непрекидна сурјекција која задовољава

$$g_\infty \circ \pi_i = \pi_i \circ g_\infty,$$

за све $i \in \mathbb{N}$.

Следећа теорема може се наћи у [55], за тополошку ентропију. Доказ се директно преноси на полиномијалну ентропију, као што ћемо видети.

Теорема 165. Нека су X_i компактни Хаусдорфови простори и $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ непрекидне сурјекције за све $i \in \mathbb{N}$. Претпоставимо да су $g_i : X_i \rightarrow X_i$ непрекидна пресликавања за која важи

$$g_i \circ f_i = f_i \circ g_{i+1},$$

за све $i \in \mathbb{N}$. Тада је

$$h_{\text{pol}}(g_\infty) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_{\text{pol}}(g_i).$$

Доказ. Приметимо прво да је $h_{\text{pol}}(g_i) \leq h_{\text{pol}}(g_{i+1})$ и $h_{\text{pol}}(g_\infty) \geq h_{\text{pol}}(g_i)$, јер је $g_i \circ f_i = f_i \circ g_{i+1}$ и $g_\infty \circ \pi_i = \pi_i \circ g_\infty$, за све $i \in \mathbb{N}$. Даље је и $h_{\text{pol}}(g_\infty) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} h_{\text{pol}}(g_i)$. Преостаје да покажемо само другу неједнакост:

$$h_{\text{pol}}(g_\infty) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} h_{\text{pol}}(g_i).$$

Нека је α отворени покривач од X_∞ . Тада постоје $m \in \mathbb{N}$ и $\beta = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$, који покрива X_∞ , где је $V_i = \pi_{j_i}^{-1}(U_{j_i}^i)$, $U_{j_i}^i \subset X_{j_i}$ отворен и сваки V_i је садржан у неком елементу покривача α . Може се показати да је тада $h_{\text{pol}}(g_\infty, \alpha) \leq h_{\text{pol}}(g_\infty, \beta)$. Нека је $n = \max_{1 \leq i \leq m} j_i$ и дефинишимо

$$W_i = \begin{cases} U_{j_i}^i, & \text{ако је } j_i = n, \\ f_{j_i, n-1}^{-1}(U_{j_i}^i), & \text{ако је } j_i < n. \end{cases}$$

Може се проверити да је $\gamma = \{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ покривач од X_n . Како је $f_{i, j-1} \circ \pi_j = \pi_i$, за $i < j$, имамо да је за $j_i < n$,

$$\pi_n^{-1}(W_i) = \pi_n^{-1} f_{j_i, n-1}^{-1}(U_{j_i}^i) = \pi_{j_i}^{-1}(U_{j_i}^i).$$

Одавде следи да је $\pi_n^{-1}(\gamma) = \beta$. Закључујемо да је

$$h_{\text{pol}}(g_\infty, \alpha) \leq h_{\text{pol}}(g_\infty, \beta) = h_{\text{pol}}(g_n, \gamma) \leq h_{\text{pol}}(g_n) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} h_{\text{pol}}(g_i).$$

Следи да је $h_{\text{pol}}(g_\infty) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} h(g_i)$. □

Обично је довољно да узмемо једноставне просторе X_i и повезујућа пресликавања f_i , како бисмо генерисали веома компликоване инверзне лимесе. Било би занимљиво израчунати полиномијалну ентропију неких простора који се добијају као инверзни лимеси.

Полиномијална ентропија на рационалним кривама

У претходном поглављу говорили смо о полиномијалној ентропији хомеоморфизама на регуларним кривама. Међутим, има још лепих питања на које нисмо дали одговор. За почетак, да ли постоје регуларне криве, које нису локални дендрити, а да њихова полиномијална ентропија није једнака ни 0, ни 1?

Кажемо да је X *рационална крива* ако за свако $x \in X$ и сваку отворену околину U од x у X постоји отворена околина V од x у X таква да је $V \subset U$ и граница ∂V је пребројива. Јасно је да је свака регуларна крива и рационална. Да ли важи да је горње ограничење полиномијалне ентропије непрекидних пресликавања на рационалним кривама такође једнако 1?

У раду [20] постављено је питање у вези са доњим ограничењем полиномијалне ентропије непрекидног део-по-део монотоног пресликавања $f : I \rightarrow I$. Наиме, ако, као и пре, са c_n означимо број максималних интервала монотоности n -те итерације f^n , да ли је тачно да је

$$h_{\text{pol}}(f) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c_n}{\log n}?$$

Позитиван одговор добијен је у [22] (в. Теорему 4). Када је $f : I \rightarrow I$ непрекидно део-по-део монотоно пресликавање, а узимајући у обзир да је $\varphi(f, n) \leq c_n$, имамо да је $h_{\text{pol}}(f) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(f, n)}{\log n}$. Да ли је ова оцена тачна и за непрекидна пресликавања на регуларној кривој X ?

Библиографија

- [1] G. Acosta, P. Eslami, and L. Oversteegen. “On open maps between dendrites”. *Houston J. Math* 33(3) (2007), pp. 753–770.
- [2] M. Adamaszek. “Topology and subsets - the story of a theorem”. *arXiv:1011.1236v1* (2010).
- [3] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew. “Topological entropy”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 114 (1965), pp. 309–319.
- [4] D. Arevalo et al. “Dendrites with a closed set of end points”. *Topology Appl.* 115(1) (2001), pp. 1–17.
- [5] R. K. Kim et al. “A study on quadratic curves and generalized eccentricity in polar taxicab geometry”. *Korean J. Math.* 22(3) (2014), pp. 567–581.
- [6] A. Artigue, D. Carrasco-Olivera, and I. Monteverde. “Polynomial entropy and expansivity”. *Acta Math. Hungar.* 152 (2017), pp. 140–149.
- [7] F. Barragán. “On the n -fold symmetric product suspensions of a continuum”. *Topology Appl.* 157 (2010), pp. 597–604.
- [8] F. Barragán, A. Santiago-Santos, and J. F. Tenorio. “Dynamic properties for the induced maps on n -fold symmetric product suspensions”. *Glas. Mat.* 51(2) (2016), pp. 453–474.
- [9] F. Barragán, A. Santiago-Santos, and J. F. Tenorio. “Dynamic properties of the dynamical system $(\mathcal{SF}_n^m(X), \mathcal{SF}_n^m(f))$ ”. *Appl. Gen. Topol.* 21 (2020), pp. 17–34.
- [10] J. Smith Bohorquez Barrera. “On the entropy of the continuum hyperspace map” (2017).
- [11] R. Bowen. “Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 153 (1971), pp. 401–414.
- [12] R. Bowen. “Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 154 (1971), pp. 377–397.
- [13] R. Bowen. “Topological entropy for noncompact sets”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 184 (1973), pp. 125–136.
- [14] J. Brazas. “Constructing arcs from paths using Zorn’s lemma” (2021). URL: [arXiv:2207.07242](https://arxiv.org/abs/2207.07242).
- [15] M. R. Bridson and A. Haefliger. “Metric spaces of non-positive curvature” (1999).
- [16] J. J. Charatonik and W. J. Charatonik. “Dendrites”. *Aportaciones Mat. Comun.* 22 (1998), pp. 227–253.
- [17] E. I. Dinaburg. “The relation between topological entropy and metric entropy”. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 190 (1970), pp. 19–22.

- [18] J. Dugundji. “Topology” (1966).
- [19] G. Fuhrmann, M Gröger, and T. Jäger. “Amorphic complexity”. *Nonlinearity* 29(2) (2016).
- [20] J. Gomes and M. Carneiro. “Polynomial entropy for interval maps and lap number”. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 20 (article number 21) (2021).
- [21] J. L. Gómez-Rueda, A. Illanes, and H. Méndez. “Dynamic properties for the induced maps in the symmetric products”. *Chaos Solit.* 45(9-10) (2012), pp. 1180–1187.
- [22] F. Grycan-Gérard and J. P. Marco. “Polynomial Entropy and Polynomial Torsion for Fibered Systems”. *Regul. Chaotic Dyn* 28, Numbers 4-5 (2023), pp. 613–627.
- [23] L Hauseux and F. Le Roux. “Entropie polynomiale des homéomorphismes de Brouwer”. *Ann. Henri Lebesgue* 2 (2019), pp. 39–57.
- [24] J. Hyonhui, K. Cholsan, and R. Songhun. “Topological entropy of induced circle maps on hyperspaces”. *Topology Appl.* 328 (2023).
- [25] A. Illanes and S. B. Nadler Jr. “Hyperspaces. Fundamentals and recent advances” (1992).
- [26] W. Just and J. Xin. “Limsup is needed in the definitions of topological entropy via spanning or separation numbers”. *Dynamical systems* 35(3) (2020), pp. 430–489.
- [27] J. Katić and M. Perić. “On the polynomial entropy for Morse gradient systems”. *Math. Slovaca* Vol. 69, No. 3 (2019), pp. 611–624.
- [28] H. Kato. “Topological entropy of maps on regular curves”. *Topology Appl.* 154 (2007), pp. 1027–1031.
- [29] P. Kůrka. “Topological and Symbolic Dynamics” (2003).
- [30] D. Kwietniak and P. Oprocha. “Topological entropy and chaos for maps induced on hyperspaces”. *Chaos Solit.* 33 (2007), pp. 76–86.
- [31] C. Labrousse. “Polynomial entropy for the circle homeomorphisms and for C^1 nonvanishing vector fields on $\mathbb{T}^2$ ” (2013). URL: [arXiv:1311.0213](https://arxiv.org/abs/1311.0213).
- [32] J. Mai and E. Shi. “ $\overline{R} = \overline{P}$ for maps of dendrites X with $Card(End(X)) < c$ ”. *International Journal of Bifurcations and Chaos* 19(4) (2009), pp. 1391–1396.
- [33] J. P. Marco. “Dynamical complexity and symplectic integrability”. arXiv:0907.5363. 2009.
- [34] J. P. Marco. “Entropy of billiard maps and a dynamical version of the Birkhoff conjecture”. *J. Geom. Phys.* 124 (2018), pp. 413–420.
- [35] J. P. Marco. “Polynomial entropies and integrable Hamiltonian systems”. *Regul. Chaotic Dyn.* 18(6) (2013), pp. 623–655.
- [36] W. J. Merry. *Dynamical systems*. 2019. URL: <https://www.merry.io/courses/dynamical-systems/>.
- [37] D. Montgomery. “Pointwise periodic homeomorphisms”. *Amer. J. Math.* 59 (1937), pp. 118–120.
- [38] J. Mostovoy. “Lattices in $\mathbb{C}$ and Finite Subsets of a Circle”. *Amer. Math. Monthly* 111, no. 4, 357–360 (2004).

- [39] I. Naghmouchi. “Dynamical properties of monotone dendrite maps”. *Topology Appl.* 159 (2012), pp. 144–149.
- [40] I. Naghmouchi. “Dynamics of homeomorphisms of regular curves”. *Colloq. Math.* 162 (2020), pp. 263–277.
- [41] M. Đorić. “Polynomial entropy on the n -fold symmetric product and its suspension”. *Glas. Mat.* 61(81) (2026), pp. 59–76.
- [42] M. Đorić and J. Katić. “Polynomial entropy of induced homeomorphisms on $C_k(\mathbb{S}^1)$ and $C_k([0, 1])$ ”. arXiv:2509.06037. 2026.
- [43] M. Đorić and J. Katić. “Polynomial entropy of induced maps of circle and interval homeomorphisms”. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 22:103 (2023).
- [44] M. Đorić and J. Katić. “Polynomial entropy on regular curves”. *Appl. Gen. Topol.* 27(2) (2026).
- [45] M. Đorić, J. Katić, and B. Lasković. “On Polynomial Entropy Of Induced Maps On Symmetric Products”. *Acta Math. Hungar.* 171 (2023), pp. 334–347.
- [46] M. Đorić, J. Katić, and M. Perić. “A flexibility result for polynomial entropy of pointwise periodic homeomorphisms”. arXiv:2606.28283. 2026.
- [47] M. Perić. “Polinomijalna entropija za Morsove gradijentne sisteme i logistichko preslikavanje” (2021), pp. 611–624.
- [48] S. Roth, Z. Roth, and L. Snoha. “Rigidity and flexibility of polynomial entropy”. *Adv. Math* 443 (109591) (2024).
- [49] Jr. S. B. Nadler. “Continuum theory. An introduction” (1999).
- [50] Jr. S. B. Nadler. “Hyperspaces of sets. A text with research questions” (1978).
- [51] A. H. Salem, H. Hattab, and T. Rejeiba. “Equicontinuous local dendrite maps”. *Appl. Gen. Topol.* 22 (1) (2021), pp. 67–77.
- [52] G. Seidler. “The topological entropy of homeomorphisms on one-dimensional continua”. *Proc. Amer. Math. Soc.* 108 (1990), pp. 1025–1030.
- [53] G. Turer. “Dynamical systems on the circle” (2019). URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:207991365>.
- [54] G. T. Whyburn. “Analytic topology” (1971).
- [55] X. Ye. “Topological entropy of the induced maps of the inverse limits with bonding maps”. *Topology Appl.* 67 (1995), pp. 113–118.

Биографија аутора

Маша Ђорић је завршила Основну школу „2. октобар” као ђак генерације, а потом Зрењанинску гимназију као носилац Вукове дипломе и других специјалних диплома. Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписала је 2006. године и дипломирала 2010. године са просечном оценом 10. Током студија је више пута награђивана као један од најбољих студената у генерацији. Мастер академске студије, модул Математика, на истом факултету уписала је 2010. године и дипломирала 2011. године одбранивши мастер рад „Регуларизовани трагови оператора”, под менторством проф. др Зорана Каделбурга, са просечном оценом 10. Докторске студије Математичког факултета у Београду, студијски програм Математика, уписала је школске 2011/12 године по старој акредитацији, а затим школске 2019/20 по новој акредитацији. Положила је све испите на докторским студијама са просечном оценом 10.

Маша Ђорић је била запослена на Математичком факултету Универзитета у Београду од 2010. до 2022. године, и то прво као сарадник у настави до 2012. године, а затим као асистент до краја радног односа. Држала је вежбе на 15 курсева. Од 2022. године запослена је на Математичком институту, прво као истраживач приправник, а потом као истраживач сарадник. У Рачунарској гимназији ради као спољни сарадник од 2022. године.

Саопштења

- XII Symposium Mathematics and Applications: „Полиномијална ентропија пресликавања индукованих хомеоморфизмима круга и интервала”, 2022.
- XIII Symposium Mathematics and Applications: „On polynomial entropy of induced maps on symmetric products”, 2023.
- Geometry, Probability and Topology in Application: „Polynomial entropy on the n -fold symmetric product and its suspension”, 2025.
- The 3rd Maribor Workshop on Topological Dynamics, Continuum Theory, and related topics: „Polynomial entropy of induced homeomorphisms on $C(S^1)$ ”, 2026.

Библиографија кандидата

- М. Ђорић, Ј. Катић, Polynomial Entropy of Induced Maps of Circle and Interval Homeomorphisms, Qualitative Theory of Dynamical Systems 22, 103, 2023.
- М. Ђорић, Ј. Катић, В. Ласковић, On Polynomial Entropy Of Induced Maps On Symmetric Products. Acta Mathematica Hungarica 171, 334–347, 2023.
- М. Ђорић, Polynomial entropy on the n -fold symmetric product and its suspension, Glasnik matematički, 61(81), 59-76, 2026.
- М. Ђорић, Ј. Катић, Polynomial entropy on regular curves, Applied General Topology 27(2), 2026.

Радови на рецензији

- М. Ђорић, Ј. Катић, Polynomial entropy of induced homeomorphisms on $C_k(\mathbb{S}^1)$ and $C_k([0, 1])$
- М. Ђорић, Ј. Катић, М. Перич, A flexibility result for polynomial entropy of pointwise periodic homeomorphisms

Разно

Маша Ђорић је била секретар часописа Математички весник од 2013. до 2015. године. Аутор је уџбеника са збирком задатака Анализа 3, са Ј. Катић, за студенте информатике Математичког факултета. Држала је научно популарна предавања на манифестацији Мај месец математике више пута. Два пута је држала предавање на Државном семинару за наставнике математике у организацији Друштва математичара Србије („Геометријске трансформације у служби конструкција” и „Нове идеје за рад са графицима функција у средњошколској настави математике”). Похађала је седмодневну школу Stockholm Master Class in Dynamical Systems, у мају 2025. године у Стокхолму.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а МАША ЂОРИЋ
број индекса 2016/2019

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ПОЛИНОМИЈАЛНА ЕНТРОПИЈА ИНДУКОВАНИХ
ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА НА ХИПЕРПРОСТОРИМА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 28.9.2026.

Маша Ђорић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора МАША ЂОРИЋ
Број индекса 2016/2019
Студијски програм МАТЕМАТИКА
Наслов рада ПОЛИНОМИЈАЛНА ЕНТЕРПИЈА ИНДУКОВАНИХ ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА НА ХИПЕРПРОСТОРУ
Ментор ДР ЈЕЛЕНА КАТИЋ

Потписани/а МАША ЂОРИЋ

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 28.9.2026.

Маша Ђорић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ПОЛИНОМИЈАЛНА ЕНТРОПИЈА ИНДУКОВАНИХ ДИНАМИЧКИХ
СИСТЕМА НА ХИПЕРПРОСТОРИМА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

- ☒ 1. Ауторство
- ☐ 2. Ауторство - некомерцијално
- ☐ 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
- ☐ 4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
- ☐ 5. Ауторство – без прераде
- ☐ 6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

у Београду, 28.9.2026.

Mara Đonić

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.