

Наставно научно већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На 425. седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, одржаној 26. септембра 2025. године именовани смо у комисију за оцену докторске дисертације

„Заједнички спектрални радијус Шур - Адамаровог производа
скупа матрица и Шур - Адамарови множиоци,
са применама на деривационе норма неједнакости за операторе”

кандидата Катарине Богдановић. Ментори ове докторске дисертације су др Данко Јодић, редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду и др Аљоша Пеперко, ванредни професор Универзитета у Љубљани.

Комисија је прегледала приложени текст и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидата

Име и презиме: Катарина Богдановић

Датум и место рођења: 26. 02. 1977., Београд

e-адреса: katarinabgd77@gmail.com

Образовање:

Основне студије (1996. - 2017.): Математички факултет, Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, просек 9,81 (од 10).

Докторске студије (од 2017 - данас): Математички факултет, Универзитета у Београду, студијски програм Математика, модул Теоријска математика и примене.

Током докторских студија положила је све испите: Спектрална теорија, Компактни и несамоадјунговани оператори, Комплексна анализа 2, Матрична анализа, Алгебре оператора, Функционална анализа, Интерполација линеарних оператора и Специјални курс - Елементарни оператори. Током докторских студија имала је 3 истраживачке посете Словенији, у 2021., 2022., и 2023. години, у програму међународне размене (7 месеци укупно). Тиме је награђена са додатних 25 ЕСПБ бодова ин 2021. и 10 ЕСПБ бодова у 2022. години. Током посета Словенији, одржала је два предавања на Семинару за алгебру и функционалну анализу у Љубљани.

Радно искуство:

Математички факултет, демонстратор (од 03.2018.-09.2018.) на четири математичка курса на астрофизици и (10.2022.- 02.2023.) на курсевима Математика 3Б (физика), Математика 3Ц (физика), Елементарна математика (математика)

2. Прихваћени и објављени радови кандидата

- (1) K. Bogdanović, A. Peperko, *Hadamard weighted geometric mean inequalities for the spectral and essential spectral radius of positive operators on Banach function and sequence spaces*, Positivity 26:25 (2022).
available at: <https://doi.org/10.1007/s11117-022-00891-4> ISSN: 1385-1292 (Print), 1572-9281 (Online), IF 2022: 1.0 M21
- (2) Katarina Bogdanović, Aljoša Peperko, *Inequalities and equalities on the joint and generalized spectral and essential spectral radius of the Hadamard geometric mean of bounded sets of positive kernel operators*, Linear and Multilinear Algebra 71 (2023), 1385-2857, ISSN: 0308-1087 (Print), 1563-5139 (Online), IF 2022: 1.1 M21
available at: <https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2121369>
- (3) Katarina Bogdanović, *A class of norm inequalities for operator monotone functions and hyponormal operators*, Complex Anal. Oper. Theory 12 (2024), 18-32.
ISSN: 1661-8251 (Print), 1661-8262 (Electronic), IF 2022: 0.8 M22
available at: <https://doi.org/10.1007/s11785-023-01472-3>
- (4) K. Bogdanović, A. Peperko, *Monotonicity properties of weighted geometric symmetrizations*, Journal of Mathematical Inequalities 18 (2024), 1535-1546.
available at: [dx.doi.org/10.7153/jmi-2024-18-87](https://doi.org/10.7153/jmi-2024-18-87)
- (5) K. Bogdanović, *Inequalities on the generalized and the joint spectral radius of Hadamard products*, (2023)
preprint, available at: <https://arxiv.org/abs/2311.02444>

3. Предмет докторске дисертације

Познато је да Schur-Hadamard-ов производ о матрица и општије интегралних оператора (оператора са интегралним језгром) има важну улогу у теорији оператора и матричној анализи, на пример у теорији операторних средина, Schur-ових множења и другде. Као што је примећено у [17]

(у цитираној литератури тезе), примена Schur-Hadamard-овог производа омогућава заједничку и моћну технику истраживања општих матричних (и/или операторних) и норма неједнакости, нарочито пертурбационих неједнакости и неједнакости везаних за процене матричних (и/или операторних) комутатора.

Примера ради, нека су дате $n \times n$ комплексне матрице H, K и X такве да су H и K позитивне (позитивно дефинитне), дијагонализоване са $H = U \operatorname{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n) U^*$ и $K = V \operatorname{diag}(t_1, t_2, \dots, t_n) V^*$. Датој скаларној средини $M(s, t)$ (за $s, t \geq 0$) може се придружити матрична средина $M(H, K)X$ изразом

$$M(H, K)X \stackrel{\text{def}}{=} U([M(s_i, t_j)] \circ (U^* X V)) V^*.$$

За скаларну средину $M(s, t)$ облика $\sum_{i=1}^n f_i(s)g_i(t)$ може се разматрати елементарни трансформер $M(H, K)X = \sum_{i=1}^n f_i(H)Xg_i(K)$, при чему је последњи израз добро дефинисан за ограничене операторе H, K, X , где су H и K позитивни (позитивно дефинитни). Међутим, за дефиницију сложенијих матричних средина (као што су интерполационе и биномијалне средине) коришћење Schur-Hadamard-ових производа (или томе сродних метода) изгледа неизбежно.

Нека је $\mathcal{H}$ сепарабилан, комплексан Hilbert-ов простор и нека су редом $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ простори свих ограничених и свих компактных оператора на $\mathcal{H}$. Свака симетрично нормирајућа (с.н.) функција Φ , дефинисана на низовима комплексних бројева, индукује једну симетричну или унитарно инваријантну (у.и.) норму $\|\cdot\|_\Phi$ на придруженом операторном идеалу $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Најважнији примери с.н. функција су максимална с.н. функција ℓ , дата са $\ell((\lambda_n)_{n=1}^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|$ и минимална с.н. функција ℓ^∞ , дата са $\ell^\infty((\lambda_n)_{n=1}^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|$. За с.н. функцију Φ , њој адјунгована с.н. функција биће означена са Φ^* . За свако $p > 0$ с.н. функција Φ се може p модификовати са $\Phi^{(p)}((\lambda_n)_{n=1}^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi((|\lambda_n|^p)_{n=1}^\infty)^{1/p}$, што представља нову с.н. функцију у случају када је $p \geq 1$. Schatten-von Neumann-ови идеали $\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_{\ell^{(p)}}(\mathcal{H})$ представљају основне примере симетрично нормираних идеала са p модификованим нормама. За $p \geq 2$, све норме $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ су познате као и Q норме, док у њима дуалне норме $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)*}}$ познате као Q^* норме.

Елементарни оператори, тј. пресликавања облика $\sum_{n=1}^N A_n \otimes B_n: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}): X \mapsto \sum_{n=1}^N A_n X B_n$, као и трансформације типа унутрашњег производа $\int_\Omega A_t \otimes B_t d\mu(t): \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}): X \mapsto \int_\Omega A_t X B_t d\mu(t)$, где су A_n, B_n, A_t, B_t, X ограничени оператори на Hilbert-овом простору $\mathcal{H}$, представљају трансформере (тј. линеарне трансформације) на простору $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограничених линеарних оператора на $\mathcal{H}$, а важне су и њихове рестрикције на различитим идеалима компактных оператора генерисаних унитарно инваријантним нормама.

Најистраженија класа трансформера типа унутрашњег производа су они дефинисани преко (Стилтјесових) двојних операторних интеграла (ДОИ), који су уведени од стране Бирмана, Соломјака и њихових бројних следбеника. Значајан допринос у примени и развоју теорије двојних операторних интеграла дали су Пелер и Ротфелд, углавном мотивисани и

под утицајем Далецког и Крејна на формули за диференцирање оператор вредносних функција. Наиме, познат резултат који је дао Пелер даје потребне и довољне услове за ДОИ, како би они представљали ограничен трансформер на сваком $\mathcal{C}_F(\mathcal{H})$, омогућавајући репрезентацију ДОИ трансформера као (такозваних нормалних) трансформера типа унутрашњег производа $\int_{\Omega} A_t \otimes B_t d\mu(t)$, где су обе фамилије $\{A_t\}_{t \in \Omega}$ и $\{B_t\}_{t \in \Omega}$ јако квадратно интегралне на Ω и састоје се од међусобно комутирајућих нормалних оператора. То показује да трансформери типа унутрашњег производа представљају природно проширење (и уопштење) класе трансформера дефинисаних помоћу двојних операторних интеграла и на случај када оператори у фамилијама $\{A_t\}_{t \in \Omega}$ и $\{B_t\}_{t \in \Omega}$ не морају нужно да буду ни самоадјунговани, нити да међусобно комутирају.

Са друге стране, различите варијанте Cauchy-Schwarz-ових норма неједнакости представљају за сада основни алат за одређивање ограничености тих трансформера на различитим класама операторних идеала. Теорија двојних операторних интеграла и њима одговарајућих трансформера има бројне примене у теорији пертурбације и деривације за самоадјунговане и унитарне операторе, операторне средине, операторне норма неједнакости и спектралну функцију помака. Полазећи од постојећих Cauchy-Schwarz-ових неједнакости за елементарне операторе и трансформере типа унутрашњег производа генерално, разматраће се и њихове додатне варијанте, омогућене додатним условима комутативности и нормалности фамилија $\{A_n\}_n, \{B_n\}_n, \{A_t\}_{t \in \Omega}$ и $\{B_t\}_{t \in \Omega}$, као и величинином степена p модификације унитарно инваријантне норме. Такође ће бити испитана и могућност примене ових неједнакости на неке проблеме у теорији оператора.

Други део дисертације бави се спектралним радијусом Schur-Hadamard-овог производа $\circ$ матрица са ненегативним матричним координатама и теоријом спектралног радијуса ограниченог скупа оператора на комплексном Banach-овом функцијском простору L .

За спектрални радијус $\rho(A \circ B)$ Schur-Hadamard-овог производа $A \circ B$ две $n \times n$ матрице са ненегативним матричним координатама. Zhang је изнео претпоставку да важи неједнакост

$$(1) \quad \rho(A \circ B) \leq \rho(AB),$$

где AB означава уобичајени производ матрица A и B . Ову претпоставку је потврдио by K.M.R. Audenaert, доказавши да важи

$$(2) \quad \rho(A \circ B) \leq \rho((A \circ A)(B \circ B))^{\frac{1}{2}} \leq \rho(AB).$$

Ове неједнакости доказане су користећи опис спектралног радијуса у терминима матричног трага. Убрзо, сама неједнакост (1) је поново доказана, уопштена и профињена на различите начине од стране више аутора. Користећи чињеницу да Schur-Hadamard-ов производ представља главну подматрицу Kronecker-овог (тензорског) производа, R.A. Horn и F. Zhang доказали су неједнакости

$$(3) \quad \rho(A \circ B) \leq \rho(AB \circ BA)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(AB).$$

Даље, Z. Zhang је показао да важи

$$(4) \quad \rho(A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_m) \leq \rho(A_1 A_2 \dots A_m)$$

за $n \times n$ ненегативне матрице $A_1, A_2, \dots, A_m$. A.R. Schep је први који је уочио да су резултати R. Drgovška и А. Перетко примењиви на ову проблематику, проширивши претходне неједнакости на ненегативне матрице које дефинишу ограничене операторе на просторима низова (пре свега на ℓ^p просторе за $1 \leq p < +\infty$) а доказао је и да важи

$$(5) \quad \rho(A \circ B) \leq \rho((A \circ A)(B \circ B))^{\frac{1}{2}} \leq \rho(AB \circ AB)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(AB).$$

А. Перетко је проширио неједнакост (4) на ненегативне матрице које дефинишу ограничене операторе на Банаш-овим просторима низова и доказао је да важе неједнакости

$$\begin{aligned} \rho(A \circ B) &\leq \rho((A \circ A)(B \circ B))^{\frac{1}{2}} \leq \rho(AB \circ AB)^{\frac{\beta}{2}} \rho(BA \circ BA)^{\frac{1-\beta}{2}} \leq \rho(AB), \\ \rho(A \circ B) &\leq \rho(AB \circ BA)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(AB \circ AB)^{\frac{\beta}{2}} \rho(BA \circ BA)^{\frac{1-\beta}{2}} \leq \rho(AB), \end{aligned}$$

за све $\beta \in [0, 1]$. Штавише, те неједнакости је даље уопштио на уопштене и заједничке спектралне радијусе ограничених скупова таквих ненегативних матрица.

A.R. Schep је доказао да неједнакост

$$\rho\left(A^{(\frac{1}{2})} \circ B^{(\frac{1}{2})}\right) \leq \rho(AB)^{\frac{1}{2}}$$

важи за позитивне интегралне операторе на L_p просторима. Овде $A^{(\frac{1}{2})} \circ B^{(\frac{1}{2})}$ означава Schur-Hadamard-ову геометријску средину оператора A и B . R. Drgovšek и А. Перетко су уопштили ову неједнакост, показавши да важи

$$(6) \quad \rho\left(A_1^{(\frac{1}{m})} \circ A_2^{(\frac{1}{m})} \circ \dots \circ A_m^{(\frac{1}{m})}\right) \leq \rho(A_1 A_2 \dots A_m)^{\frac{1}{m}}$$

за све операторе са позитивним језгром $A_1, \dots, A_m$ на произвољном Банаш-овом функцијском простору L . Даље, А. Перетко је профинио неједнакост (6), показавши да важе неједнакости

$$(7) \quad \rho\left(A_1^{(\frac{1}{m})} \circ A_2^{(\frac{1}{m})} \circ \dots \circ A_m^{(\frac{1}{m})}\right) \leq \rho\left(P_1^{(\frac{1}{m})} \circ P_2^{(\frac{1}{m})} \circ \dots \circ P_m^{(\frac{1}{m})}\right)^{\frac{1}{m}} \leq \rho(A_1 A_2 \dots A_m)^{\frac{1}{m}},$$

где је $P_j \stackrel{\text{def}}{=} A_j \dots A_m A_1 \dots A_{j-1}$ за $j = 1, \dots, m$. А. Перетко је такође показао да (7) важи и за есенцијалне радијусе ρ_{ess} под додатном претпоставком да L и његов Банаш-ов дуал L^* имају норме непрекидне у односу на поредак. Формално, овде је $A_{j-1} = I$ за $j = 1$ (чак иако јединични оператор I не мора бити добро дефинисан као интегрални оператор са језгром). Такође, важи и следећа верзија (3) за интегралне операторе са језгром

$$(8) \quad \rho\left(A^{(\frac{1}{2})} \circ B^{(\frac{1}{2})}\right) \leq \rho\left((AB)^{(\frac{1}{2})} \circ (BA)^{(\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(AB)^{\frac{1}{2}}.$$

Разна проширења, уопштења и профињења претходних резултата могу се наћи у тези, као и у цитираној литератури тезе.

4. Приказ дисертације

Дисертација се састоји од $x + 76$ страна, подељених у три главе, након којих је наведена библиографија која се састоји од 46 библиографских јединица.

Прво поглавље дисертације посвећено је основним објектима и дефиницијама из теорије Schur - Hadamard-ових производа. Такође, изложене су неједнакости за геометријске средине Schur - Hadamard-ових производа, као и неједнакости за заједнички и уопштени спектрални радијус.

Друго поглавље дисертације почиње са увођењем геометријске симетризације позитивног интегралног оператора, заједно са пратећим неједнакостима. Специјално, представљене су неједнакости у операторској норми, спектралном радијусу, есенцијалном спектралном радијусу, нумеричком радијусу и Хаусдорфовој мери некомпактности. У поглављу се даље разматрају тежинске неједнакости за Schur-Hadamard -ову геометријску средину за позитивне интегралне операторе, са акцентом на оригиналне резултате кандидата. Најзад, последњи део поглавља се односи на неједнакости за заједнички и уопштени спектрални радијус.

Трећа глава дисертације разматра деривационе норма неједнакости за операторе на Hilbert - овом простору. Почиње прегледом основних појмова потребних за даље резултате, посебно са разним Cauchy-Schwarz - овим норма неједнакостима. У другом делу, примењујући теорију оператор-монотоних функција и уз примену наведених Cauchy-Schwarz - ових неједнакости, кандидат изводи неколико оригиналних деривационих неједнакости.

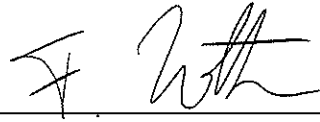
5. Закључак и предлог комисије

Резултати кандидата Катарине Богданић који су представљени у дисертацији су оригинални и нетривијални и представљају значајан допринос областима Линеарне алгебре и Теорије оператора.

Приказани резултати су објављени у четири часописа са SCI листе, а неки од њих су приказани и на конференцији "Математика и Примене" одржаној у Београду 2024. године.

Због свега наведеног у претходном извештају, предлагемо наставно-научном већу Математичког факултета, Универзитета у Београду да прихвати приложени текст Заједнички спектрални радијус Шур - Адамаровог производа скупа матрица и Шур - Адамарови множиоци, са применама на деривационе норма неједнакости за операторе" кандидата Катарине Богданић као докторску дисертацију и одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 9. новембар 2025.



dr Fabian Wirth, full professor
Faculty of Computer Science and Mathematics, University of Passau, Germany

Roman Drnovšek

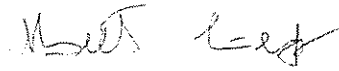
Digitally signed by Roman
Drnovšek
Date: 2025.11.03 16:18:52 +01'00'

dr Roman Drnovšek, full professor
Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana,

Dragan Đorđević

Digitally signed by Dragan
Đorđević
Date: 2025.11.07 12:20:01 +01'00'

др Драган Ђорђевић, редовни професор
Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу,



др Стефан Милошевић, доцент
Математички факултет, Универзитет у Београду