

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Бр. 606/8-24
25. 03. 2025. год.
Београд, Студентски трг 16
Тел. 20 27 801, ФАКС: 26 30 151

На 421. седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, одржаној 7. фебруара 2025. године, одређени смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације

**Релација јаке BJ ортогоналности на C^* -алгебрама,
и оцене дужине њеног графа**

кандидата Срђана Стефановића. Ментор ове докторске дисертације је проф. др Драгољуб Кечкић, редовни професор Математичког факултета.

Комисија је прегледала приложени текст и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија кандидата

Лични подаци

Име и презиме: Срђан (Драган) Стефановић
Место и датум рођења: Шабац, 21.6.1994.
Звање: мастер математичар
Електронска адреса: srdjan.stefanovic@matf.bg.ac.rs

Образовање

Срђан Стефановић је завршио ОШ „Николај Велимировић” и Шабачку гимназију у Шапцу као ученик генерације, освојивши неколико награда на државним и међународним такмичењима из математике. Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписао је 2013. године и дипломирао 2017. године са просечном оценом 9,98. Мастер академске студије, модул Математика, на истом факултету уписао је 2017. године и дипломирао 2018. године одбравивши мастер рад „Хармонијска анализа на локално компактним Абе-ловим групама”, под менторством проф. др Драгољуба Кечкића, 29.9.2018. године, са просечном оценом 10. Награђен је од стране Математичког института САНУ за најбољи мастер рад у области математике. Докторске студије на Катедри за математичку анализу Математичког факултета у Београду уписао је школске 2018/19. године. Положио је све испите на докторским студијама са оценом 10 и то: Функционална анализа, К-теорија, Алгебре оператора, Анализа 4, Хармонијска анализа 2, Хомолошке методе у алгебри, Хардијеви и Бергманови простори и Специјални курс. У току школске 2023/24. године је у периоду од априла до јула боравио на Универзитету Приморска у Копру у Словенији, у оквиру Erasmus+ размене студената.

Радно искуство

Срђан Стефановић је запослен на Математичком факултету Универзитета у Београду од 2018. године (претходно је у школској 2017/2018. години радио као сарадник у пастави на Електротехничком факултету у Београду), и то прву школску годину као сарадник у пастави, а затим као асистент од 2019. године до данас. Држао је вежбе на курсевима Анализа 1, Анализа 2, Теорија мере и интеграције и Одабрана поглавља анализе. У току другог полугодишта 2023/2024. године био је запослен у Математичкој гимназији у Београду као спољни сарадник.

Учешће на конференцијама и пројектима

- The 27th International Conference in Operator Theory, Timisoara, Romania, 2018
- Young Mathematicians in C^* -Algebras, Copenhagen, Denmark, 2019
- XI Симпозијум Математика и примене, Београд, 2021.
Предавање: Isolated points of Birkhoff-James orthograph in C^* -algebras
- Конгрес младих математичара, Нови Сад, 2022.
Предавање: Isolated points of Birkhoff-James orthograph in C^* -algebras
- 7. састанак Семинара за анализу и алгебру Алпе-Јадран, Загреб, 2024.

Био је члан пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, „Топологија, геометрија и глобална анализа на многострукостима и дискретним структурама” под бројем 174034, од 2018. године.

Друге академске активности

Има објављену збирку задатака Теорија мере и интеграције (коаутор др Александра Марићковић), ISBN 978-86-7589-181-9.

Коаутор збирке 1100 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 2015 – 2024. године, ISBN 978-86-6447-032-2.

Активно је у претходне три године учествовао у припремној настави за упис на Математички факултет.

Активан је члан Друштва математичара Србије од 2017. године. Члан је државне комисије за математичка такмичења ученика основних школа. Од 2022. године је заменик лидера екипе Србије на Јуниорској балканској математичкој олимпијади.

2 Списак научних радова

1. D.J. Kečkić, S. Stefanović, Isolated vertices and diameter of the BJ-orthograph in C^* -algebras, J. Math. Anal. Appl. 528-1 (2023), 127476. (M21, IF2021: 1.417)
2. S. Stefanović, Diameter of the BJ-orthograph in finite-dimensional C^* -algebras, Linear and Multilinear Algebra, 73-4 (2025), 718-728, (M22, IF2022: 1.1)
3. B. Kuzma, S. Stefanović, Isomorphisms of Birkhoff-James orthogonality on finite-dimensional C^* -algebra, <https://arxiv.org/abs/2502.07913>, 26 страница, на рецензији

3 Предмет дисертације

Предмет дисертације је релација јаке BJ ортогоналности на C^* -алгебрама и њена својства, пре свега, својства њеног графа. Детаљније, реч је о следећем:

Ортогоналност у смислу Бирхофа, односно Џејмса, скраћено BJ ортогоналност, може се дефинисати на произвољном Банаховом простору. Кажемо да је вектор x ортогоналан на y ако за све комплексне бројеве λ важи релација

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|,$$

и означавамо $x \perp_{BJ} y$, односно само $x \perp y$, ако нема опасности од забуне. Уколико у датом Банаховом простору важи релација паралелограма, тј. ако норма проистиче из неког скаларног производа, онда је $x \perp y$ еквивалентно са $\langle x, y \rangle = 0$, па је реч о природном уопштењу. Међутим, BJ ортогоналност, у општем случају, није симетрична релација.

C^* -алгебра је Банахов простор $\mathcal{A}$ у коме још постоји операција множења вектора $(x, y) \mapsto xy$, као и инволуција $x \mapsto x^*$ тако да је $\mathcal{A}$ прстен у односу на множење, где важи $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, као и следећа својства инволуције

- $(x^*)^* = x$;
- $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda}x^* + \bar{\mu}y^*$;
- $(xy)^* = y^*x^*$;
- $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Основни примери C^* -алгебри су:

- 1) Алгебра непрекидних функција на компакту $C(K)$, са инволуцијом $f(x) \mapsto \overline{f(x)}$;
- 2) Алгебра свих ограничених оператора на неком Хилбертовом простору, са инволуцијом датом помоћу адјунговања.

Свака C^* -алгебра је Банахов простор, па се на њој може дефинисати релација BJ ортогоналности. С обзиром на присуство множења, могуће је дефинисати, тзв. јаку BJ ортогоналност. За $a, b \in \mathcal{A}$ кажемо да је a јако BJ ортогонално на b , и пишемо $a \perp_{BJ}^s b$, ако за све $c \in \mathcal{A}$ важи

$$\|a + bc\| \geq \|a\|.$$

Како ни ова релација не мора бити симетрична, има смисла увести узајамну јаку BJ ортогоналност као $a \perp_{BJ}^s b$ ако и само ако $a \perp_{BJ}^s b$ и $b \perp_{BJ}^s a$. Уколико не постоји опасност од забуне, писаћемо само $a \perp b$.

У дисертацији се постављају питања: да ли граф те релације има изолованих тачака и колико је максимално растојање између два чвора графа у истој компоненти повезаности, односно, ако се два елемента алгебре могу повезати низом елемената таквих да су свака два суседна у релацији $\perp$, са колико се најмање грана то може урадити.

Та питања су раније делимично решена. Описан је граф релације $\perp$ у матричним алгебрама $M_n(\mathbb{C})$, алгебри свих ограничених оператора $B(H)$ на Хилбертовом простору, као и алгебри непрекидних функција.

Циљ докторске дисертације је постизање опште оцене дужине графа релације $\perp$ на произвољној C^* -алгебри A , као и тачно одређивање дужине графа на свим коначно димензионалним C^* -алгебрама.

У истраживању се полази од хипотезе да је могуће одредити апсолутну оцenu дужине графа релације $\perp$, која ће важити за све C^* -алгебре, осим, евентуално, за оне које имају малу димензију. Претпоставља се и да апсолутна оцена није већа од максималне дужине графа матричних алгебри, а то је број 4. Такође, претпоставља се да ће се добити тачна оцена дужине графа за све коначно димензионалне алгебре, као и да ће у случају када је један од сумаида у пима $M_2(\mathbb{C})$, бити потребно посебно разматрање.

У дисертацији се најпре описују изоловани чворови графа релације $\perp$ на произвољној C^* -алгебри и тиме се даје одговор на пека. до сада, отворена питања.

Затим, доказује се да дијаметар графа релације $\perp$ на произвољној C^* -алгебри, која није изоморфна са $M_1(\mathbb{C})$, $M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$ или $M_2(\mathbb{C})$, није већи од 4.

Најзад, потпуно се одређује дијаметар графа релације $\perp$ на произвољној коначно димензионалној C^* -алгебри.

4 Приказ дисертације

Број страна дисертације је $x + 141$. Састоји се од шест глава и на крају је наведена литература од 86 библиографских јединица.

Прва глава је уводног карактера и у њој је изложена теорија C^* -алгебри, фон Нойманових алгебри, као и Хилбертових C^* -модула.

У другој глави приказана је дефиниција, као и особине BJ ортогоналности на Бауховим просторима, посебно на C^* -алгебрама. Такође, представљена је дефиниција, као и особине јаке BJ ортогоналности. На крају (као један од оригиналних резултата дисертације) приказана је редуција ове релације на позитивне елементе C^* -алгебре и независност релације од амбијенталне алгебре. Наиме, за C^* -алгебре $A \subset B$ и елементе $a, b \in A$ доказано је да важи: $a \perp_{BJ}^s b$ у A ако и само ако $a \perp_{BJ}^s b$ у B . Такође, доказано је да важи: $a \perp_{BJ}^s b$ ако и само ако $|a^*| \perp_{BJ}^s |b^*|$.

У трећој глави представљена је релација узајамне јаке BJ ортогоналности на C^* -алгебрама. Посебно, приказан је дијаметар графа те релације на C^* -алгебри $B(H)$ свих ограничених оператора на Хилбертовом простору H , као и на класи комутативних (униталних и неуниталних) C^* -алгебри.

Четврта и пета глава садрже оригиналне резултате дисертације.

У четвртој глави дат је потпуни опис изолованих чворова графа релације $\perp$ на произвољној C^* -алгебри A . Наиме, доказано је да је елемент $a \in A$ изолован чвор графа релације $\perp$ ако и само ако је a апроксимативно десно инвертибилан елемент. Такође, дат је доказ да дијаметар графа релације $\perp$ на произвољној C^* -алгебри A , која није изоморфна са $M_1(\mathbb{C})$, $M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$ или $M_2(\mathbb{C})$, није већи од 4. Детаљније, за елементе $a, b \in A$ који пишу апроксимативно десно инвертибилни, постоје $c_1, c_2, c_3 \in A$ тако да важи $a \perp c_1 \perp c_2 \perp c_3 \perp b$.

У петој глави тачно је одређен дијаметар графа релације $\perp$ на свакој коначно димензионалној C^* -алгебри $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$, $k \geq 2$. Детаљније, доказано је да важи:

- 1) $\text{diam}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = 1$;
- 2) $\text{diam}(\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})) = 4$;
- 3) $\text{diam}(A) = 3$ у свим осталим случајевима.

У шестој глави кандидат наводи даље правце истраживања који би могли да доведу до нових резултата, значајних за даљи развој области којом се дисертација бави.

5 Закључак и предлог комисије

Резултати кандидата Срђана Стефановића који су приказани у дисертацији су оригинални и нетривијални и представљају значајан допринос у истраживању ортогоналности на C^* -алгебрама. Њихово извођење захтевало је употребу различитих математичких метода, почев од метода линеарне алгебре, опште и некомутативне топологије, теорије репрезентација, геометрије Балахових простора, као и примену некомутативне варијанте Урисонове леме. Из тезе су, за сада, објављена два рада на SCI листи, од којих је један самостални, а други коауторски са ментором дисертације. Резултати су представљени кроз излагања на две научне конференције.

Докторска дисертација је урађена према одобреној пријави и представља оригинално и самостално научно дело, па констатујемо да су се стекли услови за њену јавну одбрану. Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст као докторску дисертацију кандидата Срђана Стефановића и одреди комисију за јавну одбрану.

У Београду, 24.3.2025. године

Чланови комисије:

др Биљана Вујошевић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Златко Лазовић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Бојан Кузма, редовни професор,
Универзитет Приморска у Копру, Словенија