

Одлуком Изборног већа Математичког факултета у Београду, донетом на 127. седници одржаној 7. новембра 2025. године, именовани смо у комисију за писање извештаја о кандидатима који учествују на конкурс за избор у звање и на радно место *редовног професора* за ужу научну област *Алгебра и математичка логика* на неодређено време са пуним радним временом. На конкурс, објављен 26. новембра 2025. године у листу „Послови” број 1173, пријавио се само један кандидат – др Горан Ђанковић. Комисија, на основу приложене документације, подноси Изборном већу Математичког факултета следећи извештај о кандидату др Горану Ђанковићу.

ИЗВЕШТАЈ – др Горан Ђанковић

I. Кратка биографија кандидата

Др Горан Ђанковић је рођен 9. фебруара 1979. године у Зрењанину. Дипломирао је 2002. на Математичком факултету у Београду, на смеру Теоријска математика и примене, а докторирао 2010. на Универзитету Rutgers, The State University of New Jersey, САД.

Област научног рада др Горана Ђанковића је теорија бројева (алгебра и математичка логика) и, посебно, теорија L -функција, теорија аутоморфних форми, аритметички квантни хаос и пробабилистичка теорија бројева.

За доцента на Математичком факултету у Београду је изабран 2012. године, а реизабран у исто звање 10. 4. 2017. Изабран је у звање ванредног професора 26. 11. 2018, а реизабран у исто звање 28. 9. 2023.

I.1 Образовање

Докторат из теорије бројева: септембар 2004 – мај 2010.

On large families of automorphic L -functions on GL_2 , Rutgers, The State University of New Jersey, New Brunswick, USA, ментор: Henryk Iwaniec.

Основне студије: септембар 1998 – мај 2002, Математички факултет Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене; дипломирао са просечном оценом 9.96.

II Избори у звања на Математичком факултету

- 2002/2003, асистент приправник

- 2003/2004, асистент
- 2010/2011, асистент
- 2012- доцент
- 2017- реизбор у звање доцента
- 2018- ванредни професор
- 2023- реизбор у звање ванредног професора

III Научни радови на SCI листи после првог избора у звање ванредног професора

1. G. Đanković, R. Khan, *On the Random Wave Conjecture for Eisenstein series*, International Mathematics Research Notices, rny266, Volume 2020, Issue 23, November 2020, Pages 9694-9716, ISSN: 1073-7928 (SCI Mathematics, **M21**, IF(2020) 1.600)
2. G. Đanković, *The least common multiple of random sets in polynomial rings over finite fields*, The Ramanujan Journal, 55, pages 13 - 23 (2021), ISSN 1382-4090 (SCI Mathematics, **M22**, IF(2019) 0.790)
3. G. Đanković, D. Đokić, N. Lelas, *The triple reciprocity law for the twisted second moments of Dirichlet L-functions over function fields*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 149, Number 7, July 2021, Pages 2851-2860, ISSN 0002-9939 (SCI Mathematics, **M22**, IF(2021) 0.971)
4. G. Đanković, D. Đokić, *The mixed second moment of quadratic Dirichlet L-functions over function fields*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 51(6): 2003-2017, (December 2021), ISSN 0035-7596 (SCI Mathematics, **M22**, IF(2021) 0.813)
5. G. Đanković, D. Đokić, *The sixth power moment of Dirichlet L-functions over rational function fields*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 514, Issue 1, October 2022, Paper No. 126296, 42 pp., ISSN 0022-247X (SCI Mathematics, **M21**, IF(2021) 1.417)
6. G. Đanković, R. Khan, *The fourth moment of truncated Eisenstein series*, Communications in Mathematical Physics, Volume 407, article number 3, (2026), ISSN: 0010-3616 (SCI Mathematical Physics, **M21**, IF(2024) 2.6)

III.1 Научни радови пре првог избора у звање ванредног професора

7. G. Đanković, *The Erdős-Kac theorem for curvatures in integral Apollonian circle packings*, Publications de l'Institut Mathématique, (N.S.) 89(103), 2011, 11-17, ISSN: 0350-1302 (**M24**, za 2011.)
8. G. Đanković, *Nonvanishing of the family of $\Gamma_1(q)$ -automorphic L-functions at the central point*, International Journal of Number Theory, vol 7, issue 6, 2011, 1423-1439, ISSN: 1793-0421 (SCI Mathematics, **M23**, IF(2011) 0.352)
9. G. Đanković, *The sixth moment of the family of $\Gamma_1(q)$ -automorphic L-functions*, Archiv der Mathematik, 97 (2011), 535 - 547, ISSN: 0003-889X (SCI Mathematics, **M23**, IF(2011) 0.443)
10. G. Đanković, *On some exact reciprocity formulas for twisted second moments of Dirichlet L-functions*, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 49 (2012), No. 5, 1007 - 1014, ISSN: 1015-8634 (SCI Mathematics, **M23**, IF(2012) 0.388)

11. G. Đanković, *A larger GL_2 large sieve in the level aspect*, Central European Journal of Mathematics, 10(2) (2012) , 748 - 760, ISSN: 1895-1074 (SCI Mathematics, **M23**, IF(2012) 0.414)
12. G. Đanković, *Euler-Hadamard products and power moments of symmetric square L -functions*, International Journal of Number Theory, Vol. 9, No. 3 (2013) 621- 639 ISSN: 1793-0421 (SCI Mathematics, **M23**, IF(2013) 0.435)
13. G. Đanković, *Power-moments of $SL_3(\mathbb{Z})$ Kloosterman sums*, Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 63 (2013), issue 3, pp. 833-845, ISSN: 0011-4642 (SCI Mathematics, **M23**, IF(2013) 0.312)
14. G. Đanković, R. Khan, *A conjecture for the regularized fourth moment of Eisenstein series*, Journal of Number Theory, 182 (2018) pp. 236-257, ISSN: 0022-314X, (SCI Mathematics, **M22**, IF(2017) 0.774)
15. G. Đanković, D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica, *On some hybrid power moments of products of generalized quadratic Gauss sums and Kloosterman sums*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 58, No 1 (2018), pp 1-14, ISSN: 0363-1672, DOI 10.1007/s10986-018-9383-6 (SCI Mathematics, **M23**, IF(2017) 0.487)
16. G. Đanković, *The reciprocity law for the twisted second moment of Dirichlet L -functions over rational function fields*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, Vol. 98, Issue 3 (2018), pp. 383-388, ISSN: 0004-9727, doi:10.1017/S0004972718000874 (SCI Mathematics, **M23**, IF(2017) 0.519)

III.2 Остали научни радови

17. G. Đanković, D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica, *The integrated fourth moment of Dirichlet L -functions over rational function fields*, Journal of Number Theory, Volume 218, January 2021, Pages 334-369, ISSN 0022-314X (SCI Mathematics, **M22**, IF(2020) 0.720)
Corrigendum to "The integrated fourth moment of Dirichlet L -functions over rational function fields" [J. Number Theory 218 (2021) 334–369], Journal of Number Theory, Volume 253, December 2023, Pages 109-113

IV Искуство у настави

Предавања на основним студијама:

- (1) *Увод у математичку логику.*
- (2) *Линеарна алгебра, Линеарна алгебра А, Б.*
- (3) *Дискретна математика* (изборни предмет за другу годину) – конципирао и одржао неколико различитих курсева у периоду 2012–2015. са широким спектром тема: увод у теорију графова, екстремални проблеми на графовима, спектрална теорија графова, Рамануџанови графови и теорија експандера, теорија генераторних функција, увод у теорију партиција природних бројева и Рамануџанове идентитете, математичке основе криптографије, дискретна Фуријеова анализа и примене, адитивна комбинаторика, елементарна теорија бројева, дискретна геометрија.
- (4) *Алгебра 2.*
- (5) *Алгебра 3.*

- (6) *Теорија бројева 1* (изборни предмет за трећу годину) – увод у алгебарску и аналитичку теорију бројева, са одабраним темама из p -адичких бројева и p -адичке анализе, модуларних форми, теорије мултипликативних функција, теорије простих бројева (теорија Селберговог решета, велико решето, Бомбиери-Виноградов теорема, мали размаи међу простим бројевима – теорема Голдштон-Пинц-Јилдрим); курс о аналитичким својствима Риманове зета функције; курс о Фуријеовој анализи на аделима и „Тејтовој тези”; курс о ергодичкој теорији и применама у теорији бројева; курс о елиптичким кривама и Хасе-Вејловим L -функцијама; курс о модуларним формама, Хекеовим операторима и Хекеовим L -функцијама.

Мастер курсеви

- (1) *Теорија бројева 2.*
- (2) *Методологија истраживања у настави математике.*
- (3) специјални курс - *Аритметика елиптичких кривих.*

Курсеви на докторским студијама: *Алгебра 4, Теорија бројева, Алгебарска теорија бројева, Аутоморфне форме и репрезентације, Теорија репрезентација, Дискретна математика*

Држао је вежбе из Линеарне алгебре, Алгебре 1, Алгебре за И смер, Дискретне математике, Теорије бројева 1 и Културе комуникација на Математичком факултету, као и вежбе за курсеве Диференцијалне једначине, Калкулус 1, Калкулус 2, Калкулус за економске и биолошке науке и Прекалкулус на Универзитету Rutgers, САД.

Резултати студентских евалуација у протеклом изборном периоду:

2023/24.	4.66,	2022/23.	сабатикал,	2021/22.	4.74,
2020/21.	4.68,	2019/20.	4.51,	2018/19.	4.56.

V Књига -универзитетски уџбеник

Горан Банковић, *Теорија бројева*, Математички факултет, Београд, 2013, 324 стране, ISBN 978-86-7589-087-4.

Уџбеник се користи се за градиво курсева *Теорија бројева 1* на основним студијама, *Теорија бројева 2* на мастер студијама и *Теорија бројева* на докторским студијама. Користи се и као додатни уџбеник за *Алгебру 3* на основним студијама и *Алгебру 4* на докторским студијама. Књига покрива увод у аналитичку теорију бројева, увод у алгебарску теорију бројева и увод у теорију Диофантових апроксимација.

Скрипта

Галоаова теорија и p -адички бројеви, 2015, 180 страна.

VI.1 Мастер радови

Био је ментор за 32 мастер рада.

Био је члан комисије за преглед и одбрану 57 мастер радова на Математичком факултету.

VI.2 Менторство студената докторских студија

Био је ментор 4 докторске тезе на Математичком факултету:

- Khola Ajlidi – *Средње вредности мултипликативних аритметичких функција више променљивих зависних од НЗД и НЗС аргумената*, докторска теза одбрањена 17. јула 2020.
- Никола Лелас – *Истовремено неанулирање L -функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових L -функција над функцијским пољима*, докторска теза одбрањена 2. марта 2023.
- Драган Ђокић – *Шести момент Дирихлеових L -функција над рационалним функцијским пољима*, докторска теза одбрањена 3. марта 2023.
- Илија Врећница – *Статистика Селмерових група у фамилији елиптичких кривих придружених конгруентним бројевима*, докторска теза одбрањена 10. марта 2023.

VI.3 Чланство у комисијама за преглед и одбрану докторских дисертација

Члан комисије за преглед и одбрану 5 докторских теза: Марка Радовановића, јул 2015, Биљане Радичић, 2016, Александре Костић 2021, Николе Леласа 2023, Илије Врећнице 2023.

VII Конференције са излагањем:

- Шести симпозијум „Математика и примене”, Београд, 16–17. 10. 2015.
Теорија случајних матрица и фамилија L -функција придружених симетричним квадратним подизањима модуларних форми
- Седми симпозијум „Математика и примене”, Београд, 4–5. 11. 2016.
(са Н. Леласом) *Коваријанса између уопштених фон Манголтових и дивизорских функција у $\mathbb{F}_q[t]$*
- 9th Mathematical Physics Meeting, Београд, 18–23. 9. 2017.
Arithmetic quantum chaos and random wave conjecture
- Осми симпозијум „Математика и примене”, Београд, 17–18. 11. 2017.
Пробабилистичка теорија бројева у прстенима полинома над коначним пољима
- The 14th Serbian Mathematical Congress, Крагујевац, 16–19. 5. 2018.
The reciprocity law for the twisted second moment of Dirichlet L -functions over rational function fields
- Девети симпозијум „Математика и примене”, Београд, 30. 11. 2018.
The Random Wave Conjecture for Eisenstein Series (пленарно предавање)
- Десети симпозијум „Математика и примене”, Београд, 6–7. 12. 2019.
(са Д. Ђокићем, Н. Леласом и И. Врећницом) *The fourth moment and large values of Dirichlet L -functions over rational function fields*

- Једанаести симпозијум „Математика и примене”, Београд, 3–4. 12. 2021.
(са Д. Ђокићем) *The sixth moment of Dirichlet L -functions over rational function fields*
- Building Bridges, 5th EU/US Workshop on Automorphic Forms and Related Topics, Сарајево, 8–13. 8. 2022.
On the regularized 4th moment of Eisenstein series (предавање по позиву)
- Дванаести симпозијум „Математика и примене”, Београд, 2–3. 12. 2022.
On special values of zeta functions associated to orders in quadratic number fields
- Други сусрет математичара Србије и Црне Горе, Београд, 26–28. 1. 2023.
Iterated integrals of modular forms and multiple L -values (предавање по позиву)
- AMS Special Session on Analytic number theory and related fields II, Creighton University, Omaha, NE, USA, 7. 10. 2023.
(sa R. Khanom) *On the fourth moment of truncated Eisenstein series*
- AMS Special Session on L -functions, Automorphic Forms, and Their Applications, II, The Joint Mathematics Meetings, Seattle, WA, USA, 11. 1. 2025.
(sa R. Khanom) *Eisenstein series and the Random Wave Conjecture*

VIII Цитираност

Хетероцитати у часописима са SCI листе

Рад 1. је цитиран у

- Humphries, P. and Radziwiłł, M., 2022. *Optimal small scale equidistribution of lattice points on the sphere, Heegner points, and closed geodesics*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 75(9), pp.1936-1996.
- Huang, B., 2024. *The cubic moment of Hecke–Maass cusp forms and moments of L -functions*. Mathematische Annalen, 389(1), pp.899-945.
- Humphries, P. and Khan, R., 2025. *L^p -norm bounds for automorphic forms via spectral reciprocity*. Proceedings of the London Mathematical Society, 130(6), p.e70061.
- Humphries, P. and Khan, R., 2020. *On the random wave conjecture for dihedral Maass forms*. Geometric and Functional Analysis, 30(1), pp.34-125.

Рад 12. је цитиран у

- Bui, H.M. and Florea, A., 2018. *Hybrid Euler–Hadamard product for quadratic Dirichlet L -functions in function fields*. Proceedings of the London Mathematical Society, 117(1), pp.65-99.
- Sahay, A., 2023, May. *Moments of the Hurwitz zeta function on the critical line*. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 174, No. 3, pp. 631-661). Cambridge University Press.
- Heap, W., 2023, March. *On the splitting conjecture in the hybrid model for the Riemann zeta function*. In Forum Mathematicum (Vol. 35, No. 2, pp. 329-362). De Gruyter.
- Bui, H.M., Gonek, S.M. and Milinovich, M.B., 2015, May. *A hybrid Euler–Hadamard product and moments of $\zeta'(\rho)$* . In Forum Mathematicum (Vol. 27, No. 3, pp. 1799-1828). De Gruyter.

Рад 16. је цитиран у

- Balkanova, O., Bhowmik, G., Frolenkov, D. and Raulf, N., 2020. *Mixed moment of $GL(2)$ and $GL(3)$ L -functions*. Proceedings of the London Mathematical Society, 121(2), pp.177-219.
- Blomer, V., Li, X. and Miller, S.D., 2019. *A spectral reciprocity formula and non-vanishing for L -functions on $GL(4) \times GL(2)$* . Journal of Number Theory, 205, pp.1-43.
- Khan, R., 2025. *A reciprocity relation for the twisted second moment of the Riemann Zeta function*. Proceedings of the American Mathematical Society, 153(787).
- Andrade, J. and Macmillan, J., 2025. *A note on twisted moments of Dirichlet L -functions*. Glasgow Mathematical Journal. Published online 2025: 1-8.
doi:10.1017/S0017089525100785

Рад 14. је цитиран у

- Humphries, P., 2018. *Equidistribution in shrinking sets and L^4 -norm bounds for automorphic forms*. Mathematische Annalen, 371(3), pp.1497-1543.
- Humphries, P. and Khan, R., 2020. *On the random wave conjecture for dihedral Maass forms*. Geometric and Functional Analysis, 30(1), pp.34-125.
- Guo, C., 2025. *Joint cubic moment of Eisenstein series and Hecke-Maass cusp forms*. Journal of Number Theory. Volume 276, 2025, Pages 162-197

Рад 9. је цитиран у

- Chandee, V. and Li, X., 2017. *The sixth moment of automorphic L -functions*. Algebra & Number Theory, 11(3), pp.583-633.
- Chandee, V. and Li, X., 2020. *The 8th Moment of the Family of $\Gamma_1(q)$ -Automorphic L -Functions*. International Mathematics Research Notices, 2020(22), pp.8443-8485.
- Stucky, J., 2023. *The sixth moment of automorphic L -functions*. Journal of Number Theory, 243, pp.160-201.

Рад 8. је цитиран у

- Liu, S.C. and Qi, Z., 2022. *Moments of central L -values for Maass forms over imaginary quadratic fields*. Transactions of the American Mathematical Society, 375(5), pp.3381-3410.
- Balkanova, O., Huang, B. and Södergren, A., 2021. *Non-vanishing of Maass form L -functions at the central point*. Proceedings of the American Mathematical Society, 149(2), pp.509-523.

Рад 5. је цитиран у

- Florea, A., Jones, E. and Lalin, M., 2024. *Moments of Artin-Schreier L -functions*. The Quarterly Journal of Mathematics, 75(4), pp.1255-1284.
- Gao, P. and Zhao, L., 2024. *Moments of Dirichlet L -functions to a fixed modulus over function fields*. International Journal of Number Theory, 20(06), pp.1493-1513.

Рад 4. је цитиран у

- Conrey, B. and Rodgers, B., 2025. *Averages of quadratic twists of long Dirichlet polynomials*, Mathematische Zeitschrift, 311(3), p.59.
- Andrade, J.C. and Best, C.G., 2024. *Joint moments of derivatives of characteristic polynomials of random symplectic and orthogonal matrices*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 57(20), p.205205.

Рад 10. је цитиран у

- Bettin, S., 2016. *On the reciprocity law for the twisted second moment of Dirichlet L -functions*. Transactions of the American Mathematical Society, 368(10), pp.6887-6914.

Рад 13. је цитиран у

- Kowalski, E. and Ricotta, G., 2014. *Fourier coefficients of $GL(N)$ automorphic forms in arithmetic progressions*. Geometric and Functional Analysis, 24(4), pp.1229-1297.

Рад 7. је цитиран у

- El-Baz, D., 2020. *An analogue of the Erdős–Kac theorem for the special linear group over the integers*. Acta Arithmetica, 192, pp.181-188.

Цитати у поглављима у монографијама

- Munshi, R., 2021. *Twists of $GL(3)$ L -functions*. In Relative Trace Formulas (pp. 351-378). Simons Symposia, Editors Werner Müller, Sug Woo Shin, Nicolas Templier, 2021. Springer International Publishing, цитиран рад 11.
- Kowalski, E., 2014. *Sieves in discrete groups, especially sparse*. Thin Groups and Superstrong Approximation, Math. Sci. Res. Inst. Publ, 61, pp.107-114. Mathematical Sciences Research Institute Publications, Editors E. Breuillard, H. Oh, Berkeley, 2014. цитиран рад 7.

Цитати у докторским дисертацијама у иностранству

- Wang, V.Y., 2022. *Families and dichotomies in the circle method* (Doctoral dissertation, Princeton University), цитиран рад 11.
- Zenz, P., 2022. *Distribution of Mass of Holomorphic Hecke Cusp Forms and Quantum Chaos*. Doctoral dissertation, McGill University (Canada), цитиран рад 1.
- Pan, J., 2020. *The Quantum Unique Ergodicity and the L^4 -Norm Problems for Newform Eisenstein Series*, (Doctoral dissertation, Texas A&M University), цитирани радови 1. и 14.
- Dias, D., 2015. *Dénombrement dans les empilements apolloniens généralisés et distribution angulaire dans les extensions quadratiques imaginaires*. PhD thesis, Université de Montréal, 2015. цитиран рад 7.
- Best, C.G., 2024. *Moments of characteristic polynomials of random matrices and L -functions over function fields*, (Doctoral dissertation, University of Exeter (United Kingdom)), цитиран рад 4.

- MacMillan, J., 2022. *Moments of Dirichlet L-functions in function fields*. Doctoral dissertation, University of Exeter (United Kingdom), цитирани радови 3., 4., 16. и 17.
- Sahay, A., 2023. *Moments of the Hurwitz zeta function and related topics*. PhD teza, University of Rochester, цитиран рад 12.
- Stucky, J., 2022. *Families and statistics of L-functions*. PhD teza, Kansas State University, цитиран рад 9.

IX Учесће на пројектима

- Од јуна до децембра 2010. истраживач на пројекту 144018.
- Истраживач на пројекту 174008 Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије 2010–2019.
- Истраживач на пројекту 451-03-136/2025-03/200104.

X Административне дужности на факултету и универзитету

- Члан Савета Математичког факултета Универзитета у Београду (јун 2014 - јун 2017.).
- Члан Већа групације природно-математичких наука Универзитета у Београду (од 2021/22. до 2024.)
- Шеф Катедре за методiku наставе математике, рачунарства и астрономије (од октобра 2024.).
- Руководилац студијског програма Математика, од 23. 1. 2023.

XI Уређивачки рад и служба професији

- Члан уређивачког одбора *Математичког весника*, ISSN 0025-5165, од маја 2014., <http://www.vesnik.math.rs/board.html>
- Рецензент за научне часописе са SCI листе - *International Mathematics Research Notices*, *Bulletin of the London Mathematical Society*, *Journal of Number Theory*, *International Journal of Number Theory*, *Glasgow Mathematical Journal*, *Open Mathematics*, *Journal of Inequalities and Applications*, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, *Filomat*, националне часописе *Publications de l'Institut Mathématique*, *Kragujevac Journal of Mathematics*, *Novi Sad Journal of Mathematics*, *Sarajevo Journal of Mathematics* и стручни часопис *Nastava matematike*.
- Радио је евалуацију билатералних пројеката за Министарство просвете, науке и технолошког развоја, 2022.
- Члан је Америчког математичког друштва од 2004. године. Активно пише приказе радова за *Mathematical reviews*, AMS, (MathSciNet Reviewer number: 081711); написао 34 приказа.
- Активности у популаризацији науке:
 - предавање на Симпозијуму „Савремени проблеми математике”, „Дани математике у Новом Саду”, Нови Сад, 8. 12. 2017. – *Од простих бројева до аутоморфних форми, и назад*

—два прилога за *Тангенту* - о Ротовој теореме о трочланим аритметичким прогресијама (број 73) и о Селберговој формули (број 75)

—предавања у Петници: *Теорија партиција: комбинаторика, анализа и аритметика* (4. 8. 2015.); *Мали размази међу простим бројевима и теорија решета* (13. 4. 2016.); *Шетње до бесконачности по Гаусовим простим бројевима* (20. 7. 2016.); *Теорија редукције целобројних бинарних квадратних форми, Гаусов и Бтаргавин закон композиције* (12. 6. 2017.); *Фробенијусов проблем новчића и Силвестерова теорема* (31. 7. 2018.)

XII Кратак приказ радова после првог избора у звање ванредног професора

Радови 1. и 6. припадају области *аритметичког квантног хаоса*, која се налази на раскршћу аналитичке теорије бројева и математичке физике. Централни проблем у области је Quantum Unique Ergodicity (QUE) хипотеза на аритметичким многострукостима. Присуство додатних „аритметичких” симетрија (у виду Хсксових кореспонденција) на таквим многострукостима омогућава повезивање хипотеза из области *квантног хаоса* са теоријом L -функција, које су основни објекат проучавања *аналитичке теорије бројева*. Основни циљ проучавања у *квантном хаосу* је карактерисање универзалних својстава квантних система која рефлектују својства регуларности, или са друге стране хаотичности (нпр. ергодичности), одговарајућег класичног динамичког система.

Основни пример аритметичке многострукости је модуларна површ X , количник хиперболичке равни $\mathbb{H}$ по дејству модуларне групе $SL_2(\mathbb{Z})$ Мебијусовим трансформацијама. На оваквој површи можемо посматрати сопствене функције хиперболичког Лапласијана које су истовремено и сопствене функције свих Хекеових оператора (тзв. Хеке-Масове форме; Erich Hecke, Hans Maass). Ове функције су примери *аутоморфних форми*, које чине класу функција која уопштава класичне холоморфне модуларне форме и која фигурира на једној страни кореспонденције коју описује Лангландсов програм.

Површ X је некомпактна (има један 'касн' у бесконачности) па спектар Лапласијана на X осим дискретног дела који чине константна функција и тзв. *касн-форме*, које експоненцијално опадају у каспу, садржи и *непрекидни* део, сопствени пакет (параметризован са $-\infty < T < +\infty$) сачињен од Ајзенштајнових редова $E(z, \frac{1}{2} + iT)$, који су сопствене функције Лапласијана за сопствену вредност $\frac{1}{4} + T^2$.

QUE-проблем се може видети као део општијег принципа који је британски физичар Бери (Michael Berry) формулисао као Random Wave Conjecture (RWC) 1977. године. Једна манифестација RWC је следећа хипотеза о моментима сопствених функција. Нека је f Хеке-Масова касп форма са Лапласовом сопственом вредношћу $\frac{1}{4} + t^2$. За сваки цео број $p \geq 1$ и за сваки фиксирани компактни регуларни регион Ω на модуларној површи $X = SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$, очекује се да ће важити асимптотика

$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} \left(\mu(\Gamma \backslash \mathbb{H})^{1/2} \frac{f(z)}{\|f\|_2} \right)^p d\mu(z) \sim c_p \quad (1)$$

у лimesу када спектрални параметар $t_f \rightarrow \infty$, где је μ хиперболичка мера, а c_p је p -ти момент стандардне нормалне случајне променљиве.

Специјални случај ове хипотезе за $p = 2$ на X , је управо QUE-проблем, који су за Хеке-Масове касп форме доказали Е. Линденштраус (Ann. of Math. (2) 163 (2006)) и К. Саундарарајан (Ann. of Math. (2) 172 (2010)). Е. Линденштраус је управо делом због овог доказа динамичким методама добио Филдсову медаљу 2010. године.

Хејхал-Ракнер (Dennis Hejhal, B. Rackner) су у (Experiment. Math. 1 (1992)) спровели нумеричко истраживање које је подупрло RWC-предвиђање. У истом раду су формулисали и одговарајућу верзију хипотезе (1) за Ајзенштајнове редове иако, због њиховог полиномног раста у каспу, они нису L^2 -интеграбилне функције на X . Због тога су уместо $E(z, s)$, посматрали тзв. „одсечене” Ајзенштајнове редове $E_A(z, s)$ (које су увели Селберг, Мас и Лангландс и који играју битну улогу у спектралниј теорији). Овде је z променљива на $\mathbb{H}$, а s је спектрални параметар. Одсечени редови $E_A(z, s)$ се поклапају са $E(z, s)$ на фундаменталном домсну, осим што им је одузет константни члан (који је функција по $y = \Im(z)$ и који је одговоран за дивергенцију) у Фуријеовом развоју кад је $\Im(z) > A$, тј. у околини каспа ∞ .

У радовима 1. и 6. се проучава ова хипотеза за Ајзенштајнове редове, за $p = 4$, али за случај када је Ω цела модуларна површ X . У оваквој поставци је постојала нада да се доказ може извести постојећом технологијом теорије L -функција, али су истовремено са друге стране присутне и нове препреке због поменутог проблема дивергенције. Први који је напао проблем на овај начин је А. Спину у својој тези (Princeton, 2003.) у којој је је дао следећу оцену за 4. момент одсечених Ајзенштајнових редова

$$\int_X |E_A(z, \frac{1}{2} + iT)|^4 d\mu z = \mathcal{O}(T^\epsilon), \quad T \rightarrow \infty$$

за свако $\epsilon > 0$. Овај резултат *није* асимптотика (па не доказује Гаусово RWC-понашање за $p = 4$), али се свеједно може посматрати као снажан доказ *еквидистрибуције масе* (делокализације) функција $E_A(z, \frac{1}{2} + iT)$, у лimesу великих енергија $T \rightarrow \infty$.

У раду 1. се проблем у овој поставци напада тако што се уместо одсечених Ајзенштајнових редова $E_A(z, s)$ посматра одговарајући регуларизовани четврти момент $E(z, s)$. Аутори рада 1. су у ранијем раду 14. уместо одсечених Ајзенштајнових редова (који имају ману да нису директно повезани са L -функцијама), проучавали регуларизовани интеграл добијен Загијеовом (Don Zagier) методом регуларизације и доказали су асимптотску формулу

$$\begin{aligned} & \int_X^{reg} |E(z, 1/2 + iT)|^4 d\mu(z) \\ &= \frac{24}{\pi} \log^2 T + \sum_{j \geq 1} \frac{\cosh(\pi t_j)}{2} \frac{|\Lambda(\frac{1}{2} + 2Ti, u_j)|^2 \Lambda^2(\frac{1}{2}, u_j)}{L(1, \text{sym}^2 u_j) |\xi(1 + 2Ti)|^4} + \mathcal{O}(\log^{5/3+\epsilon} T), \end{aligned} \quad (2)$$

којом се вредност регуларизованог 4. момента Ајзенштајнових редова повезује са хибридниим четвртим моментом аутоморфних L -функција, у коме је сумација по целом спектру. Овде су на десној страни u_j – Масове касп форме из неке

ортонормиране (у односу на Петерсонов скаларни производ) базе $\{u_j\}_{j \geq 1}$ сопствених функција Лапласовог оператора које су уједно сопствене функције и алгебре Хекеових оператора на модуларној површи X . Функција $\Lambda(s, u_j)$ је аутоморфна L -функција придружена аутоморфној форми u_j и помножена одговарајућим Γ -факторима тако да задовољава функционалну једначину $\Lambda(1-s, u_j) = \pm \Lambda(s, u_j)$. Овим је проблем регуларизованог 4. момента за Ајзенштајнове редове био прецизно преформулисан у терминима момента аутоморфних L -функција.

Додатно, аутори су у раду 14. показали да Беријева RWC хипотеза, односно њена Хејхал-Ракнер варијанта,

$$\int_X |E_A(z, \frac{1}{2} + iT)|^4 d\mu(z) \sim \frac{36}{\pi} \log^2 T \quad (3)$$

имплицира следећу асимптотику за регуларизовани 4. момент:

$$\int_X^{reg} |E(z, \frac{1}{2} + iT)|^4 d\mu(z) \sim \frac{72}{\pi} \log^2 T. \quad (4)$$

У раду 1. аутори израчунавају асимптотику 4. момента на десној страни једнакости (2) кад спектрални параметар Ајзенштајновог реда $T \rightarrow \infty$, па тиме доказују (4). У питању је 4. момент аутоморфних L -функција $\Lambda(s, u_j)$, и то квадрат $\Lambda^2(\frac{1}{2}, u_j)$ вредности ових функција у централној тачки $\frac{1}{2}$ помножен квадратом $|\Lambda(\frac{1}{2} + 2Ti, u_j)|^2$ вредности високо на критичној линији, у тачци $\frac{1}{2} + 2Ti$ која зависи од параметра T . Ова 'нехомогеност' значајно отежава евалуацију. Додатно, саме функције $\Lambda(s, u_j)$ су L -функције степена 2 (јер одговарају аутоморфним репрезентацијама на $GL(2)$ и њихова аритметичка и аналитичка комплексност је слична квадрату Риманове зета-функције $\zeta^2(s)$), па је наведени 4. момент у ствари, грубо говорећи, упоредив са осмим моментом Риманове зета-функције.

Доказ главне теореме рада 1. се базира на примени формуле трага Кузнецова (ова формула је једна верзија *Селбергове формуле трага*), да би се Хекеове сопствене вредности (које су Дирихлеови коефицијенти L -функција $\Lambda(s, u_j)$) превеле у тзв. Клустерманове експоненцијалне суме. Оне се даље третирају применом Воронојеве сумационе формуле и претварају се у тзв. Рамануџанове суме. После асимптотске евалуације вишеструких интегралних трансформација које се појављују у сумама (услед примена Кузнецова и Вороноја), применом *инверзне* формуле Кузнецова проблем се преводи на *дуалну* суму L -функција, која се може коначно успешно оценити коришћењем дубоке субконвексне оцене Мишела-Венкатеша.

Коначно, у раду 6. аутори доказују асимптотску формулу (3) за оригинални четврти момент одсечених Ајзенштајнових редова велике Лапласове сопствене вредности, чиме су верификовали по први пут да главни асимптотски члан кореспондира Гаусовом случајном понашању. Иновација у раду 6. је увођење аналитичког трика, који омогућава да се истовремено преброди неколико препрека које су постојале у дотадашњим приступима: уводи се усредњавање по параметру одсецања A , за које се испоставља да је довољно снажно да имплицира и тражену асимптотику без усредњавања. Овим је доказана хипотеза Хејхала и Ракнера стара преко 30 година.

Рад 2: Функција $\omega(n)$ - број различитих простих делиоца природног броја n је једна од најзначајнијих адитивних аритметичких функција. Ако са X_N означимо случајну променљиву $n \mapsto \frac{\omega(n) - \log \log N}{\sqrt{\log \log N}}$ на дискретном скупу $\{1, 2, \dots, N\}$ са униформном вероватноћом, класична Ердеш-Кацова теорема се може преформулисати на следећи начин: низ случајних променљивих $(X_N)_{N \geq 3}$ конвергира у расподели стандардној нормалној случајној променљивој. У раду 2. се разматрају слична, повезана и уопштена питања за аритметичку функцију $\psi(A) := \deg(\text{НЗС}\{a \mid a \in A\})$ где полиноми a пролазе подскуповима A скупа свих моничних полинома $\mathcal{M}_n$ фиксiranог степена n у прстену $\mathbb{F}_q[t]$, где је $\mathbb{F}_q$ коначно поље. На коначном скупу $\mathcal{M}_n$ су дефинисане две природне вероватносне мере и у раду су добијена тврђења о концентрацији ових степена око одговарајућих очекивања, кад или кардиналност базног поља $q \rightarrow \infty$ или кад степен полинома $n \rightarrow \infty$.

Проучавање расподеле величине L -функција придружених неким добро дефинисаним фамилијама аритметичких објеката (аутоморфних репрезентација), и њихових момената, на критичној линији или у централној тачки, један је од кључних циљева аналитичке теорије бројева и уско је повезано са Линделефовом хипотезом. Овом тематиком се баве наредна три рада са списка.

У раду 3. је разматран нормализован други момент Дирихлеових L -функција над функцијским пољима по фамилији свих (не)парних примитивних карактера по иредуцибилном модулу $Q \in \mathbb{F}_q[t]$:

$$S^\pm(H, K; Q) = \frac{|Q|^{1/2}}{\varphi^\pm(Q)} \sum_{\substack{\chi \pmod{Q} \\ \chi \neq \chi_0}}^\pm \left| L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \right|^2 \chi(H) \overline{\chi}(K),$$

у који су „уплетена“ још два полинома H и K . Овде је са $|Q| = q^{\deg(Q)}$ означена норма полинома Q , а $\varphi(Q)$ је Ојлерова функција на $\mathbb{F}_q[t]$. Разумевање оваквих 'твистованих' момената је основа за кључне аналитичке методе у теорији L -функција: метод молификације (са применама на неанулирање L -функција), метод амплификације (са применама на сабконвексне оцене за L -функције), метод резонанције (за налажење екстремних вредности L -функција) и сличне. У раду је доказано да за просте полиноме H , K и Q , такве да је $\deg H + \deg K \leq \deg Q$ важи

$$S^\pm(H, K; Q) = S^\pm(K, \pm Q; H) + S^\pm(H, \pm Q; K) + O\left(\frac{|Q|^{1/2} \deg Q}{|HK|^{1/2}}\right),$$

при чему је и O -члан експлицитно израчунат у оба случаја. Овај резултат даје симетрију између три 'твистована' момента за модуле H , K и Q , а релација је названа 'троструки реципроцитет' по узору на Гаусов закон квадратног реципроцитета за Лежандрове симболе.

У раду 4. се изучава фамилија квадратних Дирихлеових карактера (што су једини нетривијални реални карактери) за моничне бесквадратне полиномне модуле $D \in \mathbb{F}_q[t]$ степена $2g + 1$, где је целобројни параметар g уједно и род хиперелиптичке криве $X^2 = D(Y)$ над $\mathbb{F}_q$. У раду се проучавају мешовити други моменти виших извода у централној тачки облика $\sum_{D \in \mathcal{M}_{2g+1}} \Lambda^{(\lambda)}\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) \Lambda^{(\mu)}\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$,

кад род $g \rightarrow \infty$, где је Λ тзв. комплетирана L -функција. Овакви мешовити моменти такође имају дугу историју проучавања, а у класичном случају Риманове зета функције су повезани са резултатима о расподели нула зета функције. На пример, у раду 4. је добијена асимптотска формула кад $g \rightarrow \infty$

$$\sum_{\substack{D \in \mathcal{M}_{2g+1} \\ D \text{ beskvdrtan}}} \frac{\Lambda''\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) \Lambda\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)}{(\log q)^2} = \frac{q^{2g+1}}{\zeta_q(2)} P(2g+1) + O\left(q^{g(1+\varepsilon)}\right),$$

где је $P(x)$ у главном члану полином степена 5 чији су коефицијенти експлицитно израчунати. Као последица овог резултата добијено је да постоји бар $\gg \frac{q^{2g+1}}{g^4}$ бесквадратних моничних полинома $D \in \mathbb{F}_q[t]$ степена $2g+1$, таквих да је истовремено и $\Lambda\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) \neq 0$ и $\Lambda''\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) \neq 0$. Истовремено неанулирање извода L -функција у централној тачки је и једна од мотивација за изучавање мешовитих момената. Општије, ред нуле L -функције у централној тачки је предмет Берч–Свинертон–Дајерове и Бејлинсон–Делићеве хипотезе.

Рад 5: Асимптотску формулу за други момент Риманове зета функције на критичној линији извели су Харди и Литлвуд, а за четврти момент Ингам пре стотинак година. Аналогни резултати за више моменте нису познати и већ шести момент представља један од чувених отворених проблема у области. Предмет проучавања рада 5. је фамилија Дирихлеових L -функција над рационалним функцијским пољима $\mathbb{F}_q(x)$, где је $\mathbb{F}_q$ коначно поље, која, као и Риманова зета функција, има унитарну симетрију. Лобијена је асимптотска формула за шести момент

$$\sum_{Q \in \mathcal{M}_d} \sum_{\chi \pmod{Q}} \int_0^{\frac{2\pi}{\log q}} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^6 \frac{dt}{\frac{2\pi}{\log q}} \sim \frac{42 \tilde{a}_{3,q} q - 2}{9! (q-1)} q^{2d} \mathbf{d}^9,$$

кад степен полинома $d \rightarrow \infty$, где је аритметички фактор $\tilde{a}_{3,q}$ експлицитно израчунат. Примењена су усредњења по критичном кругу (јер су L -функције над $\mathbb{F}_q(x)$ периодичне), по непарним примитивним Дирихлеовим карактерима по модулу Q и по моничним полиномима Q фиксираног степена d . Сва ова три усредњења су тренутно неопходна, јер је шести момент са мање усредњења и даље отворено питање. Са друге стране, овакво усредњење Дирихлеових карактера по различитим модулима је мотивисано класичном поставком теореме Бомбијери–Виноградова. Додатно, изведена је и асимптотска формула за шести момент са комплексним померајима, као уопштење претходног проблема. Овакве флексибилније формуле имају разне примене, на пример за израчунавање момената виших извода и слично. У поређењу са аналогним резултатом над пољем $\mathbb{Q}$ (J. B. Conrey, H. Iwaniec, K. Soundararajan, The sixth power moment of Dirichlet L -functions, Geometrical and Functional Analysis, 22: 1257–1288, 2012.) рад 5. доноси два побољшања: оштрију оцену за грешку и експлицитнији израз за главни члан. Такође, у главном члану је идентификована константа и потврђено њено поклапање са хипотетичком константом изведеном применом Теорије случајних матрица.

МИШЉЕЊЕ И ЗАКЉУЧАК КОМИСИЈЕ

Горан Банковић је наш истакнути математичар средње генерације. Његова главна област научног интересовања је аналитичка теорија бројева, посебно теорија L -функција, теорија аутоморфних форми и аритметички квантни хаос. У периоду од избора у звање ванредног професора објавио је 6 радова на SCI листи. Међу њима су два коауторска рада са Р. Каном у којима су аутори доказали Хејхал-Ракнерову хипотезу из 1992. године. У овом периоду је био изузетно активан у раду са студентима мастер и докторских студија. Под његовим руководством су одбрањене четири докторске дисертације на Математичком факултету, а три од њих су биле дисертације асистената Математичког факултета. Осим тога, био је ментор за израду 24 мастер рада на занимљиве теме углавном повезане са наставом алгебре у школама. Члан је уређивачког одбора *Математичког весника*, био је рецензент за више часописа са SCI листе, а своје резултате је представио на девет научних скупова у периоду од избора за ванредног професора, од чега је једно било пленарно и два предавања по позиву. Аутор је уџбеника *Теорија бројева* у издању Математичког факултета.

Имајући све ово у виду, сматрамо да др Горан Банковић испуњава све услове за избор у звање редовног професора и стога предлагемо његов избор за редовног професора за ужу научну област Алгебра и математичка логика на неодређено време са пуним радним временом.

Београд, 17. децембар 2025.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

проф. др Зоран Петровић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Небојша Икодиновић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Зоран Пуцановић, редовни професор
Универзитет у Београду, Грађевински факултет