

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ђорђе З. Коцић

**ХИПЕРПОВРШИ БЛИЗУ КЕЛЕРОВЕ
СФЕРЕ S^6**

докторска дисертација

Београд, 2025.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Djordje Z. Kocić

**HYPERSURFACES OF THE NEARLY KÄHLER
SPHERE S^6**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2025.

Ментор:

др Мирослава АНТИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

Чланови комисије:

др Зоран РАКИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Владица АНДРЕЛИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Емилија НЕШОВИЋ, редовни професор
Универзитет у Крагујевцу - Природно-математички факултет

Датум одбране: _____

Захвалница

Ова докторска дисертација је, пре свега, посвећена мојој породици, као најчвршћем ослопцу током свих година школовања и научног сазревања. Посебну захвалност дугујем својој мајци, чија је преданост и стрпљење у раном раду са мном током основне и средње школе не само поставила темеље мом математичком развоју, већ и усадила љубав према овој науци. Њена љубав према знању, коју је на мене пренела, била је први подстицај који ме је усмеравао ка овом научном путу и на крају довео до студија математике.

Дубоко сам захваљан својој менторки, проф. др Мирослави Антић, чија су ме посвећеност и стручност увеле у свет диференцијалне геометрије. Са много стрпљења, подршке и разумевања, водила ме је овим научним путем — од завршетка основних студија, кроз мастер образовање, све до финалних корака докторских студија. Њена дугогодишња посвећеност, како у научном вођењу, тако и у непрестаној подршци, разумевању и охрабрењу, била је од пресудног значаја да се и овај корак у мом образовању успешно оствари.

На крају, захваљујем се и члановима комисије на пажљивом читању рукописа и бројним корисним сугестијама, које су значајно допринеле коначном облику и квалитету овог рада.

Свима њима дугујем велику захвалност што су били део мог академског пута.

Власотинце, 2025.

Ђорђе Коцић

Наслов дисертације: Хиперповрши близу Келерове сфере S^6

Резиме: У овој дисертацији проучавано је неколико различитих фамилија реалних хиперповрши близу Келерове сфере S^6 . Тангентно раслојење једне хиперповрши се на природан начин декомпонује на четвородимензиону скоро комплексну, неинтеграбилну дистрибуцију и једнодимензиону тотално реалну разапету векторским пољем JN , где је N јединично нормално векторско поље хиперповрши, а J скоро комплексна структура на S^6 . Коришћењем векторског поља JN дефинише се структурни Јакобијев оператор хиперповрши. Познато је да у другим амбијентним просторима са скоро комплексном структуром, првенствено Келеровим просторима, услов паралелности структурног Јакобијевог оператора и сродни услови везани за његову паралелност представљају карактеризације фамилија хиперповрши које су тубе над подмногострукостима мање димензије, уколико постоје.

У овој дисертацији испитивана су питања особина и егзистенције таквих хиперповрши у близу Келеровој сфери S^6 . С обзиром да S^6 није и Келерова многострукост, односно, скоро комплексна структура није паралелна, неопходан је другачији приступ проблему него онај који се обично примењује у Келеровим многострукостима. Коришћењем погодено одабраног покретног репера хиперповрши M сфере S^6 , који је усклађен са декомпозицијом тангентног раслојења на четвородимензиону скоро комплексну и тотално реалну дистрибуцију, изведене су њене структурне једначине и релације између коваријантних извода у правцима векторских поља тог репера из којих су добијене и њихове геометријске особине.

Прво, испитиване су хиперповрши са паралелним структурним Јакобијевим оператором и показано је да такве хиперповрши не постоје. Затим је посматран слабији услов и доказано је непостојање хиперповрши сфере S^6 код којих се коваријантни извод структурног Јакобијевог оператора поклапа са Лијевим изводом у правцу тангентних векторских поља на M . Такође, показано је и непостојање Хопфових хиперповрши са структурним Јакобијевим оператором Кодацијевог типа.

Након тога, класификоване су хиперповрши S^6 са Ли-паралелним оператором облика, а затим и хиперповрши код којих се коваријантни извод оператора облика у правцу Хопфовог векторског поља ξ поклапа са Лијевим изводом у истом правцу.

Проучаване су и хиперповрши близу Келерове сфере S^6 према димензији њихове нул-дистрибуције. С обзиром да тотално геодезијске хиперсфере S^5 тривијално имају петодимензиону нул-дистрибуцију, питање од интереса је да ли постоје и које су хиперповрши које имају четвородимензиону нул-дистрибуцију. Конструисан је локални покретни репер који је усаглашен са условом да хиперповрш има четвородимензиону нул-дистрибуцију и изведене су структурне једначине помоћу векторских поља тог репера. Показане су њихове геометријске особине, између осталог да су у питању производ многострукости посебних типова, а затим је дата њихова класификација и експлицитна конструкција која полази од сферне криве и векторског поља дуж те криве.

Кључне речи: близу Келерова сфера, Хопфове хиперповрши, структурни Јакобијев оператор, оператор облика, нул-дистрибуција.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Диференцијална геометрија

УДК број: 53*B*25, 53*B*35, 53*C*15

Dissertation title: Hypersurfaces of the nearly Kähler sphere $\mathbb{S}^6$

Abstract: In this dissertation, several different families of real hypersurfaces of the nearly Kähler sphere $\mathbb{S}^6$ are studied. The tangent bundle of a hypersurface naturally decomposes into a four-dimensional almost complex, non-integrable distribution and a one-dimensional totally real one spanned by the vector field JN , where N is the unit normal vector field of the hypersurface and J is the almost complex structure on $\mathbb{S}^6$. Using the vector field JN , the structure Jacobi operator of the hypersurface is defined. It is known that in other ambient spaces with almost complex structure, primarily Kähler spaces, the condition of parallelism of the structure Jacobi operator and related conditions tied to its parallelism represent characterizations of families of hypersurfaces which are tubes over lower-dimensional submanifolds, if such exist.

In this dissertation, questions concerning the properties and existence of such hypersurfaces of the nearly Kähler sphere $\mathbb{S}^6$ are examined. Given that $\mathbb{S}^6$ is not a Kähler manifold, that is, the almost complex structure is not parallel, a different approach to the problem is necessary than the one usually applied in Kähler manifolds. By using a suitably chosen moving frame of a hypersurface M of the sphere $\mathbb{S}^6$, which is compatible with the decomposition of the tangent bundle into a four-dimensional almost complex and totally real distribution, its structural equations and the relations between covariant derivatives in the directions of the vector fields of that frame are derived, from which their geometric properties are obtained.

First, hypersurfaces with parallel structure Jacobi operator were examined, and it was shown that such hypersurfaces do not exist. Then, a weaker condition is considered, and the nonexistence of hypersurfaces of the sphere $\mathbb{S}^6$ for which the covariant derivative of the structure Jacobi operator coincides with the Lie derivative in the direction of tangent vector fields on M is proven. It is also shown that there are no Hopf hypersurfaces with a structure Jacobi operator of the Codazzi type.

After that, hypersurfaces of $\mathbb{S}^6$ with a Lie-parallel shape operator were classified, followed by the classification of hypersurfaces for which the covariant derivative of the shape operator in the direction of the Hopf vector field ξ coincides with the Lie derivative in the same direction.

Hypersurfaces of the nearly Kähler sphere $\mathbb{S}^6$ were also studied with respect to the dimension of their nullity distribution. Since totally geodesic hyperspheres $\mathbb{S}^5$ trivially have a five-dimensional nullity distribution, a natural question of interest is whether there exist hypersurfaces with a four-dimensional nullity distribution and what their properties are. A local moving frame was constructed, compatible with the condition that the hypersurface has a four-dimensional nullity distribution, and the structural equations were derived using the vector fields of that frame. Their geometric properties were analyzed, among other things showing that they are product manifolds of special types. Furthermore, their classification was given, along with an explicit construction based on a sphere curve and a vector field along that curve.

Keywords: nearly Kähler sphere, Hopf hypersurfaces, structure Jacobi operator, shape operator, nullity distribution.

Research area: Mathematics

Research sub-area: Differential geometry

Садржај

Увод	1
1 Основни појмови	4
1.1 Риманове многострукости и подмногострукости	4
1.2 Келерове и близу Келерове многострукости	11
2 Близу Келерова сфера $\mathbb{S}^6$	14
2.1 Октониони и близу Келерова структура на $\mathbb{S}^6$	14
2.2 Подмногострукости сфере $\mathbb{S}^6$	20
2.3 Покретни репер хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$	33
3 Структурни Јакобијев оператор хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$	45
3.1 Хиперповрши са паралелним структурним Јакобијевим оператором	45
3.2 Хиперповрши са структурним Јакобијевим оператором који задовољава $\nabla_X l = \mathcal{L}_X l$	50
3.3 Хопфове хиперповрши са структурним Јакобијевим оператором Кодаци- јевог типа	54
4 Оператор облика хиперповрши	56
5 Хиперповрши са четвородимензионом нул-дистрибуцијом	62
Литература	73
Биографија аутора	79

Увод

Близу Келерова¹ многострукост је скоро ермитска² многострукост $(\tilde{M}, g, \tilde{\nabla}, J)$, са скоро комплексном структуром J која је компатибилна са метриком g и Леви-Чивита³ повезаношћу $\tilde{\nabla}$, таквом да је тензор $G(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X J)Y$ кососиметричан. То представља ослабљен услов у односу на услов из дефиниције Келерових многострукости које имају паралелну скоро комплексну структуру, тј. важи $\tilde{\nabla}J = 0$. Отуда и дефиниција строго близу Келерових многострукости као оних које су близу Келерове и нису Келерове.

Почетак систематичног изучавања близу Келерових многострукости везује се за рад [26] са почетка 70-их година 20. века, иако се оваква структура на сфери $\mathbb{S}^6$ појавила раније, у раду [23]. У том раду су аутори показали да је $\mathbb{S}^6$ хомогени простор добијен као $G_2/SU(3)$, где је G_2 компактна специјална⁴ Лијева⁵ група свих аутоморфизама Кејлијевих⁶ бројева $\mathbb{O}$.

Испитивање скоро комплексне структуре на $\mathbb{S}^6$ имало је неколико независних корака. Наиме, није одмах уочено да је, и на који начин, она повезана са транзитивним дејством групе G_2 .

Монтгомери⁷ и Самелсон⁸ су 1943. године у [44] доказали да је једина компактна повезана проста Лијева група која може бити транзитивна на $\mathbb{S}^{2n}$ група $SO(2n + 1)$ - са изузетком коначног броја вредности за n . Њихов метод је био тополошке природе и захтевао је познавање хомолошких прстенова простих Лијевих група, што у то време није било доступно за пет специјалних простих Лијевих група те стога нису могли дати додатне информације о специјалним случајевима. Шест година касније, Борел⁹ је у [11] наставио истраживање конструишући хомогене просторе директно, што га је довело до закључка да је једина сфера са транзитивним дејством групе G која није ортогонална управо $\mathbb{S}^6$ са $G = G_2$. Овим је завршена класификација транзитивних дејстава на сфери и показано је, између осталог, да је G_2 једина специјална Лијева група са таквим дејством.

У међувремену, Кирхоф¹⁰ је 1947. године у [35] уочио да $\mathbb{S}^6$ има скоро комплексну структуру индуковану множењем октониона. У својој главној теорему, Кирхоф је пове-
зао постојање скоро комплексне структуре на $\mathbb{S}^n$ са паралелизабилношћу сфере $\mathbb{S}^{n+1}$.

¹Erich Kähler (1906–2000) - немачки математичар

²Charles Hermite (1822–1901) - француски математичар

³Tullio Levi-Civita (1873–1941) - италијански математичар

⁴exceptional Lie groups

⁵Sophus Lie (1842–1899) - норвешки математичар

⁶Arthur Cayley (1821–1895) - британски математичар

⁷Deane Montgomery (1909–1992) - амерички математичар

⁸Hans Samelson (1916–2005) - немачко-амерички математичар

⁹Armand Borel (1923–2003) - швајцарски математичар

¹⁰Adrian Kirchhoff - швајцарски математичар

Године 1951, Ересман¹¹ и Либерман¹² у [21], као и Екман¹³ и Фролихер¹⁴ у [22], независно су уочили да ова скоро комплексна структура на $\mathbb{S}^6$ није интеграбилна (њихови радови су објављени у истом броју часописа). Док су Екман и Фролихер били фокусирани на формулисање услова интеграбилности и третирали $\mathbb{S}^6$ само као пример где услов није испуњен, циљ Ересмана и Либермана био је локални опис локално хомогених скоро ермитских многострукости помоћу Картанових¹⁵ структурних једначина. Они су открили да те једначине дају посебну структуру за $n = 6$. Стога, чини се да су они први аутори који су повезали транзитивно дејство групе G_2 на $\mathbb{S}^6$ са њеном октонионском скоро комплексном структуром.

Први аутор који је покренуо испитивање многострукости које задовољавају апстрактни услов близу Келерове структуре $(\tilde{\nabla}_X J)X = 0$ био је Тачибана¹⁶ у [56], који је такве многострукости назвао K -просторима и доказао, између осталог, да је њихов Нијенхуисов¹⁷ тензор тотално антисиметричан. Нису разматрани конкретни примери, иако је јасно на основу референци да је инспирација дошла са $\mathbb{S}^6$. Калаби¹⁸ је 1958. године у [13] проучавао хиперповрши у простору имагинарних октониона и показао да индукована скоро комплексна структура никада није интеграбилна ако је хиперповрш компактна. Кото¹⁹ је у [41] наставио испитивање K -простора.

Инспирисан радовима Калабија и Котоа, Греј²⁰ је 1966. у [25] први пут употребио термин близу Келерова многострукост. Ово је означило почетак појављивања $\mathbb{S}^6$ као најпрепознатљивијег примера близу Келерових многострукости.

Случај шестодимензионих близу Келерових многострукости је од посебног значаја јер је Нађ²¹ у раду [45] показао да је свака комплетна строго близу Келерова многострукост локално Риманов²² производ шестодимензионих близу Келерових многострукости, хомогених близу Келерових простора и простора увијања²³ над кватернионским Келеровим многострукостима. Бутруил²⁴ је у [12] показао да постоје тачно четири хомогене, шестодимензионе, строго близу Келерове многострукости и то су: сфера $\mathbb{S}^6$, производ сфера $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^3$ и застава многострукост $F^3 = SU(3)/U(1) \times U(1)$, при чему се метрика на последње три многострукости разликује од стандардне метрике.

Наш фокус биће на сфери $\mathbb{S}^6$. Полазна мотивација за ову сферу произилази из њене везе са октонионима - последњом од четири реалне дивизионе алгебре. Како су кватерниони повезани са $\mathbb{S}^3$, тако су и октониони, највећа дивизиона реална алгебра, повезани са $\mathbb{S}^6$. Међутим, нестандартне особине октониона, попут недистрибутивности и неасоцијативности, онемогућавају постојање класичне комплексне структуре, али ипак омогућавају дефинисање скоро комплексне. Наиме, идентификујући јединичне чисто

¹¹Charles Ehresmann (1905–1979) - француски математичар

¹²Paulette Libermann (1919–2007) - француска математичарка

¹³Beno Eckmann (1917–2008) - швајцарски математичар

¹⁴Alfred Frölicher (1927–2010) - швајцарски математичар

¹⁵Élie Joseph Cartan (1869–1951) - француски математичар

¹⁶Shun-ichi Tachibana - јапански математичар

¹⁷Albert Nijenhuis (1926–2015) - холандско-амерички математичар

¹⁸Eugenio Calabi (1923–2023) - амерички математичар

¹⁹Satoshi Koto - јапански математичар

²⁰Alfred Gray (1939–1998) - амерички математичар

²¹Paul-Andi Nagy - румунски математичар

²²Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) - немачки математичар

²³twistor spaces

²⁴Jean-Baptiste Butruille - француски математичар

имагинарне октонионе са тачкама сфере $\mathbb{S}^6$, добијамо природну G_2 -инваријантну скоро комплексну структуру J . Оваква конструкција омогућава геометријску интерпретацију $\mathbb{S}^6$ као хомогене многострукости $G_2/SU(3)$, што представља један од кључних мотива за дубље проучавање њене структуре. Ова структура није Келерова у класичном смислу, јер не постоји веза са комплексном структуром која би била интеграбилна. Уместо тога, скоро комплексна структура J дефинисана је преко векторског производа чисто имагинарних октониона $\text{Im}\mathbb{O}$. У том контексту, једно од најважнијих отворених питања у геометрији остаје: *да ли $\mathbb{S}^6$ дозвољава комплексну структуру?* Упркос деценијама истраживања, одговор на ово питање је и даље непознат.

Разматрајући подмногострукости близу Келерове сфере $\mathbb{S}^6$, Греј је показао да не постоје комплексне подмногострукости $\mathbb{S}^6$. Неке од специјалних типова подмногострукости скоро ермитских многострукости, дефинисаних у зависности од њиховог односа према скоро комплексној структури J су:

- скоро комплексне – оне код којих је тангентно раслојење J -инваријантно;
- тотално реалне – за које се тангентно раслојење са J слика у нормално;
- CR-подмногострукости – уопштење претходна два случаја, јер се њихово тангентно раслојење може представити као директна ортогонална сума два раслојења, од којих је једно скоро комплексно, а друго тотално реално.

Скоро комплексне подмногострукости сфере $\mathbb{S}^6$ морају бити парне димензије, односно димензије 2 или 4. Греј је показао да не постоје четвородимензионе скоро комплексне подмногострукости унутар $\mathbb{S}^6$, па отуда скоро комплексне подмногострукости сфере $\mathbb{S}^6$ морају бити димензије 2 и називају се скоро комплексне криве. Он је такође доказао да је свака скоро комплексна крива минимална. Берндт, Болтон и Вудвард су у [9] показали да је геометрија скоро комплексних кривих унутар сфере $\mathbb{S}^6$ у блиској вези са Хопфовим хиперповршима у $\mathbb{S}^6$.

У овој дисертацији ћемо се бавити проучавањем хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$. Садржај дисертације обухвата следеће целине: у Глави 1 изложене су основне дефиниције Риманове геометрије, као и Келерових и близу Келерових многострукости. У Глави 2 представљена је близу Келерова структура на сфери $\mathbb{S}^6$, основне формуле подмногострукости са фокусом на хиперповрши и класификација Хопфових хиперповрши. На крају главе представљен је стандардни покретни репер који је усклађен са близу Келеровом структуром, након чега су изведене структурне једначине и везе између коваријантних извода. Ови резултати су оригинални и добијени су у заједничком раду са менторком. У Глави 3 представљени су резултати радова [6], [37] и [38] који се односе на хиперповрши са структурним Јакобијевим оператором који задовољава неке конкретне услове. Глави 4 посвећена је резултатима из рада [39] где су класификоване хиперповрши са условима на оператору облика. Глава 5 бави се класификацијом хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$ са четвородимензионом нул-дистрибуцијом која представља резултате из рада [7].

За већину рачуна у овој дисертацији коришћен је софтвер Wolfram Mathematica.

Глава 1

Основни појмови

1.1 Риманове многострукости и подмногострукости

Тополошка многострукост димензије n је Хаусдорфов¹ тополошки простор M са пребројивом базом који је локално еуклидски², тј. такав да за сваку тачку $p \in M$ постоји отворена околина $U \subset M$ тачке p и хомеоморфизам x којим се U пресликава у отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$. Уколико желимо да нагласимо да је димензија многострукости M једнака n , тада ћемо, ради краћег записивања, у наставку користити ознаку M^n . Пар (U, x) називамо **локалним координатним системом** или **картом**, док се компоненте пресликавања $x(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^n$ називају **координатне функције** или **локалне координате** тачке p у карти (U, x) . Фамилија $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ за коју важи $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ зове се **атлас** многострукости M . Ако за сваке две карте са непразним пресеком (U_α, x_α) и (U_β, x_β) атласа $\mathcal{A}$ важи да је пресликавање

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1}|_{x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

дифеоморфизам класе C^∞ , онда кажемо да је $\mathcal{A}$ **диференцијабилни атлас**. Унија два атласа је поново атлас, а ако се очува и диференцијабилност онда кажемо да су та два атласа **еквивалентна**. Тополошку многострукост заједно са класом еквиваленције диференцијабилних атласа зовемо **диференцијабилна многострукост**.

Кажемо да је $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ **диференцијабилна у тачки** $p \in M$ ако постоји карта (U, x) таква да $p \in U$ и функција $f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$ је диференцијабилна у тачки $x(p) \in \mathbb{R}^n$. Функција f је **диференцијабилна на многострукости** M ако је диференцијабилна у свакој тачки $p \in M$. Скуп функција на M које су диференцијабилне у p ћемо означити са $\mathfrak{D}_p$, док са $\mathfrak{F}(M)$ означавамо скуп свих диференцијабилних функција на M .

Диференцијабилно пресликавање $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ назива се (**диференцијабилна**) **крива** многострукости M и претпоставимо да је $\alpha(0) = p \in M$. **Тангентни вектор** криве α у тачки p је пресликавање $\alpha'(0) : \mathfrak{D}_p \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисано са

$$\alpha'(0)f = (f \circ \alpha)'(0) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathfrak{D}_p.$$

Тангентни вектор многострукости M у тачки p је тангентни вектор у $t = 0$ неке криве $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ такве да је $\alpha(0) = p$. Скуп свих тангентних вектора у p означавамо са $T_p M$. Такође, уколико $X_p \in T_p M$, тада за све $a, b \in \mathbb{R}$ и $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ важи

¹Felix Hausdorff (1868–1942) - немачки математичар

²Еуклид из Александрије (4. век п.н.е) - антички математичар

- $X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$;
- $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$.

Дисјунктну унију тангентних простора, $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$, зове мо **тангентно раслојење** многострукости M и оно такође има структуру диференцијабилне многострукости.

Векторско поље X на многострукости M је глатко пресликавање $X : M \rightarrow TM$ које свакој тачки $p \in M$ додели вектор $X(p) = X_p \in T_p M$. Са $\mathfrak{X}(M)$ ћемо означити скуп свих векторских поља на M .

Линеарна повезаност је пресликавање $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ за које важи:

- (1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- (2) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (3) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,

где су $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

Коваријантни извод функције f у односу на векторско поље X се дефинише са

$$\nabla_X f = Xf.$$

За тензорско поље S типа $(0, k)$ или $(1, k)$, **коваријантни извод** $\nabla_X S$ поља S у односу на $X \in \mathfrak{X}(M)$ дефинише се са

$$(\nabla_X S)(X_1, \dots, X_k) = \nabla_X(S(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k S(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_k),$$

за произвољна векторска поља $X_1, \dots, X_k$. Слично се дефинише коваријантни извод поља типа (l, k) . Тензорско поље S је **паралелно** у односу на линеарну повезаност ∇ ако за свако векторско поље X важи

$$\nabla_X S = 0.$$

За произвољна глатка векторска поља X и Y на M , **Лијев извод векторског поља** Y у правцу векторског поља X је векторско поље $\mathcal{L}_X Y$ дефинисано као Лијева заграда

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y], \quad (1.1)$$

при чему је

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

за произвољно $f \in \mathfrak{F}(M)$. За тензорско поље S типа $(1, 1)$ **Лијев извод оператора** S у правцу X је тензорско поље $(1, 1)$ дефинисано са

$$(\mathcal{L}_X S)(Y) = \mathcal{L}_X(S(Y)) - S(\mathcal{L}_X Y), \quad (1.2)$$

за свако векторско поље Y . Тензорско поље S је **Ли-паралелно** ако за свако векторско поље X важи

$$\mathcal{L}_X S = 0.$$

Тензор торзије линеарне повезаности ∇ је тензорско поље T типа $(1, 2)$ дефинисано са

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

за произвољна $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. За линеарну повезаност кажемо да је **без торзије** уколико је $T(X, Y) = 0$, за све X, Y .

Тензор кривине R линеарне повезаности ∇ је тензорско поље типа $(1, 3)$ дато са

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (1.3)$$

Јакобијев³ оператор у правцу векторског поља $X \in \mathfrak{X}(M)$ дефинишемо као линеаран оператор $R_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ који сваком $Y \in \mathfrak{X}(M)$ придружује

$$R_X(Y) = R(Y, X)X. \quad (1.4)$$

Тензорско поље g типа $(0, 2)$ назива се **Риманова метрика** на M ако је:

- (1) симетрично, тј. $g(X, Y) = g(Y, X)$, за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,
- (2) позитивно дефинитно, тј. $g(X, X) \geq 0$, за $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $g(X, X) = 0$ ако и само ако је $X = 0$.

Многострукост M снабдевена Римановом метриком се назива **Риманова многострукост**. Линеарна повезаност ∇ и метрика g диференцијабилне многострукости M су **компатибилне** ако за произвољна $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ важи

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Линеарна повезаност без торзије ∇ компатибилна са метриком g назива се **Леви-Чивита повезаност**. У овој дисертацији ће све повезаности бити Леви-Чивита.

Користећи тензор кривине R линеарне повезаности ∇ сада дефинишемо њему близак појам за Риманове многострукости. **Риманов тензор кривине** многострукости M је пресликавање $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисано са

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W), \quad (1.5)$$

и задовољава следеће релације

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= -R(Y, X, Z, W), \\ R(X, Y, Z, W) &= -R(X, Y, W, Z), \\ R(X, Y, Z, W) &= R(Z, W, X, Y), \\ R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) &= 0. \end{aligned}$$

Нека су M^m и N^n диференцијабилне многострукости и нека је дато диференцијабилно пресликавање $f : M \rightarrow N$. **Диференцијал** овог пресликавања у тачки $p \in M$ представља линеарно пресликавање $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, које се дефинише на следећи начин: за дати вектор $X_p \in T_p M$, изаберимо криву γ у M тако да је X_p тангентни вектор на γ у тачки $p = \gamma(t_0)$. У том случају, вектор $df_p(X_p)$ је тангентни вектор на криву $f(\gamma)$ у тачки $f(p) = f(\gamma(t_0))$. Може се показати да дефиниција df_p не зависи од избора криве γ . Ако је g глатка функција у околини тачке $f(p)$, односно ако је $g \in \mathfrak{F}(f(p))$, тада важи следећа једнакост:

$$df_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f).$$

³ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) - немачки математичар

Пресликавање $f : M \rightarrow N$ на овај начин индукује линеарно пресликавање $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$. Кажемо да f има **ранг** r у тачки $p \in M$ ако је димензија векторског простора $df_p(T_p M)$ једнака r . Уколико је ранг пресликавања f у свакој тачки једнак димензији многострукости N , онда кажемо да је f **субмерзија**⁴. Пресликавање f назива се **имерзија**⁵ или **потапање** ако је диференцијал df_p инјективан за свако $p \in M$, односно ако је $\dim(df_p(T_p M)) = \dim M$. Тада је $m \leq n$ и разлика $n - m$ назива се **кодимензија имерзије** f . Ако је, додатно, f хомеоморфизам на $f(M) \subset N$, где $f(M)$ има топологију индуковану са N , кажемо да је f **улагање**⁶ или **смештање**. Ако важи $M \subset N$ и инклузија $i : M \hookrightarrow N$ је улагање, кажемо да је M **подмногострукост** од N . У случају када је M подмногострукост од N димензије $m = n - 1$, односно када је димензија M за један мања од димензије N , кажемо да је M **хиперповрш** у N .

Имерзија $f : M \rightarrow N$ Риманових многострукости са метрикама g и $\tilde{g}$ је **изометријска** ако је

$$g(X, Y) = \tilde{g}(df_p(X), df_p(Y)), \quad (1.6)$$

за свако $p \in M$ и $X, Y \in T_p M$. Ако је $f : M \rightarrow N$ имерзија и $\tilde{g}$ Риманова метрика на N , тада (1.6) дефинише Риманову метрику g на M **индуковану** метриком $\tilde{g}$.

Лема 1.1. ([19]) Нека су M^n и $\tilde{M}^n$ Риманове многострукости са Леви-Чивита повезаностима ∇ и $\tilde{\nabla}$. Претпоставимо да постоје коефицијенти c_{ij}^k , $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, такви да за свако $p \in M$ и $\tilde{p} \in \tilde{M}$ постоје ортонормирани рејери $\{E_i\}$ у околини p и $\{\tilde{E}_i\}$ у околини $\tilde{p}$, такви да важи $\nabla_{E_i} E_j = \sum_k c_{ij}^k E_k$ и $\tilde{\nabla}_{\tilde{E}_i} \tilde{E}_j = \sum_k c_{ij}^k \tilde{E}_k$ за све i, j . Тада за свако $p \in M$ и $\tilde{p} \in \tilde{M}$ постоји локална изометрија f која пресликава околину тачке p на околину тачке $\tilde{p}$ и E_i у $\tilde{E}_i$.

Нека је $f : (M, g) \rightarrow (N, \tilde{g})$ изометријска имерзија. Због једноставнијег записа, идентификоваћемо X са његовом сликом $df(X)$, а обе метрике ћемо означавати са g . Тангентна раслојења многострукости M и N означавамо са TM и TN . Ортогонални комплемент TM у TN називамо **нормално раслојење** многострукости M и означавамо га са $T^\perp M$. Тада је

$$TN|_M = TM \oplus T^\perp M. \quad (1.7)$$

За произвољна векторска поља X и Y тангентна на M и Леви-Чивита повезаност $\tilde{\nabla}$ на N , можемо $\tilde{\nabla}_X Y$ разложити као

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (1.8)$$

где тангентна компонента $\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top$ дефинише Леви-Чивита повезаност на M , док симетрично тензорско поље h на M дефинисано са $h(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$, где је $(\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$ нормална компонента, зовемо **друга фундаментална форма** подмногострукости M . Формула (1.8) назива се **Гаусова**⁷ формула.

Оператор облика A_ξ у односу на нормално векторско поље ξ дефинисан је са

$$g(A_\xi X, Y) = g(h(X, Y), \xi), \quad (1.9)$$

⁴ submersion

⁵ immersion

⁶ embedding

⁷ Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) - немачки математичар

где су X и Y тангентна векторска поља на M . Такође, важи

$$g(\tilde{\nabla}_X \xi, Y) = -g(\xi, \tilde{\nabla}_X Y) = -g(\xi, h(X, Y)) = -g(A_\xi X, Y).$$

Дакле, тангентна компонента $\tilde{\nabla}_X \xi$ је $-A_\xi X$. С друге стране, нормална компонента $\nabla_X^\perp \xi = (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp$ дефинише повезаност на $T^\perp M$ коју зовемо **нормална повезаност**. Из овога добијамо **Вајнгартенову**⁸ формулу

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi. \quad (1.10)$$

Дистрибуција димензије k је пресликавање које свакој тачки p многострукости M додељује k -димензиони потпростор $\mathcal{D}(p) \subset T_p M$. Дистрибуција $\mathcal{D}$ је **глатка** ако за сваку тачку p постоји околина U_p и векторска поља $X_1, \dots, X_k$ која у свакој тачки $q \in U_p$ разапињу простор $D(q)$. Тада рестрикцију дистрибуције $\mathcal{D}$ на U_p означавамо са $\text{Span}\{X_1, \dots, X_k\}$. Ако у свакој тачки p многострукости M важи $[X, Y]_p \in \mathcal{D}(p)$ за све $X, Y \in \mathcal{D}(p)$, кажемо да је дистрибуција $\mathcal{D}$ **инволутивна**. Две дистрибуције $\mathcal{D}^1$ и $\mathcal{D}^2$ многострукости M су **комплементарне** ако у свакој тачки $p \in M$ важи $\mathcal{D}_p^1 \oplus \mathcal{D}_p^2 = T_p M$.

Теорема 1.2. Нека су $X_1, X_2, \dots, X_n$ векторска поља многострукости M^n , линеарно независна у тачки $p \in M$ и $[X_i, X_j] = 0$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тада постоји локална координатна околина (U, x) таква да је $X_i|_U = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ако је $\mathcal{D}$ дистрибуција многострукости M , и ако је N подмногострукост од M таква да је $T_q N = \mathcal{D}(q)$ за свако $q \in N$, кажемо да је N **интегрална многострукост** дистрибуције $\mathcal{D}$. У том случају, дистрибуција $\mathcal{D}$ је **интеграбилна**.

Теорема 1.3. (Фробенијус⁹) Нека је $\mathcal{D}$ k -димензиона дистрибуција многострукости M . Тада је дистрибуција $\mathcal{D}$ инволутивна ако и само ако је интеграбилна.

Нул-дистрибуција у тачки $p \in M$ многострукости M дефинисана је са

$$\mathcal{D}(p) = \{X \in T_p M \mid h(X, Y) = 0, \forall Y \in T_p M\}.$$

Коваријантни извод друге фундаменталне форме h дефинишемо са

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z), \quad (1.11)$$

Нека су R и $\tilde{R}$ тензори кривина многострукости M и N . Применом (1.3), (1.8), (1.10) и (1.11) добијамо

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + A_{h(X, Z)}Y - A_{h(Y, Z)}X + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z), \quad (1.12)$$

за произвољна векторска поља X, Y и Z тангентна на M . Сада помоћу (1.5) и (1.9), за произвољно векторско поље W тангентно на M добијамо

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + g(h(X, Z), h(Y, W)) - g(h(Y, Z), h(X, W)). \quad (1.13)$$

Једначина (1.13) зове се **Гаусова једначина**.

⁸ Julius Weingarten (1836–1910) - немачки математичар

⁹Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) - немачки математичар

Такође, посматрајући нормалну компоненту од $\tilde{R}(X, Y)Z$ у једначини (1.12) добијамо Кодацијеву¹⁰ једначину

$$(\tilde{R}(X, Y, Z, W))^{\perp} = (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z). \quad (1.14)$$

Подмногострукост M Риманове многострукости N је **тотално геодезијска** уколико су геодезијске линије многострукости M истовремено и геодезијске линије амбијентне многострукости N или, еквивалентно, ако важи $h = 0$, односно $A_{\xi} = 0$ за свако нормално векторско поље ξ на M .

Ако је за нормално векторско поље ξ на M , A_{ξ} пропорционално идентичком пресликавању, односно

$$A_{\xi} = \rho \text{ Id}$$

за неку функцију $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$, онда је ξ **умбиличко сечење**, а M **умбиличка подмногострукост** у односу на ξ . Ако је M умбиличка у односу на свако нормално векторско поље, онда је M **тотално умбиличка**.

Нека је $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-m}$ ортонормирана база нормалног простора $T_p^{\perp}M$ у тачки $p \in M$, при чему су m и n редом димензије многострукости M и N , и нека је

$$H = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n-m} \text{tr} A_{\xi_k} \xi_k. \quad (1.15)$$

Вектор H је нормалан вектор у тачки p који не зависи од избора ортонормиране базе нормалног простора и назива се **вектором средње кривине**. Подмногострукост M је **минимална** ако је вектор средње кривине једнак нули у свакој тачки, односно уколико је траг оператора облика A_{ξ} једнак нули за произвољно нормално векторско поље ξ .

Нека је $\{E_1, \dots, E_n\}$ локални ортонормирани репер на многострукости M . Симетрично тензорско поље S типа $(0, 2)$ дефинисано формулом

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(E_i, X, Y, E_i)$$

зове се **Ричијево¹¹ тензорско поље**. Помоћу тензора S дефинише се **скаларна кривина** τ многострукости M као скаларна функција

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(E_i, E_i). \quad (1.16)$$

Дефиниције Ричијевог тензора и скаларне кривине не зависе од избора ортонормираног репера.

Нека је Π произвољна дводимензиона раван у тангентном простору $T_p M$ у тачки p многострукости M . За било коју ортонормирану базу $\{X, Y\}$ равни Π , **секциона кривина** уводи се помоћу Римановог тензора кривине R на следећи начин:

$$K_p(\Pi) = R(X, Y, Y, X). \quad (1.17)$$

Вредност $K_p(\Pi)$ не зависи од избора ортонормиране базе у Π . Посебно, ако је секциона кривина $K_p(\Pi)$ иста за све равни $\Pi \subset T_p M$ у свим тачкама $p \in M$, тада кажемо да је M

¹⁰Delfino Codazzi (1824–1873) - италијански математичар

¹¹Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) - италијански математичар

простор константне секционе кривине. Такве многострукости се често називају и **реалне просторне форме**. Реалну просторну форму константне секционе кривине c означавамо са $K(c)$. Тада је тензор кривине многострукости $K(c)$ облика:

$$R(X, Y)Z = c(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y). \quad (1.18)$$

Уколико је тензор кривине $R = 0$, односно ако је M простор кривине 0, кажемо да је M **локално еуклидски простор**.

Нека је M^n Риманова подмногострукост реалне просторне форме $K^m(c)$ константне секционе кривине c и K и τ секциона и скаларна кривина подмногострукости M^n . У раду [14], Чен је увео Риманову инваријанту

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

где је $\inf K$ дефинисано са

$$\inf K(p) = \inf\{K_p(\Pi) \mid \Pi \subset T_p M, \Pi \text{ раван}\},$$

и доказао да важи неједнакост

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c, \quad (1.19)$$

где $\|H\|^2$ означава квадрат норме вектора средње кривине. Овим је, између осталог, дата веза између унутрашње геометрије подмногострукости и њене спољашње геометрије.

У случају када је M минимална подмногострукост сфере $\mathbb{S}^6$, неједнакост (1.19) постаје

$$\delta_M \leq \frac{1}{2}(n+1)(n-2),$$

с обзиром на то да важи $H = 0$ и $c = 1$. Као посебан случај, за скоро комплексну криву S у $\mathbb{S}^6$ добија се $\delta_S \leq 0$.

Теорема 1.4. (Ченова неједнакост, [14])

Нека је M подмногострукост димензије $n \geq 2$ простора $K^m(c)$ константне секционе кривине c . Тада важи

$$\inf K \geq \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{n^2(n-2)}{n-1} \|H\|^2 - (n+1)(n-2)c \right).$$

Једнакост важи ако и само ако постоје ортонормирани покретни рејер $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$, при чему су $e_1, \dots, e_n$ тангентна векторска поља, а $e_{n+1}, \dots, e_m$ нормална векторска поља подмногострукости M , таква да оператори облика A_{e_r} , за $r = n+1, \dots, m$, имају следећи облик:

$$A_{e_{n+1}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{pmatrix}, \quad a + b = \mu, \quad (1.20)$$

$$A_{e_{n_r}} = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \dots & 0 \\ h_{21}^r & h_{22}^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad r = n+2, \dots, m. \quad (1.21)$$

Када се у свакој тачки подмногострукости M постиже једнакост у неједнакости (1.19), каже се да M задовољава **Ченову једнакост**. У том случају, постоји покретни ортонормирани репер у односу на коју су оператори облика дати са (1.20) и (1.21).

Ако су (M_i, g_i) , $i = 1, 2$ Риманове многострукости, $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ канонске пројекције и $\alpha : M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ позитивна, диференцијабилна функција, онда се Риманова многострукост $(M_1 \times M_2, g)$ са метриком

$$g(X, Y) = g_1(\pi_1(X), \pi_1(Y)) + \alpha^2 g_2(\pi_2(X), \pi_2(Y))$$

зове многострукост **уврнутог¹² производа**. Специјално, ако функција α зависи само од компоненте M_1 , онда је многострукост **искривљени¹³ производ**.

Дистрибуција L је **тотално умбиличка** ако постоји векторско поље $H \in L^\perp$ тако да за свако $X, Y \in L$ и $Z \in L^\perp$ важи

$$g(\nabla_X Y, Z) = g(X, Y)g(H, Z).$$

Ако, штавише, важи $g(\nabla_X H, Z) = 0$ за свако $X \in L$, $Z \in L^\perp$, онда је L **сферна**.

Риманова многострукост која допушта две ортогоналне, међусобно комплементарне (интеграбилне) дистрибуције L_1 и L_2 је многострукост уврнутог производа (респективно искривљеног производа) $M_1 \times_\alpha M_2$, где је M_i интегрална многострукост дистрибуције L_i ако и само ако је L_1 тотално геодезијска дистрибуција, а L_2 је умбиличка (респективно сферна) дистрибуција.

1.2 Келерове и близу Келерове многострукости

Хаусдорфов простор M са пребројивом базом назива се **комплексна многострукост** (комплексне) димензије n ако задовољава следеће особине:

(1) постоји отворен прекривач $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ скупа M такав да за свако α постоји хомеоморфизам

$$\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n;$$

(2) за свака два $\alpha, \beta \in A$ таква да су U_α и U_β са непразним пресеком, пресликавање

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

је бихоломорфно.

Скуп $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ назива се **систем холоморфних координатних околина**.

¹²twisted-product manifold

¹³warped-product manifold

Идентификујући локалне комплексне координате $(z_1, \dots, z_n)$ са $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, где је $z_i = x_i + y_i i$, $i = 1, \dots, n$, многострукост M можемо посматрати као $2n$ -димензиону диференцијабилну многострукост коју ћемо означити са $M_{\mathbb{R}}$. Тада тангентни простор $TM_{\mathbb{R}}$ има природну локалну покретну базу $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$. Дефинишемо пресликавање J на следећи начин:

$$J \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad J \frac{\partial}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.22)$$

Оно дефинише изоморфизам $J : TM_{\mathbb{R}} \rightarrow TM_{\mathbb{R}}$ који задовољава услов $J^2 = -\text{Id}$, где је Id идентичко пресликавање тангентног раслојења реалне многострукости $M_{\mathbb{R}}$. Пресликавање J зовемо **(природна) скоро комплексна структура** на многострукости M .

Диференцијабилна многострукост $\widetilde{M}$ је **скоро комплексна многострукост** ако постоји линеарно пресликавање $\widetilde{J} : T\widetilde{M} \rightarrow T\widetilde{M}$ такво да је $\widetilde{J}^2 = -\text{Id}$. тада се $\widetilde{J}$ назива **скоро комплексна структура** на $\widetilde{M}$. Скоро комплексне многострукости су парнодимензионе и оријентабилне.

Напомена 1. *Приметимо да парно димензиона диференцијабилна многострукост не мора нужно дозвољавати скоро комплексну структуру. Познато је, на пример, да сфера $\mathbb{S}^4$ не поседује скоро комплексну структуру.*

Комплексна многострукост M дозвољава скоро комплексну структуру природно индуковану комплексном структуром, дату релацијам (1.22), па је самим тим и скоро комплексна многострукост. Што се тиче обрата, скоро комплексна многострукост $\widetilde{M}$ са скоро комплексном структуром $\widetilde{J}$ дозвољава комплексну структуру и $\widetilde{J}$ је скоро комплексна структура природно индукована том комплексном структуром ако и само ако се **Нијенхуисов тензор**

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

поништава идентички. Ако важи овај услов, кажемо да је скоро комплексна структура J **интеграбилна**.

Напомена 2. *Сфере $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^6$ су једине сфере које доушћају скоро комплексну структуру. Сфера $\mathbb{S}^2$ очигледно јесте комплексна многострукост док је питање да ли на сфери $\mathbb{S}^6$ постоји комплексна структура и даље отворено. Специјално, остале парнодимензионе сфере нису комплексне многострукости.*

Нека је (M, g) Риманова многострукост са скоро комплексном структуром J . Ако Риманова метрика g задовољава релацију

$$g(X, Y) = g(JX, JY), \quad X, Y \in TM,$$

онда је g **ермитска метрика** и скоро комплексна многострукост M са ермитском метриком g се зове **скоро ермитска многострукост**. Приметимо да на M сигурно постоји бар једна ермитска метрика $\widetilde{g}$ коју природно можемо добити из скоро комплексне структуре J и Риманове метрике g на следећи начин:

$$\widetilde{g}(X, Y) = \frac{1}{2}[g(X, Y) + g(JX, JY)], \quad X, Y \in TM.$$

Нека је (M, g) скоро ермитска многострукост са скоро комплексном структуром J и Леви-Чивита повезаношћу ∇ . **Фундаментална 2-форма** или **Келерова форма** Ω на M дефинисана је са

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y), \quad X, Y \in TM. \quad (1.23)$$

Диференцирањем добијамо

$$\begin{aligned} (\nabla_X \Omega)(Y, Z) &= \nabla_X(\Omega(Y, Z)) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla_X(g(JY, Z)) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z) \\ &= g((\nabla_X J)Y, Z), \end{aligned}$$

одакле следи да је Ω паралелна у односу на ∇ ако и само ако је

$$(\nabla_X J)Y = 0, \quad X, Y \in TM. \quad (1.24)$$

Скоро ермитска многострукост чија скоро комплексна структура J задовољава (1.24) назива се **Келерова** многострукост. Уколико важи слабији услов

$$(\nabla_X J)X = 0, \quad X \in TM, \quad (1.25)$$

кажемо да је M **близу Келерова** многострукост. Свака Келерова многострукост је очигледно и близу Келерова, док близу Келерове многострукости које нису Келерове називамо **строго близу Келерове**.

У [45] је показано да је комплетна строго близу Келерова многострукост локално Риманов производ шестодимензионих близу Келерових многострукости, хомогених близу Келерових простора и простора увијања над кватернионским Келеровим многострукостима. Бутруил је у [12] доказао да постоје тачно четири шестодимензионе хомогене близу Келерове многострукости:

- 1) шестодимензиона сфера $\mathbb{S}^6 = G_2/SU(3)$;
- 2) производ многострукост $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 = SU(2) \times SU(2)/1$;
- 3) комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^3 = Sp(2)/SU(2) \times U(1)$;
- 4) застава многострукост $\mathbb{F}^3 = SU(3)/U(1) \times U(1)$.

Притом, само је сфера $\mathbb{S}^6$ уложена са стандардном метриком.

Глава 2

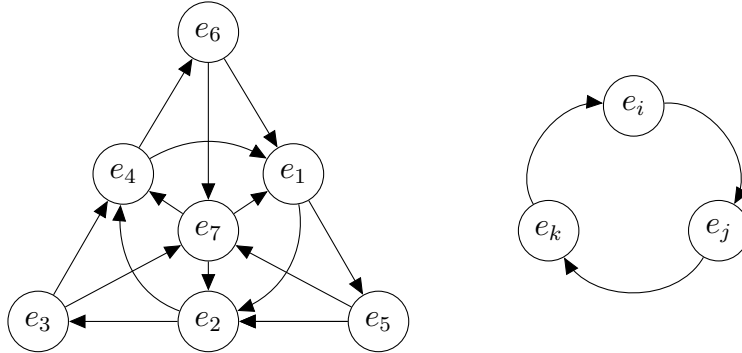
Близу Келерова сфера $\mathbb{S}^6$

2.1 Октониони и близу Келерова структура на $\mathbb{S}^6$

Алгебра $\mathcal{A}$ је **дивизиона** алгебра ако не садржи делитеље нуле, тј. ако за произвољне $a, b \in \mathcal{A}$ важи $ab = 0$, онда је $a = 0$ или $b = 0$. **Кејлијеви бројеви** или **октониони** $\mathbb{O}$ су последња дивизиона алгебра у Кејли-Диксоновом низу. Ако са $\mathbb{H}$ означимо алгебру кватерниона, онда је $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ Кејлијева алгебра над $\mathbb{R}$ са множењем које је дефинисано са

$$(p_1, q_1)(p_2, q_2) = (p_1p_2 - q_2^*q_1, q_2p_1 + q_1p_2^*), \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{H},$$

где је конјуговање дато са $(p, q)^* = (p^*, -q)$. Ако са $\{1, i, j, k\}$ означимо стандардну базу алгебре $\mathbb{H}$, онда $\{e_0 = (1, 0), e_1 = (i, 0), e_2 = (j, 0), e_3 = (k, 0), e_4 = (0, 1), e_5 = (0, i), e_6 = (0, j), e_7 = (0, k)\}$ формирају ортонормирану базу алгебре $\mathbb{O}$, а множење је дато следећим дијаграмом:



Овај граф зове се **Фаноова равна** и састоји се од 7 елемената и 7 линија. Линије су странице троугла, висине и круг који садржи подножја висина. Кроз сваки елемент иду тачно три линије и на свакој линији налази се тачно три елемента која су циклично уређена стрелицом. Ако су e_i, e_j и e_k циклично уређени на овај начин, онда је

$$e_i e_j = e_k, \quad e_j e_i = -e_k.$$

Кејлијево множење на $\text{Im}\mathbb{O} = \{u \in \mathbb{O} \mid u + u^* = 0\} \cong \mathbb{R}^7$ дефинише стандардну метрику $\langle, \rangle$ у $\mathbb{R}^7$

$$\langle u, v \rangle = -\text{Re}(uv) = -\frac{1}{2}(uv + vu), \quad (2.1)$$

а такође дефинишемо и **векторски $\times$ производ** у $\mathbb{R}^7$ на следећи начин:

$$u \times v = \text{Im}(uv) = \frac{1}{2}(uv - vu). \quad (2.2)$$

Овај векторски производ је добро дефинисан у простору $\mathbb{R}^7$, тј. овај производ је чисто имагинаран за чисто имагинарне октонионе. Табела множења $e_i \times e_j$ дата је са

$\times$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

Релације из ове табеле краће можемо записати као

$$e_3 = e_1 \times e_2, \quad e_5 = e_1 \times e_4, \quad e_6 = e_2 \times e_4, \quad e_7 = e_3 \times e_4.$$

Свака ортонормирана база која задовољава релације дате у овој табели назива се G_2 -база или канонска база. Стандардна база простора $\mathbb{R}^7$ је канонска база.

Напомена 3. Нека су e_1, e_2 и e_4 међусобно ортогонални јединични вектори такви да је e_4 ортогоналан и на $e_1 \times e_2$. Тада e_1, e_2 и e_4 одређују јединствену канонску базу $e_1, \dots, e_7$ и важи релација

$$e_i \times (e_j \times e_k) + (e_i \times e_j) \times e_k = 2\delta_{ik}e_j - \delta_{ij}e_k - \delta_{jk}e_i,$$

где су δ_{ij} Кронекерови¹ симболи.

Лема 2.1. Нека је D Леви-Чивити повезаност у $\mathbb{R}^7$. Тада је

$$D_X(Y \times Z) = D_X Y \times Z + Y \times D_X Z. \quad (2.3)$$

Доказ. Посматрајмо векторска поља $e_1, \dots, e_7$ таква да је $\{e_1(x), \dots, e_7(x)\}$ канонска база простора $\mathbb{R}^7$ за свако x . Тада је $D_{e_i}e_j = 0$, па, тривијално, важи

$$D_{e_i}(e_j \times e_k) = D_{e_i}e_j \times e_k + e_j \times D_{e_i}e_k,$$

а самим тим и

$$D_X(e_j \times e_k) = D_X e_j \times e_k + e_j \times D_X e_k.$$

Произвољна векторска поља Y и Z у овој бази можемо записати као $Y(x) = \sum_{i=1}^7 Y_i(x)e_i(x)$ и $Z(x) = \sum_{j=1}^7 Z_j(x)e_j(x)$. Тада је

$$D_X(Y \times Z) = \sum_{i,j=1}^7 D_X(Y_i(x)Z_j(x))e_i \times e_j + \sum_{i,j=1}^7 Y_i(x)Z_j(x)D_X(e_i \times e_j)$$

¹Leopold Kronecker (1823--1891) - немачки математичар

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i,j=1}^7 D_X(Y_i(x))Z_j(x)e_i \times e_j + \sum_{i,j=1}^7 Y_i(x)D_X(Z_j(x))e_i \times e_j \\
 &+ \sum_{i,j=1}^7 Y_i(x)Z_j(x)(D_X e_i) \times e_j + \sum_{i,j=1}^7 Y_i(x)Z_j(x)e_i \times (D_X e_j) \\
 &= D_X Y \times Z + Y \times D_X Z,
 \end{aligned}$$

што је и требало доказати. $\square$

Лема 2.2. Нека $u, v, w \in \text{Im } \mathbb{O}$. Тада је:

- а) $u \times v = -v \times u$;
 - б) $uv = u \times v - \langle u, v \rangle$;
 - в) Ако су u и v ортогонални, при чему је u јединични, тада $u \times (u \times v) = -v$;
 - џ) $u \times v$ је ортогоналан и на u и на v ;
 - г) $u \times (v \times w) + (u \times v) \times w = 2\langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w - \langle w, v \rangle u$;
 - ђ) $\langle u \times v, w \rangle$ је косо-симетричан по u, v и w .
- (2.4)

Доказ. Особине а) и б) директно следе из дефиниција скаларног и векторског производа:

$$\begin{aligned}
 u \times v &= \frac{1}{2}(uv - vu) = -\frac{1}{2}(vu - uv) = -v \times u, \\
 u \times v - \langle u, v \rangle &= \frac{1}{2}(uv - vu) + \frac{1}{2}(uv + vu) = uv.
 \end{aligned}$$

Даље се једноставно добија да за канонске векторе важи $e_i \times (e_i \times e_j) = -e_j$ и $\langle e_i \times e_j, e_i \rangle = 0$, па тврђења в) и џ) следе из линеарности израза по u и v .

Слично се доказују и последња два тврђења. $\square$

Нека је g метрика на $\mathbb{S}^6$ индукована стандардном метриком $\langle, \rangle$ на $\mathbb{R}^7$. Тада је

$$\mathbb{S}^6 = \{X \in \mathbb{R}^7 \mid \langle X, X \rangle = 1\}.$$

Она представља шестодимензиону подмногострукост у простору $\mathbb{R}^7$. Нека су D и $\tilde{\nabla}$ повезаности на $\mathbb{R}^7$ и $\mathbb{S}^6$ респективно, док су $\tilde{R}$ и $\tilde{h}$ тензор кривине и друга фундаментална форма на $\mathbb{S}^6$. Ако са N означимо јединично нормално векторско поље на $\mathbb{S}^6$ као подмногогострукости у $\mathbb{R}^7$, при чему тачку на сфери идентификујемо са одговарајућим вектором положаја, тада је

$$N(X) = -X, \quad X \in \mathbb{S}^6.$$

За произвољну хиперповрш $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, дефинишимо Гаусово пресликавање $\mathcal{G} : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ на следећи начин: за сваку тачку $p \in M^n$, вредност $\mathcal{G}(p)$ је крајња тачка јединичног нормалног вектора $N(p)$ у p , чији почетак лежи у координатном почетку. Како су тангентни простори $T_p M^n$ и $T_{\mathcal{G}(p)} \mathbb{S}^n$ паралелни, диференцијал Гаусовог пресликавања можемо посматрати као линеарни оператор $(\mathcal{G}_*)_p : T_p M^n \rightarrow T_p M^n$. Специјално, када је $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, за сваку тачку $p \in M^2$ оператор облика $(\mathcal{G}_*)_p : T_p M^2 \rightarrow T_p M^2$ може се представити симетричном 2×2 матрицом $[\mathcal{G}_*]$. Гаусова кривина површи M^2 у тачки p дефинише се као детерминанта ове матрице:

$$K = \det [\mathcal{G}_*]. \quad (2.5)$$

Приметимо да за $M = \mathbb{S}^6$ и одговарајуће Гаусово пресликавање $\mathcal{G} : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^6$ важи $\mathcal{G} = -\text{Id}$, где је Id идентичко пресликавање сфере.

Гаусова (1.8) и Вајнгартенова (1.10) формула имају следећи облик:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{h}(X, Y), \quad (2.6)$$

$$D_X N = -\tilde{A}_N X + \tilde{\nabla}_X^\perp N, \quad (2.7)$$

где су $X, Y \in T\mathbb{S}^6$, $N \in T^\perp\mathbb{S}^6$, $\tilde{\nabla}^\perp$ је нормална повезаност, а $\tilde{A}_N$ је оператор облика у односу на N . Тада на основу (1.9) за оператор облика $\tilde{A}_N$ и другу фундаменталну форму $\tilde{h}$ важи

$$g(\tilde{A}_N X, Y) = g(\tilde{h}(X, Y), N). \quad (2.8)$$

Користећи (2.8) и (2.6) добијамо

$$\begin{aligned} g(\tilde{A}_N X, Y) &= g(\tilde{h}(X, Y), N) = g(D_X Y, N) - g(\tilde{\nabla}_X Y, N) \\ &= D_X(g(Y, N)) - g(Y, D_X N) = -g(D_X N, Y), \end{aligned}$$

тј. важи $\tilde{A}_N X = -D_X N$, па је $\tilde{\nabla}_X^\perp N = 0$, односно формула (2.7) постаје

$$D_X N = -\tilde{A}_N X. \quad (2.9)$$

Нека је $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^6$ крива чији је тангентни вектор у тачки $\gamma(0)$ једнак $\gamma'(0) = X$. Тада

$$\mathcal{G}_*(X) = \frac{d}{dt}(N \circ \gamma(t))\big|_{t=0} = D_X N = -\tilde{A}_N X,$$

па је $\tilde{A}_N X = X$, што значи да је сфера тотално умбиличка и да важи

$$D_X N = -X,$$

односно

$$D_X p = X, \quad (2.10)$$

где је p позиционо векторско поље, тј. $p = -N$. Из (2.8) добијамо и

$$\tilde{h}(X, Y) = g(\tilde{A}_N X, Y)N = g(X, Y)N = -g(X, Y)p. \quad (2.11)$$

За произвољну тачку $p \in \mathbb{S}^6$ и $X \in T_p\mathbb{S}^6$ дефинишемо $(1, 1)$ -тензорско поље J са

$$J_p X = p \times X.$$

На основу претходне леме добијамо да је $J_p X$ ортогонално на p , па $J_p X \in T_p\mathbb{S}^6$ и $J_p^2 X = p \times (p \times X) = -X$. Лако се показује да важи и $g(JX, JY) = g(X, Y)$, па је J скоро комплексна структура на $\mathbb{S}^6$ компатибилна са метриком g , односно ермитска.

Посматрајмо сада тензорско поље G на $\mathbb{S}^6$ дефинисано са

$$G(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X J)Y.$$

Нека је p позиционо векторско поље тачака на сфери. Користећи (2.3) уз Гаусову формулу за хиперповрш $\mathbb{S}^6$ у $\mathbb{R}^7$ добијамо

$$\begin{aligned} G(X, Y) &= \tilde{\nabla}_X(JY) - J\tilde{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X(p \times Y) - J\tilde{\nabla}_X Y \\ &= D_X(p \times Y) - \tilde{h}(X, p \times Y) - J\tilde{\nabla}_X Y \\ &= D_X p \times Y + p \times D_X Y + g(X, p \times Y)p - p \times \tilde{\nabla}_X Y \\ &= X \times Y + g(X, p \times Y)p + p \times (D_X Y - J\tilde{\nabla}_X Y) \\ &= X \times Y + g(X, p \times Y)p. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Теорема 2.3. Тензорско поље G задовољава следеће једначине:

$$a) \quad G(X, X) = 0, \quad (2.13)$$

$$б) \quad G(X, Y) + G(Y, X) = 0, \quad (2.14)$$

$$в) \quad G(X, JY) + JG(X, Y) = 0, \quad (2.15)$$

$$\bar{е}) \quad g(G(X, Y), Z) + g(G(X, Z), Y) = 0, \quad (2.16)$$

$$г) \quad (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) = g(X, Z)JY - g(X, Y)JZ - g(JY, Z)X, \quad (2.17)$$

$$\tilde{г}) \quad (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_X G)(JY, JZ) = JG(G(X, Y), Z) + JG(Y, G(X, Z)), \quad (2.18)$$

$$е) \quad G(X, G(Y, Z)) = g(X, Z)Y - g(X, Y)Z + g(JX, Z)JY - g(Y, JX)JZ, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} жс) \quad g(G(X, Y), G(Z, W)) &= g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Z, Y) \\ &\quad + g(JX, Z)g(Y, JW) - g(JX, W)g(Y, JZ). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Доказ. а) На основу (2.12) имамо

$$G(X, X) = X \times X + g(X, p \times X)p = 0.$$

Из (2.2) следи да је први сабирак нула, а други је нула на основу Леме 2.2.

б) Из (2.12), користећи Лему 2.2, добијамо

$$G(X, Y) + G(Y, X) = X \times Y + g(X, p \times Y)p + Y \times X + g(Y, p \times X)p = 0.$$

в) Користећи (2.4) добијамо

$$\begin{aligned} X \times (p \times Y) &= (X \times Y) \times p - 2g(X, p)Y + g(X, Y)p + g(p, Y)X \\ &= -p \times (X \times Y) + g(X, Y)p, \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} G(X, JY) + JG(X, Y) &= X \times (JY) + g(X, p \times (JY))p + J((X \times Y) + g(X, p \times Y)p) \\ &= X \times (p \times Y) + g(X, p \times (p \times Y))p + p \times (X \times Y) + p \times (g(X, p \times Y)p) \\ &= -p \times (X \times Y) + g(X, Y)p - g(X, Y)p + p \times (X \times Y) = 0. \end{aligned}$$

$\bar{е})$ Користећи (2.12) добијамо

$$\begin{aligned} g(G(X, Y), Z) + g(G(X, Z), Y) &= g(X \times Y + g(X, p \times Y)p, Z) + g(X \times Z + g(X, p \times Z)p, Y) \end{aligned}$$

$$= g(X \times Y, Z) + g(X \times Z, Y) = 0.$$

g) Приметимо да је

$$(\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) = \tilde{\nabla}_X(G(Y, Z)) - G(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \tilde{\nabla}_X Z).$$

Сада је

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y G)(X, Z) \\ &= \tilde{\nabla}_X(G(Y, Z)) - G(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \tilde{\nabla}_X Z) - \tilde{\nabla}_Y(G(X, Z)) + G(\tilde{\nabla}_Y X, Z) + G(X, \tilde{\nabla}_Y Z) \\ &= \tilde{\nabla}_X((\tilde{\nabla}_Y J)Z) - (\tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_X Y} J)Z - (\tilde{\nabla}_Y J)\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X J)Z + (\tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_Y X} J)Z + (\tilde{\nabla}_X J)\tilde{\nabla}_Y Z \\ &= \tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y(JZ)) - \tilde{\nabla}_X(J\tilde{\nabla}_Y Z) - \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_X Y}(JZ) + J(\tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_X Y} Z) - \tilde{\nabla}_Y(J\tilde{\nabla}_X Z) + J\tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X Z) \\ &\quad - \tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X(JZ)) + \tilde{\nabla}_Y(J\tilde{\nabla}_X Z) + \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_Y X}(JZ) - J\tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_Y X} Z + \tilde{\nabla}_X(J\tilde{\nabla}_Y Z) - J(\tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y Z)) \\ &= \tilde{R}(X, Y)JZ - J\tilde{R}(X, Y)Z \\ &= g(Y, JZ)X - g(X, JZ)Y - g(Y, Z)JX + g(X, Z)JZ. \end{aligned}$$

Специјално за $Z = X$, с обзиром да је $(\tilde{\nabla}_Y G)(X, X) = 0$, имамо

$$(\tilde{\nabla}_X G)(Y, X) = g(Y, JX)X - g(Y, X)JX + g(X, X)JY,$$

одакле линеаризацијом добијамо

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_{X+Z} G)(Y, X+Z) \\ &= g(Y, J(X+Z))(X+Z) - g(Y, X+Z)J(X+Z) + g(X+Z, X+Z)JY. \end{aligned}$$

Леву страну можемо израчунати и као

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_X G)(Y, X) + (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, X) + (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, Z) \\ &= g(Y, JX)X - g(Y, X)JX + g(X, X)JY + (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) \\ &\quad + (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, X) + g(Y, JZ)Z - g(Y, Z)JZ + g(Z, Z)JY. \end{aligned}$$

па сада изједначавањем десних страна добијамо

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, X) \\ &= g(Y, JX)Z + g(Y, JZ)X - g(Y, X)JZ - g(Y, Z)JX + g(X, Z)JY + g(Z, X)JY. \end{aligned}$$

Како додатно важи и

$$(\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Z G)(Y, X) = -g(Z, JY)X + g(X, JY)Z + g(Z, Y)JX - g(X, Y)JZ,$$

сабирањем ове две једначине добијамо

$$(\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) = g(Y, JZ)X + g(X, Z)JY - g(X, Y)JZ.$$

ђ) Из дефиниције тензорског поља G и (2.14) и (2.15) добијамо

$$\begin{aligned} & (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_X G)(JY, JZ) \\ &= (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) + \tilde{\nabla}_X(G(JY, JZ)) - G(\tilde{\nabla}_X(JY), JZ) - G(JY, \tilde{\nabla}_X(JZ)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\tilde{\nabla}_X G)(Y, Z) - \tilde{\nabla}_X(G(Y, Z)) - G(\tilde{\nabla}_X(JY), JZ) - G(JY, \tilde{\nabla}_X(JZ)) \\
 &= -G(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \tilde{\nabla}_X Z) - G(\tilde{\nabla}_X(JY), JZ) - G(JY, \tilde{\nabla}_X(JZ)) \\
 &= -G(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - G(Y, \tilde{\nabla}_X Z) - G(G(X, Y) + J\tilde{\nabla}_X Y, JZ) - G(JY, G(X, Z) + J\tilde{\nabla}_X Z) \\
 &= JG(G(X, Y), Z) + JG(Y, G(X, Z)).
 \end{aligned}$$

е) На основу (2.17) и (2.18) имамо

$$\begin{aligned}
 &-G(G(X, Y), Z) + G(G(X, Z), Y) = -[G(G(X, Y), Z) + G(Y, G(X, Z))] \\
 &= g(Y, JZ)JX - g(X, Z)Y + g(X, Y)Z - g(JY, Z)JX - g(X, JZ)JY + g(X, JY)JZ.
 \end{aligned}$$

Специјално, за $X = Z$ добијамо

$$-G(G(X, Y), X) = g(Y, JX)JX - g(X, X)Y + g(X, Y)X,$$

а ако X заменимо са $X + Z$ добијамо

$$\begin{aligned}
 &G(G(X, Y), X) + G(G(X, Y), Z) + G(G(Z, Y), X) + G(G(Z, Y), Z) \\
 &= G(G(X, Y), X) + G(G(Z, Y), Z) \\
 &+ 2g(X, Z)Y - g(X, Y)Z - g(Z, Y)X - g(Y, JX)JZ - g(Y, JZ)JX.
 \end{aligned}$$

Одузимањем два претходна израза добијамо

$$\begin{aligned}
 &2G(G(Y, Z), X) \\
 &= \left[G(G(Y, Z), X) - G(G(Y, X), Z) \right] - \left[-G(G(Y, Z), X) - G(G(Y, X), Z) \right] \\
 &= -2g(JX, Z)JY + 2g(Y, JX)JZ + 2g(X, Y)Z - 2g(X, Z)Y
 \end{aligned}$$

из чега непосредно следи тврђење.

жс) На основу (2.16) и (2.19) следи

$$\begin{aligned}
 &g(G(X, Y), G(Z, W)) = -g(G(X, G(Z, W)), Y) = \\
 &= -g\left(g(JX, W)JZ - g(Z, JX)JW - g(X, Z)W + g(X, W)Z, Y\right) \\
 &= g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Z, Y) + g(JX, Z)g(Y, JW) - g(JX, W)g(Y, JZ).
 \end{aligned}$$

□

Приметимо да на основу (2.13) следи да је J близу Келерова структура на $\mathbb{S}^6$.

2.2 Подмногострукости сфере $\mathbb{S}^6$

У зависности од односа према скоро комплексној структури J на $\mathbb{S}^6$, подмногострукост M је:

- **тотално реална**, ако $(\forall p \in M) \ J(T_p M) \subseteq T_p^\perp M$, тј. J пресликава тангентно раслојење у нормално;
- **скоро комплексна**, ако $(\forall p \in M) \ J(T_p M) \subseteq J(T_p M)$, тј. тангентно раслојење је J -инваријантно.

- **CR-подмногострукост**, ако је тангентно раслојење TM директна сума два ортогонална раслојења од којих је једно J -инваријантно, док се друго са J слика у нормално.

Скоро комплексне подмногострукости $\mathbb{S}^6$ морају бити парнодимензионе, дакле димензије 2 или 4. Међутим, Греј је у [27] доказао следећу теорему:

Теорема 2.4. *У односу на стандардну скоро комплексну структуру, у $\mathbb{S}^6$ не постоје четвородимензионе скоро комплексне подмногострукости.*

Површ M у јединичној сфери $\mathbb{S}^n$ у $\mathbb{R}^{n+1}$ назива се **линеарно потпуном** ако није садржана у тотално геодезијској хиперсфери $\mathbb{S}^{n-1}$ у $\mathbb{S}^n$. Поред тога, површ M у $\mathbb{S}^{2m}$ је **суперминимална** ако представља слику хоризонталне холоморфне криве у ермитском хомогеном простору $SO(2m+1)/U(m)$ при Римановој субмерзији $\pi : SO(2m+1)/U(m) \rightarrow \mathbb{S}^{2m}$, која је индукована инклузијом $U(m)$ у $SO(2m+1)$.

Скоро комплексна крива у $\mathbb{S}^6$ је неконстантна глатка имерзија $f : M^2 \rightarrow \mathbb{S}^6$ чији диференцијал је комплексно линеаран. У [10] је показано да се скоро комплексне криве у $\mathbb{S}^6$ могу поделити на следеће типове:

- (i) линеарно потпуне у $\mathbb{S}^6$ и суперминималне;
- (ii) линеарно потпуне у $\mathbb{S}^6$ али не и суперминималне;
- (iii) линеарно потпуне у некој тотално геодезијској $\mathbb{S}^5$ у $\mathbb{S}^6$ (па нису суперминималне);
- (iv) тотално геодезијске.

Нека је M оријентабилна хиперповрш сфере $\mathbb{S}^6$ и нека је N јединично нормално векторско поље на M . Означимо са ∇ , $\tilde{\nabla}$ и D редом повезаности на M , $\mathbb{S}^6$ и $\mathbb{R}^7$.

Како је $g(N, N) = 1$, за произвољно векторско поље X тангентно на M , диференцирањем добијамо $0 = \tilde{\nabla}_X(g(N, N)) = 2g(\tilde{\nabla}_X N, N)$, па следи да је $g(\nabla_X^\perp N, N) = 0$, тј.

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X. \quad (2.21)$$

Тензор кривине Риманове повезаности D је једнак нули, односно важи

$$0 = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z.$$

Применом Гаусове и Вајнгартенове формуле (2.6) и (2.7) на $\mathbb{S}^6$ и $\mathbb{R}^7$, као и формула (2.11) и (2.10), добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= D_X(\tilde{\nabla}_Y Z - g(Y, Z)p) - D_Y(\tilde{\nabla}_X Z - g(X, Z)p) - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z + g([X, Y], Z)p \\ &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - g(X, \tilde{\nabla}_Y Z)p - (D_X g)(Y, Z)p - g(Y, Z)D_X p \\ &\quad - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z + g(Y, \tilde{\nabla}_X Z)p + (D_Y g)(X, Z)p + g(X, Z)D_Y p - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z + g([X, Y], Z)p. \end{aligned}$$

Како је

$$g(X, \tilde{\nabla}_Y Z) = (\tilde{\nabla}_Y g)(X, Z) - g(\tilde{\nabla}_Y X, Z) = -g(\tilde{\nabla}_Y X, Z),$$

важи

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z + g(\tilde{\nabla}_Y X - \tilde{\nabla}_X Y + [X, Y], Z)p - g(Y, Z)X + g(X, Z)Y = 0,$$

па је

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z - g(Y, Z)X + g(X, Z)Y = 0. \quad (2.22)$$

Применом Гаусове и Вајнгартенове формуле (1.8) и (1.10) за подмногострукост M у сфери $\mathbb{S}^6$, за произвољна векторска поља X , Y и Z тангентна на M , добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + h(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + h(X, Z)) \\ &\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - h([X, Y], Z) - g(Y, Z)X + g(X, Z)Y \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + h(X, \nabla_Y Z) - A_{h(Y, Z)}X + \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - \nabla_Y \nabla_X Z - h(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad + A_{h(X, Z)}Y - \nabla_Y^\perp(h(X, Z)) - \nabla_{[X,Y]} Z - h([X, Y], Z) - g(Y, Z)X + g(X, Z)Y. \end{aligned}$$

Посматрањем појединачно тангентне и нормалне компоненте, долазимо до

$$R(X, Y)Z - A_{h(Y, Z)}X + A_{h(X, Z)}Y - g(Y, Z)X + g(X, Z)Y = 0, \quad (2.23)$$

$$h(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - h(Y, \nabla_X Z) - \nabla_Y^\perp(h(X, Z)) - h([X, Y], Z) = 0. \quad (2.24)$$

Уз помоћ релација (2.22) и (1.3), једначину (2.23) можемо записати у следећем облику:

$$\tilde{R}(X, Y)Z - R(X, Y)Z = A_{h(X, Z)}Y - A_{h(Y, Z)}X.$$

Сада, применом формула (1.5) и (1.9), за произвољно векторско поље W тангентно на M , добијамо Гаусову једначину

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W) \\ &\quad + g(h(X, W), h(Y, Z)) - g(h(X, Z), h(Y, W)), \end{aligned} \quad (2.25)$$

Пошто је $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, једначина (2.24) постаје

$$\nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) = \nabla_Y^\perp(h(X, Z)) - h(\nabla_Y X, Z) - h(X, \nabla_Y Z).$$

Ако сада означимо $(\nabla h)(X, Y, Z) = \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$, добијамо Кодацијеву једначину

$$(\nabla h)(X, Y, Z) = (\nabla h)(Y, X, Z). \quad (2.26)$$

На основу (1.9) знамо да за оператор облика $A_N = A$ и другу фундаменталну форму h важи

$$g(h(Y, Z), N) = g(AY, Z) = g(Y, AZ).$$

Диференцирањем и применом једнакости (2.21) добијамо

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(g(AY, Z)) &= \tilde{\nabla}_X(g(h(Y, Z), N)) = g(\tilde{\nabla}_X h(Y, Z), N) + g(h(Y, Z), \tilde{\nabla}_X N) \\ &= g(\nabla_X^\perp h(Y, Z), N) + g(h(Y, Z), -A_N X) = g(\nabla_X^\perp h(Y, Z), N), \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} (\nabla h)(X, Y, Z) &= \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X^\perp(h(Y, Z)), N)N - g(h(\nabla_X Y, Z), N)N - g(h(Y, \nabla_X Z), N)N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\tilde{\nabla}_X(g(AY, Z)) - g(h(\nabla_X Y, Z), N) - g(h(Y, \nabla_X Z), N) \right) N \\
 &= (\nabla_X(g(AY, Z)) - g(A\nabla_X Y, Z) - g(AY, \nabla_X Z)) N \\
 &= (g(\nabla_X(AY), Z) + g(AY, \nabla_X Z) - g(A\nabla_X Y, Z) - g(AY, \nabla_X Z)) N \\
 &= (g(\nabla_X(AY), Z) - g(A\nabla_X Y, Z)) N.
 \end{aligned}$$

Сада, Кодацијева једначина (2.26) може се записати у следећем облику:

$$\begin{aligned}
 (\nabla h)(X, Y, Z) &= (\nabla h)(Y, X, Z), \quad \forall Z \\
 g(\nabla_X(AY), Z) - g(A\nabla_X Y, Z) &= g(\nabla_Y(AX), Z) - g(A\nabla_Y X, Z), \quad \forall Z \\
 g(\nabla_X(AY) - A\nabla_X Y, Z) &= g(\nabla_Y(AX) - A\nabla_Y X, Z), \quad \forall Z \\
 \nabla_X(AY) - A\nabla_X Y &= \nabla_Y(AX) - A\nabla_Y X \\
 (\nabla_X A)Y + A\nabla_X Y - A\nabla_X Y &= (\nabla_Y A)X + A\nabla_Y X - A\nabla_Y X \\
 (\nabla_X A)Y &= (\nabla_Y A)X.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Хопфове хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$

Сада ћемо се упознати са резултатима из радова [9] и [29] где су класификоване Хопфове хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$.

Нека је M повезана оријентабилна реална хиперповрш сфере $\mathbb{S}^6$ са јединичним нормалним векторским пољем N . Тангентно векторско поље $\xi = -JN$ на M зовемо **карактеристично** или **Хопфово** векторско поље. Кажемо да је M **Хопфова хиперповрш** ако је $\nabla_\xi \xi = 0$, односно ако су интегралне криве векторског поља ξ геодезијске на M .

Став 2.5. *Оријентабилна хиперповрш M близу Келерове сфере $\mathbb{S}^6$ је Хопфова ако и само ако је ξ сопствено векторско поље оператора облика A .*

Доказ. Из (2.13) и (2.15) добијамо $(\tilde{\nabla}_\xi J)J\xi = 0$, па, користећи Вајнгартенову формулу (2.21), добијамо

$$\tilde{\nabla}_\xi \xi = -\tilde{\nabla}_\xi(JN) = -(\tilde{\nabla}_\xi J)N - J(\tilde{\nabla}_\xi N) = -(\tilde{\nabla}_\xi J)J\xi - J(\tilde{\nabla}_\xi N) = JA\xi.$$

Из Гаусове формуле (1.8) имамо да је $\nabla_\xi \xi$ тангента компонента $JA\xi$ на M . За произвољно векторско поље X тангентно на M важи $JX \in T^\perp M$ ако и само ако $X = \alpha\xi$ за неку реалну функцију $\alpha \in \mathfrak{F}(M)$. Дакле, $\nabla_\xi \xi = 0$ ако и само ако је $A\xi = \alpha\xi$ за неку реалну функцију α , што је и требало доказати. $\square$

Сопствене вредности оператора облика A зовемо **главне кривине**, док су одговарајућа сопствена векторска поља **главни правци**.

Лема 2.6. *Функција главне кривине α је константна.*

Доказ. Како је $A\xi = \alpha\xi$, за произвољна векторска поља X и Y тангентна на M важи $g(\nabla_X(A\xi), Y) = g(\nabla_X(\alpha\xi), Y)$, тј.

$$g((\nabla_X A)\xi, Y) + g(A(\nabla_X \xi), Y) = (X\alpha)g(\xi, Y) + \alpha g(\nabla_X \xi, Y),$$

па је

$$g((\nabla_X A)\xi, Y) = (X\alpha)g(\xi, Y) + \alpha g(\nabla_X \xi, Y) - g(A(\nabla_X \xi), Y). \tag{2.28}$$

Користећи (2.27), (2.28) и симетрију оператора A добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= g((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, \xi) \\ &= g((\nabla_X A)\xi, Y) - g((\nabla_Y A)\xi, X) \\ &= (X\alpha)g(\xi, Y) + \alpha g(\nabla_X \xi, Y) - g(A\nabla_X \xi, Y) \\ &\quad - (Y\alpha)g(\xi, X) + \alpha g(\nabla_Y \xi, X) - g(A\nabla_Y \xi, X). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ако у претходну једнакост заменимо $X = \xi$, следи да је

$$Y\alpha = (\xi\alpha)g(\xi, Y). \quad (2.30)$$

Нека је $\mathcal{D}$ ортогонално-комплементарна дистрибуција на M у односу на ξ . Како је тада $g(\xi, Y) = 0$, $\forall Y \in \mathcal{D}$, из (2.30) добијамо да је $Y\alpha = 0$ за произвољно векторско поље $Y \in \mathcal{D}$. На основу Теореме 2.4, дистрибуција $\mathcal{D}$ није интеграбилна па постоје векторска поља $X, Y \in \mathcal{D}$ таква да $[X, Y]$ има ненула компоненту у правцу ξ . Сада из

$$0 = X(Y\alpha) - Y(X\alpha) = [X, Y]\alpha = (\xi\alpha)g([X, Y], \xi)$$

добијамо $\xi\alpha = 0$, па је α константа. $\square$

Нека је γ геодезијска крива на $\mathbb{S}^6$ параметризована дужином лука, тј. важи $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. Користећи једначину (2.13), добијамо $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}(J\dot{\gamma}) = (\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} J)\dot{\gamma} + J\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, одакле следи да је $J\dot{\gamma}$ паралелно векторско поље дуж криве γ . Следећа Лема нам даје однос између J и паралелног померања дуж γ .

Лема 2.7. *Нека је X паралелно векторско поље дуж геодезијске криве γ на $\mathbb{S}^6$ ортогонално на векторе $\dot{\gamma}$ и $J\dot{\gamma}$ и нека је*

$$Y(t) = \cos t JX - \sin t \dot{\gamma} \times X.$$

Ако је крива γ параметризована дужином лука, онда је Y такође паралелно векторско поље дуж γ чија почетна вредност у $t = 0$ износи $JX(0)$.

Доказ. Како је X паралелно векторско поље дуж геодезијске криве γ имамо да је $\dot{X} = 0$. Такође, можемо приметити да је $Y(0) = JX(0)$ ортогонално на $\dot{\gamma}(0)$, а важи

$$\dot{Y} = -\sin t \gamma \times X + \cos t \dot{\gamma} \times X - \cos t \dot{\gamma} \times X - \sin t \ddot{\gamma} \times X.$$

Пошто је γ велики круг на $\mathbb{S}^6$, имамо $\ddot{\gamma} = -\gamma$, па из тога следи да је $\dot{Y} = 0$. Дакле, Y је паралелно векторско поље дуж криве γ , што је и требало показати. $\square$

Став 2.8. *Геодезијске хиперсфере у $\mathbb{S}^6$ и тубе око скоро комплексних кривих у $\mathbb{S}^6$ представљају оријентабилне Хојфове хиперповрши.*

Доказ. Геодезијске хиперсфере $\mathbb{S}^5$ унутар $\mathbb{S}^6$ су уједно и тотално умбиличке. Самим тим, Хопфово векторско поље ξ представља векторско поље главне кривине, па на основу Става 2.5 закључујемо да су геодезијске хиперсфере Хопфове хиперповрши у $\mathbb{S}^6$.

Нека је сада S повезана скоро комплексна крива у $\mathbb{S}^6$, односно скоро комплексна подмногострукост реалне димензије 2 унутар $\mathbb{S}^6$. Локално, и за довољно мале полупречнике $r \in \mathbb{R}^+$, можемо дефинисати тубу M_r полупречника r око S . Означимо са η јединични нормални вектор на S у некој тачки $p \in S$. Тада је

$$\gamma_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^6, \quad t \mapsto \cos t p + \sin t \eta$$

максимална геодезијска крива у $\mathbb{S}^6$ која задовољава $\gamma_\eta(0) = p$ и $\dot{\gamma}_\eta(0) = \eta$. Ако је $q = \gamma_\eta(r) \in M_r$, тада је $N = \dot{\gamma}_\eta(r)$ спољашњи јединични вектор нормале на M_r у тачки q . Конкретно, туба M_r је оријентабилна.

Нека је $X \in T_p\mathbb{S}^6$ векторско поље ортогонално на η и означимо са Y_X Јакобијево поље дуж геодезијске криве γ_η дефинисано почетним условима $Y_X(0) = X^\top$ и $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} Y(0) = X^\perp - A_\eta X^\top$. Овде је A_η оператор облика скоро комплексне криве S у тачки p у односу на нормалу η , док $^\top$ и $^\perp$ представљају ортогоналне пројекције на тангентни, односно нормални простор на S у тачки p . Оператор облика A_N тубе M_r у тачки q у односу на нормалу N задовољава

$$A_N Y_X(r) = -\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} Y_X(r). \quad (2.31)$$

У нашем случају, како $\mathbb{S}^6$ има константну секциону кривину 1, имамо

$$Y_X(t) = \cos t B_{X^\top}(t) + \sin t B_{X^\perp - A_\eta X^\top}(t),$$

при чему је B_V паралелно векторско поље дуж γ_η са почетним условом $B_V(0) = V$ за произвољно $V \in T_p\mathbb{S}^6$.

Ако је X главни правац на S у тачки p у односу на η , односно ако важи $A_\eta X = \lambda X$, тада

$$Y_X(t) = (\cos t - \lambda \sin t) B_X(t), \quad (2.32)$$

па на основу (2.31) имамо

$$A_N B_X(r) = \frac{A_N Y_X(r)}{\cos r - \lambda \sin r} = \frac{-\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}((\cos r - \lambda \sin r) B_X(r))}{\cos r - \lambda \sin r} = \frac{\sin r + \lambda \cos r}{\cos r - \lambda \sin r} B_X(r).$$

Даље, ако је X ортогоналан на S у тачки p , важи

$$Y_X(t) = \sin t B_X(t),$$

што имплицира

$$A_N B_X(r) = \frac{A_N Y_X(r)}{\sin r} = \frac{-\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}(\sin r B_X(r))}{\sin r} = -\frac{\cos r}{\sin r} B_X(r) = -\operatorname{ctg} r B_X(r).$$

Дакле, вектори главне кривине на M_r у тачки q добијају се паралелним померањем дуж γ_η од p до q , или

1) вектора главне кривине на S у односу на η , или

2) $T_p^\perp S \cap (\mathbb{R}\eta)^\perp$, где $T_p^\perp S$ представља нормални простор на S у тачки p .

Како је крива S скоро комплексна, $T_p^\perp S$ је J -инваријантан, па је $J\eta \in T_p^\perp S \cap (\mathbb{R}\eta)^\perp$. Такође, пошто је $J\dot{\gamma}_\eta$ паралелно дуж γ_η , вектор $J\dot{\gamma}_\eta$ се добија паралелним померањем $J\eta$ дуж γ_η . Отуда је $\xi = -JN = -J\dot{\gamma}_\eta(r)$ вектор главне кривине на M_r у q . Према Ставу 2.5, M_r је Хопфова хиперповрш сфере $\mathbb{S}^6$. $\square$

Напомена 4. Будући да су све скоро комплексне криве у $\mathbb{S}^6$ минималне, важи следеће: Ако су главне кривине на S у односу на η облика $\pm \operatorname{tg} \theta$, $\theta \in [0, \pi/2)$, тада су главне кривине на M_r у q даље са $\operatorname{tg}(r \pm \theta)$ и $-\operatorname{ctg} r$ у зависности од случаја 1) или 2) из претходног става. Такође, геодезијске хиперсфере полупречника r имају главну кривину $-\operatorname{ctg} r$.

Како бисмо довршили класификацију Хопфових хиперповрши доказивањем обрата претходног става биће нам потребна следећа лема:

Лема 2.9. Нека је $T_\alpha = \{X \in TM \mid AX = \alpha X\}$, где је $\alpha = -\operatorname{ctg} r$, и L оператор дефинисан са

$$LX = \cos r \, JX - \sin r \, N \times X.$$

Тада је ортогонални комплемент $T_\alpha^\perp$ у TM инваријантан при дејству оператора L .

Доказ. Уочимо да за свака два векторска поља X и Y тангентна на M у тачки p важи

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \xi, Y) &= -g(\tilde{\nabla}_X(p \times N), Y) = -g((\tilde{\nabla}_X p) \times N, Y) - g(p \times \tilde{\nabla}_X N, Y) \\ &= -g((D_X p) \times N, Y) - g(p \times (-AX), Y) = -g(X \times N, Y) + g(JAX, Y). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Нека $X \in T_\alpha(p)$ и, под претпоставком да M није умбиличка у p , нека $Y \in T_p M$ тако да је $AY = \lambda Y$, где је $\lambda \neq \alpha$, односно $Y \in T_\alpha^\perp(p)$. Тада су JY и $N \times Y$ ортогонални на p и N , па је и LY ортогоналан на p и N . Користећи (2.29) и Лему 2.6, добијамо да је $g(\nabla_X \xi, Y) = 0$, па из (2.33) следи

$$g(JAX + N \times X, Y) = 0. \quad (2.34)$$

Сада имамо

$$\begin{aligned} g(LY, X) &= g(\cos r \, JY - \sin r \, N \times Y, X) = \sin r \, g(\operatorname{ctg} r \, JY - N \times Y, X) \\ &= \sin r \, g(Y, -\operatorname{ctg} r \, JX + N \times X) = \sin r \, g(Y, JAX + N \times X). \end{aligned}$$

Из (2.34) следи да је $g(LY, X) = 0$, па $LY \in T_\alpha^\perp(p)$, чиме је тврђење доказано. $\square$

Теорема 2.10. Нека је M Хоџова хиперповрш у $\mathbb{S}^6$. Тада је M отворени гео или геодезијске хиперсфере, или тубе око скоро комплексне криве у $\mathbb{S}^6$.

Доказ. Бирамо локално јединично нормално векторско поље N на отвореном подскупу W од M такво да је главна кривина $\alpha \leq 0$. Можемо претпоставити да је $\alpha = -\operatorname{ctg} r$ за неко $r \in (0, \pi/2]$. Дефинишимо

$$F : W \rightarrow \mathbb{S}^6, \quad p \mapsto \exp(-r \, N_p),$$

пресликавање које тачки $p \in W$ додељује тачку $\exp(-r \, N_p) = \gamma_p(-r)$, где је $\gamma_p = \gamma_{N_p}$. Нека је $X \in T_p W$ главни правац који одговара главној кривини k . Ако са F_* означимо диференцијал пресликавања F , онда

$$F_*(X) = (\cos r + k \sin r) B_r(X), \quad (2.35)$$

где B_r означава паралелно померање дуж γ_{N_p} од тачке p до $F(p)$. Из (2.35) закључујемо да ако је главна кривина $k = \alpha$, тада је $F_*(X) = 0$, што значи да је F сингуларно у свим тачкама из W . Додатно, за $X \in \ker F_*$ важи $\cos r + k \sin r = 0$, односно X је главни правац који одговара главној кривини $k = -\operatorname{ctg} r = \alpha$. Стога,

$$\ker(F_*) = T_\alpha,$$

док је

$$\operatorname{im}(F_*) = B_r(T_\alpha^\perp(p)).$$

Посматрајмо криву $\varphi(t) = \gamma_{N_p}(t - r)$. Како је γ_{N_p} геодезијска, следи да је крива φ геодезијска, при чему важи $\dot{\varphi}(t) = \dot{\gamma}_{N_p}(t - r)$. По дефиницији, B_r представља паралелно померање дуж γ_{N_p} од тачке p до $q = F(p)$. Према Лемми 2.7, кривој φ са почетним вектором JX_q у тачки $\varphi(0) = q$, у тачки $\varphi(r) = p$ одговара вектор

$$\begin{aligned} \cos r \ JX(r) - \sin r \ \dot{\varphi}(r) \times X(r) &= \cos r \ JX(r) - \sin r \ \dot{\gamma}_{N_p}(0) \times X(r) \\ &= \cos r \ JX_p - \sin r \ N_p \times X_p. \end{aligned}$$

Према томе, важи

$$B_r(\cos r \ JX_p - \sin r \ N_p \times X_p) = JX_q.$$

Како је $X_q = B_r(X_p)$ и $L(X_p) = \cos r \ JX_p - \sin r \ \xi_p \times X_p$, добијамо да важи

$$B_r L(X_p) = J B_r(X_p), \quad \forall X_p.$$

На основу Леме 2.9 сада непосредно следи

$$J(\text{im}(F_*)) = J B_r(T_\alpha^\perp(p)) = B_r L(T_\alpha^\perp(p)) = B_r(T_\alpha^\perp(p)) = \text{im}(F_*),$$

из чега добијамо да је $\text{im}(F_*)$ инваријантно при дејству J . Одавде следи да $\text{im}(F_*)$ у тачки p има парну димензију, тј. у свакој тачки $p \in W$ димензија може бити 0, 2 или 4.

Размотримо прво случај када $\text{im}(F_*)(p_0)$ у некој тачки $p_0 \in W$ има димензију 4. Тада главна кривина $\alpha(p_0)$ има вишеструкост 1. Због непрекидности функције главне кривине, постоји отворена околина $V \subset W$ тачке p_0 таква да је $\dim T_\alpha = 1$ на V , па F има константан ранг 4 на V . Одавде следи постојање 4-димензионе подмногогострукости $B \subset \mathbb{S}^6$ отворене околине $\tilde{V} \subset V$ тачке p_0 такве да је рестрикција $F|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow B$ субмерзија на B . Међутим, оваква конструкција имплицира да је B 4-димензиона скоро комплексна подмногогострукост сфере $\mathbb{S}^6$, што је у контрадикцији са Теоремом 2.4.

Размотримо сада случај када $\text{im}(F_*)(p_0)$ у тачки $p_0 \in W$ има димензију 2. Аналогно претходном разматрању, постоји 2-димензиона подмногогострукост $S \subset \mathbb{S}^6$ и отворена околина $\tilde{V} \subset W$ тачке p_0 таква да је рестрикција $F|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow S$ субмерзија на S . Одавде следи да је S скоро комплексна крива у $\mathbb{S}^6$. Приметимо да, због конструкције пресликавања F , слика $F(\tilde{V})$ представља тубуларну хиперповрш на фиксном растојању r , тј. отворени део тубе око скоро комплексне криве S .

Коначно, размотримо случај када $\text{im}(F_*)(p_0)$ у тачки $p_0 \in W$ има димензију 0 и нека за сваку отворену околину тачке p_0 у W постоји тачка p у тој околини таква да $\text{im}(F_*)(p_0)$ има димензију 2. Постоји низ тачака p_n који конвергира ка p_0 такве да је $\dim \text{im}(F_*)(p_n) = 2$. У свакој p_n , главне кривине M су тројка $(-\text{ctg } r, \text{tg}(r + \theta_n), \text{tg}(r - \theta_n))$ за неко $\theta_n \in [0, \pi/2)$. Због непрекидности функција главних кривина мора важити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tg}(r + \theta_n) = -\text{ctg } r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tg}(r - \theta_n) = -\text{ctg } r,$$

што је немогуће. Стога постоји отворена околина $V \subset W$ тачке p_0 таква да је $\dim T_\alpha = 5$ на читавој V . Одавде следи да је $F(V) = q$, где је q тачка у $\mathbb{S}^6$ и V је отворени део геодезијске хиперсфере са центром у q полупречника r .

Како је димензија $\text{im}(F_*)$ локално константна (0 или 2) и M повезана, $\text{im}(F_*)$ има константну димензију на целој хиперповрши. Дакле, закључујемо да је цело M отворени део или геодезијске хиперсфере у $\mathbb{S}^6$, или тубе око скоро комплексне криве у $\mathbb{S}^6$. $\square$

Из Става 2.8 и Теореме 2.10 непосредно следи да су једине Хопфове хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$ геодезијске хиперсфере и тубе око скоро комплексних кривих. Стога, свака Хопфова хиперповрш сфере $\mathbb{S}^6$ има тачно једну, две или три главне кривине. Умбиличке хиперповрши представљају отворене делове геодезијских хиперсфера, док су неумбиличке отворени делови туба око скоро комплексних кривих у $\mathbb{S}^6$.

Сада нам је циљ да истражимо којим поткласама Хопфових хиперповрши у $\mathbb{S}^6$ одговарају дате класе скоро комплексних кривих. Најпре ћемо размотрити тотално геодезијске скоро комплексне криве (тј. скоро комплексне криве типа (iv)).

Теорема 2.11. *Нека је M Хоџфова хиперповрш у $\mathbb{S}^6$ са јединичним нормалним векторским пољем N . Тада су следећи услови међусобно еквивалентни:*

- 1) M има тачно две различите главне кривине у свакој тачки.
- 2) M представља отворени део тубе око тотално геодезијске скоро комплексне криве S у $\mathbb{S}^6$.
- 3) M није умбиличка, а оператор облика A комутира на M са оператором L дефинисаним релацијом

$$LX = \cos r \, JX - \sin r \, (N \times X), \quad X \in TM,$$

при чему $r \in (0, \pi/2]$ и $\alpha = -\operatorname{ctg} r$.

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2) : Како M не може бити отворени део геодезијске хиперсфере пошто је она умбиличка, према Теорему 2.10 закључујемо да је M отворени део тубе око скоро комплексне криве S у $\mathbb{S}^6$. Уколико S није тотално геодезијска, из Напомене 4 следи да M у некој тачки има три различите главне кривине: $\operatorname{tg}(r+\theta)$, $\operatorname{tg}(r-\theta)$ и $\operatorname{tg}(r+\pi/2) = -\operatorname{ctg} r$, што је у контрадикцији с претпоставком, па S мора бити тотално геодезијска.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Нека је S тотално геодезијска скоро комплексна крива у $\mathbb{S}^6$. Тада за свако нормално поље N на S важи $A_N = 0$, па су све главне кривине на S једнаке $0 = \operatorname{tg} 0$. Према Напомени 4, главне кривине хиперповрши M , која представља тубу око S полупречника r , у свакој тачки једнаке су $\operatorname{tg} r$ и $-\operatorname{ctg} r$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Претпоставимо да хиперповрш M има три различите главне кривине у некој тачки p и означимо их са $\alpha = -\operatorname{ctg} r$, λ и μ . Тада важи $\dim T_\alpha = 3$, док је $\dim T_\lambda = \dim T_\mu = 1$. Према Лемми 2.9, ортогонални комплемент $T_\alpha^\perp = T_\lambda \oplus T_\mu$ инваријантан је при дејству оператора L , и важи $L(T_\lambda) \subset T_\mu$ и $L(T_\mu) \subset T_\lambda$. Нека је $v \in T_\lambda$. Пошто A и L комутирају, а $Lv \in T_\mu$, добијамо:

$$\lambda Lv = L(\lambda v) = L(Av) = A(Lv) = \mu Lv.$$

Одавде следи $\lambda = \mu$, што је у супротности са претпоставком да су λ и μ различите главне кривине. Дакле, M има тачно две различите главне кривине у свакој тачки.

(1) $\Rightarrow$ (3) : Нека је $p \in M$ произвољна фиксирана тачка и означимо главне кривине хиперповрши M у p са $\alpha = -\operatorname{ctg} r$ и λ . Према Лемми 2.9, оператор L чува сопствене просторе T_α и T_λ , тј. $L(T_\alpha) \subset T_\alpha$ и $L(T_\lambda) \subset T_\lambda$ јер је $T_\lambda = T_\alpha^\perp$, па

$$\begin{aligned} v \in T_\alpha &\Rightarrow Lv \in T_\alpha \Rightarrow ALv = \alpha Lv, & LA v = L(\alpha v) = \alpha Lv &\Rightarrow AL = LA \text{ на } T_\alpha, \\ v \in T_\lambda &\Rightarrow Lv \in T_\lambda \Rightarrow ALv = \lambda Lv, & LA v = L(\lambda v) = \lambda Lv &\Rightarrow AL = LA \text{ на } T_\lambda. \end{aligned}$$

Дакле, оператори A и L комутирају на $TM = T_\alpha \oplus T_\lambda$. □

Напомена 5. Нека је S шотално геодезијска скоро комплексна крива у $\mathbb{S}^6$. Како је $S \hookrightarrow \mathbb{S}^6 \hookrightarrow \mathbb{R}^7$, можемо S посматрати као шотпростор унутар шродимензионог простора $\mathbb{R}^3 \times \{(0, 0, 0, 0)\}$, односно идентификујемо

$$\text{Span}\{p\} \oplus T_p S \cong \mathbb{R}^3 \times \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

У шом случају $T_p^\perp S = \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}^4$ ша јединични нормални вектори шрипадају сфери $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Тубуларна шипершери M_r око S дефинише се као скуп свих шачака облика $\cos r \, p + \sin r \, N_p$, где $p \in S$, а $N_p \in \mathbb{S}^3$. Посматрајмо шресликавање

$$\mathbb{S}^2(\cos r) \times \mathbb{S}^3(\sin r) \rightarrow M_r, \quad (\cos r \, p, \sin r \, N_p) \mapsto \cos r \, p + \sin r \, N_p.$$

Ово шресликавање је очигледно изометријска имерзија и бијекција, као и улагање, ша ошуда следи да је M_r изометрично са $\mathbb{S}^2(\cos r) \times \mathbb{S}^3(\sin r)$.

Нека је сада S скоро комплексна крива у $\mathbb{S}^6$ типа (i) – (iii). У тачки $p \in S$ која није геодезијска локално можемо изабрати ортонормирану базу $\{E_1, JE_1\}$ простора $T_p S$. Нека су $N_1 = \frac{h(E_1, E_1)}{\|h(E_1, E_1)\|}$ и $N_2 = E_1 \times \xi_1$. Тада је

$$\{p, E_1, JE_1, N_1, JN_1, N_2, -JN_2\} \quad (2.36)$$

G_2 -база скоро комплексне криве S , а вектори N_1, JN_1, N_2 и JN_2 формирају ортонормирану базу нормалног простора $T_p^\perp S$. Оператори облика $A_{N_1}, A_{JN_1}, A_{N_2}$ и A_{JN_2} у ортонормираној бази $\{E_1, JE_1\}$ имају следеће форме

$$A_{N_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad A_{JN_1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{N_2} = 0, \quad A_{JN_2} = 0, \quad (2.37)$$

где је $\lambda = \|h(E_1, E_1)\|$. У том случају, Гаусова кривина, односно секциона кривина скоро комплексне криве S у тачки p , дата је изразом

$$K = R(E_1, E_2, E_2, E_1), \quad \text{где важи } E_2 = JE_1. \quad (2.38)$$

Пошто је $\mathbb{S}^6$ простор константне секционе кривине један, и уз (2.37), добијамо да је Гаусова кривина K скоро комплексне криве S у тачки p једнака

$$\begin{aligned} K &= \tilde{R}(E_1, E_2, E_2, E_1) - g(h(E_1, E_2), h(E_2, E_1)) + g(h(E_2, E_2), h(E_1, E_1)) \\ &= 1 - g(h(E_1, E_2), h(E_1, E_2)) + g(J^2 h(E_1, E_1), h(E_1, E_1)) \\ &= 1 - \|h(E_1, E_1)\|^2 - \|h(E_1, JE_1)\|^2 = 1 - 2\lambda^2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

Секигава је у раду [55] показао да, уколико је Гаусова кривина K скоро комплексне криве S константна на S , онда она мора имати вредност $K = 0$, $K = \frac{1}{6}$ или $K = 1$, при чему је за сваки од тих случајева навео одговарајуће примере.

За произвољно јединично нормално векторско поље $\eta \in T_p^\perp S$ постоје, локално, реалне глатке функције x_1, x_2, x_3 и x_4 такве да важи $\eta = x_1 N_1 + x_2 JN_1 + x_3 N_2 + x_4 JN_2$, при чему је $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. На основу (2.37), оператор облика је

$$A_\eta \bar{e}_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \bar{e}_1, \quad A_\eta \bar{e}_2 = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \bar{e}_2,$$

где је $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ нова локално ортонормирана база тангентног простора TS у којој се A_η дијагонализује.

Аналогно Ставу 2.8, закључујемо да су главне кривине и вектори главних кривина тубуларне хиперповрши M_r , у тачки $q = \gamma_\eta(r)$, при чему је $N = \dot{\gamma}_\eta(r)$, облика:

$$\begin{aligned} A_N B_{\bar{e}_1}(r) &= \frac{\sin r + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \cos r}{\cos r - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \sin r} B_{\bar{e}_1}(r), \\ A_N B_{\bar{e}_2}(r) &= \frac{\sin r - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \cos r}{\cos r + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \sin r} B_{\bar{e}_2}(r), \end{aligned}$$

где је $B_V(t)$ паралелно векторско поље дуж криве $\gamma_\eta(t)$, задато условом $B_V(0) = V$.

Такође, утврдили смо да, уколико је $X \in T_p^\perp S \cap (\mathbb{R}\eta)^\perp$, тада важи

$$A_N B_X(r) = -\operatorname{ctg} r B_X(r).$$

Нека је $\{E_1, \dots, E_5\}$ ортонормирана база тубуларне хиперповрши M_r , састављена од главних праваца, односно, нека важи $A_N E_i = \lambda_i E_i$ за неко јединично нормално векторско поље N . На основу претходних једнакости добијамо да је

$$\lambda_1 = \frac{\sin r + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \cos r}{\cos r - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \sin r}, \quad \lambda_2 = \frac{\sin r - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \cos r}{\cos r + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \sin r}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -\operatorname{ctg} r.$$

Дакле, ако је M отворени део тубе око тотално геодезијске криве у $\mathbb{S}^6$, онда M има тачно две различите главне кривине вишеструкости 2 и 3. Иначе, ако је M отворени део тубе око скоро комплексне криве типа (i) – (iii), онда M има тачно три различите главне кривине: λ_1 и λ_2 вишеструкости 1 и λ_3 вишеструкости 3.

У складу са једначином (1.15), вектор средње кривине H тубуларне хиперповрши $M_r \subset \mathbb{S}^6$ има следећи облик:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{5} \operatorname{tr} A_N N = \frac{1}{5} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) N \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{\sin r + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \cos r}{\cos r - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \sin r} + \frac{\sin r - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \cos r}{\cos r + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \sin r} - 3 \operatorname{ctg} r \right) N \\ &= \frac{1}{5} \frac{(2 + 5(x_1^2 + x_2^2) \lambda^2) \operatorname{ctg} r - 3 \operatorname{ctg}^3 r}{\operatorname{ctg}^2 r - (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2} N. \end{aligned} \quad (2.40)$$

На основу (1.16), скаларна кривина τ тубуларне хиперповрши $M_r \subset \mathbb{S}^6$ дата је са

$$\tau = \sum_{i=1}^5 S(E_i, E_i) = \sum_{i,j=1}^5 R(E_j, E_i, E_i, E_j). \quad (2.41)$$

За $Y = Z \perp X$ и $\|X\| = 1 = \|Y\|$ једначина (2.23) постаје

$$R(X, Y)Y = A_{h(Y, Y)}X - A_{h(X, Y)}Y + g(Y, Y)X - g(X, Y)Y = A_{h(Y, Y)}X - A_{h(X, Y)}Y + X,$$

па имамо

$$\begin{aligned} R(X, Y, Y, X) &= g(A_{h(Y, Y)}X, X) - g(A_{h(X, Y)}Y, X) + g(X, X) \\ &= g(h(X, X), h(Y, Y)) - g(h(X, Y), h(X, Y)) + 1. \end{aligned}$$

Како у бази $\{E_1, \dots, E_5\}$ важи

$$h(E_i, E_i) = \lambda_i N, \quad h(E_i, E_j) = 0, \quad i \neq j,$$

добиајмо

$$\begin{aligned} R(E_i, E_j, E_j, E_i) &= g(\lambda_i N, \lambda_j N) + 1 = \lambda_i \lambda_j + 1, \quad i \neq j, \\ R(E_i, E_i, E_i, E_i) &= 0, \quad i = j. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Сада из (2.41) и (2.42) следи

$$\tau = \sum_{i \neq j}^5 R(E_j, E_i, E_i, E_j) = \sum_{i \neq j}^5 (\lambda_i \lambda_j + 1) = 20 + \sum_{i \neq j}^5 \lambda_i \lambda_j.$$

Како је

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \frac{1 - (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2 \operatorname{ctg}^2 r}{\operatorname{ctg}^2 r - (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2}, \\ \lambda_1 \lambda_3 &= \lambda_1 \lambda_4 = \lambda_1 \lambda_5 = \frac{-\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \operatorname{ctg}^3 r - (1 + (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2) \operatorname{ctg}^2 r - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \operatorname{ctg} r}{\operatorname{ctg}^2 r - (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2}, \\ \lambda_2 \lambda_3 &= \lambda_2 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_5 = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \operatorname{ctg}^3 r - (1 + (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2) \operatorname{ctg}^2 r + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda \operatorname{ctg} r}{\operatorname{ctg}^2 r - (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2}, \\ \lambda_3 \lambda_4 &= \lambda_3 \lambda_5 = \lambda_4 \lambda_5 = \operatorname{ctg}^2 r = \frac{\operatorname{ctg}^4 r - (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2 \operatorname{ctg}^2 r}{\operatorname{ctg}^2 r - (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2}. \end{aligned}$$

добиајмо

$$\begin{aligned} \tau &= 20 + \sum_{i \neq j}^5 \lambda_i \lambda_j = 20 + 2\lambda_1 \lambda_2 + 6(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) + 6\lambda_3 \lambda_4 \\ &= 20 + \frac{2 - (12 + 20(x_1^2 + x_2^2) \lambda^2) \operatorname{ctg}^2 r + 6 \operatorname{ctg}^4 r}{\operatorname{ctg}^2 r - (x_1^2 + x_2^2) \lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Напомена 6. Из Напомене 5 закључујемо да, ако је S шотално геодезијска скоро ком-плексна крива у $\mathbb{S}^6$, онда је $M_{\frac{\pi}{2}}$ гео $S^2(0) \times S^3(1)$, који, међуим, није хипероври.

Уколико је S скоро комплексна крива шииа (i) – (iii), преходна анализа показује да су главне кривине хипероври $M_{\frac{\pi}{2}}$ једнаке $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \lambda}$ и $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Пошто је збир главних кривина једнак нули, закључујемо да је $M_{\frac{\pi}{2}}$ минимална. Даље, може се показати ([24]) да $M_{\frac{\pi}{2}}$ представља локалну хипероври на делу где важи $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$, док на скуу $\{x_1 = x_2 = 0\}$ није хипероври.

Дакле, посматрано глобално, $M_{\frac{\pi}{2}}$ не представља хипероври.

Сада смо спремни да докажемо теорему која се тиче глобалне класификације.

Теорема 2.12. Нека је M компактна повезана Хофова хипероври у $\mathbb{S}^6$. Тада важи:

- (1) Ако је M минимална, онда је или шотално геодезијска хиперсфера, или хипер-оври облика $S^2(\cos(\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{6}}{2}))) \times S^3(\sin(\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{6}}{2})))$ у $\mathbb{S}^6$;
- (2) Ако M има константну скаларну кривину, онда је или геодезијска хиперсфера, или хипероври облика $S^2(\cos r) \times S^3(\sin r)$ у $\mathbb{S}^6$, за неко $r \in (0, \frac{\pi}{2})$;
- (3) Ако M задовољава Ченову једнакост, онда је M шотално геодезијска хиперсфера у $\mathbb{S}^6$.

Доказ. Из Теореме 2.10 следи да је свака компактна повезана Хопфова хиперповрш M у $\mathbb{S}^6$ или геодезијска хиперсфера, или туба око неке компактне скоро комплексне криве. Како геодезијска хиперсфера испуњава услов (2) теореме, док услови (1) и (3) важе за тотално геодезијску хиперсферу, остаје да размотримо и докажемо тврђења за тубуларну хиперповрш M_r под одговарајућим условима.

(1): Размотримо најпре тотално геодезијску скоро комплексну криву S у $\mathbb{S}^6$. Према Напомени 5, тубуларна хиперповрш M_r полупречника $r \in (0, \pi/2)$ око S је изометрична производу сфера $S^2(\cos r) \times S^3(\sin r)$. Такође, установили смо да је M_r Хопфова хиперповрш са две различите главне кривине: $-\operatorname{ctg} r$ и $\operatorname{tg} r$. Уколико је M_r минимална, мора да важи

$$2\operatorname{tg} r - 3\operatorname{ctg} r = 0,$$

што доводи до тога да је $r = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

У том случају, M_r је хиперповрш $\mathbb{S}^2(\cos \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{6}}{2})) \times \mathbb{S}^3(\sin \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{6}}{2}))$ у $\mathbb{S}^6$.

За остале скоро комплексне криве типа (i) – (iii), из (2.40) добијамо да је M_r минимална ако и само ако важи

$$5(x_1^2 + x_2^2)\lambda^2 \operatorname{ctg} r = 3\operatorname{ctg}^3 r - 2\operatorname{ctg} r.$$

За фиксно r , ако је $\operatorname{ctg} r \neq 0$, десна страна ове једнакости је константна, док се лева страна мења у зависности од вектора из јединичног нормалног раслојења $T_p^\perp S$, што доводи до контрадикције. Стога, мора да важи $\operatorname{ctg} r = 0$, односно $r = \frac{\pi}{2}$. Међутим, $M_{\frac{\pi}{2}}$ није хиперповрш. Из тога следи да $r \neq \frac{\pi}{2}$.

(2): У случају тотално геодезијских скоро комплексних кривих, M_r има две различите главне кривине $-\operatorname{ctg} r$ и $\operatorname{tg} r$, које су константне за фиксирано r , па је, према томе, и скаларна кривина константна. Стога, хиперповрш $M_r = \mathbb{S}^2(\cos r) \times \mathbb{S}^3(\sin r)$ има константну скаларну кривину.

За остале скоро комплексне криве типа (i) – (iii), на основу (2.43), M_r има константну скаларну кривину τ ако и само ако је

$$\tau = 20(1 + \operatorname{ctg}^2 r), \quad 6\operatorname{ctg}^4 r + (8 - \tau)\operatorname{ctg}^2 r + 2 = 0,$$

што доводи до решења

$$\operatorname{ctg}^2 r = \frac{1}{7}.$$

Како бисмо осигурали да M_r буде тубуларна хиперповрш, потребне су додатне претпоставке о скоро комплексној кривој S .

Као и у (2.36) и (2.37), изабраћемо векторска поља $\{E_1, JE_1, \xi_1, J\xi_1, \xi_2, J\xi_2\}$ дуж скоро комплексне криве S типа (i) – (iii), а за дуална векторска поља користићемо ознаке $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$. На основу резултата из [24], можемо рећи да је M_r тубуларна хиперповрш ако и само ако важи

$$\left(w_1 - \sqrt{7} \sum_{\bar{i}}^4 x_i w_{1\bar{i}}\right) \wedge \left(w_2 - \sqrt{7} \sum_{\bar{i}}^4 x_i w_{2\bar{i}}\right) \neq 0, \quad (2.44)$$

где су $w_{1\bar{i}} = h_{11}^{\bar{i}} w_1 + h_{12}^{\bar{i}} w_2$, $w_{2\bar{i}} = h_{21}^{\bar{i}} w_1 + h_{22}^{\bar{i}} w_2$ друге фундаменталне форме криве S у $\mathbb{S}^6$ и $\bar{i} = i + 2$.

На основу (2.37) непосредним рачуном долазимо до тога да је услов (2.44) еквивалентан са

$$\begin{aligned} & (w_1 - \sqrt{7}(x_1\lambda w_1 + x_2\lambda w_2)) \wedge (w_2 - \sqrt{7}(-x_1\lambda w_2 + x_2\lambda w_1)) \\ & = (1 - 7\lambda^2(x_1^2 + x_2^2))w_1 \wedge w_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Пошто за фиксну тачку $p \in S$ важи

$$1 - 7\lambda^2 \leq 1 - 7\lambda^2(x_1^2 + x_2^2) \leq 1,$$

тада је M_r тубуларна хиперповрш ако и само ако важи

$$1 - 7\lambda^2 > 0.$$

На основу (2.39), Гаусова кривина K скоро комплексне криве S задовољава

$$K > \frac{5}{7}. \quad (2.45)$$

У раду [17] показано је да, ако је S компактна скоро комплексна крива у $\mathbb{S}^6$ и ако њена Гаусова кривина припада интервалу $[\frac{1}{6}, 1]$, онда она може бити једино једнака $\frac{1}{6}$ или 1. Пошто је у нашем случају $K > \frac{5}{7}$, закључујемо да мора бити $K = 1$, те да је S дифеоморфна сфери $\mathbb{S}^2$. На основу класификације из [10], уколико је $S \cong \mathbb{S}^2$, добијамо да је реч о скоро комплексној кривој типа (i). Међутим, у [29] је показано да за компактне скоро комплексне криве овог типа, уколико Гаусова кривина није идентички једнака $\frac{1}{6}$, онда постоје тачке на којима је $K < \frac{1}{6}$, као и тачке на којима је $K > \frac{1}{6}$. То је у супротности са условом (2.45).

(3) : Из релације (1.21) следи да тубуларна хиперповрш M_r задовољава Ченову једнакост ако и само ако је

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5.$$

Дакле, тубуларна хиперповрш M_r око тотално геодезијске скоро комплексне криве задовољава Ченову једнакост ако и само ако важи

$$2\operatorname{tg} r = -\operatorname{ctg} r,$$

што доводи до контрадикције.

За остале скоро комплексне криве типа (i) – (iii), M_r задовољава Ченову једнакост ако и само ако важи

$$\frac{(2 + 2(x_1^2 + x_2^2)\lambda^2)\operatorname{ctg} r}{\operatorname{ctg}^2 r - (x_1^2 + x_2^2)\lambda^2} = -\operatorname{ctg} r,$$

што даје $r = \frac{\pi}{2}$, али $M_{\frac{\pi}{2}}$ није хиперповрш. □

2.3 Покретни репер хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$

Нека је M оријентабилна реална хиперповрш сфере $\mathbb{S}^6$. У овом поглављу уводимо покретни репер конструисан у раду [18] и описујемо релације између коефицијената.

Покретни репер ћемо користити за истраживање хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$ чији Јакобијев оператор или оператор облика задовољавају различите услове паралелности.

Напомињемо да су слични резултати у другим амбијентним просторима добијени у радовима [30]-[33], [47]-[54]. Међутим, већина познатих резултата односи се на Келерове многострукости, где паралелност скоро комплексне структуре у одређеној мери поједностављује рачун. У случају близу Келерових многострукости, конкретно сфере $\mathbb{S}^6$, антисиметричност тензора G захтева другачији, компликованији, приступ. Као последицу тога, долазимо до потребе за конструкцијом одговарајућег покретног репера дуж хиперповрши ради њене анализе.

Означимо са $\eta(X) = g(X, \xi)$ 1-форму на M . Нека је

$$\mathcal{D} = \text{Ker } \eta = \{X \in TM \mid \eta(X) = 0\}. \quad (2.46)$$

Тада је $\mathcal{D}$ четвородимензиона глатка J -инваријантна дистрибуција на M .

Лема 2.13. *Нека је $E_1 \in \mathcal{D}$ произвољно јединично векторско поље и нека су $E_2 = JE_1$, $E_3 = G(E_1, \xi)$ и $E_4 = JE_3$. Тада је скуп $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 = \xi\}$ локални ортонормирани репер на оријентабилној реалној хиперповрши M .*

Доказ. Из дефиниције (2.1) скоро комплексне структуре J и Леме 2.2 директно следи да је E_2 ортогоналан на E_1 , а како је J изометрија добијамо да је и E_2 јединични. Даље, из (2.12) добијамо

$$E_3 = G(E_1, \xi) = E_1 \times \xi + g(E_1, J\xi)p = E_1 \times \xi,$$

па $E_3 \in \mathcal{D}$ и додатно ортогоналан је на E_1 . Из (2.19) добијамо $G(E_1, G(E_1, \xi)) = -\xi$, а затим на основу (2.16) имамо

$$\|E_3\|^2 = g(G(E_1, \xi), G(E_1, \xi)) = -g(G(E_1, G(E_1, \xi)), \xi) = g(\xi, \xi) = 1,$$

па је тиме и $E_4 = JE_3$ јединични. □

Лема 2.14. *За претходно дефинисани ортонормирани репер E важе следеће једнакости:*

$$\begin{aligned} G(E_1, E_2) &= 0, & G(E_1, E_3) &= -\xi, & G(E_1, E_4) &= N, & G(E_1, \xi) &= E_3, \\ G(E_1, N) &= -E_4, & G(E_2, E_3) &= -N, & G(E_2, E_4) &= \xi, & G(E_2, \xi) &= -E_4, \\ G(E_2, N) &= -E_3, & G(E_3, E_4) &= 0, & G(E_3, \xi) &= -E_1, & G(E_3, N) &= E_2, \\ G(E_4, \xi) &= E_2, & G(E_4, N) &= E_1. \end{aligned}$$

Доказ. Доказ следи директно из Теореме 2.3 и саме конструкције репера E . □

Напомена 7. *Приметимо да покретни репер E није јединствено одређен и зависи од избора векторског поља $E_1 \in \mathcal{D}$.*

За један такав репер, означимо са

$$g_{ij}^k = g(D_{E_i}E_j, E_k), \quad h_{ij} = g(D_{E_i}E_j, N), \quad 1 \leq i, j, k \leq 5. \quad (2.47)$$

Повезаност D у $\mathbb{R}^7$ је Леви-Чивита, а друга фундаментална форма је симетрична, што нам даје $g_{ij}^k = -g_{ik}^j$ и $h_{ij} = h_{ji}$. Додатно, како су $E_1, \dots, E_5 = \xi, N$ тангентна векторска поља на $\mathbb{S}^6$, важи $D_{E_i}E_j = \tilde{\nabla}_{E_i}E_j$ и $D_{E_i}N = \tilde{\nabla}_{E_i}N$ за $i, j = 1, \dots, 5$. Дакле, имамо

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{E_1}E_1 &= g_{11}^2E_2 + g_{11}^3E_3 + g_{11}^4E_4 + g_{11}^5\xi + h_{11}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_1}E_2 &= -g_{11}^2E_1 + g_{12}^3E_3 + g_{12}^4E_4 + g_{12}^5\xi + h_{12}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_1}E_3 &= -g_{11}^3E_1 - g_{12}^3E_2 + g_{13}^4E_4 + g_{13}^5\xi + h_{13}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_1}E_4 &= -g_{11}^4E_1 - g_{12}^4E_2 - g_{13}^4E_3 + g_{14}^5\xi + h_{14}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_1}\xi &= -g_{11}^5E_1 - g_{12}^5E_2 - g_{13}^5E_3 - g_{14}^5E_4 + h_{15}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_1}N &= -h_{11}E_1 - h_{12}E_2 - h_{13}E_3 - h_{14}E_4 - h_{15}\xi, \\
\tilde{\nabla}_{E_2}E_1 &= g_{21}^2E_2 + g_{21}^3E_3 + g_{21}^4E_4 + g_{21}^5\xi + h_{12}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_2}E_2 &= -g_{21}^2E_1 + g_{22}^3E_3 + g_{22}^4E_4 + g_{22}^5\xi + h_{22}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_2}E_3 &= -g_{21}^3E_1 - g_{22}^3E_2 + g_{23}^4E_4 + g_{23}^5\xi + h_{23}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_2}E_4 &= -g_{21}^4E_1 - g_{22}^4E_2 - g_{23}^4E_3 + g_{24}^5\xi + h_{24}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_2}\xi &= -g_{21}^5E_1 - g_{22}^5E_2 - g_{23}^5E_3 - g_{24}^5E_4 + h_{25}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_2}N &= -h_{12}E_1 - h_{22}E_2 - h_{23}E_3 - h_{24}E_4 - h_{25}\xi, \\
\tilde{\nabla}_{E_3}E_1 &= g_{31}^2E_2 + g_{31}^3E_3 + g_{31}^4E_4 + g_{31}^5\xi + h_{13}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_3}E_2 &= -g_{31}^2E_1 + g_{32}^3E_3 + g_{32}^4E_4 + g_{32}^5\xi + h_{23}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_3}E_3 &= -g_{31}^3E_1 - g_{32}^3E_2 + g_{33}^4E_4 + g_{33}^5\xi + h_{33}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_3}E_4 &= -g_{31}^4E_1 - g_{32}^4E_2 - g_{33}^4E_3 + g_{34}^5\xi + h_{34}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_3}\xi &= -g_{31}^5E_1 - g_{32}^5E_2 - g_{33}^5E_3 - g_{34}^5E_4 + h_{35}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_3}N &= -h_{13}E_1 - h_{23}E_2 - h_{33}E_3 - h_{34}E_4 - h_{35}\xi, \\
\tilde{\nabla}_{E_4}E_1 &= g_{41}^2E_2 + g_{41}^3E_3 + g_{41}^4E_4 + g_{41}^5\xi + h_{14}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_4}E_2 &= -g_{41}^2E_1 + g_{42}^3E_3 + g_{42}^4E_4 + g_{42}^5\xi + h_{24}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_4}E_3 &= -g_{41}^3E_1 - g_{42}^3E_2 + g_{43}^4E_4 + g_{43}^5\xi + h_{34}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_4}E_4 &= -g_{41}^4E_1 - g_{42}^4E_2 - g_{43}^4E_3 + g_{44}^5\xi + h_{44}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_4}\xi &= -g_{41}^5E_1 - g_{42}^5E_2 - g_{43}^5E_3 - g_{44}^5E_4 + h_{45}N, \\
\tilde{\nabla}_{E_4}N &= -h_{14}E_1 - h_{24}E_2 - h_{34}E_3 - h_{44}E_4 - h_{45}\xi, \\
\tilde{\nabla}_{\xi}E_1 &= g_{51}^2E_2 + g_{51}^3E_3 + g_{51}^4E_4 + g_{51}^5\xi + h_{15}N, \\
\tilde{\nabla}_{\xi}E_2 &= -g_{51}^2E_1 + g_{52}^3E_3 + g_{52}^4E_4 + g_{52}^5\xi + h_{25}N, \\
\tilde{\nabla}_{\xi}E_3 &= -g_{51}^3E_1 - g_{52}^3E_2 + g_{53}^4E_4 + g_{53}^5\xi + h_{35}N, \\
\tilde{\nabla}_{\xi}E_4 &= -g_{51}^4E_1 - g_{52}^4E_2 - g_{53}^4E_3 + g_{54}^5\xi + h_{45}N, \\
\tilde{\nabla}_{\xi}\xi &= -g_{51}^5E_1 - g_{52}^5E_2 - g_{53}^5E_3 - g_{54}^5E_4 + h_{55}N, \\
\tilde{\nabla}_{\xi}N &= -h_{15}E_1 - h_{25}E_2 - h_{35}E_3 - h_{45}E_4 - h_{55}\xi.
\end{aligned}$$

Такође, на основу (2.21), оператор облика A на M је дат са

$$AE_1 = -\tilde{\nabla}_{E_1}N = h_{11}E_1 + h_{12}E_2 + h_{13}E_3 + h_{14}E_4 + h_{15}\xi,$$

$$\begin{aligned} AE_2 &= -\tilde{\nabla}_{E_2}N = h_{12}E_1 + h_{22}E_2 + h_{23}E_3 + h_{24}E_4 + h_{25}\xi, \\ AE_3 &= -\tilde{\nabla}_{E_3}N = h_{13}E_1 + h_{23}E_2 + h_{33}E_3 + h_{34}E_4 + h_{35}\xi, \\ AE_4 &= -\tilde{\nabla}_{E_4}N = h_{14}E_1 + h_{24}E_2 + h_{34}E_3 + h_{44}E_4 + h_{45}\xi, \\ A\xi &= -\tilde{\nabla}_\xi N = h_{15}E_1 + h_{25}E_2 + h_{35}E_3 + h_{45}E_4 + h_{55}\xi. \end{aligned}$$

Лема 2.15. *Претходно дефинисани коефицијенти задовољавају следеће релације:*

$$\begin{array}{lllll} g_{12}^3 = -g_{11}^4, & g_{12}^4 = g_{11}^3, & h_{11} = -g_{12}^5, & h_{12} = g_{11}^5, & g_{22}^3 = -g_{21}^4, \\ g_{22}^4 = g_{21}^3, & g_{22}^5 = -g_{11}^5, & h_{22} = g_{21}^5, & g_{32}^3 = -g_{31}^4, & g_{32}^4 = g_{31}^3, \\ h_{13} = 1 - g_{32}^5, & h_{23} = g_{31}^5, & g_{42}^3 = -g_{41}^4, & g_{42}^4 = g_{41}^3, & h_{14} = -g_{42}^5, \\ h_{24} = -1 + g_{41}^5, & g_{52}^3 = -1 - g_{51}^4, & g_{52}^4 = g_{51}^3, & h_{15} = -g_{52}^5, & h_{25} = g_{51}^5, \\ g_{32}^5 = 2 + g_{14}^5, & g_{42}^5 = -g_{13}^5, & g_{31}^5 = -g_{24}^5, & g_{41}^5 = 2 + g_{23}^5, & h_{33} = -g_{34}^5, \\ h_{34} = g_{33}^5, & g_{44}^5 = -g_{33}^5, & h_{44} = g_{43}^5, & h_{35} = -g_{54}^5, & h_{45} = g_{53}^5. \end{array}$$

Доказ. Доказ следи из Леме 2.14 и једнакости

$$\tilde{\nabla}_X(JY) = G(X, Y) + J(\tilde{\nabla}_X Y),$$

где су X и Y векторска поља на M .

За $X = E_1$ и $Y = E_1$ добијамо

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_1}(JE_1) &= \tilde{\nabla}_{E_1}E_2 = -g_{11}^2E_1 + g_{12}^3E_3 + g_{12}^4E_4 + g_{12}^5\xi + h_{12}N, \\ G(E_1, E_1) + J(\tilde{\nabla}_{E_1}E_1) &= -g_{11}^2E_1 - g_{11}^4E_3 + g_{11}^3E_4 - h_{11}\xi + g_{11}^5N, \end{aligned}$$

одакле закључујемо

$$g_{12}^3 = -g_{11}^4, \quad g_{12}^4 = g_{11}^3, \quad h_{11} = -g_{12}^5, \quad h_{12} = g_{11}^5,$$

Слично, за $X = E_2$ и $Y = E_1$, имамо

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_2}(JE_1) &= \tilde{\nabla}_{E_2}E_2 = -g_{21}^2E_1 + g_{22}^3E_3 + g_{22}^4E_4 + g_{22}^5\xi + h_{22}N, \\ G(E_2, E_1) + J(\tilde{\nabla}_{E_2}E_1) &= -g_{21}^2E_1 - g_{21}^4E_3 + g_{21}^3E_4 - g_{11}^5\xi + g_{21}^5N, \end{aligned}$$

па добијамо

$$g_{22}^3 = -g_{21}^4, \quad g_{22}^4 = g_{21}^3, \quad g_{22}^5 = -g_{11}^5, \quad h_{22} = g_{21}^5.$$

Сада за $X = E_3$ и $Y = E_1$ добијамо

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_3}(JE_1) &= -g_{31}^2E_1 + g_{32}^3E_3 + g_{32}^4E_4 + g_{32}^5\xi + h_{23}N, \\ G(E_3, E_1) + J(\tilde{\nabla}_{E_3}E_1) &= \xi - g_{31}^2E_1 - g_{31}^4E_3 + g_{31}^3E_4 - h_{13}\xi + g_{31}^5N, \end{aligned}$$

па је

$$g_{32}^3 = -g_{31}^4, \quad g_{32}^4 = g_{31}^3, \quad h_{13} = 1 - g_{32}^5, \quad h_{23} = g_{31}^5.$$

За $X = E_4$ и $Y = E_1$ добија се

$$\tilde{\nabla}_{E_4}(JE_1) = -g_{41}^2E_1 + g_{42}^3E_3 + g_{42}^4E_4 + g_{42}^5\xi + h_{24}N,$$

$$G(E_4, E_1) + J(\tilde{\nabla}_{E_4} E_1) = -N - g_{41}^2 E_1 - g_{41}^4 E_3 + g_{41}^3 E_4 - h_{14} \xi + g_{41}^5 N,$$

што имплицира

$$g_{42}^3 = -g_{41}^4, \quad g_{42}^4 = g_{41}^3, \quad h_{14} = -g_{42}^5, \quad h_{24} = -1 + g_{41}^5.$$

Слично, за $X = \xi$ и $Y = E_1$ добијамо

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\xi(JE_1) &= -g_{51}^2 E_1 + g_{52}^3 E_3 + g_{52}^4 E_4 + g_{52}^5 \xi + h_{25} N, \\ G(\xi, E_1) + J(\tilde{\nabla}_\xi E_1) &= -E_3 - g_{51}^2 E_1 - g_{51}^4 E_3 + g_{51}^3 E_4 - h_{15} \xi + g_{51}^5 N, \end{aligned}$$

одакле следи

$$g_{52}^3 = -1 - g_{51}^4, \quad g_{52}^4 = g_{51}^3, \quad h_{15} = -g_{52}^5, \quad h_{25} = g_{51}^5.$$

Како је $E_2 = JE_1$, из једнакости

$$\tilde{\nabla}_X(JE_2) = G(X, E_2) + J(\tilde{\nabla}_X E_2)$$

се не добијају нове релације.

Даље, за $X = E_1$ и $Y = E_3$ добијамо

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_1}(JE_3) &= -g_{11}^4 E_1 - g_{11}^3 E_2 - g_{13}^4 E_3 + g_{14}^5 \xi - g_{42}^5 N, \\ G(E_1, E_3) + J(\tilde{\nabla}_{E_1} E_3) &= -\xi - g_{11}^4 E_1 - g_{11}^3 E_2 - g_{13}^4 E_3 - (1 - g_{32}^5) \xi + g_{13}^5 N, \end{aligned}$$

одакле следи $g_{32}^5 = 2 + g_{14}^5$ и $g_{42}^5 = -g_{13}^5$. За $X = E_2$ и $Y = E_3$ добија се

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_2}(JE_3) &= -g_{21}^4 E_1 - g_{21}^3 E_2 - g_{23}^4 E_3 + g_{24}^5 \xi + (-1 + g_{41}^5) N, \\ G(E_2, E_3) + J(\tilde{\nabla}_{E_2} E_3) &= N - g_{21}^4 E_1 - g_{21}^3 E_2 - g_{23}^4 E_3 - g_{31}^5 \xi + g_{23}^5 N, \end{aligned}$$

па је $g_{31}^5 = -g_{24}^5$ и $g_{41}^5 = 2 + g_{23}^5$. Слично, за $X = E_3$ и $Y = E_3$ имамо

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_3}(JE_3) &= -g_{31}^4 E_1 - g_{31}^3 E_2 - g_{33}^4 E_3 + g_{34}^5 \xi + h_{34} N, \\ G(E_3, E_3) + J(\tilde{\nabla}_{E_3} E_3) &= -g_{31}^4 E_1 - g_{31}^3 E_2 - g_{33}^4 E_3 - h_{33} \xi + g_{33}^5 N, \end{aligned}$$

што имплицира $h_{33} = -g_{34}^5$ и $h_{34} = g_{33}^5$. Сада, за $X = E_4$ и $Y = E_3$ имамо

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_4}(JE_3) &= -g_{41}^4 E_1 - g_{41}^3 E_2 - g_{43}^4 E_3 + g_{44}^5 \xi + h_{44} N, \\ G(E_4, E_3) + J(\tilde{\nabla}_{E_4} E_3) &= -g_{41}^4 E_1 - g_{41}^3 E_2 - g_{43}^4 E_3 - g_{33}^5 \xi + g_{43}^5 N, \end{aligned}$$

па је $g_{44}^5 = -g_{33}^5$ и $h_{44} = g_{43}^5$. Коначно, за $X = \xi$ и $Y = E_3$, имамо

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\xi(JE_3) &= -g_{51}^4 E_1 - g_{51}^3 E_2 - g_{53}^4 E_3 + g_{54}^5 \xi + h_{45} N, \\ G(\xi, E_3) + J(\tilde{\nabla}_\xi E_3) &= E_1 - (1 + g_{51}^4) E_1 - g_{51}^3 E_2 - g_{53}^4 E_3 - h_{35} \xi + g_{53}^5 N, \end{aligned}$$

што нам даје последње две релације $h_{35} = -g_{54}^5$ и $h_{45} = g_{53}^5$.

Директном провером се показује да се из једнакости

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(JE_4) &= G(X, E_4) + J(\tilde{\nabla}_X E_4), & \tilde{\nabla}_X(J\xi) &= G(X, \xi) + J(\tilde{\nabla}_X \xi), \\ \tilde{\nabla}_X(JN) &= G(X, N) + J(\tilde{\nabla}_X N) \end{aligned}$$

не добијају нове релације. □

Лема 2.16. Диференцијабилне функције (2.47) задовољавају следеће једнакости:

$$\begin{aligned} g_{52}^5 &= g_{11}^2 + g_{13}^4, & g_{51}^5 &= -g_{21}^2 - g_{23}^4, & g_{54}^5 &= g_{31}^2 + g_{33}^4, \\ g_{53}^5 &= -g_{41}^2 - g_{43}^4, & h_{55} &= -g_{51}^2 - g_{53}^4. \end{aligned}$$

Доказ. Из једнакости (2.17) за $X = E_1, Y = E_1, Z = E_3$ добијамо

$$-E_4 - (g_{11}^2 + g_{13}^4 - g_{52}^5)N = (\tilde{\nabla}_{E_1}G)(E_1, E_3) = -E_4,$$

што нам даје прву релацију. Затим за $X = E_2, Y = E_1, Z = E_3$ једнакост (2.17) постаје

$$-(g_{21}^2 + g_{23}^4 + g_{51}^5)N = (\tilde{\nabla}_{E_2}G)(E_1, E_3) = 0,$$

па је $g_{51}^5 = -g_{21}^2 - g_{23}^4$. Слично, за $X = E_3, Y = E_1, Z = E_3$ имамо

$$E_2 - (g_{31}^2 + g_{33}^4 - g_{54}^5)N = (\tilde{\nabla}_{E_3}G)(E_1, E_3) = E_2,$$

одакле следи $g_{54}^5 = g_{31}^2 + g_{33}^4$. Даље, за $X = E_4, Y = E_1, Z = E_3$ добијамо

$$-(g_{41}^2 + g_{43}^4 + g_{53}^5)N = (\tilde{\nabla}_{E_4}G)(E_1, E_3) = 0,$$

што имплицира $g_{53}^5 = -g_{41}^2 - g_{43}^4$. На крају, $X = \xi, Y = E_1, Z = E_3$ своде (2.17) на

$$-(g_{51}^2 + g_{53}^4 + h_{55})N = (\tilde{\nabla}_{\xi}G)(E_1, E_3) = 0,$$

што даје $h_{55} = -g_{51}^2 - g_{53}^4$.

Једнакост (2.17) је сада задовољена за све остале изборе X, Y и Z . $\square$

На основу Напомене 7 имамо слободу избора векторског поља $E_1 \in \mathcal{D}$. Ако хиперповрш M није Хопфова, векторско поље $A\xi$ има ненула пројекцију $A(\xi) - g(A\xi, \xi)\xi$ на $\mathcal{D}$ и стога постоји јединствено глатко векторско поље $E_1 \in \mathcal{D}$ такво да је $A(\xi) - g(A\xi, \xi)\xi = \beta E_1$, $\beta > 0$. Ако је M Хопфова хиперповрш, онда је $A\xi = \alpha\xi$, па за било које глатко векторско поље $E_1 \in \mathcal{D}$ можемо записати $A\xi = 0 \cdot E_1 + \alpha\xi$. Према томе, у општем случају, постоји глатко векторско поље $E_1 \in \mathcal{D}$ и диференцијабилне функције α и β такве да

$$A\xi = \beta E_1 + \alpha\xi. \quad (2.48)$$

Како је $A\xi = -(g_{11}^2 + g_{13}^4)E_1 - (g_{21}^2 + g_{23}^4)E_2 - (g_{31}^2 + g_{33}^4)E_3 - (g_{41}^2 + g_{43}^4)E_4 - (g_{51}^2 + g_{53}^4)\xi$, за овакав избор векторског поља E_1 добијамо

$$\begin{aligned} g_{13}^4 &= -g_{11}^2 - \beta, & g_{23}^4 &= -g_{21}^2, & g_{33}^4 &= -g_{31}^2, \\ g_{43}^4 &= -g_{41}^2, & g_{53}^4 &= -g_{51}^2 - \alpha. \end{aligned}$$

Приметимо да у случају када је M Хопфова хиперповрш и даље имамо слободу избора векторског поља $E_1 \in \mathcal{D}$. С обзиром на то да је оператор облика симетричан, па тиме и дијагонализабилан, у свакој тачки p хиперповрши M постоји ортонормирана база састављена од главних праваца оператора облика A . Питање које нас у овом контексту посебно интересује јесте да ли постоји локални глатки покретни репер у којем је оператор облика A дијагоалан, тј. да ли се векторско поље E_1 може изабрати тако да буде главни правац. На основу класификације Хопфових хиперповрши и Напомене 4 знамо да оператор облика има константне сопствене вредности, па су тиме и њихове вишеструкости константне. То значи да је у свакој тачки $p \in M$ димензија сопственог простора $\ker(A - \lambda \text{Id})$ иста. Другим речима, глатки хомоморфизам

$$F = A - \lambda \cdot \text{Id} : TM \rightarrow TM$$

има константан ранг на M , па можемо применити следећу теорему:

Теорема 2.17. ([42]) Нека су E и E' глатка векторска раслојења над глатком много-структуром M , и нека је $F : E \rightarrow E'$ глатки хомоморфизам векторских раслојења над M . Нека су

$$\ker F = \bigcup_{p \in M} \ker(F|_{E_p}), \quad \text{im } F = \bigcup_{p \in M} \text{im}(F|_{E_p}).$$

Тада су $\ker F$ и $\text{im } F$ глатка подраслојења ако и само ако F има константан ранг.

Из Теореме 2.17 следи да је $D_\lambda = \ker F \subset TM$ глатко векторско подраслојење. Пошто је D_λ константне димензије, оно је локално тривијално. Стога, за сваку тачку $p \in M$ постоји отворена околина U те тачке и глатка векторска поља $E_1, \dots, E_k$, где је $k = \dim D_\lambda$, која чине базу дистрибуције D_λ , што показује да оператор A локално допушта глатки покретни сопствени репер.

Напомена 8. У случају када је M Хоџова хиперповрш, без умањења опшћности, векторско поље $E_1 \in \mathcal{D}$ може се одабрати тако да буде сопствено векторско поље оператора облика A .

Сада ћемо проверити које услове намећу једначине Гауса и Кодација. Најпре ћемо посматрати изводе у правцу векторског поља E_1 .

Лема 2.18. За коефицијенте (2.47) важе следеће релације:

$$\begin{aligned} E_1(g_{21}^2) &= -1 - (g_{11}^2)^2 + 2(g_{11}^5)^2 - (g_{21}^2)^2 - 2g_{11}^4 g_{21}^3 + 2g_{11}^3 g_{21}^4 + 2g_{12}^5 g_{21}^5 - g_{21}^4 g_{41}^2 + g_{11}^3 g_{41}^2 \\ &\quad - (g_{11}^4 + g_{21}^3)g_{31}^2 + g_{12}^5 g_{51}^2 - g_{21}^5 g_{51}^2 + E_2(g_{11}^2), \\ E_1(g_{21}^3) &= -g_{11}^2 (g_{11}^3 + 2g_{21}^4) - g_{11}^5 (1 + g_{14}^5 + g_{23}^5) + g_{11}^4 (2g_{21}^2 - g_{31}^3) - g_{21}^3 (g_{21}^2 + g_{31}^3) + g_{11}^3 g_{41}^3 \\ &\quad + g_{21}^5 (g_{13}^5 - g_{51}^3) + g_{12}^5 (-g_{24}^5 + g_{51}^5) - g_{21}^4 (g_{41}^3 + \beta) + E_2(g_{11}^3), \\ E_1(g_{21}^4) &= -g_{11}^2 (g_{11}^4 - 2g_{21}^3) + g_{14}^5 g_{21}^5 + g_{11}^5 (g_{13}^5 - g_{24}^5) + g_{11}^3 (-2g_{21}^2 + g_{41}^4) + g_{12}^5 (1 + g_{23}^5 + g_{51}^4) \\ &\quad - (g_{11}^4 + g_{21}^3)g_{31}^4 - g_{21}^4 (g_{21}^2 + g_{41}^4) - g_{21}^5 g_{51}^4 + g_{21}^3 \beta + E_2(g_{11}^4), \\ E_1(g_{21}^5) &= -g_{21}^2 (g_{12}^5 + g_{21}^5) + 2g_{11}^3 (1 + g_{23}^5) - g_{21}^4 (2 + g_{14}^5 + g_{23}^5) + 2g_{11}^4 g_{24}^5 + g_{21}^3 (-g_{13}^5 + g_{24}^5) \\ &\quad + g_{11}^5 (-2g_{11}^2 + \beta) + E_2(g_{11}^5), \\ E_1(g_{23}^5) &= -g_{11}^2 g_{13}^5 + g_{14}^5 g_{21}^2 + g_{11}^5 g_{21}^3 - g_{12}^5 g_{21}^4 - g_{11}^3 g_{21}^5 - g_{21}^2 g_{23}^5 - g_{11}^2 g_{24}^5 - g_{11}^4 (g_{11}^5 + g_{33}^5) \\ &\quad - g_{21}^3 g_{33}^5 + g_{11}^3 g_{43}^5 - g_{21}^4 g_{43}^5 - 2g_{21}^5 \beta + E_2(g_{13}^5), \\ E_1(g_{24}^5) &= -g_{11}^2 g_{14}^5 - g_{13}^5 g_{21}^2 + g_{12}^5 g_{21}^3 + g_{11}^5 g_{21}^4 - g_{11}^4 g_{21}^5 + g_{11}^2 g_{23}^5 - g_{21}^2 g_{24}^5 + g_{21}^3 g_{33}^5 - g_{11}^4 g_{34}^5 \\ &\quad + g_{11}^3 (g_{11}^5 - g_{33}^5) - g_{21}^3 g_{34}^5 + \beta + 2g_{23}^5 \beta + E_2(g_{14}^5), \\ E_1(g_{31}^2) &= -g_{11}^5 (3 + 2g_{14}^5) - 2g_{12}^5 g_{24}^5 + g_{11}^4 (g_{21}^2 - 2g_{31}^3) - g_{31}^2 (g_{21}^2 + g_{31}^3) - g_{11}^2 (g_{11}^3 + g_{41}^2) \\ &\quad + 2g_{11}^3 g_{31}^4 + (g_{13}^5 + g_{24}^5)g_{51}^2 - g_{41}^2 (g_{31} + \beta) + E_3(g_{11}^2), \\ E_1(g_{31}^3) &= -(g_{11}^3)^2 + g_{14}^5 (2 + g_{14}^5) - g_{13}^5 g_{24}^5 - g_{21}^3 g_{31}^2 + g_{11}^4 (g_{21}^3 + 2g_{31}^2) - (g_{31}^3)^2 - g_{11}^5 g_{33}^5 - g_{12}^5 g_{34}^5 \\ &\quad - g_{31}^4 g_{41}^3 - g_{11}^2 (2g_{31}^4 + g_{41}^4) + (g_{13}^5 + g_{24}^5)g_{51}^3 - (g_{31}^4 + g_{41}^3)\beta + E_3(g_{11}^3), \\ E_1(g_{31}^4) &= g_{21}^4 (g_{11}^4 - g_{31}^3) - g_{11}^3 (g_{11}^4 + 2g_{31}^2) + g_{12}^5 g_{33}^5 - g_{11}^5 g_{34}^5 + g_{11}^2 (2g_{31}^3 - g_{41}^4) - g_{31}^4 (g_{31}^3 + g_{41}^4) \\ &\quad + g_{13}^5 (-1 - g_{14}^5 + g_{51}^4) + g_{24}^5 (-g_{14}^5 + g_{51}^4) + (g_{31}^3 - g_{41}^4)\beta + E_3(g_{11}^4), \\ E_1(g_{14}^5) &= -g_{11}^3 g_{12}^5 + g_{11}^2 g_{13}^5 + g_{11}^5 g_{24}^5 + 2g_{11}^5 g_{31}^2 - 2g_{31}^3 - 2g_{14}^5 g_{31}^3 + 2g_{13}^5 g_{31}^4 - g_{11}^4 (g_{11}^5 + g_{33}^5) \\ &\quad + g_{11}^3 g_{34}^5 - 2g_{24}^5 \beta + E_3(g_{12}^5), \\ E_1(g_{33}^5) &= -g_{11}^3 g_{13}^5 + g_{11}^4 (2 + g_{14}^5 + g_{23}^5) + g_{11}^5 g_{24}^5 + g_{14}^5 g_{31}^2 - g_{23}^5 g_{31}^2 + g_{11}^5 g_{31}^3 - g_{12}^5 g_{31}^4 - g_{11}^2 g_{34}^5 \\ &\quad - g_{11}^2 g_{43}^5 - g_{31}^4 g_{43}^5 - 2g_{34}^5 \beta - g_{43}^5 \beta + E_3(g_{13}^5), \\ E_1(g_{34}^5) &= -2g_{11}^3 (1 + g_{14}^5) + 2g_{11}^4 g_{24}^5 - g_{13}^5 g_{31}^2 - g_{24}^5 g_{31}^2 + g_{12}^5 g_{31}^3 + g_{11}^5 g_{31}^4 + 2g_{11}^2 g_{33}^5 + g_{31}^4 g_{33}^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_{31}^3 g_{34}^5 + 3g_{33}^5 \beta + E_3(g_{14}^5), \\
E_1(g_{41}^2) &= 3g_{12}^5 + 2g_{11}^5 g_{13}^5 - g_{11}^3 g_{21}^2 + 2g_{12}^5 g_{23}^5 + g_{11}^2(-g_{11}^4 + g_{31}^2) - g_{21}^2 g_{41}^2 - 2g_{11}^4 g_{41}^3 - g_{31}^2 g_{41}^3 \\
& + 2g_{11}^3 g_{41}^4 - g_{41}^2 g_{41}^4 - 2g_{51}^2 + g_{14}^5 g_{51}^2 - g_{23}^5 g_{51}^2 + g_{31}^2 \beta + E_4(g_{11}^2), \\
E_1(g_{41}^3) &= g_{13}^5 - g_{13}^5 g_{14}^5 - g_{11}^3(g_{11}^4 + g_{21}^2) + g_{13}^5 g_{23}^5 + g_{11}^2 g_{31}^2 + g_{12}^5 g_{33}^5 + 2g_{11}^4 g_{41}^2 - g_{21}^2 g_{41}^2 - g_{31}^2 g_{41}^3 \\
& - 2g_{11}^2 g_{41}^4 - g_{41}^3 g_{41}^4 - g_{11}^5 g_{43}^5 - 2g_{51}^3 + g_{14}^5 g_{51}^3 - g_{23}^5 g_{51}^3 + g_{31}^3 \beta - g_{41}^4 \beta + E_4(g_{11}^3), \\
E_1(g_{41}^4) &= -1 - (g_{11}^4)^2 + (g_{13}^5)^2 + 2g_{14}^5 - g_{11}^3 g_{21}^2 + g_{14}^5 g_{23}^5 + g_{11}^2 g_{31}^2 + g_{11}^5 g_{33}^5 - 2g_{11}^3 g_{41}^2 - g_{21}^2 g_{41}^2 \\
& + 2g_{11}^2 g_{41}^3 - g_{41}^4 g_{41}^3 - (g_{41}^4)^2 + g_{12}^5 g_{43}^5 - 2g_{51}^4 + g_{14}^5 g_{51}^4 - g_{23}^5 g_{51}^4 + g_{31}^4 \beta + g_{41}^3 \beta + E_4(g_{11}^4), \\
E_1(g_{13}^5) &= g_{11}^4 g_{12}^5 - g_{11}^2 g_{14}^5 + g_{11}^2 g_{23}^5 + g_{11}^3(-g_{11}^5 + g_{33}^5) - 2g_{11}^5 g_{41}^2 + 2g_{41}^3 + 2g_{14}^5 g_{41}^3 - 2g_{13}^5 g_{41}^4 \\
& + g_{11}^4 g_{43}^5 - 5\beta - 2g_{23}^5 \beta - E_4(g_{12}^5), \\
E_1(g_{43}^5) &= -2g_{11}^4 g_{13}^5 - 2g_{11}^3(1 + g_{23}^5) + 2g_{11}^2 g_{33}^5 + g_{14}^5 g_{41}^2 - g_{23}^5 g_{41}^2 + g_{11}^5 g_{41}^3 - g_{33}^5 g_{41}^3 - g_{12}^5 g_{41}^4 \\
& - g_{41}^4 g_{43}^5 + 3g_{33}^5 \beta + E_4(g_{13}^5), \\
E_1(g_{51}^2) &= g_{11}^3 - g_{11}^2 g_{11}^5 - g_{12}^5 g_{21}^2 - g_{13}^5 g_{31}^2 - g_{14}^5 g_{41}^2 - g_{21}^2 g_{51}^2 - 2g_{11}^4 g_{51}^3 - g_{31}^2 g_{51}^3 + 2g_{11}^3 g_{51}^4 \\
& - g_{41}^2 g_{51}^4 + 2g_{11}^5 \beta + \xi(g_{11}^2), \\
E_1(g_{51}^3) &= -g_{11}^3 g_{11}^5 - g_{12}^5 g_{21}^3 - g_{13}^5 g_{31}^3 - g_{14}^5 g_{41}^3 + 2g_{11}^4 g_{51}^2 - g_{21}^2 g_{51}^2 - g_{31}^3 g_{51}^3 - g_{11}^2(1 + 2g_{51}^4) \\
& - g_{41}^3 g_{51}^4 + g_{11}^4 \alpha - \beta - g_{14}^5 \beta - g_{51}^4 \beta + \xi(g_{11}^3), \\
E_1(g_{51}^4) &= -g_{11}^4 g_{11}^5 - g_{12}^5 g_{21}^4 - g_{13}^5 g_{31}^4 - g_{14}^5 g_{41}^4 - 2g_{11}^3 g_{51}^2 - g_{21}^2 g_{51}^2 + 2g_{11}^2 g_{51}^3 - g_{31}^4 g_{51}^3 - g_{41}^4 g_{51}^4 \\
& - g_{11}^3 \alpha + g_{13}^5 \beta + g_{51}^3 \beta + \xi(g_{11}^4).
\end{aligned}$$

Доказ. Из Гаусове једначине (2.25), за $X = E_1$, $Y = E_2$, $Z = E_1$ и $W = E_2$ добијамо

$$\begin{aligned}
& (g_{11}^2)^2 - (g_{11}^5)^2 + (g_{21}^2)^2 + 2g_{11}^4 g_{21}^3 - 2g_{11}^3 g_{21}^4 - g_{12}^5 g_{21}^5 + g_{11}^4 g_{31}^2 + g_{21}^3 g_{31}^2 - g_{11}^3 g_{41}^2 \\
& + g_{21}^4 g_{41}^2 - g_{12}^5 g_{51}^2 + g_{21}^5 g_{51}^2 - E_2(g_{11}^2) + E_1(g_{21}^2) = -1 + (g_{11}^5)^2 + g_{12}^5 g_{21}^5,
\end{aligned}$$

одакле следи прва једначина. Слично, за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_2, E_1, E_i)$, $i = 3, 4, 5$ добијамо, редом, наредне три релације. За $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_2, E_3, \xi)$ налазимо релацију за $E_1(g_{23}^5)$, док за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_2, E_4, \xi)$ добијамо $E_1(g_{24}^5)$. Наредне три релације следе, редом, за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_3, E_1, E_i)$, $i = 2, 3, 4$. Извод $E_1(g_{14}^5)$ добијамо за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_3, E_2, \xi)$. Наредне две релације добијамо за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_3, E_i, \xi)$, $i = 3, 4$. Изводе $E_1(g_{41}^i)$ налазимо за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_4, E_1, E_i)$, $i = 2, 3, 4$. Следеће две релације се добијају за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_4, E_2, \xi)$ и $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_4, E_3, \xi)$. Коначно, последње три релације из леме налазимо редом за $(X, Y, Z, W) = (E_1, \xi, E_1, E_i)$, $i = 2, 3, 4$. $\square$

Даље, из Гаусове једначине за различити избор векторских поља тангентних на M налазимо следеће изводе у правцу векторског поља E_2 .

Лема 2.19. *Коефицијенти датих релацијом (2.47) задовољавају следеће једначине:*

$$\begin{aligned}
E_2(g_{12}^5) &= g_{11}^2 g_{12}^5 + g_{11}^3 g_{13}^5 - 2g_{11}^5 g_{21}^2 + 2g_{21}^3 + 2g_{14}^5 g_{21}^3 - 2g_{13}^5 g_{21}^4 + g_{11}^2 g_{21}^5 + g_{11}^4(2 + g_{14}^5 + g_{23}^5) \\
& - g_{11}^3 g_{24}^5 + g_{12}^5 \beta - 2g_{21}^5 \beta - E_1(g_{11}^5), \\
E_2(g_{14}^5) &= -g_{11}^5 g_{21}^3 + g_{12}^5 g_{31}^2 + g_{21}^2 g_{31}^2 + g_{24}^5(g_{21}^2 - g_{31}^2) + g_{13}^5(g_{21}^2 + g_{31}^2) + (2 + g_{14}^5 + g_{23}^5)g_{31}^4 \\
& - g_{21}^4(g_{11}^5 + g_{33}^5) + g_{21}^3 g_{34}^5 + (2 + g_{14}^5 - g_{23}^5)\beta - E_3(g_{11}^5), \\
E_2(g_{13}^5) &= -g_{11}^5 g_{21}^3 + g_{12}^5 g_{21}^4 + g_{21}^2 g_{23}^5 + g_{21}^3 g_{33}^5 - g_{12}^5 g_{41}^2 - g_{21}^2 g_{41}^2 - g_{13}^5 g_{41}^3 + g_{24}^5 g_{41}^3 - g_{23}^5 g_{41}^4 \\
& - 2g_{41}^4 - g_{14}^5(g_{21}^2 + g_{41}^4) + g_{21}^4 g_{43}^5 + g_{13}^5 \beta + g_{24}^5 \beta + E_4(g_{11}^5), \\
E_2(g_{23}^5) &= -g_{13}^5 g_{21}^2 - g_{11}^5 g_{21}^4 - g_{21}^2 g_{21}^5 - g_{21}^2 g_{24}^5 - g_{21}^4 g_{33}^5 + 2g_{11}^2 g_{41}^2 - 2g_{41}^3 - 2g_{23}^5 g_{41}^3 - 2g_{24}^5 g_{41}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g_{21}^3 g_{43}^5 + E_4(g_{21}^5), \\
E_2(g_{24}^5) &= -g_{14}^5 g_{21}^2 + g_{11}^5 g_{21}^3 - g_{21}^4 g_{21}^5 + g_{21}^2 g_{23}^5 - 2g_{11}^5 g_{31}^2 + 2g_{31}^3 + 2g_{23}^5 g_{31}^3 + 2g_{24}^5 g_{31}^4 - g_{21}^3 g_{33}^5 \\
& - g_{21}^4 g_{34}^5 - E_3(g_{21}^5), \\
E_2(g_{31}^2) &= g_{21}^2 g_{21}^4 - 3g_{21}^5 - 2g_{14}^5 g_{21}^5 + 2g_{11}^5 g_{24}^5 + g_{11}^2 (-g_{21}^3 + g_{31}^2) - 2g_{21}^4 g_{31}^3 + 2g_{21}^3 g_{31}^4 + g_{31}^2 g_{31}^4 \\
& - g_{21}^2 g_{41}^2 - g_{31}^3 g_{41}^2 - 2g_{51}^2 - g_{14}^5 g_{51}^2 + g_{23}^5 g_{51}^2 + E_3(g_{21}^2), \\
E_2(g_{31}^3) &= g_{21}^3 g_{21}^4 + g_{24}^5 + g_{14}^5 g_{24}^5 - g_{23}^5 g_{24}^5 + 2g_{21}^4 g_{31}^2 + g_{11}^3 (-g_{21}^3 + g_{31}^2) - 2g_{21}^2 g_{31}^4 + g_{31}^3 g_{31}^4 \\
& - g_{21}^5 g_{33}^5 + g_{11}^5 g_{34}^5 - g_{21}^2 g_{41}^3 - g_{31}^3 g_{41}^3 - 2g_{51}^3 - g_{14}^5 g_{51}^3 + g_{23}^5 g_{51}^3 + E_3(g_{21}^3), \\
E_2(g_{31}^4) &= -1 - g_{11}^4 g_{21}^3 + (g_{21}^4)^2 - g_{23}^5 - (g_{24}^5)^2 + g_{11}^4 g_{31}^2 - 2g_{21}^3 g_{31}^2 + 2g_{21}^2 g_{31}^3 + (g_{31}^4)^2 - g_{11}^5 g_{33}^5 \\
& - g_{21}^5 g_{34}^5 - g_{21}^2 g_{41}^4 - g_{31}^3 g_{41}^4 - 2g_{51}^4 + g_{23}^5 g_{51}^4 - g_{14}^5 (1 + g_{23}^5 + g_{51}^4) + E_3(g_{21}^4), \\
E_2(g_{33}^5) &= 2g_{21}^4 + g_{14}^5 g_{21}^4 + g_{21}^4 g_{23}^5 + g_{21}^3 g_{24}^5 + g_{24}^5 g_{31}^2 + g_{13}^5 (-g_{21}^3 + g_{31}^2) + g_{21}^5 g_{31}^3 + g_{11}^5 g_{31}^4 \\
& + g_{31}^4 g_{33}^5 - g_{21}^2 g_{34}^5 - g_{21}^2 g_{43}^5 - g_{31}^3 g_{43}^5 + E_3(g_{23}^5), \\
E_2(g_{34}^5) &= -2(1 + g_{14}^5) g_{21}^3 + 2g_{21}^4 g_{24}^5 + g_{14}^5 g_{31}^2 - g_{23}^5 g_{31}^2 - g_{11}^5 g_{31}^3 + g_{21}^5 g_{31}^4 + 2g_{21}^2 g_{33}^5 + g_{31}^3 g_{33}^5 \\
& + g_{31}^4 g_{34}^5 + E_3(g_{24}^5), \\
E_2(g_{41}^2) &= -g_{21}^2 g_{21}^3 - g_{11}^2 g_{21}^4 + 2g_{13}^5 g_{21}^5 - g_{11}^5 (3 + 2g_{23}^5) + g_{21}^2 g_{31}^2 + g_{11}^2 g_{41}^2 - 2g_{21}^4 g_{41}^3 - g_{41}^2 g_{41}^3 \\
& + 2g_{21}^3 g_{41}^4 + g_{31}^2 g_{41}^4 + g_{13}^5 g_{51}^2 + g_{24}^5 g_{51}^2 + E_4(g_{21}^2), \\
E_2(g_{41}^3) &= -(g_{21}^3)^2 - g_{11}^3 g_{21}^4 + 2g_{23}^5 + (g_{23}^5)^2 - g_{13}^5 g_{24}^5 + g_{21}^2 g_{31}^3 - g_{11}^5 g_{33}^5 + g_{11}^3 g_{41}^2 + 2g_{21}^4 g_{41}^2 \\
& - (g_{41}^3)^2 - 2g_{21}^2 g_{41}^4 + g_{31}^3 g_{41}^4 - g_{21}^5 g_{43}^5 + g_{13}^5 g_{51}^3 + g_{24}^5 g_{51}^3 + E_4(g_{21}^3), \\
E_2(g_{41}^4) &= -g_{11}^4 g_{21}^4 - g_{21}^3 g_{21}^4 + 2g_{24}^5 + g_{23}^5 g_{24}^5 + g_{21}^2 g_{31}^4 + g_{21}^5 g_{33}^5 + g_{11}^4 g_{41}^2 - 2g_{21}^3 g_{41}^2 + 2g_{21}^2 g_{41}^3 \\
& + g_{31}^4 g_{41}^4 - g_{41}^3 g_{41}^4 - g_{11}^5 g_{43}^5 + g_{24}^5 g_{51}^4 + g_{13}^5 (1 + g_{23}^5 + g_{51}^4) + E_4(g_{21}^4), \\
E_2(g_{43}^5) &= -2g_{13}^5 g_{21}^4 - 2g_{21}^3 (1 + g_{23}^5) + 2g_{21}^2 g_{33}^5 + g_{13}^5 g_{41}^2 + g_{24}^5 g_{41}^2 + g_{21}^5 g_{41}^3 + g_{11}^5 g_{41}^4 + g_{33}^5 g_{41}^4 \\
& - g_{41}^3 g_{43}^5 + E_4(g_{23}^5), \\
E_2(g_{51}^2) &= g_{11}^5 g_{21}^2 + g_{21}^2 - g_{11}^2 g_{21}^5 + g_{31}^2 - g_{23}^5 g_{31}^2 - g_{24}^5 g_{41}^2 + g_{11}^2 g_{51}^2 - 2g_{21}^4 g_{51}^3 - g_{41}^2 g_{51}^3 + 2g_{21}^3 g_{51}^4 \\
& + g_{31}^2 g_{51}^4 + 2g_{21}^5 \beta + g_{51}^2 \beta + \xi(g_{21}^2), \\
E_2(g_{51}^3) &= g_{11}^5 g_{21}^3 - g_{11}^3 g_{21}^5 + g_{31}^3 - g_{23}^5 g_{31}^3 - g_{24}^5 g_{41}^3 + g_{11}^3 g_{51}^2 + 2g_{21}^4 g_{51}^2 - g_{41}^3 g_{51}^3 - g_{21}^2 (1 + 2g_{51}^4) \\
& + g_{31}^3 g_{51}^4 + g_{21}^4 \alpha - g_{24}^5 \beta + g_{51}^3 \beta + \xi(g_{21}^3), \\
E_2(g_{51}^4) &= g_{11}^5 g_{21}^4 - g_{11}^4 g_{21}^5 + g_{31}^4 - g_{23}^5 g_{31}^4 - g_{24}^5 g_{41}^4 + g_{11}^4 g_{51}^2 - 2g_{21}^3 g_{51}^2 + 2g_{21}^2 g_{51}^3 - g_{41}^4 g_{51}^3 \\
& + g_{31}^4 g_{51}^4 - g_{21}^3 \alpha + \beta + g_{23}^5 \beta + g_{51}^4 \beta + \xi(g_{21}^4).
\end{aligned}$$

Доказ. Из (2.25) за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_2, E_2, \xi)$ добијамо

$$\begin{aligned}
& g_{11}^2 g_{12}^5 - 2g_{11}^5 g_{21}^2 + (2 + g_{14}^5)(g_{11}^4 + g_{21}^3) + g_{14}^5 g_{21}^3 + g_{13}^5 (g_{11}^3 - g_{21}^4) - g_{13}^5 g_{21}^4 \\
& + g_{11}^2 g_{21}^5 + g_{11}^4 g_{23}^5 - g_{11}^3 g_{24}^5 + (g_{12}^5 - g_{21}^5) \beta - E_1(g_{11}^5) - E_2(g_{12}^5) = g_{21}^5 \beta,
\end{aligned}$$

што имплицира прву једначину, док другу добијамо за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_3, E_1, \xi)$. Затим за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_4, E_1, \xi)$ следи израз за $E_2(g_{13}^i)$. Изводе $E_2(g_{31}^i)$, за $i = 2, 3, 4$, налазимо редом при избору $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_3, E_1, E_i)$, док се за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_3, E_1, \xi)$ добија извод $E_2(g_{24}^5)$. Даље, за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_3, E_3, \xi)$ налазимо $E_2(g_{33}^5)$. Извод $E_2(g_{34}^5)$ добијамо за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_3, E_4, \xi)$. Ако је $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_4, E_1, E_i)$, $i = 2, 3, 4$, добијају се редом изводи $E_2(g_{41}^i)$, за $i = 2, 3, 4$, док за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_4, E_1, \xi)$ израчунавамо $E_2(g_{23}^5)$. Затим за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_4, E_3, \xi)$ следи извод $E_2(g_{43}^5)$. На крају, последње три једнакости добијамо за $X = E_2$, $Y = \xi$, $Z = E_1$ и $W = E_i$, $i = 2, 3, 4$, респективно. $\square$

За изводе у правцу E_3 имамо следеће једнакости:

Лема 2.20. Коефицијенти из релације (2.47) задовољавају следеће једнакости:

$$\begin{aligned}
E_3(g_{41}^2) &= 5 + 3g_{23}^5 + g_{14}^5(3 + 2g_{23}^5) - 2g_{13}^5g_{24}^5 + (g_{31}^2)^2 - g_{21}^2g_{31}^3 - g_{11}^2g_{31}^4 + (g_{41}^2)^2 + g_{11}^2g_{41}^3 \\
&\quad - 2g_{31}^4g_{41}^3 - g_{21}^2g_{41}^4 + 2g_{31}^3g_{41}^4 + g_{34}^5g_{51}^2 - g_{43}^5g_{51}^2 + E_4(g_{31}^2), \\
E_3(g_{41}^3) &= g_{31}^2g_{31}^3 - g_{11}^3g_{31}^4 + 3g_{33}^5 + g_{14}^5g_{33}^5 + g_{23}^5g_{33}^5 - g_{13}^5g_{34}^5 + 2g_{31}^4g_{41}^2 + g_{11}^3g_{41}^3 + g_{41}^2g_{41}^3 \\
&\quad - 2g_{31}^2g_{41}^4 - g_{21}^2(g_{31}^3 + g_{41}^4) + g_{24}^5g_{43}^5 + g_{34}^5g_{51}^3 - g_{43}^5g_{51}^3 + E_4(g_{31}^3), \\
E_3(g_{41}^4) &= -g_{11}^4g_{31}^4 + g_{31}^2g_{31}^4 + g_{13}^5g_{33}^5 - g_{24}^5g_{33}^5 + 2g_{34}^5 + g_{23}^5g_{34}^5 - 2g_{31}^3g_{41}^2 + g_{41}^4g_{41}^3 + 2g_{31}^2g_{41}^3 \\
&\quad + g_{41}^2g_{41}^4 - g_{21}^2(g_{31}^3 + g_{41}^4) + g_{43}^5 + g_{14}^5g_{43}^5 + g_{34}^5g_{51}^4 - g_{43}^5g_{51}^4 + E_4(g_{31}^4), \\
E_3(g_{43}^5) &= -2(1 + g_{23}^5)g_{31}^3 - 2g_{13}^5g_{41}^4 + 2g_{31}^2g_{33}^5 + g_{34}^5g_{41}^2 + g_{13}^5g_{41}^3 - g_{24}^5g_{41}^3 - 2g_{41}^4 - g_{14}^5g_{41}^4 \\
&\quad - g_{23}^5g_{41}^4 + g_{41}^2g_{43}^5 + E_4(g_{33}^5), \\
E_3(g_{51}^2) &= g_{11}^2g_{24}^5 + g_{31}^3 - g_{31}^2g_{33}^5 - g_{34}^5g_{41}^2 + g_{41}^2g_{51}^2 + g_{11}^2g_{51}^3 - 2g_{31}^4g_{51}^3 + 2g_{31}^3g_{51}^4 + g_{41}^2\alpha \\
&\quad - g_{21}^2(3 + g_{14}^5 + g_{51}^4) - 2g_{24}^5\beta + \xi(g_{31}^2), \\
E_3(g_{51}^3) &= g_{11}^3g_{24}^5 - g_{31}^3 - g_{31}^2g_{33}^5 - g_{34}^5g_{41}^2 + 2g_{41}^3g_{51}^2 + g_{41}^3g_{51}^2 + g_{11}^3g_{51}^3 - 2g_{31}^2g_{51}^4 + g_{31}^4\alpha \\
&\quad - g_{21}^3(3 + g_{14}^5 + g_{51}^4) + g_{41}^3\alpha - g_{34}^5\beta + \xi(g_{31}^3), \\
E_3(g_{51}^4) &= g_{11}^4g_{24}^5 - g_{31}^4g_{33}^5 - g_{34}^5g_{41}^4 - 2g_{31}^3g_{51}^2 + g_{41}^4g_{51}^2 + g_{11}^4g_{51}^3 + 2g_{31}^2g_{51}^3 - g_{31}^3\alpha + g_{41}^4\alpha \\
&\quad - g_{21}^4(3 + g_{14}^5 + g_{51}^4) + g_{33}^5\beta + \xi(g_{31}^4).
\end{aligned}$$

Доказ. Гаусова једначина (2.25) за $X = E_3$, $Y = E_4$, $Z = E_1$ и $W = E_2$ постаје

$$\begin{aligned}
-4 - 2g_{23}^5 - g_{14}^5(2 + g_{23}^5) + g_{13}^5g_{24}^5 - (g_{31}^2)^2 + g_{11}^2g_{31}^4 - (g_{41}^2)^2 - g_{11}^2g_{41}^3 + 2g_{31}^4g_{41}^3 - 2g_{31}^3g_{41}^4 \\
+ g_{21}^2(g_{31}^3 + g_{41}^4) - g_{34}^5g_{51}^2 + g_{43}^5g_{51}^2 - E_4(g_{31}^2) + E_3(g_{41}^2) = 1 + g_{14}^5 + g_{23}^5 + g_{14}^5g_{23}^5 - g_{13}^5g_{24}^5,
\end{aligned}$$

што нам даје прву једначину. Наредне две релације из Леме добијамо за $(X, Y, Z, W) = (E_3, E_4, E_1, E_i)$, $i = 3, 4$. Извод $E_3(g_{43}^5)$ добија се за $(X, Y, Z, W) = (E_3, E_4, E_3, \xi)$. Последње три релације следе редом за $(X, Y, Z, W) = (E_3, \xi, E_1, E_i)$, $i = 2, 3, 4$. $\square$

Слично, за изводе у правцу E_4 важи следећа лема.

Лема 2.21. За диференцијабилне функције (2.47) важи:

$$\begin{aligned}
E_4(g_{14}^5) &= -g_{14}^5g_{31}^2 + g_{23}^5g_{31}^2 - g_{11}^5g_{31}^3 + g_{12}^5g_{31}^4 + g_{31}^3g_{33}^5 + g_{13}^5g_{41}^2 + g_{24}^5g_{41}^2 - g_{12}^5g_{41}^3 + g_{34}^5g_{41}^3 \\
&\quad - g_{11}^5g_{41}^4 - g_{33}^5g_{41}^4 + g_{31}^4g_{43}^5 + g_{34}^5\beta - g_{43}^5\beta - E_3(g_{13}^5), \\
E_4(g_{24}^5) &= -g_{13}^5g_{31}^2 - g_{24}^5g_{31}^2 - g_{21}^5g_{31}^3 - g_{11}^5g_{31}^4 - g_{31}^4g_{33}^5 - g_{14}^5g_{41}^2 + g_{23}^5g_{41}^2 + g_{11}^5g_{41}^3 - g_{33}^5g_{41}^3 \\
&\quad - g_{21}^5g_{41}^4 - g_{34}^5g_{41}^4 + g_{31}^3g_{43}^5 - E_3(g_{23}^5), \\
E_4(g_{34}^5) &= -g_{13}^5g_{31}^3 + g_{24}^5g_{31}^3 + 2g_{31}^4 + g_{14}^5g_{31}^4 + g_{23}^5g_{31}^4 - g_{31}^2g_{34}^5 + 2g_{33}^5g_{41}^2 - 2g_{41}^3 - 2g_{14}^5g_{41}^3 \\
&\quad + 2g_{24}^5g_{41}^4 - g_{31}^2g_{43}^5 - E_3(g_{33}^5), \\
E_4(g_{51}^2) &= g_{13}^5g_{21}^2 + g_{33}^5g_{41}^2 + g_{41}^3 - g_{31}^2g_{43}^5 - g_{31}^2g_{51}^2 + g_{21}^2g_{51}^3 - 2g_{41}^4g_{51}^3 + 2g_{41}^3g_{51}^4 - g_{31}^2\alpha \\
&\quad + g_{11}^2(-2 - g_{23}^5 + g_{51}^4) + 3\beta + 2g_{23}^5\beta + \xi(g_{41}^2), \\
E_4(g_{51}^3) &= g_{13}^5g_{21}^3 - g_{41}^2 + g_{33}^5g_{41}^3 - g_{31}^3g_{43}^5 - g_{31}^3g_{51}^2 + 2g_{41}^4g_{51}^2 + g_{21}^3g_{51}^3 - 2g_{41}^2g_{51}^4 - g_{31}^3\alpha \\
&\quad + g_{11}^3(-2 - g_{23}^5 + g_{51}^4) + g_{41}^4\alpha + g_{33}^5\beta + \xi(g_{41}^3), \\
E_4(g_{51}^4) &= g_{13}^5g_{21}^4 + g_{33}^5g_{41}^4 - g_{31}^4g_{43}^5 - g_{31}^4g_{51}^2 - 2g_{41}^3g_{51}^2 + g_{21}^4g_{51}^3 + 2g_{41}^2g_{51}^3 - g_{31}^4\alpha \\
&\quad + g_{11}^4(-2 - g_{23}^5 + g_{51}^4) - g_{41}^3\alpha + g_{43}^5\beta + \xi(g_{41}^4).
\end{aligned}$$

Доказ. Заменом $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_4, E_4, \xi)$ у (2.25) добијамо

$$(-g_{14}^5 + g_{23}^5)g_{31}^2 + (g_{13}^5 + g_{24}^5)g_{41}^2 + g_{12}^5(g_{31}^4 - g_{41}^3) + g_{33}^5(g_{31}^3 - g_{41}^4)$$

$$-g_{11}^5(g_{31}^3 + g_{41}^4) + g_{31}^4 g_{43}^5 + g_{34}^5(g_{41}^3 + \beta) - E_3(g_{13}^5) - E_4(g_{14}^5) = g_{43}^5 \beta,$$

што нам даје прву једнакост из леме, док друга следи за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_4, E_4, \xi)$. Слично, ако је $(X, Y, Z, W) = (E_3, E_4, E_4, \xi)$ добијамо извод $E_4(g_{34}^5)$. Последње три релације, изводе $E_4(g_{51}^i)$, добијамо редом за $(X, Y, Z, W) = (E_4, \xi, E_1, E_i)$, где је $i = 2, 3, 4$. $\square$

За Хопфово векторско поље ξ добијамо следеће изводе.

Лема 2.22. *Функције гаше релацијом (2.47) задовољавају једнакости:*

$$\begin{aligned}\xi(g_{11}^5) &= 1 + (g_{11}^5)^2 + g_{12}^5 g_{21}^5 - g_{13}^5 g_{24}^5 + g_{12}^5 g_{51}^2 + g_{21}^5 g_{51}^2 + g_{13}^5 g_{51}^3 - g_{24}^5 g_{51}^3 + 2g_{51}^4 + g_{23}^5 g_{51}^4 \\ &\quad + g_{14}^5(2 + g_{23}^5 + g_{51}^4) - g_{12}^5 \alpha + g_{11}^2 \beta - \beta^2, \\ \xi(g_{13}^5) &= g_{13}^5 g_{33}^5 + g_{14}^5 g_{43}^5 - g_{14}^5 g_{51}^2 + g_{23}^5 g_{51}^2 + g_{11}^5(g_{13}^5 - g_{51}^3) + g_{33}^5 g_{51}^3 + g_{43}^5 g_{51}^4 - \alpha - 2g_{14}^5 \alpha \\ &\quad + g_{12}^5(1 + g_{23}^5 + g_{51}^4) + g_{11}^4 \beta, \\ \xi(g_{14}^5) &= -g_{14}^5 g_{33}^5 + g_{13}^5 g_{34}^5 + g_{13}^5 g_{51}^2 + g_{24}^5 g_{51}^2 + g_{12}^5(g_{24}^5 - g_{51}^3) + g_{34}^5 g_{51}^3 + g_{11}^5(g_{14}^5 - g_{51}^4) \\ &\quad - g_{33}^5 g_{51}^4 + 2g_{13}^5 \alpha - g_{11}^3 \beta, \\ \xi(g_{21}^5) &= 2g_{51}^3 + 2g_{23}^5 g_{51}^3 + g_{24}^5(3 + 2g_{51}^4) + g_{11}^5(-2g_{51}^2 + \alpha) + g_{21}^2 \beta, \\ \xi(g_{23}^5) &= -g_{33}^5 + g_{23}^5 g_{33}^5 + g_{24}^5 g_{43}^5 + g_{13}^5(g_{21}^5 - g_{51}^2) - g_{24}^5 g_{51}^2 - g_{21}^5 g_{51}^3 + g_{43}^5 g_{51}^3 - g_{33}^5 g_{51}^4 \\ &\quad - g_{11}^5(1 + g_{23}^5 + g_{51}^4) - 2g_{24}^5 \alpha + g_{21}^4 \beta, \\ \xi(g_{24}^5) &= -g_{24}^5 g_{33}^5 - g_{34}^5 + g_{23}^5 g_{34}^5 + g_{14}^5(g_{21}^5 - g_{51}^2) + g_{23}^5 g_{51}^2 - g_{33}^5 g_{51}^3 + g_{11}^5(-g_{24}^5 + g_{51}^3) \\ &\quad - g_{21}^5 g_{51}^4 - g_{34}^5 g_{51}^4 + \alpha + 2g_{23}^5 \alpha - g_{21}^3 \beta, \\ \xi(g_{33}^5) &= 3 - g_{13}^5 g_{24}^5 + (g_{33}^5)^2 + g_{34}^5 g_{43}^5 - g_{34}^5 g_{51}^2 - g_{43}^5 g_{51}^3 - g_{13}^5 g_{51}^3 + g_{24}^5 g_{51}^3 + 2g_{51}^4 - g_{43}^5 \alpha \\ &\quad + g_{23}^5(3 + g_{51}^4) + g_{14}^5(1 + g_{23}^5 + g_{51}^4) - 2g_{34}^5 \alpha + g_{31}^4 \beta, \\ \xi(g_{34}^5) &= 2g_{33}^5 g_{51}^2 - 2g_{51}^3 - 2g_{14}^5 g_{51}^3 + g_{24}^5(3 + 2g_{51}^4) + 3g_{33}^5 \alpha - g_{31}^3 \beta, \\ \xi(g_{43}^5) &= g_{13}^5 + 2g_{33}^5 g_{51}^2 - 2g_{51}^3 - 2g_{23}^5 g_{51}^3 - 2g_{13}^5 g_{51}^4 + 3g_{33}^5 \alpha + g_{41}^4 \beta.\end{aligned}$$

Доказ. Гаусова једначина (2.25) за $(X, Y, Z, W) = (E_1, \xi, E_1, \xi)$ постаје

$$\begin{aligned}(g_{11}^5)^2 + g_{12}^5 g_{21}^5 - g_{13}^5 g_{24}^5 + (g_{12}^5 + g_{21}^5)g_{51}^2 + g_{13}^5 g_{51}^3 - g_{24}^5 g_{51}^3 + (2 + g_{23}^5)g_{51}^4 \\ + g_{14}^5(2 + g_{23}^5 + g_{51}^4) + g_{11}^2 \beta - \xi(g_{11}^5) = -1 + g_{12}^5 \alpha + \beta^2,\end{aligned}$$

одакле следи прва једначина, док друга следи из (2.25) за $(X, Y, Z, W) = (E_1, \xi, E_3, \xi)$. Извод $\xi(g_{14}^5)$ добијамо за $(X, Y, Z, W) = (E_1, \xi, E_4, \xi)$. Затим за $(X, Y, Z, W) = (E_2, \xi, E_i, \xi)$, $i = 1, 3, 4$ налазимо редом изводе $\xi(g_{2i}^5)$. Избором $(X, Y, Z, W) = (E_3, \xi, E_3, \xi)$ добијамо извод $\xi(g_{33}^5)$, док једнакост за $\xi(g_{34}^5)$ следи за $(X, Y, Z, W) = (E_3, \xi, E_4, \xi)$. На крају, за $(X, Y, Z, W) = (E_4, \xi, E_3, \xi)$ добијамо извод $\xi(g_{43}^5)$. $\square$

Сада посматрамо изводе функција α и β .

Лема 2.23. *Диференцијабилне функције α и β и коефицијенти (2.47) задовољавају једнакости:*

$$\begin{aligned}E_1(\beta) &= g_{13}^5 - 2g_{11}^5 g_{51}^2 + 2g_{31}^3 + 2g_{14}^5 g_{51}^3 - 2g_{13}^5 g_{51}^4 + g_{11}^5 \alpha - \xi(g_{12}^5), \\ E_2(\beta) &= 2g_{11}^5 + g_{14}^5 + 2g_{12}^5 g_{21}^5 + g_{23}^5 + 2g_{14}^5 g_{23}^5 - 2g_{13}^5 g_{24}^5 - g_{12}^5 \alpha + g_{21}^5 \alpha + g_{11}^2 \beta, \\ E_3(\beta) &= -g_{11}^5(3 + 2g_{14}^5) - 2g_{12}^5 g_{24}^5 + g_{33}^5 + 2g_{14}^5 g_{33}^5 - 2g_{13}^5 g_{34}^5 - g_{13}^5 \alpha - g_{24}^5 \alpha + g_{31}^3 \beta, \\ E_4(\beta) &= 2g_{11}^5 g_{13}^5 + g_{12}^5(3 + 2g_{23}^5) + 2g_{13}^5 g_{33}^5 + g_{43}^5 + 2g_{14}^5 g_{43}^5 + 2\alpha - g_{14}^5 \alpha + g_{23}^5 \alpha + g_{11}^4 \beta, \\ \xi(\beta) &= 3g_{11}^5 \beta + E_1(\alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(\alpha) &= (-3g_{21}^5 + g_{51}^2 + \alpha)\beta, \\ E_3(\alpha) &= (3g_{24}^5 + g_{51}^3)\beta, \\ E_4(\alpha) &= -(5 + 3g_{23}^5 - g_{51}^4)\beta. \end{aligned}$$

Доказ. За $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_i, E_3, E_4)$, $i = 2, 3, 4$, применом (2.25) добијамо редом

$$\begin{aligned} &1 - 2(g_{11}^5)^2 - 2g_{12}^5g_{21}^5 - g_{14}^5g_{23}^5 + g_{13}^5g_{24}^5 + g_{12}^5\alpha - g_{21}^5\alpha - g_{11}^2\beta + E_2(\beta) \\ &= 1 + g_{14}^5 + g_{23}^5 + g_{14}^5g_{23}^5 - g_{13}^5g_{24}^5, \\ &g_{11}^5(3 + 2g_{14}^5) - g_{14}^5g_{33}^5 + g_{24}^5(2g_{12}^5 + \alpha) + g_{13}^5(g_{34}^5 + \alpha) - g_{11}^3\beta + E_3(\beta) \\ &= g_{33}^5 + g_{14}^5g_{33}^5 - g_{13}^5g_{34}^5, \\ &-g_{12}^5(3 + 2g_{23}^5) - g_{13}^5(2g_{11}^5 + g_{33}^5) - (2 + g_{23}^5)\alpha + g_{14}^5(-g_{43}^5 + \alpha) - g_{11}^4\beta + E_4(\beta) \\ &= g_{13}^5g_{33}^5 + g_{43}^5 + g_{14}^5g_{43}^5, \end{aligned}$$

одакле следе релације за $E_i(\beta)$, $i = 2, 3, 4$. Даље, за $(X, Y, Z, W) = (E_1, \xi, E_2, \xi)$ помоћу (2.25) налазимо

$$g_{13}^5 - 2g_{11}^5g_{51}^2 + 2g_{51}^3 + 2g_{14}^5g_{51}^3 - 2g_{13}^5g_{51}^4 - \xi(g_{12}^5) - E_1(\beta) = -g_{11}^5\alpha,$$

одакле добијамо извод $E_1(\beta)$. Такође, за $(X, Y, Z, W) = (E_1, \xi, E_3, E_4)$ Гаусова једначина (2.25) се своди на

$$-3g_{11}^5\beta - E_1(\alpha) + \xi(\beta) = 0,$$

што нам даје извод $\xi(\beta)$. Слично, избором $(X, Y, Z, W) = (E_i, \xi, E_3, E_4)$, за $i = 2, 3, 4$, добијају се редом изводи $E_i(\alpha)$. $\square$

На крају имамо и три једнакости које не зависе од коваријантних извода.

Лема 2.24.

$$(3 + 2g_{14}^5)g_{21}^5 - 2g_{24}^5(g_{11}^5 + g_{33}^5) + g_{34}^5(1 + 2g_{23}^5) - (2 + g_{14}^5 - g_{23}^5)\alpha - (g_{21}^3 - g_{31}^2)\beta = 0, \quad (2.49)$$

$$g_{11}^5(3 + 2g_{23}^5) - g_{33}^5 - 2g_{23}^5g_{33}^5 - 2g_{24}^5g_{43}^5 + g_{24}^5\alpha + g_{13}^5(-2g_{21}^5 + \alpha) - g_{21}^4\beta + g_{41}^2\beta = 0, \quad (2.50)$$

$$4 + 3g_{23}^5 + g_{14}^5(3 + 2g_{23}^5) - 2g_{13}^5g_{24}^5 + 2(g_{33}^5)^2 + (2g_{43}^5 - \alpha)g_{34}^5 + g_{43}^5\alpha + (g_{31}^4 - g_{41}^3)\beta = 0. \quad (2.51)$$

Доказ. Једначина (2.25) за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_3, E_3, E_4)$ постаје

$$\begin{aligned} &(3 + 2g_{14}^5)g_{21}^5 - g_{24}^5(2g_{11}^5 + g_{33}^5) - (2 + g_{14}^5)\alpha + g_{23}^5(g_{34}^5 + \alpha) + (-g_{21}^3 + g_{31}^2)\beta \\ &= g_{24}^5g_{33}^5 - (1 + g_{23}^5)g_{34}^5, \end{aligned}$$

што је еквивалентно првој једначини. Затим, за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_4, E_3, E_4)$ добијамо

$$-2g_{13}^5g_{21}^5 + g_{11}^5(3 + 2g_{23}^5) - g_{23}^5g_{33}^5 - g_{24}^5g_{43}^5 + (g_{13}^5 + g_{24}^5)\alpha - g_{21}^4\beta + g_{41}^2\beta = (1 + g_{23}^5)g_{33}^5 + g_{24}^5g_{43}^5,$$

што даје другу једначину. На крају, Гаусова једначина (2.25) се, за $(X, Y, Z, W) = (E_3, E_4, E_3, E_4)$, своди на

$$\begin{aligned} &-5 - 3g_{23}^5 - g_{14}^5(3 + 2g_{23}^5) + 2g_{13}^5g_{24}^5 - (g_{33}^5)^2 - g_{34}^5g_{43}^5 + g_{34}^5\alpha - g_{43}^5\alpha - g_{31}^4\beta + g_{41}^3\beta \\ &= -1 + (g_{33}^5)^2 + g_{34}^5g_{43}^5, \end{aligned}$$

из чега следи трећа једначина. $\square$

Директном провером показујемо да једначине Гауса и Кодација не намећу додатне услове.

Глава 3

Структурни Јакобијев оператор хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$

Нека је M оријентабилна реална хиперповрш сфере $\mathbb{S}^6$ са јединичним нормалним векторским пољем N и $\xi = -JN$ карактеристично векторско поље. Јакобијев оператор у односу на векторско поље ξ назива се **структурни Јакобијев оператор** и обележићемо га са l , при чему је

$$lY = R_\xi(Y) = R(Y, \xi)\xi.$$

Коваријантни извод структурног Јакобијевог оператора l дат је формулом

$$(\nabla_X l)Y = \nabla_X(lY) - l(\nabla_X Y),$$

а његов Лијев извод је

$$(\mathcal{L}_X l)Y = \nabla_X(lY) + l\nabla_Y X - \nabla_{lY} X - l\nabla_X Y,$$

за произвољна векторска поља X и Y тангентна на M .

За рачун у овој глави користићемо покретни ортонормирани репер E дефинисан у Лему 2.13, као и релације између коефицијената које смо извели у том поглављу.

3.1 Хиперповрши са паралелним структурним Јакобијевим оператором

У овом поглављу биће представљени резултати из рада [6], где је главни резултат доказ непостојања оријентабилних реалних хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$ са структурним Јакобијевим оператором који задовољава услов $\nabla_X l = 0$ за сва векторска поља X тангентна на хиперповрш M , односно доказ следеће теореме:

Теорема 3.1. *Не постоје оријентабилне реалне хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$ са паралелним структурним Јакобијевим оператором.*

Услов да је структурни Јакобијев оператор паралелан еквивалентан је услову

$$g(\nabla_{E_i}(lE_j) - l(\nabla_{E_i}E_j), E_k) = 0, \quad 1 \leq i, j, k \leq 5.$$

Из $g(\nabla_\xi(lE_i) - l(\nabla_\xi E_i), \xi) = 0$, $1 \leq i \leq 4$, добијамо

$$g_{11}^5 \alpha \beta = 0, \quad (1 + g_{21}^5 \alpha) \beta = 0, \quad g_{24}^5 \alpha \beta = 0, \quad (1 + g_{23}^5) \alpha \beta = 0. \quad (3.1)$$

Сада ћемо посебно размотрити случајеве када је хиперповрш Хопфова и када није.

Случај 1: Претпоставимо да је M Хопфова хиперповрш. Тада из (2.48) имамо $\beta = 0$, ξ је сопствено векторско поље оператора облика A и α је константно.

Сада из Леме 2.23 и $E_i(\beta) = 0$, за $i = 2, 3, 4$ добијамо

$$\begin{aligned} g_{14}^5 + g_{23}^5 + 2((g_{11}^5)^2 + g_{12}^5 g_{21}^5 + g_{14}^5 g_{23}^5 - g_{13}^5 g_{24}^5) + (g_{21}^5 - g_{12}^5) \alpha &= 0, \\ g_{33}^5 - g_{11}^5 (3 + 2g_{14}^5) + 2(g_{14}^5 g_{33}^5 - g_{12}^5 g_{24}^5 - g_{13}^5 g_{34}^5) - (g_{13}^5 + g_{24}^5) \alpha &= 0, \\ g_{12}^5 (3 + 2g_{23}^5) + 2g_{13}^5 (g_{11}^5 + g_{33}^5) + g_{43}^5 + 2g_{14}^5 g_{43}^5 + (2 - g_{14}^5 + g_{23}^5) \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

За остала векторска поља E_1, E_2, E_3 и E_4 , оператор облика је дат са

$$\begin{aligned} AE_1 &= -g_{12}^5 E_1 + g_{11}^5 E_2 - (1 + g_{14}^5) E_3 + g_{13}^5 E_4, \\ AE_2 &= g_{11}^5 E_1 + g_{21}^5 E_2 - g_{24}^5 E_3 + (1 + g_{23}^5) E_4, \\ AE_3 &= -(1 + g_{14}^5) E_1 - g_{24}^5 E_2 - g_{34}^5 E_3 + g_{33}^5 E_4, \\ AE_4 &= g_{13}^5 E_1 + (1 + g_{23}^5) E_2 + g_{33}^5 E_3 + g_{43}^5 E_4. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ако претпоставимо да је M геодезијска хиперсфера, тада је $A = \alpha \cdot \text{Id}$, те из (3.3) добијамо

$$\begin{aligned} g_{12}^5 &= -\alpha, & g_{11}^5 &= 0, & g_{14}^5 &= -1, & g_{13}^5 &= 0, & g_{21}^5 &= \alpha, \\ g_{24}^5 &= 0, & g_{23}^5 &= -1, & g_{34}^5 &= -\alpha, & g_{33}^5 &= 0, & g_{43}^5 &= \alpha. \end{aligned}$$

Међутим, у том случају из $0 = g(\nabla_{E_1}(l\xi) - l(\nabla_{E_1}\xi), E_4) = -1 - \alpha^2$ добијамо контрадикцију. Дакле, M мора бити део тубе око скоро комплексне криве у $\mathbb{S}^6$.

У овом случају још увек имамо слободу да изаберемо векторско поље $E_1 \in \mathcal{D}$. На основу Напомене 8, можемо изабрати E_1 као сопствено векторско поље оператора облика A . Из (3.3) добијамо

$$g_{11}^5 = 0, \quad g_{14}^5 = -1, \quad g_{13}^5 = 0,$$

па на основу Леме 2.22 имамо

$$0 = \xi(g_{14}^5) = g_{33}^5 + g_{24}^5 g_{51}^2 + g_{12}^5 (g_{24}^5 - g_{51}^3) + g_{34}^5 g_{51}^3 - g_{33}^5 g_{51}^4. \quad (3.4)$$

Из $g(\nabla_{E_1}(l\xi) - l(\nabla_{E_1}\xi), E_4) = 0$ следи

$$g_{23}^5 + 2(g_{33}^5)^2 + 2g_{34}^5 g_{43}^5 + g_{12}^5 \alpha + g_{12}^5 g_{23}^5 \alpha - g_{34}^5 \alpha = 0,$$

па, сабирањем са (2.51), добијамо

$$-1 + g_{12}^5 (1 + g_{23}^5) \alpha - g_{43}^5 \alpha = 0,$$

што имплицира да је $\alpha \neq 0$. Сада из

$$0 = g(\nabla_{E_1}(l\xi) - l(\nabla_{E_1}\xi), E_3) = -(g_{12}^5 g_{24}^5 + g_{33}^5) \alpha,$$

налазимо $g_{33}^5 = -g_{12}^5 g_{24}^5$, па друга једначина из (3.2) постаје $-g_{24}^5(g_{12}^5 + \alpha) = 0$.

Како M није геодезијска хиперсфера, постоји сопствена вредност оператора облика A различита од α . Можемо претпоставити да је векторско поље E_1 такво да је његова одговарајућа сопствена вредност $-g_{12}^5 \neq \alpha$.

Из претходног директно добијамо да је $g_{24}^5 = 0$ и $g_{33}^5 = 0$ па је $E_2(g_{33}^5) = 0$, $\xi(g_{33}^5) = 0$ и $E_4(g_{24}^5) = 0$, одакле је, редом,

$$\begin{aligned} E_3(g_{23}^5) &= -g_{21}^4(1 + g_{23}^5) - g_{21}^5 g_{31}^3 + g_{21}^2 g_{34}^5 + g_{21}^2 g_{43}^5 + g_{31}^3 g_{43}^5, \\ 0 &= 2 + g_{51}^4 + g_{23}^5(2 + g_{51}^4) + g_{34}^5(g_{43}^5 - g_{51}^2 - 2\alpha) - g_{43}^5(g_{51}^2 + \alpha), \\ 0 &= g_{21}^4 + g_{21}^4 g_{23}^5 + g_{41}^2 + g_{23}^5 g_{41}^2 - (g_{21}^5 + g_{34}^5)g_{41}^4 - g_{21}^2(g_{34}^5 + g_{43}^5). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Сада, једначина (2.49) и трећа једначина из (3.2) постају $g_{21}^5 = -(1 + 2g_{23}^5)g_{34}^5 + \alpha - g_{23}^5\alpha$ и $g_{43}^5 = g_{12}^5(3 + 2g_{23}^5) + (3 + g_{23}^5)\alpha$. Одузимањем (2.51) од прве једначине у (3.2) добијамо $4(g_{12}^5 + \alpha)(g_{34}^5 + \alpha) = 0$, па је $g_{34}^5 = -\alpha$. Како је α константно, на основу Лема 2.18 и 2.19 добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= E_1(g_{34}^5) = g_{31}^3(g_{12}^5 + \alpha), \\ 0 &= E_2(g_{34}^5) = -(1 + g_{23}^5)g_{31}^2 + g_{31}^4(g_{21}^5 - \alpha), \end{aligned} \quad (3.6)$$

и $g_{31}^3 = 0$. Даље, једначина (3.4) постаје $-g_{51}^3(g_{12}^5 + \alpha) = 0$, па је $g_{51}^3 = 0$. Из (2.49) и (2.51) редом налазимо $g_{21}^5 - (2 + g_{23}^5)\alpha = 0$ и $-1 - g_{23}^5 + g_{43}^5\alpha - \alpha^2 = 0$. Дакле,

$$g_{21}^5 - \alpha = (1 + g_{23}^5)\alpha = (g_{43}^5 - \alpha)\alpha^2. \quad (3.7)$$

Из претходног добијамо

$$\begin{aligned} AE_1 &= -g_{12}^5 E_1, & AE_2 &= g_{21}^5 E_2 + (1 + g_{23}^5)E_4, & AE_3 &= \alpha E_3, \\ AE_4 &= (1 + g_{23}^5)E_2 + g_{43}^5 E_4, & A\xi &= \alpha \xi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ако претпоставимо да је $g_{43}^5 = \alpha$, из (3.7) имамо $1 + g_{23}^5 = 0$ и $g_{21}^5 = \alpha$, а из (3.8) следи да су E_2, E_3, E_4 и ξ сопствени вектори са сопственом вредношћу α , док је E_1 сопствени вектор са сопственом вредношћу $-g_{12}^5 \neq \alpha$, што је контрадикција.

Сходно томе, $g_{43}^5 \neq \alpha$. Из (3.7) имамо $g_{23}^5 = (g_{43}^5 - \alpha)\alpha - 1$ и $g_{21}^5 = (g_{43}^5 - \alpha)\alpha^2 + \alpha$. Сада, друга и трећа једначина из (3.5) и (3.6) редом гласе

$$\begin{aligned} (g_{43}^5 - \alpha)(-g_{51}^2 + g_{51}^4\alpha) &= 0, \\ (g_{43}^5 - \alpha)(g_{21}^2 - \alpha(g_{21}^4 + g_{41}^2 - g_{41}^4\alpha)) &= 0, \\ (g_{43}^5 - \alpha)\alpha(-g_{31}^2 + g_{31}^4\alpha) &= 0, \end{aligned}$$

из чега следи $g_{51}^2 = g_{51}^4\alpha$, $g_{21}^2 = \alpha(g_{21}^4 + g_{41}^2 - g_{41}^4\alpha)$ и $g_{31}^2 = g_{31}^4\alpha$. Сада, из

$$0 = E_2(g_{23}^5 - (g_{43}^5 - \alpha)\alpha + 1) = (g_{43}^5 - \alpha)(g_{21}^3 - g_{41}^3\alpha)(1 + \alpha^2),$$

добијамо $g_{21}^3 = g_{41}^3\alpha$. Даље, из

$$0 = g(\nabla_\xi(lE_1) - l(\nabla_\xi E_1), E_4) = \alpha(g_{43}^5 - \alpha)(-1 + g_{12}^5\alpha),$$

имамо $g_{12}^5\alpha = 1$. Коначно, заменом овог израза у једначину

$$0 = g(\nabla_{E_1}(l\xi) - l(\nabla_{E_1}\xi), E_4) = -1 - g_{12}^5\alpha^3 + g_{43}^5\alpha(-1 + g_{12}^5\alpha)$$

добијамо $-1 - \alpha^2 = 0$, што је контрадикција.

Случај 2: Претпоставимо сада да M није Хопфова хиперповрш, тј. да је $\beta \neq 0$. Тада из друге једначине у (3.1) следи да је $\alpha \neq 0$.

У складу са тим, из (3.1) имамо

$$g_{11}^5 = 0, \quad g_{21}^5 \alpha = -1, \quad g_{24}^5 = 0, \quad g_{23}^5 = -1, \quad (3.9)$$

па, заменом добијених коефицијената у формуле из Лема 2.18, 2.21 и 2.22, добијамо следећу лему:

Лема 3.2.

$$\begin{aligned} 0 &= \xi(g_{11}^5) = 1 + g_{21}^5 g_{51}^2 + g_{13}^5 g_{51}^3 + g_{51}^4 + g_{14}^5 (1 + g_{51}^4) + (g_{11}^2 - \beta) \beta \\ &\quad + g_{12}^5 (g_{21}^5 + g_{51}^2 - \alpha), \\ 0 &= E_1(g_{24}^5) = -g_{11}^2 (1 + g_{14}^5) + (g_{12}^5 + g_{21}^5) g_{31}^2 + g_{13}^5 g_{31}^3 + g_{31}^4 + g_{14}^5 g_{31}^4 \\ &\quad - g_{11}^3 g_{33}^5 - g_{11}^4 (g_{21}^5 + g_{34}^5) + (2 + g_{14}^5) \beta, \\ 0 &= E_4(g_{24}^5) = -g_{13}^5 g_{31}^2 - (1 + g_{14}^5) g_{41}^2 - g_{33}^5 (g_{31}^4 + g_{41}^3) - g_{34}^5 g_{41}^4 + g_{31}^3 g_{43}^5 - g_{21}^5 (g_{31}^3 + g_{41}^4), \\ 0 &= \xi(g_{24}^5) = -2g_{34}^5 + g_{14}^5 (g_{21}^5 - g_{51}^2) - g_{51}^2 - g_{33}^5 g_{51}^3 - (g_{21}^5 + g_{34}^5) g_{51}^4 - g_{21}^3 \beta - \alpha, \\ 0 &= E_1(g_{23}^5) = -g_{11}^4 g_{33}^5 - (g_{12}^5 + g_{21}^5) g_{41}^2 - (1 + g_{14}^5) g_{41}^4 + g_{11}^3 (-g_{21}^5 + g_{43}^5) \\ &\quad - g_{13}^5 (g_{11}^2 + g_{41}^3 - \beta), \\ 0 &= \xi(g_{23}^5) = g_{13}^5 (g_{21}^5 - g_{51}^2) - g_{21}^5 g_{51}^3 + g_{43}^5 g_{51}^3 - g_{33}^5 (2 + g_{51}^4) + g_{21}^4 \beta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Затим, из $E_2(g_{24}^5) = 0$ и $E_2(g_{23}^5) = 0$, на основу Леме 2.19, имамо

$$\begin{aligned} E_3(g_{21}^5) &= -(1 + g_{14}^5) g_{21}^2 - g_{21}^3 g_{33}^5 - g_{21}^4 (g_{21}^5 + g_{34}^5), \\ E_4(g_{21}^5) &= g_{13}^5 g_{21}^2 + g_{21}^4 g_{33}^5 + g_{21}^3 (g_{21}^5 - g_{43}^5). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Даље, из услова $E_i(g_{21}^5 \alpha) = 0$, за $i = 2, 3, 4$, користећи (3.12), редом налазимо

$$\begin{aligned} E_2(g_{21}^5) &= -(g_{21}^5)^2 (3g_{21}^5 - g_{51}^2 - \alpha) \beta, \\ g_{21}^5 g_{51}^3 \beta - ((1 + g_{14}^5) g_{21}^2 + g_{21}^3 g_{33}^5 + g_{21}^4 (g_{21}^5 + g_{34}^5)) \alpha &= 0, \\ g_{13}^5 g_{21}^2 \alpha + g_{21}^4 g_{33}^5 \alpha + g_{21}^3 (g_{21}^5 - g_{43}^5) \alpha + g_{21}^5 (-2 + g_{51}^4) \beta &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Затим, из $0 = g(\nabla_{E_1}(lE_1) - l(\nabla_{E_1}E_1), \xi) = -g_{13}^5 \alpha$ и $0 = g(\nabla_{E_3}(lE_3) - l(\nabla_{E_3}E_3), \xi) = g_{33}^5$ имамо $g_{13}^5 = 0$ и $g_{33}^5 = 0$. Замена добијених вредности у релације из Лема 2.19 и 2.22 доводи до следеће леме:

Лема 3.3.

$$\begin{aligned} 0 &= E_2(g_{13}^5) = -(1 + g_{14}^5) g_{21}^2 + g_{21}^3 g_{33}^5 + g_{12}^5 (g_{21}^4 - g_{41}^2) - g_{21}^5 g_{41}^2 - (1 + g_{14}^5) g_{41}^4 + g_{21}^4 g_{43}^5, \\ 0 &= \xi(g_{13}^5) = -g_{51}^2 + g_{33}^5 g_{51}^3 + (g_{12}^5 + g_{43}^5) g_{51}^4 - \alpha + g_{11}^4 \beta + g_{14}^5 (g_{43}^5 - g_{51}^2 - 2\alpha), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} 0 &= E_2(g_{33}^5) = g_{21}^4 + g_{14}^5 g_{21}^4 + g_{21}^3 g_{31}^3 - g_{21}^5 g_{34}^5 - (g_{21}^2 + g_{31}^3) g_{43}^5, \\ 0 &= \xi(g_{33}^5) = g_{51}^4 (1 + g_{14}^5) + g_{34}^5 (g_{43}^5 - g_{51}^2 - 2\alpha) - g_{43}^5 (g_{51}^2 + \alpha) + g_{31}^4 \beta. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Лема 3.4. Коефицијенти (2.47) и функције α и β задовољавају следеће једнакости:

$$\begin{aligned} g_{43}^5 - g_{34}^5 (1 + (g_{43}^5)^2) - g_{51}^2 - g_{21}^5 (3 + g_{14}^5 + g_{51}^4) - g_{14}^5 (g_{51}^2 + g_{43}^5 g_{51}^4) \\ + \alpha + (g_{34}^5 + g_{43}^5) (-g_{51}^4 + g_{43}^5 (g_{51}^2 + \alpha)) - g_{31}^2 \beta - g_{31}^4 g_{43}^5 \beta = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 1 + g_{14}^5 + g_{43}^5(g_{21}^5 + g_{34}^5) &= 0, \\
 g_{41}^4(2g_{51}^2 - 2(g_{12}^5 + g_{43}^5)g_{51}^4 + \alpha + g_{14}^5(-2g_{43}^5 + 2g_{51}^2 + 3\alpha) - 2g_{11}^4\beta) &= 0, \\
 -(1 + g_{14}^5)g_{41}^4\alpha &= 0, \\
 -g_{11}^3 + (g_{21}^5 + g_{34}^5)g_{41}^4 + (g_{21}^2 - g_{31}^3)g_{43}^5 &= 0, \\
 g_{14}^5 + g_{34}^5\alpha &= 0, \\
 -g_{11}^4(1 + g_{14}^5) + (g_{34}^5 + g_{43}^5)(g_{11}^2 + \beta) &= 0, \\
 g_{14}^5(1 + g_{43}^5\alpha) &= 0, \\
 (1 + g_{14}^5)(g_{11}^2\alpha - g_{11}^4) &= 0, \\
 g_{21}^2(g_{34}^5 + g_{43}^5) &= 0, \\
 (1 + g_{14}^5)(1 + g_{21}^5g_{43}^5)\alpha &= 0, \\
 -(g_{21}^5 + g_{34}^5)g_{41}^4\alpha &= 0.
 \end{aligned}$$

Доказ. Из (2.50), имамо $(-g_{21}^4 + g_{41}^2)\beta = 0$, па је $g_{41}^2 = g_{21}^4$.

Сада, из $g(\nabla_{E_4}(lE_3) - l(\nabla_{E_4}E_3), \xi) = 0$, добијамо прву релацију ове леме.

Даље, имамо да је $(3.16) + g_{43}^5(3.15) + (2.49) - (3.11) = 0$ и $g_{43}^5 - (1 + g_{14}^5)\alpha - g_{34}^5g_{43}^5\alpha = 0$. Ако ово помножимо са g_{21}^5 и искористимо $g_{21}^5\alpha = -1$, добијамо другу релацију леме.

Сада, збир треће релације Леме 3.2 и треће релације Леме 3.3 и прве релације Леме 3.3, респективно, своди се на

$$\begin{aligned}
 -(g_{21}^5 + g_{34}^5)g_{41}^4 - g_{21}^2(g_{34}^5 + g_{43}^5) &= 0, \\
 g_{43}^5(g_{21}^5 + g_{34}^5)g_{21}^2 + g_{43}^5(g_{21}^5 + g_{34}^5)g_{41}^4 + g_{21}^4(-g_{21}^5 + g_{43}^5) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ако помножимо прву релацију из (3.17) са g_{43}^5 и додамо је другој, добијамо

$$(g_{21}^5 - g_{43}^5)(-g_{21}^4 + g_{21}^2g_{43}^5) = 0.$$

Ако претпоставимо да је $g_{21}^5 = g_{43}^5$, из последње релације Леме 3.2 имамо $g_{21}^4 = 0$. С друге стране, ако претпоставимо да је $g_{21}^4 = g_{21}^2g_{43}^5$, прво, коришћењем друге релације Леме добијамо $g_{21}^5g_{51}^3\beta = 0$ из прве једначине у (3.13), дакле, $g_{51}^3 = 0$. Затим, из последње једначине Леме 3.2, имамо $g_{21}^2g_{43}^5\beta = 0$. Дакле, $0 = g_{21}^2g_{43}^5 = g_{21}^4$. У оба случаја, добијамо $g_{21}^4 = 0$.

Трећа релација Леме сада директно произилази из $g(\nabla_{E_4}(lE_1) - l(\nabla_{E_4}E_1), E_2) = 0$.

Четврта релација се добија као збир треће и производа (3.14) са $2g_{41}^4$.

Приметимо да је друга релација из (3.17) сада постала

$$(g_{21}^5 + g_{34}^5)(g_{21}^2 + g_{41}^4)g_{43}^5 = 0.$$

Из четврте релације, коришћењем друге релације Леме, имамо $0 = -(1 + g_{14}^5)g_{41}^4 = (g_{21}^5 + g_{34}^5)g_{43}^5g_{41}^4$; дакле, из друге релације у (3.17), добијамо $0 = g_{43}^5(g_{21}^5 + g_{34}^5)g_{21}^2 = (1 + g_{14}^5)g_{21}^2$. Сада, прва релација у (3.13) постаје $g_{21}^5g_{51}^3\beta = 0$, па је $g_{51}^3 = 0$.

Користећи другу релацију Леме уз $\beta \neq 0$, из $\xi(1 + g_{14}^5 + g_{43}^5(g_{21}^5 + g_{34}^5)) = 0$ добијамо пету једначину.

Шеста једначина следи из $g(\nabla_{E_2}(l\xi) - l(\nabla_{E_2}\xi), E_3) - (3.15) + g_{21}^5(3.14) = 0$ користећи $g_{21}^5\alpha = -1$.

Пошто је $g(\nabla_{E_1}(lE_3) - l(\nabla_{E_1}E_3), E_4) - (\beta + g_{11}^2)(2 \cdot (3.15) + (2.51)) - g_{11}^4(2 \cdot (3.11) - (2.49)) = 0$, добијамо седму једначину.

Осму једначину добијамо из $g(\nabla_{E_1}(l\xi) - l(\nabla_{E_1}\xi), E_4) - g_{14}^5((3.15) + (2.51)) + g_{12}^5(3.11) = 0$, а девета затим следи из $g_{21}^5(n_{12}^1 + g_{11}^2(3.10) - g_{11}^4(2 \cdot (3.11) - (2.49))) - g_{11}^2(n_{25}^1 + (3.11) - (2.49)) = 0$.

Из $g(\nabla_{E_2}(lE_4) - l(\nabla_{E_2}E_4), E_3) - g_{21}^2(2 \cdot (3.15) + (2.51)) = 0$, $g(\nabla_{E_2}(l\xi) - l(\nabla_{E_2}\xi), E_1) + (3.11) - (2.49) - g_{21}^5(g(\nabla_{E_4}(l\xi) - l(\nabla_{E_4}\xi), E_1) - g_{43}^5((3.11) - (2.49))) = 0$ и $g(\nabla_{E_4}(lE_3) - l(\nabla_{E_4}E_3), E_2) + g_{41}^4((3.10) + (3.15)) = 0$, респективно, добијамо $g_{21}^2(g_{34}^5 + g_{43}^5)\alpha = 0$ и десету, једанаесту и дванаесту релацију. $\square$

Сада посматрамо девету релацију из Леме 3.4 која гласи $(1 + g_{14}^5)(g_{11}^2\alpha - g_{11}^4) = 0$.

Случај 2.1: Претпоставимо најпре да је $g_{14}^5 = -1$. Тада из шесте релације Леме 3.4 имамо $g_{34}^5 = -g_{21}^5$, док из осме добијамо $g_{43}^5 = g_{21}^5$.

Из Леме 2.22 и $0 = \xi(g_{14}^5) = -g_{31}^3\beta$, следи $g_{31}^3 = 0$. Из $2 \cdot (3.11) - (2.49) = 0$ и друге релације из (3.13) редом налазимо

$$-(g_{21}^3 + g_{31}^2)\beta = 0, \quad g_{21}^5(-2 + g_{51}^4)\beta = 0,$$

па је $g_{31}^2 = -g_{21}^3$ и $g_{51}^4 = 2$. Пета релација Леме 3.4 тада даје $g_{21}^5(g_{21}^2 - g_{31}^3) = 0$, одакле $g_{31}^3 = g_{21}^2$. Како је $g_{34}^5 + g_{21}^5 = 0$, из $E_2(g_{34}^5 + g_{21}^5) = 0$ и користећи Лему 2.19, добијамо

$$(g_{21}^5)^2(-3g_{21}^5 + g_{51}^2 + \alpha)\beta = 0,$$

па имамо $g_{51}^2 = 3g_{21}^5 - \alpha$. Ако помножимо (3.15) са два и додамо (2.51), добијамо $(g_{31}^4 + g_{41}^3)\beta = 0$, одакле $g_{41}^3 = -g_{31}^4$. Коначно, ако саберемо $2g_{31}^4\beta$ са (2.51), добијамо $2g_{21}^5(g_{21}^5 - \alpha) = 0$; па је $g_{21}^5 = \alpha$. Сада, из (3.9), имамо $-1 = g_{21}^5\alpha = \alpha^2$, што је контрадикција. Дакле, $g_{14}^5 \neq -1$, $g_{34}^5 \neq -g_{21}^5$ и $g_{43}^5 \neq -g_{34}^5$.

Случај 2.2: Нека је $g_{14}^5 \neq -1$. Тада из претходног случаја имамо $g_{34}^5 \neq -g_{21}^5$ и $g_{43}^5 \neq -g_{34}^5$. Из десете релације Леме 3.4 имамо $g_{21}^2 = 0$, док дванаеста даје $g_{41}^4 = 0$, а једанаеста $g_{43}^5 = \alpha$. Из треће релације Леме 3.2 и пете релације Леме 3.4 редом добијамо $g_{31}^3(-g_{21}^5 + \alpha) = 0$ и $-g_{11}^3 - g_{31}^3\alpha = 0$. Ако је $g_{21}^5 = \alpha$, добијамо контрадикцију. Дакле, $g_{31}^3 = 0$ и $g_{11}^3 = 0$. Даље, из осме релације Леме 3.4, имамо $g_{14}^5(1 + \alpha^2) = 0$, па је $g_{14}^5 = 0$, а друга даје $1 + (g_{21}^5 + g_{34}^5)\alpha = 0$, што значи да је $g_{34}^5 = 0$. Сада, из девете и седме једначине Леме 3.4 редом имамо да је $g_{11}^4 = g_{11}^2\alpha$ и $\alpha\beta = 0$, што је контрадикција.

Тиме је доказ Теореме 3.1 завршен. $\square$

3.2 Хиперповрши са структурним Јакобијевим оператором који задовољава $\nabla_X l = \mathcal{L}_X l$

У овом поглављу ће бити представљени резултати из рада [37]. С обзиром да не постоје хиперповрши са паралелним структурним Јакобијевим оператором даље посматрамо слабији услов. Главни резултат овог поглавља је доказ непостојања реалних хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$ код којих се Лијев извод структурног Јакобијевог оператора поклапа са коваријантним изводом тог оператора у правцу произвољног векторског поља тангентног на ту хиперповрш, односно доказ следеће теореме:

Теорема 3.5. Не постоје реалне хиперповрши у $\mathbb{S}^6$ са структурним Јакобијевим оператором који задовољава услов $\mathcal{L}_X l = \nabla_X l$, за произвољно векторско поље X тангентно на M .

Доказ. Услов $\mathcal{L}_X l = \nabla_X l$ је еквивалентан услову

$$g(l\nabla_{E_j} E_i - \nabla_{lE_j} E_i, E_k) = 0, \quad 1 \leq i, j, k \leq 5.$$

Из $g(l\nabla_{E_i} \xi - \nabla_{lE_i} \xi, \xi) = 0$, $1 \leq i \leq 4$ добијамо, редом,

$$g_{11}^5 \alpha \beta = 0, \quad (1 + g_{21}^5 \alpha) \beta = 0, \quad g_{24}^5 \alpha \beta = 0, \quad (1 + g_{23}^5) \alpha \beta = 0. \quad (3.18)$$

Сада ћемо посебно разматрати случај када је хиперповрш M Хопфова и када није.

Случај 1: Претпоставимо да је M Хопфова хиперповрш. Тада на основу (2.48) важи $\beta = 0$, ξ је сопствено векторско поље оператора облика A и α је константно.

Како у овом случају још увек имамо слободу избора векторског поља $E_1 \in \mathcal{D}$, на основу Напомене 8, можемо претпоставити да је E_1 сопствено векторско поље оператора облика A . Како је

$$AE_1 = -g_{12}^5 E_1 + g_{11}^5 E_2 - (1 + g_{14}^5) E_3 + g_{13}^5 E_4,$$

добијамо $g_{11}^5 = 0$, $g_{14}^5 = -1$, $g_{13}^5 = 0$.

Из $0 = g(l\nabla_{E_1} E_4 - \nabla_{lE_1} E_4, \xi) = 1 - g_{12}^5 \alpha$, имамо $g_{12}^5 \neq 0 \neq \alpha$ и

$$0 = E_2(1 - g_{12}^5 \alpha) = -(g_{11}^2(g_{12}^5 + g_{21}^5) + g_{11}^4(1 + g_{23}^5) - g_{11}^3 g_{24}^5) \alpha. \quad (3.19)$$

Из $0 = g(l\nabla_{E_2} \xi - \nabla_{lE_2} \xi, E_2) = -g_{24}^5 \alpha$, имамо $g_{24}^5 = 0$, а затим из $0 = g(l\nabla_{E_1} \xi - \nabla_{lE_1} \xi, E_3) = g_{33}^5 \alpha$ добијамо $g_{33}^5 = 0$. Дакле,

$$0 = E_1(g_{24}^5) = g_{11}^2 + g_{12}^5 g_{21}^3 - g_{11}^4 g_{21}^5 + g_{11}^2 g_{23}^5 - (g_{11}^4 + g_{21}^3) g_{34}^5. \quad (3.20)$$

Сада имамо $0 = g(l\nabla_{E_i} E_4 - \nabla_{lE_i} E_4, E_4) = -g_{i1}^3(1 + g_{23}^5) \alpha$, $1 \leq i \leq 5$. Ако претпоставимо $1 + g_{23}^5 = 0$, онда из $0 = g(l\nabla_{E_1} \xi - \nabla_{lE_1} \xi, E_2) = -g_{12}^5(g_{12}^5 + g_{21}^5) \alpha$ и $0 = g(l\nabla_{E_2} \xi - \nabla_{lE_2} \xi, E_3) = -(g_{21}^5 + g_{34}^5) \alpha$ добијамо $g_{34}^5 = -g_{21}^5 = g_{12}^5$. Даље, из $0 = g(l\nabla_{E_2} \xi - \nabla_{lE_2} \xi, E_1) = 2(g_{12}^5 + \alpha)$ имамо $g_{12}^5 = -\alpha$, па из $0 = g(l\nabla_{E_1} E_4 - \nabla_{lE_1} E_4, \xi) = 1 + \alpha^2$ добијамо контрадикцију. Стога је $1 + g_{23}^5 \neq 0$, $g_{i1}^3 = 0$, $1 \leq i \leq 5$ и помоћу Леме 2.18 налазимо да је

$$0 = E_1(g_{31}^3) = -1 + 2g_{11}^4 g_{31}^2 - 2g_{11}^2 g_{31}^4 - g_{12}^5 g_{34}^5. \quad (3.21)$$

Сада, (3.19) и (3.20) се свode на $g_{11}^2(g_{12}^5 + g_{21}^5) + g_{11}^4(1 + g_{23}^5) = 0$ и $g_{11}^2(1 + g_{23}^5) - g_{11}^4(g_{21}^5 + g_{34}^5) = 0$, респективно, па $g_{11}^2 = 0$ ако и само ако $g_{11}^4 = 0$. Ако претпоставимо $g_{11}^4 \neq 0$, из $0 = g(l\nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{lE_1} E_2, E_3) = g_{11}^4(-g_{12}^5 + g_{34}^5) \alpha$ имамо $g_{34}^5 = g_{12}^5$. Тада је детерминанта система једначина (3.19) и (3.20) једнака $-(g_{12}^5 + g_{21}^5)^2 - (1 + g_{23}^5)^2 \neq 0$, па имамо само тривијално решење $g_{11}^2 = g_{11}^4 = 0$. Дакле, $g_{11}^2 = g_{11}^4 = 0$.

Ако саберемо $g(l\nabla_{E_1} E_4 - \nabla_{lE_1} E_4, \xi)$ са (3.21) добијамо $-g_{12}^5(g_{34}^5 + \alpha) = 0$, па $g_{34}^5 = -\alpha$. Сада (2.51) постаје $-1 - g_{23}^5 + g_{43}^5 \alpha - \alpha^2 = 0$, односно $g_{43}^5 \alpha - g_{23}^5 = 1 + \alpha^2$, а користећи $0 = g(l\nabla_{E_1} E_4 - \nabla_{lE_1} E_4, \xi) = 1 - g_{12}^5 \alpha$ добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= g(l\nabla_{E_1} \xi - \nabla_{lE_1} \xi, E_4) = -1 + 2g_{43}^5 \alpha - \alpha^2 - g_{23}^5(1 + g_{12}^5 \alpha) \\ &= -1 - \alpha^2 + 2(g_{43}^5 \alpha - g_{23}^5) = 1 + \alpha^2, \end{aligned}$$

што је контрадикција.

Случај 2: Претпоставимо да M није Хопфова хиперповрш, тј. да је $\beta \neq 0$. Тада друга једначина из (3.18) имплицира $\alpha \neq 0$, па имамо да је

$$g_{11}^5 = 0, \quad g_{21}^5 \alpha = -1, \quad g_{24}^5 = 0, \quad g_{23}^5 = -1. \quad (3.22)$$

Даље, на основу Лема 2.18 и 2.22 и релације (3.22) добијамо следећу лему:

Лема 3.6.

$$\begin{aligned} 0 &= \xi(g_{11}^5) = 1 + g_{21}^5 g_{51}^2 + g_{13}^5 g_{51}^3 + g_{51}^4 + g_{14}^5 (1 + g_{51}^4) + (g_{11}^2 - \beta) \beta + g_{12}^5 (g_{21}^5 + g_{51}^2 - \alpha), \\ 0 &= E_1(g_{24}^5) = -g_{11}^2 (1 + g_{14}^5) + (g_{12}^5 + g_{21}^5) g_{31}^2 + g_{13}^5 g_{31}^3 + g_{31}^4 + g_{14}^5 g_{31}^4 - g_{11}^3 g_{33}^5 \\ &\quad - g_{11}^4 (g_{21}^5 + g_{34}^5) + (2 + g_{14}^5) \beta, \\ 0 &= \xi(g_{24}^5) = -2g_{34}^5 + g_{14}^5 (g_{21}^5 - g_{51}^2) - g_{51}^2 - g_{33}^5 g_{51}^3 - (g_{21}^5 + g_{34}^5) g_{51}^4 - g_{21}^3 \beta - \alpha, \\ 0 &= E_1(g_{23}^5) = -g_{11}^4 g_{33}^5 - (g_{12}^5 + g_{21}^5) g_{41}^2 - (1 + g_{14}^5) g_{41}^4 + g_{11}^3 (-g_{21}^5 + g_{43}^5) \\ &\quad - g_{13}^5 (g_{11}^2 + g_{41}^3 - \beta), \\ 0 &= \xi(g_{23}^5) = g_{13}^5 (g_{21}^5 - g_{51}^2) - g_{21}^5 g_{51}^3 + g_{43}^5 g_{51}^3 - g_{33}^5 (2 + g_{51}^4) + g_{21}^4 \beta. \end{aligned}$$

Помоћу релација $E_2(g_{24}^5) = 0$ и $E_2(g_{23}^5) = 0$ и Леме 2.19, добијамо

$$\begin{aligned} E_3(g_{21}^5) &= -(1 + g_{14}^5) g_{21}^2 - g_{21}^3 g_{33}^5 - g_{21}^4 (g_{21}^5 + g_{34}^5), \\ E_4(g_{21}^5) &= g_{13}^5 g_{21}^2 + g_{21}^4 g_{33}^5 + g_{21}^3 (g_{21}^5 - g_{43}^5). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Сада, користећи релације добијене из Гаусових једначина и (3.23), из $E_i(g_{21}^5 \alpha) = 0$, за $i = 2, 3, 4$, налазимо да је

$$E_2(g_{21}^5) = -(g_{21}^5)^2 (3g_{21}^5 - g_{51}^2 - \alpha) \beta, \quad (3.24)$$

$$g_{21}^5 g_{51}^3 \beta - ((1 + g_{14}^5) g_{21}^2 + g_{21}^3 g_{33}^5 + g_{21}^4 (g_{21}^5 + g_{34}^5)) \alpha = 0, \quad (3.25)$$

$$g_{13}^5 g_{21}^2 \alpha + g_{21}^4 g_{33}^5 \alpha + g_{21}^3 (g_{21}^5 - g_{43}^5) \alpha + g_{21}^5 (-2 + g_{51}^4) \beta = 0. \quad (3.26)$$

Даље, из $0 = g(l\nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{lE_1} E_1, \xi) = -g_{13}^5 \alpha$ и $0 = g(l\nabla_{E_3} E_3 - \nabla_{lE_3} E_3, \xi) = -g_{33}^5$, имамо $g_{13}^5 = 0$ и $g_{33}^5 = 0$, па на основу Леме 2.18 имамо

$$\begin{aligned} 0 &= E_1(g_{33}^5) \\ &= g_{11}^4 (1 + g_{14}^5) + g_{31}^2 + g_{14}^5 g_{31}^2 - g_{12}^5 g_{31}^4 - g_{11}^2 (g_{34}^5 + g_{43}^5) - 2g_{34}^5 \beta - g_{43}^5 (g_{31}^4 + \beta). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Приметимо да се сада једначина (2.50) свела на $(-g_{21}^4 + g_{41}^2) \beta = 0$, па је $g_{41}^2 = g_{21}^4$.

Лема 3.7. Функције α , β и коефицијенти (2.47) задовољавају следеће једнакости:

$$\begin{aligned} g_{34}^5 &= g_{14}^5 g_{21}^5, \\ 0 &= g_{21}^3 (2 - g_{12}^5 g_{21}^5 + (-1 - g_{14}^5 + g_{21}^5 (g_{12}^5 + g_{21}^5)) g_{31}^2 + g_{21}^5 (3 + g_{14}^5 \\ &\quad + g_{14}^5 g_{21}^5 (-3g_{21}^5 + g_{51}^2 + \alpha)) \beta + g_{14}^5 (2 + (g_{21}^5)^2)), \\ 0 &= -g_{31}^4 + 2g_{41}^3 + g_{31}^2 g_{43}^5 - g_{21}^5 (g_{31}^2 - g_{12}^5 g_{31}^4 + g_{12}^5 g_{41}^3 - g_{31}^4 g_{43}^5 + g_{43}^5 \beta) \\ &\quad + g_{14}^5 (-g_{31}^4 + 2g_{41}^3 + g_{21}^3 (g_{21}^5 - g_{43}^5) + (g_{21}^5)^2 (g_{41}^3 + \beta)), \\ 0 &= (2 - g_{12}^5 g_{21}^5 + g_{14}^5 (2 + (g_{21}^5)^2)) g_{51}^3 + (g_{14}^5 g_{21}^2 - g_{11}^3 g_{21}^5 + g_{31}^3) \beta. \end{aligned}$$

Доказ. Из $0 = g(l\nabla_{E_2}\xi - \nabla_{lE_2}\xi, E_3) = (g_{14}^5g_{21}^5 - g_{34}^5)\alpha$, добијамо прву релацију. Сада, из $E_i(g_{14}^5g_{21}^5 - g_{34}^5) = 0$, за $i = 2, 4, 5$, редом налазимо и преостале релације. $\square$

У наставку имамо да је

$$\begin{aligned} 0 &= g(l\nabla_{E_1}E_3 - \nabla_{lE_1}E_3, E_3) = g_{11}^3(1 + g_{14}^5)\alpha, \\ 0 &= g(l\nabla_{E_2}E_3 - \nabla_{lE_2}E_3, E_3) = (1 + g_{14}^5)g_{21}^3\alpha, \\ 0 &= g(l\nabla_{E_1}E_3 - \nabla_{lE_1}E_3, E_1) = -(1 + g_{14}^5)g_{31}^3\alpha, \\ 0 &= g(l\nabla_{E_4}E_3 - \nabla_{lE_4}E_3, E_3) = (1 + g_{14}^5)g_{41}^3\alpha, \\ 0 &= g(l\nabla_{\xi}E_3 - \nabla_{l\xi}E_3, E_3) = (1 + g_{14}^5)g_{51}^3\alpha, \\ 0 &= g(l\nabla_{E_2}E_4 - \nabla_{lE_2}E_4, E_3) = (1 + g_{14}^5)(g_{21}^4 - g_{21}^2g_{21}^5)\alpha. \end{aligned} \quad (3.28)$$

У овом тренутку можемо разликовати два случаја у зависности од тога да ли је $1 + g_{14}^5$ једнако нули или различито од нуле.

Случај 2.1: $g_{14}^5 \neq -1$.

Тада, из (3.28) добијамо да је $g_{11}^3 = g_{21}^3 = g_{31}^3 = g_{41}^3 = g_{51}^3 = 0$ и $g_{21}^4 = g_{21}^2g_{21}^5$, па на основу Леме 2.19 имамо

$$0 = E_2(g_{41}^3) = -1 + 2(g_{21}^4)^2 - 2g_{21}^2g_{41}^4 - g_{21}^5g_{43}^5. \quad (3.29)$$

Из пете релације Леме 3.6 имамо $g_{21}^4\beta = 0$, па је $g_{21}^4 = 0$. Из (3.28) затим добијамо да је $g_{21}^2 = 0$. Из четврте релације Леме 3.6 следи да је $-(1 + g_{14}^5)g_{41}^4 = 0$, односно $g_{41}^4 = 0$. Из (3.26) и (3.29) имамо $g_{21}^5(-2 + g_{51}^4)\beta = 0$ и $-1 - g_{21}^5g_{43}^5 = 0$. Дакле, $g_{51}^4 = 2$, а (3.18) имплицира да је $g_{43}^5 = \alpha$. Даље, из $0 = g(l\nabla_{\xi}E_1 - \nabla_{l\xi}E_1, E_4) = -2g_{31}^4\beta$ имамо $g_{31}^4 = 0$. Коначно, (2.50) постаје $-1 - \alpha^2 = 0$, што је контрадикција.

Случај 2.2: $g_{14}^5 = -1$.

Тада је $0 = \xi(g_{14}^5) = -(g_{12}^5 + g_{21}^5)g_{51}^3 - g_{11}^3\beta$, а из (3.25) имамо $g_{21}^5g_{51}^3\beta = 0$, па је $g_{51}^3 = 0$ и стога $g_{11}^3 = 0$. Такође, имамо

$$0 = g(l\nabla_{E_1}E_4 - \nabla_{lE_1}E_4, \xi) = 1 - g_{12}^5\alpha - \beta^2. \quad (3.30)$$

Сада, из пете релације Леме 3.6 и четврте релације из Леме 3.7 добијамо, респективно, $g_{21}^4\beta = 0$ и $(-g_{21}^2 + g_{31}^3)\beta = 0$, па је $g_{21}^4 = 0$ и $g_{31}^3 = g_{21}^2$. Ако упоредимо (2.51) $-g(l\nabla_{E_1}\xi - \nabla_{lE_1}\xi, E_4) - g(l\nabla_{E_1}E_4 - \nabla_{lE_1}E_4, \xi) = -1 - g_{43}^5\alpha = 0$ са (3.22), добијамо $g_{43}^5 = g_{21}^5$. Сада из $0 = \xi(g_{21}^5 - g_{43}^5) = (g_{21}^2 - g_{41}^4)\beta$ имамо $g_{41}^4 = g_{21}^2$, а затим из $0 = E_2(g_{21}^5 - g_{43}^5) = -(g_{21}^5)^2(3g_{21}^5 - g_{51}^2 - \alpha)\beta$ добијамо $g_{51}^2 = 3g_{21}^5 - \alpha$. Из (3.26) имамо $g_{21}^5(-2 + g_{51}^4)\beta = 0$, па је $g_{51}^4 = 2$ и друга релација Леме 3.6 постаје $(g_{12}^5 + g_{21}^5)g_{31}^2 + \beta = 0$, дакле $\beta = -(g_{12}^5 + g_{21}^5)g_{31}^2$ при чему је $g_{21}^5 \neq -g_{12}^5$. Друга релација из Леме 3.7 даје $-g_{21}^5(g_{12}^5 + g_{21}^5)(g_{21}^3 + g_{31}^2) = 0$, па је $g_{31}^2 = -g_{21}^3$. Из (3.27) имамо $-g_{12}^5g_{31}^4 + g_{21}^5(-g_{31}^4 + \beta) = 0$. Ако је помножимо са α , користећи (3.22), добијамо $\beta = -(g_{12}^5 + g_{21}^5)g_{31}^4\alpha$, одакле $g_{31}^4 \neq 0$ и $g_{31}^2 = g_{31}^4\alpha$. Даље, из (2.49) и $g(l\nabla_{E_1}E_1 - \nabla_{lE_1}E_1, E_2) = 0$, имамо, респективно, $2(g_{21}^5 - \alpha - (g_{12}^5 + g_{21}^5)(g_{31}^4)^2\alpha^2) = 0$ и $g_{11}^2(g_{12}^5 + g_{21}^5)(\alpha + (g_{12}^5 + g_{21}^5)(g_{31}^4)^2\alpha^2) = 0$. Из $g_{21}^5\alpha = -1$ добијамо $g_{12}^5 = 2/(3\alpha + \alpha^3)$. Даље, (2.49) постаје

$$\frac{2(1 + \alpha^2)(-3 + ((g_{31}^4)^2 - 1)\alpha^2)}{\alpha(3 + \alpha^2)} = 0, \text{ па је } -3 + ((g_{31}^4)^2 - 1)\alpha^2 = 0.$$

Коначно, из (3.30) добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= g(l\nabla_{E_1} E_4 - \nabla_{lE_1} E_4, \xi) \\ &= -\frac{(1 + \alpha^2)[-3 + (g_{31}^4)^2 + ((g_{31}^4)^2 - 1)\alpha^2]}{(3 + \alpha^2)^2} = -\frac{(1 + \alpha^2)(g_{31}^4)^2}{(3 + \alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Како је $g_{31}^4 \neq 0$, добијамо контрадикцију.

Тиме је доказ завршен. $\square$

3.3 Хопфове хиперповрши са структурним Јакобијевим оператором Кодацијевог типа

У овом поглављу ће бити представљени резултати из рада [38]. У раду је доказано непостојање Хопфових реалних хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$ са структурним Јакобијевим оператором Кодацијевог типа, тј. структурним Јакобијевим оператором који задовољава $(\nabla_X l)Y = (\nabla_Y l)X$, за сва векторска поља X и Y тангентна на хиперповрш M .

Нека је M Хопфова реална хиперповрш са структурним Јакобијевим оператором Кодацијевог типа. Услов да је структурни Јакобијев оператор Кодацијевог типа еквивалентан је са

$$(\nabla_{E_i} l)E_j - (\nabla_{E_j} l)E_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, 5.$$

Будући да је хиперповрш M Хопфова, из (2.48) имамо да је $\beta = 0$, па из Леме 2.22 добијамо

$$0 = E_1(\beta) = g_{13}^5 - 2g_{11}^5 g_{51}^2 + 2g_{51}^3 + 2g_{14}^5 g_{51}^3 - 2g_{13}^5 g_{51}^4 + g_{11}^5 \alpha - \xi(g_{12}^5), \quad (3.31)$$

$$0 = E_2(\beta) = 2(g_{11}^5)^2 + g_{14}^5 + 2g_{12}^5 g_{21}^5 + g_{23}^5(1 + 2g_{14}^5) - 2g_{13}^5 g_{24}^5 + (g_{21}^5 - g_{12}^5)\alpha, \quad (3.32)$$

$$0 = E_3(\beta) = -g_{11}^5(3 + 2g_{14}^5) - 2g_{12}^5 g_{24}^5 + g_{33}^5(1 + 2g_{14}^5) - 2g_{13}^5 g_{34}^5 - (g_{13}^5 + g_{24}^5)\alpha, \quad (3.33)$$

$$0 = E_4(\beta) = 2g_{13}^5(g_{11}^5 + g_{33}^5) + g_{12}^5(3 + 2g_{23}^5) + g_{43}^5(1 + 2g_{14}^5) + (g_{23}^5 - g_{14}^5 + 2)\alpha, \quad (3.34)$$

након чега из (3.31) следи

$$\xi(g_{12}^5) = g_{13}^5 - 2g_{11}^5 g_{51}^2 + 2g_{51}^3 + 2g_{14}^5 g_{51}^3 - 2g_{13}^5 g_{51}^4 + g_{11}^5 \alpha. \quad (3.35)$$

Такође, како је α константно, имамо $E_i(\alpha) = 0$, $i = 1, \dots, 5$.

Помоћу једначина

$$\begin{aligned} 0 &= g((\nabla_{E_1} l)\xi - (\nabla_{\xi} l)E_1, E_3) = g_{13}^5(1 + \alpha^2), \\ 0 &= g((\nabla_{E_2} l)\xi - (\nabla_{\xi} l)E_2, E_3) = g_{23}^5(1 + \alpha^2), \end{aligned}$$

добијамо $g_{13}^5 = 0$ и $g_{23}^5 = 0$. Затим, једначине

$$\begin{aligned} 0 &= g((\nabla_{E_1} l)\xi - (\nabla_{\xi} l)E_1, E_2) = g_{12}^5(1 + \alpha^2), \\ 0 &= g((\nabla_{E_2} l)\xi - (\nabla_{\xi} l)E_2, E_2) = g_{11}^5(1 + \alpha^2), \end{aligned}$$

дају $g_{12}^5 = 0$ и $g_{11}^5 = 0$, па помоћу (3.35) и Леме 2.22, редом налазимо

$$0 = \xi(g_{12}^5) = 2(1 + g_{14}^5)g_{51}^3, \quad (3.36)$$

$$0 = \xi(g_{11}^5) = 1 + g_{21}^5 g_{51}^2 - g_{24}^5 g_{51}^3 + 2g_{51}^4 + g_{14}^5(2 + g_{51}^4). \quad (3.37)$$

Посматрајмо сада (3.36). Ако претпоставимо да је $g_{14}^5 = -1$, из једначине $0 = g((\nabla_{E_1} l)E_2 - (\nabla_{E_2} l)E_1, \xi) = -g_{21}^5 - \alpha$ добијамо $g_{21}^5 = -\alpha$, па (3.32) постаје $0 = -1 - \alpha^2$, што је контрадикција. Стога, мора бити $g_{51}^3 = 0$.

Даље, из (3.32) добијамо $g_{14}^5 + g_{21}^5 \alpha = 0$, односно $g_{14}^5 = -g_{21}^5 \alpha$. Тада из $0 = g((\nabla_{E_1} l)E_2 - (\nabla_{E_2} l)E_1, \xi) = -g_{21}^5(1 + \alpha^2)$ следи $g_{21}^5 = 0$, па примена Леме 2.22 имплицира

$$0 = \xi(g_{21}^5) = g_{24}^5(3 + 2g_{51}^4). \quad (3.38)$$

Из (3.34) добијамо $g_{43}^5 = -2\alpha$. Затим једначина (3.37) даје $g_{51}^4 = -\frac{1}{2}$, а из (3.38) имамо $g_{24}^5 = 0$. Сада, из (3.33) добијамо $g_{33}^5 = 0$, а из $0 = g((\nabla_{E_2} l)\xi - (\nabla_{\xi} l)E_2, E_1) = \frac{1}{2}(g_{34}^5 - 2\alpha)$ следи $g_{34}^5 = 2\alpha$. Коначно, из

$$0 = g((\nabla_{E_3} l)\xi - (\nabla_{\xi} l)E_3, E_2) = 2(1 + \alpha^2)$$

добијамо контрадикцију, чиме смо доказали следећу теорему:

Теорема 3.8. *Не постоје реалне Хојфове хиперповрши сфере $\mathbb{S}^6$ са структурним Јакобијевим оператором Когаџевог типа.*

Глава 4

Оператор облика хиперповрши

У овој глави биће представљени резултати из рада [39]. Тачније, доказујемо да реалне хиперповрши са Ли-паралелним оператором облика A морају бити отворени делови геодезијске хиперсфере. Поред тога, класификујемо реалне хиперповрши близу Келерове сфере $\mathbb{S}^6$ чији се Лијев извод оператора облика поклапа са његовом коваријантним изводом.

Нека је M повезана оријентабилна реална хиперповрш сфере $\mathbb{S}^6$ са јединичним нормалним векторским пољем N и нека је $\xi = -JN$ карактеристично векторско поље. Оператор облика хиперповрши M ћемо означити са $A = A_N$ и дефинисати са

$$g(AX, Y) = g(h(X, Y), N),$$

где су X и Y векторска поља тангентна на M и h друга фундаментална форма хиперповрши M . Коваријантни извод оператора облика A дат је формулом

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y),$$

док је његов Лијев извод облика

$$(\mathcal{L}_X A)Y = \nabla_X(AY) + A\nabla_Y X - \nabla_{AY} X - A\nabla_X Y, \quad (4.1)$$

за произвољна векторска поља X и Y тангентна на M .

За рачун у овој глави користићемо локални ортонормирани покретни репер E дефинисан у Лему 2.13, као и релације између коефицијената које смо извели у том поглављу.

Лема 4.1. *Нека је M повезана реална хиперповрш сфере $\mathbb{S}^6$ са Ли ξ -паралелним оператором облика A . Тада је M Хопфова хиперповрш.*

Доказ. Претпоставимо да M није Хопфова хиперповрш, односно $\beta \neq 0$. Како је на основу (4.1)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi A)\xi &= \nabla_\xi(A\xi) - \nabla_{A\xi}\xi \\ &= \xi(\beta)E_1 + (g_{51}^2\beta + \alpha\beta)E_2 + g_{51}^3\beta E_3 + g_{51}^4\beta E_4 + \xi(\alpha)\xi \\ &\quad - (-g_{11}^5\beta E_1 + (-g_{12}^5\beta + \alpha\beta)E_2 - g_{13}^5\beta E_3 - g_{14}^5\beta E_4) \\ &= (g_{11}^5\beta + \xi(\beta))E_1 + (g_{12}^5\beta + g_{51}^2\beta)E_2 + (g_{13}^5\beta + g_{51}^3\beta)E_3 + (g_{14}^5\beta + g_{51}^4\beta)E_4 + \xi(\alpha)\xi, \end{aligned}$$

услов $g((\mathcal{L}_\xi A)\xi, E_i) = 0$, за $1 \leq i \leq 4$, имплицира редом

$$\xi(\beta) = -g_{11}^5\beta, \quad g_{51}^2 = -g_{12}^5, \quad g_{51}^3 = -g_{13}^5, \quad g_{51}^4 = -g_{14}^5.$$

Слично, из

$$\begin{aligned} 0 &= g((\mathcal{L}_\xi A)E_1, \xi) = -3g_{11}^5\beta, \\ 0 &= g((\mathcal{L}_\xi A)E_3, \xi) = (-g_{13}^5 + 2g_{24}^5)\beta, \\ 0 &= g((\mathcal{L}_\xi A)E_4, \xi) = (-3 - g_{14}^5 - 2g_{23}^5)\beta, \end{aligned}$$

редом закључујемо да је $g_{11}^5 = 0$, $g_{13}^5 = 2g_{24}^5$ и $g_{14}^5 = -3 - 2g_{23}^5$.

Даље, из

$$0 = g((\mathcal{L}_\xi A)E_1, E_2) = 6(1 + g_{23}^5)$$

добиамо $g_{23}^5 = -1$. Сада из

$$0 = g((\mathcal{L}_\xi A)E_2, E_1) = (g_{12}^5 + g_{21}^5)^2 + (g_{24}^5)^2 + \beta^2,$$

долазимо до контрадикције. □

Теорема 4.2. Нека је M повезана реална хиперповрш у $\mathbb{S}^6$. Оператор облика A на M је Ли-паралелан, односно $\mathcal{L}_X A = 0$, за произвољно векторско поље X тангентно на M , ако и само ако је M отворени геодезијске хиперсфере у $\mathbb{S}^6$.

Доказ. На основу Леме 4.1 имамо да је $\beta = 0$ и α константно.

Подсетимо се да за Хопфове хиперповрши, на основу Напомене 8, можемо претпоставити да је E_1 сопствено векторско поље оператора облика A . Како је

$$AE_1 = -g_{12}^5 E_1 + g_{11}^5 E_2 - (1 + g_{14}^5)E_3 + g_{13}^5 E_4,$$

добиамо

$$g_{11}^5 = 0, \quad g_{14}^5 = -1, \quad g_{13}^5 = 0.$$

Затим, из

$$0 = g((\mathcal{L}_{E_2} A)E_2, \xi) = 2g_{24}^5,$$

следи $g_{24}^5 = 0$, док једначина

$$0 = g((\mathcal{L}_{E_2} A)E_4 + (\mathcal{L}_{E_1} A)E_3, \xi) = -4g_{33}^5,$$

имплицира $g_{33}^5 = 0$. Сада имамо да је

$$\begin{aligned} AE_1 &= -g_{12}^5 E_1, & AE_2 &= g_{21}^5 E_2 + (1 + g_{23}^5)E_4, & AE_3 &= -g_{34}^5 E_3, \\ AE_4 &= (1 + g_{23}^5)E_2 + g_{43}^5 E_4, & AE_5 &= \alpha E_5. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Тврдимо да се покретни репер може изабрати тако да су E_1 и E_3 сопствена векторска поља оператора облика A која одговарају сопственој вредности α . На основу (4.2) следи да је поменута особина еквивалентна услову $-g_{12}^5 = \alpha = -g_{34}^5$.

Претпоставимо најпре да је $g_{34}^5 \neq -\alpha$. Из услова

$$\begin{aligned} 0 &= g((\mathcal{L}_{E_2} A)E_3, \xi) = (1 - g_{23}^5)(g_{34}^5 + \alpha), \\ 0 &= g((\mathcal{L}_{E_4} A)\xi, E_3) = -(g_{34}^5 + \alpha)(g_{43}^5 + g_{51}^2 + \alpha), \\ 0 &= g((\mathcal{L}_{E_4} A)E_3, \xi) = (g_{34}^5 - g_{43}^5)(g_{34}^5 + \alpha), \end{aligned}$$

редом добијамо $g_{23}^5 = 1$, $g_{51}^2 = -g_{43}^5 - \alpha$ и $g_{43}^5 = g_{34}^5$. Даље, из

$$0 = g((\mathcal{L}_\xi A)E_4, E_3) = -2g_{51}^4$$

следи $g_{51}^4 = 0$. На крају, релација

$$0 = g((\mathcal{L}_\xi A)E_3, E_4) = -4(1 + (g_{34}^5)^2)$$

доводи до контрадикције. Према томе, $g_{34}^5 = -\alpha$.

Претпоставимо сада да је $g_{12}^5 \neq -\alpha$. Из

$$\begin{aligned} 0 &= g((\mathcal{L}_{E_4} A)E_1, \xi) = -(3 + g_{23}^5)(g_{12}^5 + \alpha), \\ 0 &= g((\mathcal{L}_{E_2} A)\xi, E_1) = -(g_{21}^5 - g_{51}^2)(g_{12}^5 + \alpha), \end{aligned}$$

добијамо $g_{23}^5 = -3$ и $g_{51}^2 = g_{21}^5$. Затим, из услова

$$0 = g((\mathcal{L}_{E_4} A)\xi, E_1) = -(-1 - g_{51}^4)(g_{12}^5 + \alpha),$$

следи $g_{51}^4 = -1$. Сада једначина

$$0 = g((\mathcal{L}_\xi A)E_1, E_2) = -4 - (g_{12}^5 + g_{21}^5)^2,$$

имплицира контрадикцију, па је $-g_{12}^5 = \alpha$.

Једначина (2.49) сада постаје $g_{21}^5 - (2 + g_{23}^5)\alpha = 0$, одакле следи $g_{21}^5 = (2 + g_{23}^5)\alpha$. Затим добијамо

$$0 = g((\mathcal{L}_{E_1} A)E_2, \xi) = -(1 + g_{23}^5)(3 + g_{23}^5)(1 + \alpha^2).$$

Ако претпоставимо да је $g_{23}^5 = -3$, тада из услова

$$0 = g((\mathcal{L}_{E_3} A)E_2, \xi) = 2g_{43}^5 - 6\alpha,$$

добијамо $g_{43}^5 = 3\alpha$, а из

$$0 = g((\mathcal{L}_{E_3} A)E_4, \xi) = -8(1 + \alpha^2)$$

долазимо до контрадикције. Отуда је $g_{23}^5 = -1$.

Из (4.2) следи да оператор облика A хиперповрши M има четвороструку сопствену вредност α и једноструку g_{43}^5 . Пошто је M Хопфова хиперповрш, ово је могуће ако и само ако је M отворени део геодезијске хиперсфере, односно ако је $g_{34}^5 = \alpha$.

Директним рачуном показује се да је

$$g((\mathcal{L}_{E_i} A)E_j, E_k) = 0$$

за све $1 \leq i, j, k \leq 5$, чиме је доказ завршен. □

Сада посматрамо хиперповрши које задовољавају услов $\mathcal{L}_\xi A = \nabla_\xi A$. Овај услов еквивалентан је са

$$g(A\nabla_{E_i} \xi - \nabla_{AE_i} \xi, E_j) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 5.$$

Директним рачуном добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= A\nabla_{E_1} \xi - \nabla_{AE_1} \xi \\ &= (g_{11}^5 (-g_{12}^5 + g_{21}^5) + g_{13}^5 (3 + g_{23}^5) + (1 + g_{14}^5) g_{24}^5) E_1 \\ &\quad - (2 + 2(g_{11}^5)^2 + g_{12}^5 (g_{12}^5 + g_{21}^5) + g_{14}^5 (4 + g_{14}^5 + g_{23}^5) - g_{13}^5 (-g_{13}^5 + g_{24}^5) + \beta^2) E_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (g_{11}^5(1 + g_{14}^5 + g_{23}^5) + g_{12}^5(-g_{13}^5 + g_{24}^5) - (1 + 2g_{14}^5)g_{33}^5 + g_{13}^5(g_{34}^5 + g_{43}^5))E_3 \\
& + (-g_{12}^5(1 + g_{14}^5 + g_{23}^5) + g_{11}^5(-g_{13}^5 + g_{24}^5) - 2g_{13}^5g_{33}^5 - g_{34}^5 - g_{14}^5(g_{34}^5 + g_{43}^5))E_4 \\
& - g_{11}^5\beta\xi, \\
0 &= A\nabla_{E_2}\xi - \nabla_{AE_2}\xi \\
&= (2 + 2(g_{11}^5)^2 + g_{21}^5(g_{12}^5 + g_{21}^5) + g_{23}^5(4 + g_{14}^5 + g_{23}^5) - g_{13}^5g_{24}^5 + (g_{24}^5)^2)E_1 \\
&+ (g_{11}^5(g_{12}^5 - g_{21}^5) - g_{13}^5(1 + g_{23}^5) - (3 + g_{14}^5)g_{24}^5)E_2 \\
&+ (g_{21}^5(1 + g_{14}^5 + g_{23}^5) + g_{11}^5(g_{13}^5 - g_{24}^5) - 2g_{24}^5g_{33}^5 + g_{43}^5 + g_{23}^5(g_{34}^5 + g_{43}^5))E_3 \\
&+ (-g_{13}^5g_{21}^5 + g_{11}^5(1 + g_{14}^5 + g_{23}^5) + g_{21}^5g_{24}^5 - g_{33}^5 - 2g_{23}^5g_{33}^5 - g_{24}^5(g_{34}^5 + g_{43}^5))E_4 \\
&- g_{21}^5\beta\xi, \\
0 &= A\nabla_{E_3}\xi - \nabla_{AE_3}\xi \\
&= (-g_{11}^5(3 + 2g_{14}^5) + (3 + g_{14}^5 + g_{23}^5)g_{33}^5 - g_{24}^5(g_{12}^5 + g_{21}^5 - g_{34}^5) - g_{13}^5g_{34}^5)E_1 \\
&+ (-g_{12}^5(1 + g_{14}^5) - (2 + g_{14}^5)g_{21}^5 + 2g_{11}^5g_{24}^5 - g_{13}^5g_{33}^5 + g_{24}^5g_{33}^5 - (3 + g_{14}^5 + g_{23}^5)g_{34}^5)E_2 \\
&+ (-g_{13}^5(1 + g_{14}^5) + g_{24}^5 - g_{23}^5g_{24}^5 + g_{33}^5(-g_{34}^5 + g_{43}^5))E_3 \\
&+ (-2 - 2g_{23}^5 - g_{14}^5(2 + g_{14}^5 + g_{23}^5) + (g_{13}^5 - g_{24}^5)g_{24}^5 - 2(g_{33}^5)^2 - g_{34}^5(g_{34}^5 + g_{43}^5))E_4 \\
&+ g_{24}^5\beta\xi, \\
0 &= A\nabla_{E_4}\xi - \nabla_{AE_4}\xi \\
&= (2g_{11}^5g_{13}^5 + g_{21}^5 + g_{21}^5g_{23}^5 + g_{12}^5(2 + g_{23}^5) + g_{13}^5g_{33}^5 - g_{24}^5g_{33}^5 + (3 + g_{14}^5 + g_{23}^5)g_{43}^5)E_1 \\
&+ (g_{12}^5g_{13}^5 + g_{13}^5g_{21}^5 - g_{11}^5(3 + 2g_{23}^5) + (3 + g_{14}^5 + g_{23}^5)g_{33}^5 - g_{13}^5g_{43}^5 + g_{24}^5g_{43}^5)E_2 \\
&+ (2 + (g_{13}^5)^2 + g_{14}^5(2 + g_{23}^5) + g_{23}^5(2 + g_{23}^5) - g_{13}^5g_{24}^5 + 2(g_{33}^5)^2 + g_{43}^5(g_{34}^5 + g_{43}^5))E_3 \\
&+ (g_{13}^5(-1 + g_{14}^5) + g_{24}^5 + g_{23}^5g_{24}^5 + g_{33}^5g_{34}^5 - g_{33}^5g_{43}^5)E_4 \\
&- (2 + g_{23}^5)\beta\xi, \\
0 &= A\nabla_\xi\xi - \nabla_{A\xi}\xi = 2g_{11}^5\beta E_1 + (g_{12}^5 + g_{21}^5 - \alpha)\beta E_2 + (g_{13}^5 - g_{24}^5)\beta E_3 + (1 + g_{14}^5 + g_{23}^5)\beta E_4.
\end{aligned}$$

Лема 4.3. Нека је M повезана реална хиперповрш у $\mathbb{S}^6$. Ако оператор облика A на M задовољава услов $\mathcal{L}_\xi A = \nabla_\xi A$, онда је M Хојфова хиперповрш.

Доказ. Претпоставимо да M није Хојфова хиперповрш, односно $\beta \neq 0$.

Из услова

$$g(A\nabla_{E_i}\xi - \nabla_{AE_i}\xi, \xi) = 0, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

редом закључујемо

$$-g_{11}^5\beta = 0, \quad -g_{21}^5\beta = 0, \quad g_{24}^5\beta = 0, \quad -(2 + g_{23}^5)\beta = 0,$$

што имплицира $g_{11}^5 = g_{21}^5 = g_{24}^5 = 0$ и $g_{23}^5 = -2$. Даље, из

$$0 = g(A\nabla_\xi\xi - \nabla_{A\xi}\xi, E_4) = (-1 + g_{14}^5)\beta,$$

следи $g_{14}^5 = 1$, а затим из

$$g(A\nabla_{E_2}\xi - \nabla_{AE_2}\xi, E_1) = -4 \neq 0,$$

добивамо контрадикцију. □

Теорема 4.4. Нека је M повезана реална хиперповрш у $\mathbb{S}^6$. Оператор облика A на M задовољава $\mathcal{L}_\xi A = \nabla_\xi A$ ако и само ако је M ошворени гео геодезијске хиперсфере у $\mathbb{S}^6$.

Доказ. На основу Леме 4.3 имамо да је $\beta = 0$.

На основу Напомене 8, можемо изабрати E_1 као сопствено векторско поље оператора облика A . Како важи

$$AE_1 = -g_{12}^5 E_1 + g_{11}^5 E_2 - (1 + g_{14}^5) E_3 + g_{13}^5 E_4,$$

добиајмо $g_{11}^5 = 0$, $g_{14}^5 = -1$ и $g_{13}^5 = 0$.

Даље, из услова

$$0 = g(A\nabla_{E_2}\xi - \nabla_{AE_2}\xi, E_2) = -2g_{24}^5,$$

следи $g_{24}^5 = 0$, а затим из

$$0 = g(A\nabla_{E_1}\xi - \nabla_{AE_1}\xi, E_2) = g_{33}^5$$

добиајмо $g_{33}^5 = 0$. Из услова

$$g(A\nabla_{E_1}\xi - \nabla_{AE_1}\xi, E_4) = 0, \quad g(A\nabla_{E_3}\xi - \nabla_{AE_3}\xi, E_2) = 0,$$

редом закључујемо

$$-g_{12}^5 g_{23}^5 + g_{43}^5 = 0, \quad -g_{21}^5 - (2 + g_{23}^5) g_{34}^5 = 0,$$

односно, $g_{43}^5 = g_{12}^5 g_{23}^5$ и $g_{21}^5 = -(2 + g_{23}^5) g_{34}^5$. Једини ненула производи $g(A\nabla_{E_i}\xi - \nabla_{AE_i}\xi, E_j)$ сада су

$$\begin{aligned} g(A\nabla_{E_1}\xi - \nabla_{AE_1}\xi, E_2) &= 1 - (g_{12}^5)^2 + g_{23}^5 + g_{12}^5(2 + g_{23}^5)g_{34}^5, \\ g(A\nabla_{E_2}\xi - \nabla_{AE_2}\xi, E_1) &= (2 + g_{23}^5)(1 + g_{23}^5 - g_{12}^5 g_{34}^5 + (2 + g_{23}^5)(g_{34}^5)^2), \\ g(A\nabla_{E_2}\xi - \nabla_{AE_2}\xi, E_3) &= g_{23}^5(1 + g_{23}^5)(g_{12}^5 - g_{34}^5), \\ g(A\nabla_{E_3}\xi - \nabla_{AE_3}\xi, E_4) &= -1 - g_{23}^5 - g_{34}^5(g_{12}^5 g_{23}^5 + g_{34}^5), \\ g(A\nabla_{E_4}\xi - \nabla_{AE_4}\xi, E_1) &= (1 + g_{23}^5)(2 + g_{23}^5)(g_{12}^5 - g_{34}^5), \\ g(A\nabla_{E_4}\xi - \nabla_{AE_4}\xi, E_3) &= g_{23}^5(1 + g_{23}^5 + (g_{12}^5)^2 g_{23}^5 + g_{12}^5 g_{34}^5). \end{aligned}$$

Посматрајмо сада

$$g(A\nabla_{E_2}\xi - \nabla_{AE_2}\xi, E_3) = g_{23}^5(1 + g_{23}^5)(g_{12}^5 - g_{34}^5) = 0.$$

Ако претпоставимо да је $g_{23}^5 = 0$, тада

$$g(A\nabla_{E_3}\xi - \nabla_{AE_3}\xi, E_4) = 0$$

имплицира

$$-1 - (g_{34}^5)^2 = 0,$$

што је контрадикција.

Ако претпоставимо $g_{12}^5 = g_{34}^5$, из

$$0 = g(A\nabla_{E_1}\xi - \nabla_{AE_1}\xi, E_2) = (1 + (g_{12}^5)^2)(1 + g_{23}^5)$$

добиајмо $1 + g_{23}^5 = 0$, па је довољно размотрити случај $g_{23}^5 = -1$.

Даље,

$$0 = g(A\nabla_{E_1}\xi - \nabla_{AE_1}\xi, E_2) = g_{12}^5(g_{34}^5 - g_{12}^5)$$

да је $g_{12}^5 = 0$ или $g_{34}^5 = g_{12}^5$.

Претпоставимо најпре да је $g_{12}^5 = 0$. Из

$$g(A\nabla_{E_2}\xi - \nabla_{AE_2}\xi, E_1) = 0$$

добиајемо $(g_{34}^5)^2 = 0$, па је $g_{34}^5 = 0$. Сада су сви производи $g(A\nabla_{E_i}\xi - \nabla_{AE_i}\xi, E_j)$ једнаки нули. У овом случају, оператор облика A има четвороструку сопствену вредност 0 и једноструку α . Како је M Хопфова хиперповрш, следи да је $\alpha = 0$, па је M отворени део геодезијске хиперсфере.

Претпоставимо сада да је $g_{34}^5 = g_{12}^5$. Под претпоставком да су сви производи $g(A\nabla_{E_i}\xi - \nabla_{AE_i}\xi, E_j)$ једнаки нули, оператор облика A има четвороструку сопствену вредност $-g_{12}^5$ и једноструку α . Како је M Хопфова хиперповрш, ово је могуће ако и само ако је $-g_{12}^5 = \alpha$, што значи да је M отворени део геодезијске хиперсфере. $\square$

С обзиром да геодезијске хиперсфере тривијално задовољавају и јачи услов $\mathcal{L}_X A = \nabla_X A$, за свако векторско поље X тангентно на M , добијамо следећу последицу:

Последица 4.5. *Нека је M повезана реална хиперповрш у $\mathbb{S}^6$. Оператор облика A на M задовољава $\mathcal{L}_X A = \nabla_X A$, за свако векторско поље X тангентно на M , ако и само ако је M отворени део геодезијске хиперсфере у $\mathbb{S}^6$.*

Глава 5

Хиперповрши са четвородимензионом нул-дистрибуцијом

У овој глави биће представљени резултати из рада [7]. У раду су класификоване хиперповрши са четвородимензионом нул-дистрибуцијом и конструисане у терминима сферне криве и векторског поља дуж те криве.

Нека је

$$\mathcal{D}_1 = \{X \in TM \mid h(X, Y) = 0, \forall Y \in TM\}$$

нул-дистрибуција хиперповрши M која није тотално геодезијска. Претпоставимо да је $\dim \mathcal{D}_1 = 4$ и означимо са V_5 јединично векторско поље нормално на $\mathcal{D}_1$. У општем случају, векторско поље V_5 има компоненту у правцу вектора $E_5 = \xi$, као и пројекцију на дистрибуцију $\mathcal{D}$ дефинисану релацијом (2.46). Одабиром одговарајућег репера за $\mathcal{D}$, можемо претпоставити да је $V_5 = \cos \lambda E_4 - \sin \lambda \xi$, за неку функцију λ .

Тада је дистрибуција $\mathcal{D}_1$ разапета ортонормираним векторским пољима

$$V_1 = E_1, \quad V_2 = E_2, \quad V_3 = E_3, \quad V_4 = \sin \lambda E_4 + \cos \lambda \xi, \quad (5.1)$$

и важи $h(V_i, X) = 0$ за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ и произвољно тангентно векторско поље X тангентно на M . Најпре ћемо размотрити могућност да је једна од компоненти вектора V_5 једнака нули.

Ако претпоставимо да је $\sin \lambda = 0$, из услова $h(V_1, V_i) = 0$ за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ добијамо, респективно, $g_{12}^5 = 0$, $g_{11}^5 = 0$, $g_{14}^5 = -1$ и $g_{13}^4 = -g_{11}^2$. Даље, из услова $h(V_2, V_i) = 0$ за $i \in \{2, 3, 4\}$ следи $g_{21}^5 = 0$, $g_{24}^5 = 0$ и $g_{23}^4 = -g_{21}^2$, а из услова $h(V_3, V_3) = 0$, $h(V_3, V_4) = 0$ и $h(V_4, V_4) = 0$ добијамо $g_{34}^5 = 0$, $g_{33}^4 = -g_{31}^2$ и $g_{53}^4 = -g_{51}^2$. Коначно, из услова $h(V_i, V_5) = 0$, за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ налазимо редом $g_{13}^5 = 0$, $g_{23}^5 = -1$, $g_{33}^5 = 0$ и $g_{43}^4 = -g_{41}^2$. Пошто хиперповрш није тотално геодезијска, важи да је $h(V_5, V_5) \neq 0$, односно $g_{43}^5 \neq 0$.

Сада, за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_2, E_3, \xi)$ из Гаусове једначине (2.25) добијамо

$$-(g_{11}^3 - g_{21}^4)g_{43}^5 = 0,$$

што имплицира $g_{21}^4 = g_{11}^3$, док за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_3, E_3, \xi)$ добијамо $g_{31}^4 = -g_{11}^2$. Гаусова једначина (2.25) за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_4, E_1, \xi)$ постаје $-g_{11}^3 g_{43}^5 = 0$, што нам даје $g_{11}^3 = 0$, док за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_4, E_2, \xi)$ добијамо $g_{11}^4 g_{43}^5 = 0$ па је $g_{11}^4 = 0$. Слично, за (E_1, E_4, E_4, ξ) , (E_1, ξ, E_3, ξ) , (E_2, E_3, E_3, ξ) и (E_2, E_4, E_1, ξ) добијамо редом $g_{11}^2 = 0$, $g_{51}^4 = 1$,

$g_{31}^3 = -g_{21}^2$ и $g_{21}^3 = 0$. Даље, за (E_2, E_4, E_4, ξ) , (E_2, ξ, E_3, ξ) и (E_3, E_4, E_4, ξ) налазимо редом $g_{21}^2 = 0$, $g_{51}^3 = 0$ и $g_{31}^2 = 0$. Гаусова једначина (2.25) се за (E_3, ξ, E_3, ξ) своди на

$$-1 - g_{43}^5 g_{51}^2 = -1,$$

одакле је $g_{51}^2 = 0$. Коначно, за $(X, Y, Z, W) = (E_4, \xi, E_2, \xi)$ добијамо $-g_{43}^5 = 0$, што је контрадикција.

Слично, ако претпоставимо да је $\cos \lambda = 0$, из услова $h(V_1, V_i) = 0$ за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ редом закључујемо $g_{12}^5 = 0$, $g_{11}^5 = 0$, $g_{14}^5 = -1$ и $g_{13}^5 = 0$. Даље, из услова $h(V_2, V_i) = 0$ за $i \in \{2, 3, 4\}$ следи $g_{21}^5 = 0$, $g_{24}^5 = 0$ и $g_{23}^5 = -1$, а из услова $h(V_3, V_3) = 0$, $h(V_3, V_4) = 0$ и $h(V_4, V_4) = 0$ добијамо $g_{34}^5 = 0$, $g_{33}^5 = 0$ и $g_{43}^5 = 0$. Коначно, из услова $h(V_i, V_5) = 0$, за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ имамо да је $g_{13}^4 = -g_{11}^2$, $g_{23}^4 = -g_{21}^2$, $g_{33}^4 = -g_{31}^2$ и $g_{43}^4 = -g_{41}^2$. Пошто хиперповрш није тотално геодезијска, важи да је $h(V_5, V_5) \neq 0$, односно $-g_{51}^2 - g_{53}^4 \neq 0$. Међутим, за $(X, Y, Z, W) = (E_1, \xi, E_3, \xi)$ из Гаусове једначине (2.25) добијамо $g_{51}^2 = -g_{53}^4$, што доводи до контрадикције.

Дакле, дистрибуције $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_1$ не могу да се покlope. Самим тим, биће нам потребан нови покретни репер који ће бити усаглашен са условом да M има четвородимензиону нул-дистрибуцију.

Како имамо да је $\cos \lambda \neq 0$, можемо дефинисати диференцијабилну функцију $t = \operatorname{tg} \lambda$. Узимајући $h(V_i, V_j) = 0$ и $h(V_i, V_5) = 0$ за $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, директно добијамо следећу лему.

Лема 5.1. Коефицијенти g_{ij}^k и функција t задовољавају следеће релације:

$$\begin{aligned} g_{12}^5 &= 0, & g_{11}^5 &= 0, & g_{14}^5 &= -1, & g_{13}^4 &= -g_{11}^2, & g_{13}^5 &= 0, & g_{21}^5 &= 0, \\ g_{24}^5 &= 0, & g_{23}^4 &= -g_{21}^2, & g_{23}^5 &= -1, & g_{34}^5 &= 0, & g_{33}^4 &= -g_{31}^2, & g_{33}^5 &= 0, \\ g_{53}^4 &= -g_{51}^2 + t(-2g_{41}^2 - 2g_{43}^4 + g_{43}^5 t), & g_{43}^4 &= -g_{41}^2 + g_{43}^5 t. \end{aligned}$$

Доказ. Из $h(V_1, V_i) = 0$ за $i \in \{1, 2, 3\}$ налазимо редом $g_{12}^5 = 0$, $g_{11}^5 = 0$ и $g_{14}^5 = -1$. Из $h(V_1, V_4) = 0$ добијамо $g_{13}^4 = -g_{11}^2 + g_{13}^5 t$ па, заменом у $h(V_1, V_5) = 0$, следи да је $g_{13}^5 = 0$, а тиме и $g_{13}^4 = -g_{11}^2$. Даље, из услова $h(V_2, V_i) = 0$, за $i \in \{2, 3\}$, следи $g_{21}^5 = 0$ и $g_{24}^5 = 0$. Из $h(V_2, V_4) = 0$ имамо да је $g_{23}^4 = -g_{21}^2 + (1 + g_{23}^5)t$, а заменом у $h(V_2, V_5) = 0$ добијамо $g_{23}^5 = -1$, па је $g_{23}^4 = -g_{21}^2$. Услов $h(V_3, V_3) = 0$ имплицира $g_{34}^5 = 0$, а из $h(V_3, V_4) = 0$ имамо $g_{33}^4 = -g_{31}^2 + g_{33}^5 t$. Заменом у $h(V_3, V_5) = 0$ добијамо $g_{33}^5 = 0$, па је $g_{33}^4 = -g_{31}^2$. Коначно, из $h(V_4, V_i) = 0$ за $i \in \{4, 5\}$ следи $g_{53}^4 = -g_{51}^2 + t(-2g_{41}^2 - 2g_{43}^4 + g_{43}^5 t)$ и $g_{43}^4 = -g_{41}^2 + g_{43}^5 t$. $\square$

Приметимо да из релације $h(V_5, V_5) = \frac{g_{43}^5}{\cos^2 \lambda}$ следи да је $g_{43}^5 \neq 0$. Сада ћемо истражити услове који проистичу из Гаусове једначине.

Лема 5.2. Коефицијенти (2.47) задовољавају следеће релације:

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= 0, & g_{11}^3 &= 0, & g_{11}^4 &= 0, & g_{21}^2 &= t, & g_{21}^3 &= 0, & g_{21}^4 &= 0, & g_{31}^2 &= 0, \\ g_{31}^3 &= t, & g_{31}^4 &= 0, & g_{51}^2 &= -g_{41}^2 t, & g_{51}^3 &= -g_{41}^3 t, & g_{51}^4 &= -(g_{41}^4 - t)t, \\ E_1(t) &= -1 - t^2, & E_2(t) &= 0, & E_3(t) &= 0, & E_5(t) &= -tE_4(t), \\ E_1(g_{41}^2) &= g_{41}^2(-g_{41}^4 + t), & E_2(g_{41}^2) &= -g_{41}^2 g_{41}^3 + E_4(t), \\ E_3(g_{41}^2) &= 1 + (g_{41}^2)^2 + g_{41}^4 t - t^2, \\ E_5(g_{41}^2) &= -g_{41}^3(1 + t^2) - tE_4(g_{41}^2) - g_{41}^2 E_4(t), \\ E_1(g_{41}^3) &= g_{41}^3(-g_{41}^4 + t), & E_2(g_{41}^3) &= -1 - (g_{41}^3)^2 - g_{41}^4 t + t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_3(g_{41}^3) &= g_{41}^2 g_{41}^3 + E_4(t), \quad E_5(g_{41}^3) = g_{41}^2 + g_{41}^2 t^2 - tE_4(g_{41}^3) - g_{41}^3 E_4(t), \\
 E_1(g_{41}^4) &= -(g_{41}^4)^2 + 2g_{41}^4 t - 2(1 + t^2), \quad E_2(g_{41}^4) = -g_{41}^3(g_{41}^4 - 2t), \\
 E_3(g_{41}^4) &= g_{41}^2(g_{41}^4 - 2t), \quad E_5(g_{41}^4) = -tE_4(g_{41}^4) - (g_{41}^4 - 2t)E_4(t), \\
 E_1(g_{43}^5) &= -g_{43}^5(g_{41}^4 - 3t), \quad E_2(g_{43}^5) = -g_{41}^3 g_{43}^5, \\
 E_3(g_{43}^5) &= g_{41}^2 g_{43}^5, \quad E_5(g_{43}^5) = -tE_4(g_{43}^5) - g_{43}^5 E_4(t).
 \end{aligned}$$

Доказ. Гаусова једначина (2.25) за $X = E_1$, $Y = E_4$, $Z = E_4$ и $W = E_5$ постаје $-g_{11}^2 g_{43}^5 = 0$, из чега следи $-g_{11}^2 = 0$. Слично, из (2.25) за (E_1, E_4, E_1, E_5) , (E_1, E_4, E_2, E_5) , (E_2, E_4, E_4, E_5) , (E_2, E_4, E_1, E_5) и (E_2, E_4, E_2, E_5) редом добијамо $-g_{11}^3 g_{43}^5 = 0$, $g_{11}^4 g_{43}^5 = 0$, $g_{43}^5(-g_{21}^2 + t) = 0$, $-g_{21}^3 g_{43}^5 = 0$ и $g_{21}^4 g_{43}^5 = 0$. Даље, за (E_3, E_4, E_4, E_5) , (E_2, E_3, E_3, E_5) , (E_3, E_4, E_2, E_5) , (E_4, E_5, E_4, E_5) , (E_4, E_5, E_1, E_5) и (E_4, E_5, E_2, E_5) налазимо наредних шест релација.

Затим, из (2.25) за $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_2, E_1, E_2)$ добијамо

$$t^2 + E_1(t) = -1,$$

што даје $E_1(t) = -1 - t^2$, одакле следи да t није константна функција. Слично, за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_3, E_1, E_2)$ и $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_3, E_1, E_3)$ закључујемо $E_3(t) = 0$ и $E_2(t) = 0$. За $(X, Y, Z, W) = (E_1, E_4, E_1, E_i)$, $i = 2, 3, 4$, налазимо изводе $E_1(g_{41}^i)$, редом. Даље, изводе $E_2(g_{41}^i)$, $i = 2, 3, 4$, добијамо за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_4, E_1, E_i)$, док за $(X, Y, Z, W) = (E_3, E_4, E_1, E_i)$, $i = 2, 3, 4$, добијамо изводе $E_3(g_{41}^i)$. Такође, изводе $E_5(g_{41}^i)$, $i = 2, 3, 4$, рачунамо из (2.25) за $(X, Y, Z, W) = (E_4, E_5, E_1, E_i)$. Сада, за $(X, Y, Z, W) = (E_2, E_5, E_1, E_2)$ из (2.25) добијамо $E_5(t) = -tE_4(t)$. На крају, изводи $E_i(g_{43}^5)$, $i = 1, 2, 3, 5$, следе за (E_1, E_4, E_3, E_5) , (E_2, E_4, E_3, E_5) , (E_3, E_4, E_3, E_5) и (E_4, E_5, E_3, E_5) .

Директним рачуном се показује да једначине Гауса и Кодација не дају додатне релације. $\square$

За диференцијабилну функцију $g_{41}^4 - t$ постоји диференцијабилна функција k_4 таква да важи $g_{41}^4 - t = \text{tg}(\lambda + k_4)$, при чему је $\cos(\lambda + k_4) \neq 0$. Означимо $t_4 = E_4(t)$.

Тада, из Леме 5.2 добијамо следеће изразе:

$$\begin{aligned}
 E_1(k_4) &= 0, \\
 E_2(k_4) &= g_{41}^3 \cos^2(k_4 + \lambda)(t - \text{tg}(k_4 + \lambda)), \\
 E_3(k_4) &= -g_{41}^2 \cos^2(k_4 + \lambda)(t - \text{tg}(k_4 + \lambda)), \\
 E_4(k_4) &= \cos^2(k_4 + \lambda)(E_4(g_{41}^4) - t_4) - \frac{t_4}{1 + t^2}, \\
 E_5(k_4) &= \cos^2(k_4 + \lambda)(-tE_4(g_{41}^4) - (\text{tg}(k_4 + \lambda) - 2t)t_4) + \frac{tt_4}{1 + t^2}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Слично, можемо дефинисати диференцијабилне функције $k_2 = g_{41}^2 \cos(k_4 + \lambda)$, $k_3 = g_{41}^3 \cos(k_4 + \lambda)$ и $k_5 = g_{43}^5(1 + t^2) \cos(k_4 + \lambda)$ и оне задовољавају једначине:

$$\begin{aligned}
 E_1(k_2) &= 0, \\
 E_2(k_2) &= -\cos(k_4 + \lambda)(-t_4 + g_{41}^3 k_2 \cos(k_4 + \lambda) + g_{41}^3 k_2 t \sin(k_4 + \lambda)), \\
 E_3(k_2) &= (1 + k_2^2)(\cos(k_4 + \lambda) + t \sin(k_4 + \lambda)), \\
 E_4(k_2) &= \cos(k_4 + \lambda)(E_4(g_{41}^2) - k_2(E_4(g_{41}^4) - t_4) \sin(k_4 + \lambda)), \\
 E_5(k_2) &= -\cos(k_4 + \lambda)(g_{41}^3 + E_4(g_{41}^2)t + g_{41}^3 t^2 + k_2 t_4 \cos(k_4 + \lambda))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -k_2 t (E_4(g_{41}^4) - 2t_4) \sin(k_4 + \lambda), \\
 E_1(k_3) &= 0, \\
 E_2(k_3) &= -(1 + k_3^2) (\cos(k_4 + \lambda) + t \sin(k_4 + \lambda)), \\
 E_3(k_3) &= (k_2 k_3 + t_4) \cos(k_4 + \lambda) + k_2 k_3 t \sin(k_4 + \lambda), \\
 E_4(k_3) &= \cos(k_4 + \lambda) (E_4(g_{41}^3) - k_3 (E_4(g_{41}^4) - t_4) \sin(k_4 + \lambda)), \\
 E_5(k_3) &= k_2 + k_2 t^2 - k_3 t_4 + t \cos(k_4 + \lambda) (-E_4(g_{41}^3) + E_4(g_{41}^4) k_3 \sin(k_4 + \lambda)) \\
 & + k_3 t_4 (\sin^2(k_4 + \lambda) - t \sin(2(k_4 + \lambda))), \\
 E_1(k_5) &= 0, \\
 E_2(k_5) &= -k_3 k_5 (\cos(k_4 + \lambda) + t \sin(k_4 + \lambda)), \\
 E_3(k_5) &= k_2 k_5 (\cos(k_4 + \lambda) + t \sin(k_4 + \lambda)), \\
 E_4(k_5) &= \frac{2k_5 t t_4}{1 + t^2} + E_4(g_{43}^5) (1 + t^2) \cos(k_4 + \lambda) - \frac{1}{2} k_5 (E_4(g_{41}^4) - t_4) \sin(2(k_4 + \lambda)), \\
 E_5(k_5) &= -\frac{k_5 (1 + 3t^2) t_4}{1 + t^2} - \cos(k_4 + \lambda) E_4(g_{43}^5) (t + t^3) \\
 & + \frac{1}{2} k_5 t (E_4(g_{41}^4) - 2t_4) \sin(2(k_4 + \lambda)) + k_5 t_4 \sin^2(k_4 + \lambda).
 \end{aligned}$$

Како је $V_4 = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} E_4 + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} E_5$ и $V_5 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} E_4 - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} E_5$, важи

$$\begin{aligned}
 V_4(k_i) &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} E_4(k_i) + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} E_5(k_i), \\
 V_5(k_i) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} E_4(k_i) - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} E_5(k_i), \quad i = 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

С обзиром на то да је повезаност без торзије, тј. $T(V_i, V_j) = D_{V_i} V_j - D_{V_j} V_i - [V_i, V_j] = 0$, за $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, применом на функцију t_4 добијамо

$$\begin{aligned}
 0 &= T(V_1, V_5) = \sqrt{1+t^2} (V_1(t_4) + t_4 (t + \operatorname{tg}(k_4 + \lambda))), \\
 0 &= T(V_2, V_5) = \frac{\sqrt{1+t^2} (k_2(1+t^2) + k_3 t_4 + \cos(k_4 + \lambda) V_2(t_4))}{\cos(k_4 + \lambda)}, \\
 0 &= T(V_3, V_5) = \frac{\sqrt{1+t^2} (k_3(1+t^2) - k_2 t_4 + \cos(k_4 + \lambda) V_3(t_4))}{\cos(k_4 + \lambda)}, \\
 0 &= T(V_4, V_5) = t_4^2 + \sqrt{1+t^2} V_4(t_4) + (1+t^2) (1 + t \operatorname{tg}(k_4 + \lambda)),
 \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned}
 V_1(t_4) &= -t_4 (t + \operatorname{tg}(k_4 + \lambda)), & V_2(t_4) &= -\frac{k_2(1+t^2) + k_3 t_4}{\cos(k_4 + \lambda)}, \\
 V_3(t_4) &= -\frac{k_3(1+t^2) - k_2 t_4}{\cos(k_4 + \lambda)}, & V_4(t_4) &= -\frac{1+t^2+t_4^2+(t+t^3)\operatorname{tg}(k_4+\lambda)}{\sqrt{1+t^2}}.
 \end{aligned}$$

Такође, за функцију $k_t = t_4 \cos \lambda \cos(k_4 + \lambda)$ важи

$$\begin{aligned}
 V_1(k_t) &= 0, & V_2(k_t) &= -\sqrt{1+t^2} (k_2 + k_3 k_t \cos k_4), \\
 V_3(k_t) &= -\sqrt{1+t^2} (-k_3 + k_2 k_t \cos k_4), & V_4(k_t) &= -(1+k_t^2) \sqrt{1+t^2} \cos k_4.
 \end{aligned}$$

Приметимо да постоји функција $b \geq 0$ таква да је

$$k_2^2 + k_t^2 = b(1 + k_3^2). \quad (5.4)$$

Функција b задовољава

$$\begin{aligned} V_1(b) &= 0, & V_2(b) &= 0, \\ V_3(b) &= -\frac{2(1+b)\sqrt{1+t^2}(k_3k_t - k_2 \cos k_4)}{1+k_3^2}, \\ V_4(b) &= -\frac{2(1+b)\sqrt{1+t^2}(k_2k_3 + k_t \cos k_4)}{1+k_3^2}. \end{aligned}$$

Осим тога, ако је $\sin k_4 \neq 0$, постоји диференцијабилна функција $l \geq 1$ таква да је

$$k_3^2 + 1 = l \sin^2 k_4, \quad (5.5)$$

и задовољава

$$\begin{aligned} V_1(l) &= 0, & V_2(l) &= 0, \\ V_3(l) &= -2\sqrt{1+t^2} \left(k_2l \cos k_4 - \frac{k_3(k_t + k_2k_3 \cos k_4)}{\sin^2 k_4} \right), \\ V_4(l) &= 2\sqrt{1+t^2} \frac{k_2k_3 + k_t \cos k_4}{\sin^2 k_4}. \end{aligned}$$

Сада добијамо

$$V_2(k_2) = k_t\sqrt{1+t^2} - k_2k_3 \cos(k_4 + \lambda) - k_2k_3t \sin(k_4 + \lambda), \quad (5.6)$$

$$V_4(k_2) = -\sqrt{1+t^2}(k_3 + k_2k_t \cos k_4), \quad (5.7)$$

$$V_2(k_3) = -l(\cos(k_4 + \lambda) + t \sin(k_4 + \lambda)) \sin^2 k_4, \quad (5.8)$$

$$V_4(k_3) = \sqrt{1+t^2}(k_2 - k_3k_t \cos k_4). \quad (5.9)$$

Ако претпоставимо да је $l = 1$, тада из (5.5) имамо $k_3 = 0$ и $\cos k_4 = 0$. Из (5.9) затим добијамо $k_2 = 0$, из (5.6) имамо $k_t = 0$, док (5.4) имплицира $b = 0$.

Ако претпоставимо да је $b = 0$, тада из (5.4) имамо $k_2 = 0$ и $k_t = 0$. Из (5.7) затим добијамо $k_3 = 0$, из (5.8) следи $\cos k_4 = 0$, односно $\sin^2 k_4 = 1$ па из (5.5) имамо $l = 1$.

Даљу дискусију сада можемо раздвојити на три случаја:

Случај А: $\sin k_4 \neq 0$, $b \neq 0$, $l \neq 1$.

У овом случају постоје функције μ и ν такве да важи

$$\begin{aligned} \sin \nu &= \frac{\sqrt{bl}}{\sqrt{bl + l - 1}}, & \cos \nu &= \frac{\sqrt{l-1}}{\sqrt{bl + l - 1}}, \\ \sin \mu &= -\frac{k_2k_3 + k_t \cos k_4}{\sqrt{bl}\sqrt{l-1} \sin^2 k_4}, & \cos \mu &= \frac{-k_3k_t + k_2 \cos k_4}{\sqrt{bl}\sqrt{l-1} \sin^2 k_4}, \end{aligned}$$

односно

$$\nu = \arctg \sqrt{\frac{bl}{l-1}}, \quad \mu = \arctg \frac{k_2k_3 + k_t \cos k_4}{k_3k_t - k_2 \cos k_4}. \quad (5.10)$$

Тада је

$$\begin{aligned}
 V_1(\nu) &= 0, & V_1(\mu) &= 0, \\
 V_2(\nu) &= 0, & V_2(\mu) &= 2\sqrt{1+t^2}, \\
 V_3(\nu) &= \sqrt{1+t^2} \cos \mu, & V_3(\mu) &= -\frac{\sqrt{1+t^2} \cos(2\nu) \sin \mu}{\sin \nu \cos \nu}, \\
 V_4(\nu) &= \sqrt{1+t^2} \sin \mu, & V_4(\mu) &= \frac{\sqrt{1+t^2} \cos(2\nu) \cos \mu}{\sin \nu \cos \nu}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

У наставку уведемо ознаке

$$V_5(\nu) = \nu_5, \quad V_5(\mu) = \mu_5. \tag{5.12}$$

Случај Б: $\sin k_4 \neq 0$, $b = 0$, $l = 1$, $\cos k_4 = 0$, $k_2 = k_3 = k_t = 0$.

Из дефиниције k_4 можемо претпоставити да је $k_4 = \pi/2$. Директно добијамо $g_{41}^4 = t - \frac{1}{t}$, $g_{41}^2 = 0$, $g_{41}^3 = 0$, $t_4 = 0$ и $V_4(g_{43}^5) = -\frac{V_5(k_5)}{1+t^2}$. У овом случају желимо да уведемо диференцијабилне функције μ и ν које задовољавају релације (5.11) и (5.12). Директним рачуном се показује да ако је

$$\nu_5 = -\frac{\sin \mu \sqrt{1+t^2}}{2t}, \quad \mu_5 = \frac{(2k_5 + \cos \mu (\operatorname{tg} \nu - \operatorname{ctg} \nu)) \sqrt{1+t^2}}{2t},$$

тада су услови интеграбилности задовољени и такве функције ν и μ постоје.

Случај В: $\sin k_4 = 0$.

У овом случају, из дефиниције k_4 можемо узети $k_4 = 0$. Тада је $g_{41}^4 = 2t$, $k_2 = g_{41}^2 \cos \lambda$, $k_3 = g_{41}^3 \cos \lambda$ и $k_5 = g_{43}^5(1+t^2) \cos \lambda$.

Из релација $V_4(k_t) = -(1+k_t^2)\sqrt{1+t^2} \neq 0$ и $V_2(k_3) = -(1+k_3^2)\sqrt{1+t^2} \neq 0$ следи да је $k_t \neq 0$ и $k_3 \neq 0$. Даље, из $V_2(k_2) = (k_t - k_2 k_3)\sqrt{1+t^2}$ добијамо $k_2 \neq 0$, па из (5.4) следи $b \neq 0$.

Дакле, постоје функције ν и μ такве да

$$\begin{aligned}
 \sin \nu &= \sqrt{\frac{b}{b+1}}, & \cos \nu &= \frac{1}{\sqrt{b+1}}, \\
 \sin \mu &= -\frac{k_2 k_3 + k_t}{\sqrt{b}(1+k_3^2)}, & \cos \mu &= \frac{k_2 - k_3 k_t}{\sqrt{b}(1+k_3^2)},
 \end{aligned}$$

односно

$$\nu = \arctg \sqrt{b}, \quad \mu = \arctg \frac{k_2 k_3 + k_t}{k_3 k_t - k_2}. \tag{5.13}$$

Додатно, такве функције ν и μ такође задовољавају (5.11) и (5.12).

С обзиром да у сва три случаја постоје функције ν и μ који задовољавају (5.11), поново посматрамо сва три случаја заједно. Уочимо векторска поља

$$W_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} V_2, \quad W_3 = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} V_3, \quad W_4 = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} V_4, \tag{5.14}$$

и приметимо да је

$$[W_2, W_3] = 2W_4, \quad [W_3, W_4] = 2W_2, \quad [W_4, W_2] = 2W_3.$$

Дакле, на основу Теореме 1.3, дистрибуција генерисана са W_2, W_3, W_4 је интеграбилна. Штавише, примећујемо да је

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{V_2} V_3 &= -\bar{\nabla}_{V_3} V_2 = -\sqrt{1+t^2} V_4, \\ \bar{\nabla}_{V_3} V_4 &= -\bar{\nabla}_{V_4} V_3 = -\sqrt{1+t^2} V_2, \\ \bar{\nabla}_{V_4} V_2 &= -\bar{\nabla}_{V_2} V_4 = -\sqrt{1+t^2} V_3, \\ \bar{\nabla}_{V_2} V_2 &= \bar{\nabla}_{V_3} V_3 = \bar{\nabla}_{V_4} V_4 = -tV_1,\end{aligned}$$

тј. повезаност ∇^s индукована на $\text{Span}\{V_2, V_3, V_4\}$ задовољава $\nabla_{V_i}^s V_i = 0$, $i = 2, 3, 4$. Отуда је $\text{Span}\{V_2, V_3, V_4\}$ тотално умбиличка дистрибуција са вектором средње кривине $H = -tV_1$ и додатно је сферна. Специјално, ови коваријантни изводи јединствено одређују сферу $\mathbb{S}^3(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}})$ па су, на основу Леме 1.1, листови дистрибуције $\text{Span}\{V_2, V_3, V_4\}$ локално изометрични са $\mathbb{S}^3(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}})$.

Такође, важи

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{V_1} V_i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \\ \bar{\nabla}_{V_i} V_1 &= tV_i, \quad i = 2, 3, 4, \\ \bar{\nabla}_{V_i} V_5 &= 0, \quad i = 2, 3, 4, \\ \bar{\nabla}_{V_5} V_1 &= k_2\sqrt{1+t^2}\sec(k_4+\lambda)V_2 + k_3\sqrt{1+t^2}\sec(k_4+\lambda)V_3 \\ &\quad + (1+ttg(k_4+\lambda))V_4 + tg(k_4+\lambda)V_5.\end{aligned}$$

На основу Теореме 1.3, дистрибуција $\text{Span}\{V_1, V_5\}$ је интеграбилна ако и само ако је $k_2 = k_3 = 0$ и $1+ttg(k_4+\lambda) = 0$. Тада $E_2(k_2) = 0$ имплицира да је $k_t = 0$ и $t_4 = 0$. У супротном, ако претпоставимо да је $t_4 = 0$ из $E_2(k_t) = E_3(k_t) = V_4(k_t) = 0$ директно добијамо $k_2 = k_3 = 0$ и $\cos(k_4) = 0$, односно $\text{Span}\{V_1, V_5\}$ је тада интеграбилна. Ове хиперповрши одговарају Случају Б. У овом случају, такође, директно добијамо да је $\text{Span}\{V_1, V_5\}$ тотално геодезијска дистрибуција (у сфери $\mathbb{S}^6$), односно интегрална многострукост дистрибуције $\text{Span}\{V_1, V_5\}$ је 2-димензиона сфера $\mathbb{S}^2$ која је такође тотално реална. Дакле, у овом случају хиперповрш је искривљени производ $\mathbb{S}^2 \times_{\frac{1}{1+t^2}} \mathbb{S}^3$.

Такође, приметимо да је у свим случајевима $\text{Span}\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ тотално геодезијска дистрибуција (у $\mathbb{S}^6$) са интегралном многострукошћу $\mathbb{S}^4$. Ако је $t_4 \neq 0$, директним рачуном се показује да је векторско поље $H_5 = \bar{\nabla}_{V_5} V_5 \neq 0$, што чини $\text{Span}\{V_5\}$ тотално умбиличком дистрибуцијом и хиперповрш је уврнути производ $\mathbb{S}^5 \times_\alpha I$, где је I интервал.

Конструирајмо сада хиперповрш M . Следећа векторска поља

$$\begin{aligned}Y_0 &= V_1, \\ Y_1 &= -\cos \mu W_3 - \sin \mu W_4, \\ Y_2 &= -\cos^2 \nu W_2 - \frac{1}{2} \sin(2\nu) \sin \mu W_3 + \frac{1}{2} \sin(2\nu) \cos \mu W_4, \\ Y_3 &= -\sin^2 \nu W_2 + \frac{1}{2} \sin(2\nu) \sin \mu W_3 - \frac{1}{2} \sin(2\nu) \cos \mu W_4.\end{aligned}\tag{5.15}$$

су линеарно независна у свакој тачки M и задовољавају $[Y_i, Y_j] = 0$ за $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. На основу Теореме 1.2, у околини било које тачке $p \in M$, могуће је дефинисати систем локалних координата y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 тако да важи $Y_i = \partial_i$ за $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, где је $\partial_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$,

а последња координата y_4 је суштински произвољна, под условом да је независна од претходних координата. У наставку ћемо се фокусирати на прве четири координате како бисмо добили параметризацију одговарајуће имерзије.

Лема 5.3. *Нека су y_i за $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ уредно дефинисане координате. Тада важи*

$$t = -\operatorname{tg}(y_0 + c_0), \quad \nu = y_1 + c_1, \quad \mu = y_2 + y_3 + c_2,$$

где су c_0, c_1 и c_2 локалне функције независне од y_i , $i \leq 3$.

Доказ. Применом Леме 5.2 имамо да је $\partial_1 t = \partial_2 t = \partial_3 t = 0$, док је $\partial_0 t = -1 - t^2$. Дакле, $t = -\operatorname{tg}(y_0 + c_0)$, где је c_0 функција по y_4 .

Слично, имамо

$$\partial_1 \nu = 1, \quad \partial_0 \nu = \partial_2 \nu = \partial_3 \nu = 0, \quad \partial_0 \mu = \partial_1 \mu = 0, \quad \partial_2 \mu = \partial_3 \mu = 1,$$

па важи $\nu = y_1 + c_1$, $\mu = y_2 + y_3 + c_2$, где су c_1 и c_2 функције од y_4 . □

Означимо са p позиционо векторско поље имерзије. Тада је

$$\begin{aligned} D_{\partial_0} \partial_0 &= -p, & D_{\partial_0} \partial_i &= -\operatorname{tg}(y_0 + c_0) \partial_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ D_{\partial_1} \partial_1 &= -\cos(y_0 + c_0) \left(\cos(y_0 + c_0) p - \sin(y_0 + c_0) \partial_0 \right), \\ D_{\partial_1} \partial_2 &= -\operatorname{tg}(y_1 + c_1) \partial_2, & D_{\partial_1} \partial_3 &= \operatorname{ctg}(y_1 + c_1) \partial_3, & D_{\partial_2} \partial_3 &= 0, \\ D_{\partial_2} \partial_2 &= -\cos^2(y_1 + c_1) \frac{p - \operatorname{tg}(y_0 + c_0) \partial_0}{1 + \operatorname{tg}^2(y_0 + c_0)} + \frac{1}{2} \sin(2(y_1 + c_1)) \partial_1, \\ D_{\partial_3} \partial_3 &= -\sin^2(y_1 + c_1) \frac{p - \operatorname{tg}(y_0 + c_0) \partial_0}{1 + \operatorname{tg}^2(y_0 + c_0)} - \frac{1}{2} \sin(2(y_1 + c_1)) \partial_1. \end{aligned}$$

Из израза за $D_{\partial_0} \partial_0$ имамо да је $\partial_0(\partial_0 p) = -p$, па је

$$p = A \cos y_0 + B \sin y_0, \tag{5.16}$$

где векторска поља $A = A(y_1, y_2, y_3, y_4)$ и $B = B(y_1, y_2, y_3, y_4)$ не зависе од y_0 . Такође, пошто је p јединично векторско поље, имамо да су A и B јединични и међусобно ортогонални. Даље, из једначина за $D_{\partial_0} \partial_i$, $i = 1, 2, 3$, добијамо $\partial_0(\partial_i p) + \operatorname{tg}(y_0 + c_0) \partial_i p = 0$, што даје

$$-(\partial_i A) \sin y_0 + (\partial_i B) \cos y_0 + \operatorname{tg}(y_0 + c_0) \left((\partial_i A) \cos y_0 + (\partial_i B) \sin y_0 \right) = 0. \tag{5.17}$$

Како је

$$-\sin y_0 + \operatorname{tg}(y_0 + c_0) \cos y_0 = \frac{\sin c_0}{\cos(y_0 + c_0)}, \quad \cos y_0 + \operatorname{tg}(y_0 + c_0) \sin y_0 = \frac{\cos c_0}{\cos(y_0 + c_0)},$$

једначина (5.17) еквивалентна је са

$$\sin c_0 \partial_i A + \cos c_0 \partial_i B = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.18}$$

Затим једначина за $D_{\partial_1} \partial_1$ даје

$$\partial_1(\partial_1 p) + \cos(y_0 + c_0) \left(\cos(y_0 + c_0) p - \sin(y_0 + c_0) \partial_0 p \right) = 0,$$

односно

$$\begin{aligned} & \partial_1(\partial_1 A) \cos y_0 + \partial_1(\partial_1 B) \sin y_0 \\ & + \cos(y_0 + c_0) \left(\cos(y_0 + c_0)(A \cos y_0 + B \sin y_0) - \sin(y_0 + c_0)(-A \sin y_0 + B \cos y_0) \right) = 0, \end{aligned}$$

што је еквивалентно са

$$\cos y_0 \partial_1(\partial_1 A) + \cos(y_0 + c_0)(A \cos c_0 - B \sin c_0) + \sin y_0 \partial_1(\partial_1 B) = 0. \quad (5.19)$$

Како (5.19) важи за произвољно y_0 , добијамо

$$\begin{aligned} \partial_1(\partial_1 A) &= -\cos c_0(A \cos c_0 - B \sin c_0), \\ \partial_1(\partial_1 B) &= \sin c_0(A \cos c_0 - B \sin c_0). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Очигледно важи $\partial_1(\partial_1(A \cos c_0 - B \sin c_0)) = -(A \cos c_0 - B \sin c_0)$, па је

$$A \cos c_0 - B \sin c_0 = M_1 \sin y_1 + M_2 \cos y_1, \quad (5.21)$$

где су векторска поља M_1 и M_2 независна од y_0 и y_1 , јединична и међусобно ортогонална. Такође, из (5.20) добијамо $\partial_1(\partial_1(A \sin c_0 + B \cos c_0)) = 0$, па је $A \sin c_0 + B \cos c_0 = C y_1 + D$, где су C и D векторска поља независна од y_0 и y_1 . Пошто је $\|A \sin c_0 + B \cos c_0\| = 1$ за произвољно y_1 , добијамо $C = 0$ и $\|D\| = 1$. Отуда је

$$D = A \sin c_0 + B \cos c_0. \quad (5.22)$$

На основу (5.21) и (5.22) добијамо да је D ортогонално на M_1 и M_2 , док из (5.18) следи $\partial_2 D = 0$ и $\partial_3 D = 0$, па D зависи само од y_4 . Додатно, из (5.21) и (5.22) налазимо

$$\begin{aligned} A &= D \sin c_0 + \cos c_0(M_1 \sin y_1 + M_2 \cos y_1), \\ B &= D \cos c_0 - \sin c_0(M_1 \sin y_1 + M_2 \cos y_1). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Аналогно, након замене (5.23) у (5.16), једначине за $D_{\partial_1} \partial_2$ и $D_{\partial_1} \partial_3$ свODE се на

$$\begin{aligned} \cos c_1 \partial_2 M_1 + \sin c_1 \partial_2 M_2 &= 0, \\ \sin c_1 \partial_3 M_1 - \cos c_1 \partial_3 M_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Из једначине за $D_{\partial_2} \partial_2$ добијамо

$$\cos y_1 \partial_2(\partial_2 M_2) + \cos(c_1 + y_1)(M_2 \cos c_1 - M_1 \sin c_1) + \sin y_1 \partial_2(\partial_2 M_1) = 0$$

за произвољно y_1 , што је еквивалентно са

$$\begin{aligned} \partial_2(\partial_2 M_2) &= -\cos c_1(M_2 \cos c_1 - M_1 \sin c_1), \\ \partial_2(\partial_2 M_1) &= \sin c_1(M_2 \cos c_1 - M_1 \sin c_1). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Сада, аналогно једначинама (5.20), (5.21) и (5.22), постоје јединична, међусобно ортогонална векторска поља F_1 , F_2 и K која зависе од y_3 и y_4 , таква да

$$\begin{aligned} M_2 \cos c_1 - M_1 \sin c_1 &= F_1 \cos y_2 + F_2 \sin y_2, \\ M_2 \sin c_1 + M_1 \cos c_1 &= K, \end{aligned} \quad (5.26)$$

па је

$$\begin{aligned} M_1 &= K \cos c_1 - \sin c_1 (F_1 \cos y_2 + F_2 \sin y_2), \\ M_2 &= K \sin c_1 + \cos c_1 (F_1 \cos y_2 + F_2 \sin y_2). \end{aligned}$$

Из (5.24) добијамо $\partial_3 F_1 = 0 = \partial_3 F_2$, па F_1 и F_2 зависе само од y_4 .

Коначно, једначина за $D_{\partial_3} \partial_3$ сада се своди на $\partial_3(\partial_3 K) = -K$, па добијамо да је $K = K_1 \cos y_3 + K_2 \sin y_3$, где су K_1 и K_2 векторска поља која зависе само од y_4 , и ова векторска поља су јединична и ортогонална на D , F_1 и F_2 .

Сада, на основу израза за p датог релацијом (5.16), имамо

$$\begin{aligned} p &= \sin(y_0 + c_0)D + \cos(y_0 + c_0) \left(-\cos(c_1 + y_1)(F_1 \cos y_2 + F_2 \sin y_2) \right. \\ &\quad \left. + \sin(c_1 + y_1)(K_1 \cos y_3 + K_2 \sin y_3) \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Из (5.14) и (5.15), можемо изразити

$$\begin{aligned} E_1 &= Y_0, \\ E_2 &= \sqrt{1 + t^2}(Y_2 + Y_3), \\ E_3 &= \sqrt{1 + t^2} \sin \nu \left(\frac{\cos \mu}{\sin \nu} Y_1 + \left(-\frac{\operatorname{ctg} \nu}{\sin \nu} Y_3 + \frac{1}{\cos \nu} Y_2 \right) \sin \mu \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Означимо сада

$$\begin{aligned} v_1 &= D \cos y_0 + \sin y_0 \left(\cos(c_1 + y_1)(F_1 \cos y_2 + F_2 \sin y_2) \right. \\ &\quad \left. - \sin(c_1 + y_1)(K_1 \cos y_3 + K_2 \sin y_3) \right), \\ v_2 &= D \sin y_0 + \cos y_0 \left(-\cos(c_1 + y_1)(F_1 \cos y_2 + F_2 \sin y_2) \right. \\ &\quad \left. + \sin(c_1 + y_1)(K_1 \cos y_3 + K_2 \sin y_3) \right). \end{aligned}$$

Имамо да је $p = \sin c_0 v_1 + \cos c_0 v_2$ и $E_1(p) = \partial_0 p = -\sin c_0 v_2 + \cos c_0 v_1$. Сада, користећи (5.28), имамо

$$\begin{aligned} J_p E_1 &= p \times E_1(p) = -v_1 \times v_2 = D \times \cos(c_1 + y_1)(F_1 \cos y_2 + F_2 \sin y_2) \\ &\quad - D \times \sin(c_1 + y_1)(K_1 \cos y_3 + K_2 \sin y_3), \\ E_2(p) &= -\cos(c_1 + y_1)(F_2 \cos y_2 - F_1 \sin y_2) \\ &\quad - \sin(c_1 + y_1)(-K_2 \cos y_3 + K_1 \sin y_3), \end{aligned}$$

Како је $E_2 = J E_1$, добијамо

$$\begin{aligned} D \times (F_1 \cos y_2 + F_2 \sin y_2) &= -(F_2 \cos y_2 - F_1 \sin y_2), \\ D \times (K_1 \cos y_3 + K_2 \sin y_3) &= -K_2 \cos y_3 + K_1 \sin y_3, \end{aligned}$$

и даље $D \times F_1 = -F_2$, $D \times F_2 = F_1$, $D \times K_1 = -K_2$ и $D \times K_2 = K_1$. Стога, на основу Напомене 3, имамо следећу лему:

Лема 5.4. *Векторска поља D , F_1 и K_1 одређују G_2 репер.*

Означимо са $L_1 = F_1 \times K_1$ и $L_2 = F_1 \times K_2$ допуну овог G_2 репера.

Имамо да је

$$E_4 = JE_3 = p \times E_3.$$

Користећи Лему 2.14 и (2.12), добијамо

$$E_5 = G(E_2, E_4) = E_2 \times E_4 + g(E_2, JE_4)p = E_2 \times E_4.$$

Сада имамо $V_4 = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}E_4 + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}E_5$ и $V_5 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}E_4 - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}E_5$, па добијамо

$$\begin{aligned} V_4 &= F_1 \sin(c_1 + y_1) \sin(c_2 + y_3) + F_2 \sin(c_1 + y_1) \cos(c_2 + y_3) e_3 \\ &\quad + K_1 \cos(c_1 + y_1) \sin(c_2 + y_2) + K_2 \cos(c_1 + y_1) \cos(c_2 + y_3), \\ V_5 &= -L_1 \cos c_2 + L_2 \sin c_2. \end{aligned}$$

Коначно, имамо да је

$$N = -JE_5 = -p \times E_5 = L_1 \sin c_2 + L_2 \cos c_2.$$

Јасно је да је диференцијабилно пресликавање (5.27) заиста имерзија са четвородимензионом нул-дистрибуцијом, која је по конструкцији разапета са ∂_0 , ∂_1 , ∂_2 и ∂_3 .

Како је $\langle \partial_4 p, N \rangle = 0$, следи да је $L_2 \cos c_2 + L_1 \sin c_2$ ортогонално на $\partial_4 D$, $\partial_4 F_1$, $\partial_4 F_2$, $\partial_4 K_1$ и $\partial_4 K_2$. Пошто је $\partial_4 \langle X, Y \rangle = \langle \partial_4 X, Y \rangle + \langle X, \partial_4 Y \rangle$, добијамо да је $\partial_4(L_2 \cos c_2 + L_1 \sin c_2)$ ортогонално на D , K_1 , K_2 , F_1 , F_2 и наравно на $L_2 \cos c_2 + L_1 \sin c_2$. Према томе, постоји диференцијабилна функција α тако да

$$\partial_4(L_2 \cos c_2 + L_1 \sin c_2) = \alpha(-L_1 \cos c_2 + L_2 \sin c_2).$$

Пошто $L_1 \sin c_2 + L_2 \cos c_2$ за сваку вредност параметра y_4 лежи на јединичној сфери, природно је посматрати га као сферну криву $\gamma(y_4)$. На тај начин, уместо да се ограничимо на дати експлицитни облик израза, можемо посматрати произвољну криву $\gamma(y_4)$ на јединичној сфери која репрезентује тај израз. Штавише, можемо репараметризовати криву тако да је y_4 параметар дужине лука. Тада, избором одговарајућег знака параметризације, добијамо

$$\partial_4 \gamma = -L_1 \cos c_2 + L_2 \sin c_2$$

и

$$D = -\gamma \times \gamma', \quad L_1 = \sin c_2 \gamma - \cos c_2 \gamma', \quad L_2 = \cos c_2 \gamma + \sin c_2 \gamma'.$$

Нека је K_1 произвољно тангентно јединично векторско поље дуж γ , ортогонално на γ' и $\gamma \times \gamma'$. Тада је $K_2 = -D \times K_1 = (\gamma \times \gamma') \times K_1$, $F_1 = -L_1 \times K_1$ и $F_2 = L_2 \times K_1$.

Дакле, доказали смо да важи следећа теорема:

Теорема 5.5. *Нека је M хиперповрш близу Келерове сфере S^6 са четвородимензионом нул-дистрибуцијом. Тада је M локално конгруентна имерзији*

$$\begin{aligned} p(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) &= -\sin(y_0 + c_0)\gamma \times \gamma' \\ &\quad + \cos(y_0 + c_0) \left(\cos(c_1 + y_1)((\sin c_2 \gamma - \cos c_2 \gamma')) \times K_1 \cos y_2 \right. \\ &\quad \left. + (\cos c_2 \gamma + \sin c_2 \gamma') \times K_1 \sin y_2 \right) \\ &\quad \left. + \sin(c_1 + y_1)(K_1 \cos y_3 + (\gamma \times \gamma') \times K_1 \sin y_3) \right), \end{aligned}$$

где је $\gamma(y_4)$ крива јединичне брзине на сфери, K_1 јединично векторско поље дуж те криве, ортогонално на γ , γ' и $\gamma \times \gamma'$, а c_0 , c_1 и c_2 диференцијабилне функције по y_4 .

Литература

- [1] I. Agricola, A. Borówka and T. Friedrich „ S^6 and the geometry of nearly Kähler 6-manifolds”, Differential Geometry and its Applications, **57** (2018), pp. 75–86
- [2] V. Andrejić „Viša geometrija”, elektronsko izdanje, <https://poincare.matf.bg.ac.rs/vladica.andrejic/Visa.pdf> (2024).
- [3] M. Antić „CR podmnogostrukosti šestodimenzione sfere”, doktorska disertacija, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu (2009).
- [4] M. Antić „Diferencijalna geometrija mnogostrukosti”, Udžbenik, Matematički fakultet, Beograd (2015).
- [5] M. Antić „Four-dimensional CR submanifolds of the sphere $S^6(1)$ with two-dimensional nullity distribution” J. Math. Anal. Appl., **445** (2017), pp. 1–12.
- [6] M. Antić and Dj. Kocić „Non-Existence of Real Hypersurfaces with Parallel Structure Jacobi Operator in $S^6(1)$ ” Mathematics, **10** (2022), art. 2271.
- [7] M. Antić and Dj. Kocić „Hypersurfaces of the sphere $S^6(1)$ with four-dimensional nullity distribution” Journal of Geometry and Physics, **213** (2025), no. 105493
- [8] J. Baez „The Octonions” Bulletin of the American Mathematical Society, **39**(2) (2001), pp. 145–205.
- [9] J. Berndt, J. Bolton and L. M. Woodward „Almost complex curves and Hopf hypersurfaces in the nearly Kähler 6-sphere” Geom. Dedicata, **56** (1995), pp. 237–247.
- [10] J. Bolton, L. Vrancken and L. M. Woodward „On almost complex curves in the nearly Kähler 6-sphere” Quart. J. Math. Oxford, **45** (1994), pp. 407–427.
- [11] A. Borel „Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori”, Bull. Am. Math. Soc. **55** (1949), pp. 580–587.
- [12] J. B. Butruille „Homogeneous nearly Kähler manifolds, In Handbook of Pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry” RMA Lect. Math. Theor. Phys., **16** (2010), pp. 399–423.
- [13] E. Calabi „Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds”, Trans. Am. Math. Soc. **87** (1958), pp. 407–438.
- [14] B. Y. Chen „Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds” Arch. Math., **60** (1993), pp. 568–578.
- [15] M. P. do Carmo „Riemannian geometry” (Translated by Francis Flaherty), Mathematics: Theory and applications, Birkhäuser, Boston-Berlin, (1992).

-
- [16] M. Dajczer and R. Tojeiro „Submanifold theory: Beyond an Introduction”, Springer (2019).
 - [17] F. Dillen, B. Opozda, L. Verstraelen and L. Vrancken „On almost complex surfaces of the nearly Kähler 6-sphere”, Collection of Scientific Papers, Faculty of Science, Univ. of Kragujevac, **8** (1987), pp. 5–13.
 - [18] S. Deshmukh and F. R. Al-Solamy „Hopf hypersurfaces in nearly Kähler 6-sphere” Balk. J. Geom. Appl., **13** (2008), pp. 38–46.
 - [19] F. Dillen, L. Verstraelen and L. Vrancken „Classification of totally real 3- dimensional submanifolds of $S^6(1)$ with $K \geq 1/16$ ” J. Math. Soc. Japan, **42** (1990), pp. 565–584.
 - [20] M. Djorić and M. Okumura „CR submanifolds of complex projective space” Developments in Mathematics, Springer **19** (2010).
 - [21] C. Ehresmann and P. Libermann „Sur les structures presque hermitiennes isotropes”, C. R. Acad. Sci. Paris **232** (1951), pp. 1281–1283.
 - [22] B. Eckmann and A. Frölicher „Sur l’intégrabilité des structures presque complexes”, C. R. Acad. Sci. Paris **232** (1951), pp. 2284–2286.
 - [23] T. Fukami and S. Ishihara „Almost Hermitian structure on S^6 ” Tohoku Math. J., **7** (1955), pp. 151–156.
 - [24] J. Q. Ge „On mean curvatures in submanifolds geometry” Sci China Ser A, **51** (2008), pp.1127–1134.
 - [25] A. Gray „Some examples of almost Hermitian manifolds”, Ill. J. Math. **10** (1966), pp. 353–366.
 - [26] A. Gray „Nearly Kähler manifolds” J. Diff. Geom., **4** (1970), pp. 283–309.
 - [27] A. Gray „Almost complex submanifolds of the six sphere” Proc. Am. Math. Soc., **20** (1969), pp. 277–279.
 - [28] A. Gray „The structure of nearly Kähler manifolds” Math. Ann., **22** (1976), pp. 233–248.
 - [29] L. He, X. X. Jiao and X. C. Zhou „On almost complex curves and Hopf hypersurfaces in the nearly Kähler 6-sphere” Sci. China Math., **57** (2014), pp. 1045–1056.
 - [30] I. Jeong, J. D. Perez and Y. J. Suh „Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with parallel structure Jacobi operator” Acta Math. Hung., **122** (2009), pp. 173–186.
 - [31] G. Kaimakamis, K. Panagiotidou and J. D. Pérez „Real hypersurfaces in non-flat complex space form with structure Jacobi operator of Lie-Codazzi type” Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **39** (2015), pp. 17–27.
 - [32] U. H. Ki, S. J. Kim and S. B. Lee „Some characterizations of a real hypersurface of type A” Kyngpook Math. J., **31** (1991), pp. 73–82.
 - [33] U. H. Ki, J. D. Pérez, F. G. Santos and Y. J. Suh „Real hypersurfaces in complex space forms with ξ -parallel Ricci tensor and structure Jacobi operator” J. Korean Math. Soc., **44** (2007), pp. 307–326.

-
- [34] M. Kimura and S. Maeda „On real hypersurfaces of a complex projective space II” Tsukuba J. Math., **15** (1991), pp. 299–311.
- [35] A. Kirchhoff „Sur l’existence de certains champs tensoriels sur les sphères à ndimensions”, C. R. Acad. Sci. Paris, **225** (1947), pp. 1258–1260.
- [36] Dj. Kocić „Hopfove hiperpovršni blizu Kelerove sfere S^6 ”, master rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu (2017).
- [37] Dj. Kocić „Real hypersurfaces in $S^6(1)$ equipped with structure Jacobi operator satisfying $\mathcal{L}_X l = \nabla_X l$ ” Filomat, **37** (2023), pp. 8435–8440.
- [38] Dj. Kocić „Hopf real hypersurfaces in $S^6(1)$ whose structure Jacobi operator is of Codazzi type” Facta Universitatis. Series: Mathematics and Informatics, **39** 5 (2024), pp. 937–942.
- [39] Dj. Kocić and M. Antić „The Shape Operator of Real Hypersurfaces in $S^6(1)$ ” Mathematics, **12** (2024), art. 1668.
- [40] S. H. Kon, T. H. Loo and S. Q. Ren „Real hypersurfaces in a complex space form with a condition on the structure Jacobi operator” Math. Slovaca, **64** (2014), pp. 1007–1018.
- [41] S. Koto „Some theorems on almost Kählerian spaces”, J. Math. Soc. Jpn. **12** (1960), pp. 422–433.
- [42] J. M. Lee Introduction to Smooth Manifolds, Springer, 2nd Edition, (2013).
- [43] C. J. Machado, J. D. Pérez, I. Jeong and Y. J. Suh „ $\mathcal{D}$ -parallelism of normal and structure Jacobi operators for hypersurfaces in complex two-plane Grassmanians” Ann. Mat. Pure Appl., **193** (2014), pp. 591–608.
- [44] D. Montgomery and H. Samelson „Transformation groups of spheres”, Ann. Math., **44**(2) (1943), pp. 454–470.
- [45] P. A. Nagy „Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations” Asian J. Math., **6** (2002), pp. 481–504.
- [46] R. Niebergall and P. J. Ryan „Real hypersurfaces in complex space forms” Math. Sci. Res. Inst. Publ., **32** (1997), pp. 233–305.
- [47] M. Ortega, J. D. Pérez and F. G. Santos „Non-existence of real hypersurfaces with parallel structure Jacobi operator in nonflat complex space forms” Rocky Mt. J. Math., **36** (2006), pp. 1603–1613.
- [48] J. D. Pérez and F. G. Santos „On the Lie derivative of structure Jacobi operator of real hypersurfaces in complex projective space” Publ. Math. Debrecen, **66** (2005), pp. 269–282.
- [49] J. D. Pérez, F. G. Santos and Y. J. Suh „Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is Lie ξ -parallel” Differential Geom. Appl., **22** (2005), pp. 181–188.
- [50] J. D. Pérez, F. G. Santos and Y. J. Suh „Real Hypersurfaces in Complex Projective Space Whose Structure Jacobi Operator Is D -Parallel” Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin, **13** (2006), pp. 459–469.

- [51] J. D. Pérez and F. G. Santos „Real Hypersurfaces in Complex Projective Space Whose Structure Jacobi Operator Satisfies $\mathcal{L}_\xi R_\xi = \nabla_\xi R_\xi$ ” Rocky Mountain Journal of Mathematics, **39** (2009), pp. 1293–1301.
- [52] J. D. Pérez and Y. J. Suh „Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is Lie $\mathbb{D}$ -parallel” Canad. Math. Bull., **56** (2013), pp. 306–316.
- [53] K. Panagiotidou and P. Xenos „Real Hypersurfaces in CP^2 and CH^2 equipped with structure Jacobi operator satisfying $\mathcal{L}_\xi l = \nabla_\xi l$ ” Adv. Pure Math., **2** (2012), pp. 1–5.
- [54] K. Panagiotidou „The structure Jacobi operator and the shape operator of real hypersurfaces in CP^2 and CH^2 ” Beitr. Algebra Geom., **55** (2014), pp. 545–556.
- [55] K. Sekigawa „Almost complex submanifolds of a 6-dimensional sphere” Kōdai Math J, **6** (1983), pp. 174–185.
- [56] S.-I. Tachibana „On almost-analytic vectors in certain almost-Hermitian manifolds”, Tohoku Math. J., **11** (1959), pp. 351–363.
- [57] T. Theofanidis and P. Xenos „Non-Existence of Real Hypersurfaces Equipped with Recurrent Structure Jacobi Operator in Nonflat Complex Space Forms” Results Math., **61** (2012), pp. 43–55.

Биографија аутора

Ђорђе Коцић рођен је 6. децембра 1994. године у Београду. Основну школу и гимназију у Власотинцу завршио је као носилац Вукове дипломе. Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписао је 2013. године и дипломирао 2017. године са просеком оцена 9,02. Мастер академске студије, смер Теоријска математика и примене, на истом факултету уписао је 2017. године и дипломирао 2018. године одбранивши мастер рад Хопфове хиперповрши близу Келерове сфере S^6 , под менторством проф. др Мирославе Антић, са просечном оценом 10. Докторске студије на Катедри за геометрију Математичког факултета у Београду уписао је школске 2018/19 године.

Запослен је на Математичком факултету Универзитета у Београду од 2017. године, и то најпре као сарадник у настави за ужу научну област Геометрија до 2019. године, а затим као асистент за ужу научну област Геометрија до данас. Држао је вежбе на курсевима Аналитичка геометрија (Геометрија 1), Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Нееуклидске геометрије, Одабрана поглавља геометрије А и Методика наставе математике Ц на основним студијама Математичког факултета, Математика 1 на основним академским студијама Факултета за физичку хемију, као и курс Биоматематика за студенте Биолошког факултета.

Био је члан пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије „Геометрија, образовање и визуелизација са применама”, под бројем 174012, од 2018. године.

Списак објављених научних радова:

1. M. Antić, Dj. Kocić, **Three-dimensional CR submanifolds in $S^6(1)$ with umbilical direction normal to $\mathcal{D}_3$** , International Electronic Journal of Geometry, (2021), 14(1), 125–131 (M23, JCI(2021) 0.41)
2. M. Antić, Dj. Kocić, **Non-Existence of Real Hypersurfaces with Parallel Structure Jacobi Operator in $S^6(1)$** , Mathematics, (2022), 10(13), art. 2271 (M21a+, IF2(2022) 2.4)
3. Dj. Kocić, **Real hypersurfaces in $S^6(1)$ equipped with structure Jacobi operator satisfying $\mathcal{L}_X l = \nabla_X l$** , Filomat, (2023), 37(25), 8435-8440 (M22, IF2(2023) 0.8)
4. Dj. Kocić, M. Antić, **The Shape Operator of Real Hypersurfaces in $S^6(1)$** , Mathematics, (2024), 12(11), art.1668. (M21a+, IF2(2023) 2.3)
5. Dj. Kocić, **Hopf real hypersurfaces in $S^6(1)$ whose structure Jacobi operator is of Codazzi type**, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics, 2024, 39(5), 937-942 (M22, IF2(2023) 0.5)

6. M. Antić, Dj. Kocić, **Hypersurfaces of the sphere $\mathbb{S}^6(1)$ with four-dimensional nullity distribution**, Journal of Geometry and Physics, 2025, 213, no. 105493, (M21a, IF2(2023) 1.6)

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Ђорђе Коцић

број индекса 2020/2018

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Хиперповрши близу Келерове сфере S^6

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 22.08.2025.

Ђорђе Коцић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Ђорђе Коцић

Број индекса 2020/2018

Студијски програм МАТЕМАТИКА

Наслов рада Хиперповрши близу Келерове сфере S^6

Ментор проф. др Мирослава Антић

Потписани/а Ђорђе Коцић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 22.08.2025.

Ђорђе Коцић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Хиперповрши близу Келерове сфере S^6

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

☒ 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 22.08.2025.

Џорђе Коцић

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.