

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Михаило Крстић

**НЕКИ ТИПОВИ ИНТЕГРАЦИЈЕ
ОПЕРАТОР-ВРЕДНОСНИХ ФУНКЦИЈА
И КОМПЛЕКСНИХ МЕРА СА
ПРИМЕНАМА НА ЛАПЛАСОВЕ
ТРАНСФОРМЕРЕ У ИДЕАЛИМА
КОМПАКТНИХ ОПЕРАТОРА**

докторска дисертација

Београд, 2025.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Mihailo Krstić

**SOME TYPES OF INTEGRATION OF
OPERATOR-VALUED FUNCTIONS AND
COMPLEX MEASURES WITH
APPLICATIONS ON LAPLACE
TRANSFORMERS IN IDEALS OF
COMPACT OPERATORS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2025.

Ментори:

др Данко Јоцић, Редовни професор у пензији
Универзитет у Београду – Математички факултет

др Милош АРСЕНОВИЋ, Редовни професор
Универзитет у Београду – Математички факултет

Чланови комисије:

др Милан ЛАЗАРЕВИЋ, доцент
Универзитет у Београду – Математички факултет

др Стефан МИЛОШЕВИЋ, доцент
Универзитет у Београду – Математички факултет

др Петар МЕЛЕНТИЈЕВИЋ, доцент
Универзитет у Београду – Математички факултет

др Снежана ЖИВКОВИЋ ЗЛАТАНОВИЋ, редовни професор
Универзитет у Нишу – Природно-математички факултет

др Стефан ИВКОВИЋ, научни сарадник
Математички институт САНУ

Датум одбране: _____

Софији и Мирјани

Наслов дисертације: Неки типови интеграције оператор-вредносних функција и комплексних мера са применама на Лапласове трансформере у идеалима компактных оператора

Резиме: Ова докторска дисертација се бави интеграцијом функција које узимају вредности у просторима ограничених оператора и у просторима комплексних мера на задатој σ -алгебри. Поменути интегратилност се посматра у општијем смислу од оног који је захтеван у теорији слабе интеграције векторских функција. Први део дисертације третира интегратилност фамилија оператора. Уколико је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са позитивном мером μ и ако је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ фамилија оператора из $\mathcal{B}(X, Y)$, при чему су X и Y Банахови простори, тада се захтева μ -интегратилност функције $\Omega \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \in \mathbb{C}$ за свако $x \in X$ и $y^* \in Y^*$. У том случају доказујемо да је величина $\sup_{\|x\|=\|y^*\|=1} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t)$ коначна. Последњи израз ће нам омогућити нормирање одговарајућег векторског простора фамилија оператора. Такође, за свако $E \in \mathfrak{M}$ долазимо до оператора $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ из $\mathcal{B}(X, Y^{**})$, чија је дефинициона једнакост дата са $\langle y^*, \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x \rangle = \int_E \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle d\mu(t)$ за свако $x \in X$ и $y^* \in Y^*$. Други део дисертације третира интегратилност фамилија мера. Уколико је $(\lambda^x)_{x \in X}$ фамилија комплексних мера на $(Y, \mathcal{A})$, где је $(X, \mathcal{B}, \mu)$ простор са позитивном мером μ и уколико је за свако $A \in \mathcal{A}$ функција $X \ni x \mapsto \lambda^x(A) \in \mathbb{C}$ μ -интегратилна тада је величина $\sup_{A \in \mathcal{A}} \int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x)$ коначна. Последњи израз ће нам послужити за нормирање одговарајућег векторског простора фамилија мера. У том случају за свако $B \in \mathcal{B}$ постоји комплексна мера $\int_B \lambda^x d\mu(x)$ на $\mathcal{A}$ за коју важи $(\int_B \lambda^x d\mu(x))(A) = \int_B \lambda^x(A) d\mu(x)$ за свако $A \in \mathcal{A}$. Дисертација је организована на следећи начин. Први део дисертације (тачније Поглавља 2–4) третира интеграцију функција које узимају вредности у $\mathcal{B}(X, Y)$. Поглавље 2 даје преглед до сада познатих резултата везаних за интеграцију функција у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, где је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор, и презентује оригиналне резултате који проширују постојећу теорију. У Поглављу 3 примењује се изложена теорију на Лапласову трансформацију $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција, која је до сада разматрана у литератури. Поглавље 4 је значајно јер врши генерализацију у правцу интегратилности функција које узимају вредности у $\mathcal{B}(X, Y)$. Овакав вид интеграције дефинисан је први пут у раду [8]. Други део дисертације (тачније Поглавље 5) бави се интеграцијом функција које узимају вредности у просторима комплексних мера на задатој σ -алгебри. Уведени тип интеграције је општији од Петисовог концепта и разматран је у радовима [6, 7]. Поменути радови представљају природну надоградњу и примену искустава стечених у раду са функцијама које узимају вредности у просторима оператора, уз представљање оригиналних резултата кандидата са коауторима. У дисертацији је дато обиље конкретних примера који ову апстрактну материју чине доста илустративнијом.

Кључне речи: Интеграција у Банаховом простору, простори оператора и мера, фамилије оператора и мера

Научна област: Математика

Ужа научна област: Математичка анализа

Dissertation title: Some types of integration of operator-valued functions and complex measures with applications on Laplace transformers in ideals of compact operators

Abstract: This doctoral dissertation addresses the integration of functions taking values in spaces of bounded operators and in spaces of complex measures on a given σ -algebra. The mentioned integrability is considered in a more general sense than that required in the theory of weak integration of vector-valued functions. The first part of the dissertation deals with the integrability of families of operators. If $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ is a space with a positive measure μ and $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ is a family of operators from $\mathcal{B}(X, Y)$, where X and Y are Banach spaces, then μ -integrability of the function $\Omega \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \in \mathbb{C}$ is required for every $x \in X$ and $y^* \in Y^*$. In this case, we prove that the quantity $\sup_{\|x\|=\|y^*\|=1} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t)$ is finite. This expression allows us to define a norm on the corresponding vector space of families of operators. Furthermore, for every $E \in \mathfrak{M}$, one obtains an operator $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ in $\mathcal{B}(X, Y^{**})$, whose defining property is $\langle y^*, \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) x \rangle = \int_E \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle d\mu(t)$ for every $x \in X$ and $y^* \in Y^*$. The second part of the dissertation deals with the integrability of families of measures. If $(\lambda^x)_{x \in X}$ is a family of complex measures on $(Y, \mathcal{A})$, where $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a space with a positive measure μ , and if for every $A \in \mathcal{A}$ the function $X \ni x \mapsto \lambda^x(A) \in \mathbb{C}$ is μ -integrable, then the quantity $\sup_{A \in \mathcal{A}} \int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x)$ is finite. This allows us to define a norm on the corresponding vector space of families of measures. In this case, for every $B \in \mathcal{B}$ there exists a complex measure $\int_B \lambda^x d\mu(x)$ on $\mathcal{A}$ such that $\left(\int_B \lambda^x d\mu(x) \right)(A) = \int_B \lambda^x(A) d\mu(x)$ for every $A \in \mathcal{A}$. The dissertation is organized as follows. The first part (Chapters 2–4) deals with the integration of functions taking values in $\mathcal{B}(X, Y)$. Chapter 2 provides a survey of the known results on the integration of functions in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, where $\mathcal{H}$ is a separable Hilbert space, and presents original results extending the existing theory. In Chapter 3, the developed theory is applied to the Laplace transform of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -valued functions, which has been previously considered in the literature. Chapter 4 is significant because it generalizes the integrability of functions taking values in $\mathcal{B}(X, Y)$. This type of integration was first defined in [8]. The second part of the dissertation (Chapter 5) deals with the integration of functions taking values in spaces of complex measures on a given σ -algebra. The introduced type of integration is more general than Pettis concept and has been considered in [6, 7]. These works represent a natural extension and application of the experiences gained from working with functions taking values in operator spaces, including original results of the candidate with coauthors. Numerous concrete examples are included, making this abstract material much more illustrative.

Keywords: Banach space integration, spaces of operators and measures, families of operators and measures

Research area: Mathematics

Research sub-area: Mathematical analysis

Садржај

Увод	1
1 Основни појмови и тврђења	5
1.1 Неке класичне теореме Теорије мере и Функционалне анализе	13
1.2 Интеграција функција са вредностима у Банаховим просторима	17
1.3 Идеали $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ компактних оператора	24
2 Интеграција функција $A : \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$	33
2.1 Гелфандов оператор-вредносни интеграл	33
2.2 Простори $L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ и $L_G^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$	38
2.3 Некомплетност простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$	39
2.4 Припадност оператора $\int_\Omega A_t d\mu(t)$ идеалима $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$	42
2.5 Оператор интеграције $T : L^\infty(\Omega, \mu) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$	48
2.6 Тврђења о општим особинама функција из $L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$	53
2.7 Интеграција слабо* мерљивих функција $A : \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$	66
3 Лапласови трансформери у идеалима $\mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$	71
3.1 Лапласова трансформација на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и Лапласови трансформери	74
3.2 Формуле интегралних репрезентација	82
3.3 Неједнакости у $\mathfrak{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$ идеалима	89
3.4 Неједнакости у $\mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ идеалима	94
4 Интеграција функција $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(X, Y)$	99
4.1 Банахов простор $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathfrak{B}(X, Y))$ оператор-вредносних мера	100
4.2 Нормиран простор $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$	104
4.3 Оператори на $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$	119
4.4 Теореме конвергенције за низове из $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$	122
5 Интеграција функција $\lambda : X \rightarrow sa(Y, \mathcal{A})$	135
5.1 Простор $L_w^1(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ фамилија мера са интеграбилном варијацијом . .	136
5.2 Простор $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ скуп по скуп интеграбилних фамилија мера	143
5.3 Мерљиве фамилије L^p простора	166
5.4 Простори фамилија мера са Канторович-Рубинштајновом нормом	175
Библиографија	185
Биографија аутора	194

Предговор

Теорија интеграције функција које узимају вредности у Банаховим¹ просторима је грана математике која се налази у пресеку класичне Теорије мере и интеграције са једне стране и Функционалне анализе са друге стране. Ова област математике се развијала као природно проширење добро познате теорије Лебегове² интеграције, теорије која се изучава као стандардни део универзитетских програма на свим редовним студијама математике.

Први значајан корак у овом правцу направио је Фреше³ почетком 20. века, уводећи појам интеграције функција са вредностима у нормираним просторима. Ипак, права основа данашње теорије постављена је касније кроз радове о Бохнеровом⁴ интегралу. Бохнер је 1933. године у раду [12] дефинисао интеграл функције са вредностима у Банаховом простору као проширење класичне Лебегове теорије, где је први пут третирано питање интеграбилности функције $f : [a, b] \rightarrow X$. Показано је да се под извесним условима може дефинисати њен интеграл на начин који је аналоган оном када разматрамо Лебегов интеграл скаларне функције $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Бохнерова теорија интеграције постала је основа у многим областима Математичке анализе као и у њеним применама. Међутим, показало се да Бохнеров интеграл има одређена ограничења, пре свега јер се захтева јака мерљивост⁵ функције чији интеграл желимо да одредимо, што даље повлачи скоро свуда сепарабилност слике разматране функције (са тим у вези видети познату Пејтисову⁶ теорему о мерљивости, која је у овој дисертацији наведена као Теорема 1.20).

Наведени разлози су довели до развоја и алтернативних концепта интеграције, као што је урађено у Петисовом раду [66] из 1938. године, којим се омогућава интеграција функција из шире класе. За разлику од помињаног концепта Бохнерове интеграције векторских функција, Пејтисов тип⁷ интеграције користи слабији тип мерљивости и омогућава интеграцију како у некомплетним тако и у несепарабилним нормираним просторима. Са друге стране, Пејтисов интеграл не поседује све особине које има Бохнеров интеграл, што ограничава примену овог типа интеграције.

Каснији развој теорије интеграције функција које узимају вредности у нормираним просторима укључује Данфордов⁶ и Гелфандов⁷ интеграл као и разматрања интеграције у контексту векторских мера. Сви наведени типови интеграције допринели су значајном утицају на модерну Математичку анализу као и бољем разумевању структуре Банахових

¹Stefan Banach (1887–1945), пољски математичар

²Henri Léon Lebesgue (1875–1941), француски математичар

³Maurice Fréchet (1878–1973), француски математичар

⁴Salomon Bochner (1899–1982), амерички математичар немачко-пољског порекла

⁵Billy James Pettis (1913–1979), амерички математичар

⁶Nelson Dunford (1906–1986), амерички математичар

⁷Israel Moiseevich Gelfand (1913–2009), совјетски и амерички математичар

простора а и саме Функционалне анализе. Класична монографија [25] Дистела⁸ и Ула⁹ је писана у изузетно прегледном стилу и омогућава систематичан увод у ову материју. Током излагања материјала у овој дисертацији читалац ће бити упућен и на разну додатну литературу. Конструкције поменутих типова векторских интеграла, које се најчешће везују за имена Бохнера, Петиса, Данфорда и Гелфанда нису део редовних курсева Анализе. Из тог разлога ћемо у Поглављу 1 изложити резултате ове теорије наводећи одговарајуће референце. За нека позната тврђења, која имају утицај у каснијим разматрањима везаним за добијање оригиналних резултата, изложићемо и доказе. Истакнимо посебно да ће у овом поглављу, које се бави прегледом познатих делова теорије, бити презентована и теорема о спектралном полупречнику Бохнеровог интеграла која је недавно публикована у [73].

3 Ова докторска дисертација третира интеграцију функција, у *слабом смислу*, које узимају вредности у просторима ограничених оператора $\mathcal{B}(X, Y)$ између два нормирана простора као и у просторима комплексних мера на датој σ -алгебри. Термин *слаба* овде треба узети у ширем смислу јер је прецизније рећи да се поменута интеграбилност посматра у смислу који је општији тј. слабији од познате теорије слабе интеграције векторских функција. Домен функција чију ћемо интеграбилност разматрати углавном ће бити апстрактан мерљив простор са мером. Два управо поменута нормирана простора (простори оператора и простори мера), који су најчешће Банахови, свакако представљају изузетно битне просторе како у Функционалној анализи тако и у њеним разноврсним применама. Типови интеграције функција са вредностима у овим просторима, који ће бити презентовани, су уопштења Петисове тј. Данфордове интеграције и биће изложени кроз резултате из радова [73, 52, 6, 7, 8, 37] на којима је аутор ове дисертације учествовао самостално или у коауторству. Такође, у овој дисертацији ће бити презентовани и неки оригинални резултати који до сада још увек нису публиковани.

Што се тиче оригиналних резултата, ова дисертација је организована на следећи начин. Први део дисертације (Поглавља 2, 3 и 4) третирају интеграцију функција које узимају вредности у просторима ограничених оператора $\mathcal{B}(X, Y)$.

У Поглављу 2 дајемо преглед до сада већ познатих резултата везаних за интеграцију функција које узимају вредности у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, при чему је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов¹⁰ простор. Такође, у овом поглављу дисертације дајемо и оригиналне резултате који проширују већ постојећу теорију чији је почетак дефинисан радовима професора Данка Јоцића, при чему треба издвојити рад [42] као и докторске дисертације [55, 61] које су одбрањене на Математичком факултету Универзитета у Београду а које су уско повезане са овом тематиком. Велики утицај на ову дисертацију је имала и докторска дисертација [60], јер су израде дисертације [60] и ове текле паралелно, при чему су резултати обе дисертације изузетно блиски у односу на тематику и питања која изучавају (треба имати у виду и заједнички рад [51] чији су делови нашли места у обе дисертације).

У Поглављу 3 се бавимо Лапласовом¹¹ трансформацијом $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција као и неједнакостима које се природно надовезују на већ постојеће резултате. Ово поглавље представља примену изложене теорије у Поглављу 2.

Поглавље 4 значајно продубљује резултате изложене у Поглављу 2 јер се разматра интеграција функција које узимају вредности у простору $\mathcal{B}(X, Y)$, при чему су X и Y

⁸Joseph Diestel (1943–2017), амерички математичар

⁹John J. Uhl (1940–2010), амерички математичар

¹⁰David Hilbert (1862–1943), немачки математичар

¹¹Pierre-Simon Laplace (1749–1827), француски математичар и астроном

Банахови простори. Треба напоменути да је овакав вид интеграције дефинисан први пут у раду [8].

Други део ове дисертације тј. резултати који су садржани у Поглављу 5 се баве интеграцијом функција које узимају вредности у просторима комплексних мера на задатој σ -алгебри. Уведени тип интеграције оваквих функција је општији него Петисов концепт интеграције и први пут је разматран у [6] а затим и у раду [7]. Треба напоменути да је приликом израде ових радова коришћено искуство које смо до сада стекли у раду са функцијама које узимају вредности у просторима оператора, где је у последње две деценије објављено више десетина радова у познатим и међународно признатим часописима. Такође, напоменимо да неки делови поменутих радова [6, 7] нису ушли у састав ове дисертације, најпре због обима саме дисертације са једне стране док је са друге стране на то утицала и тематика и техника третирања проблема. Наиме, разматрана су и нека питања која се тичу Стохастичке анализе као и Топологије.

Треба напоменути да је велики подстрек у истраживањима која ће бити презентована у овој дисертацији дат од стране колега коаутора на поменутих радовима. Желим да се захвалим најпре менторима проф. др Данку Јоцићу и проф. др Милошу Арсеновићу на припреми поменутих радова на којима је базирана ова дисертација. Велики допринос ментора представља и сам процес мог школовања на докторским студијама као и заједничко ангажовање које смо имали у наставном процесу са студентима, приликом ког смо водили многобројне дискусије везане за математику као науку као и дискусије о томе како предавати математику.

Велики допринос у формирању другог дела ове дисертације дао је и др Владимир Богачев, професор на Московском државном универзитету Ломоносов као и на Вишој школи за економију у Москви, са ким смо радили на концепту интеграције функција које узимају вредности у просторима мера.

Такође, желим да се захвалим колегама др Стефану Милошевићу и др Милану Лазаревићу, који се баве темама везаним за интеграцију оператор-вредносних функција, као и проф. др Снежани Живковић Златановић, др Петру Мелентијевићу и др Стефану Ивковићу, члановима комисије за преглед и оцену ове дисертације. Коментари и сугестије поменутих колега су значајно допринеле квалитету овог рада, посебно у припреми крајње верзије ове дисертације.

На крају, желим да се захвалим пријатељима и колегама са студија др Храниславу Станковићу, Матији Миловићу и Стевану Милашиновићу. Поменуте колеге су увек биле спремне на дружење и на разговор о свим темама па и о математици. Управо зато, у разним деловима ова дисертација је на основу њихових предлога, коментара и сугестија попримила знатно квалитетнији облик. У финалној верзији текста ове дисертације колега др Иван Дамњановић је имао низ конкретних језичких и стилских предлога како нешто боље написати, при чему му се овим путем најискреније захваљујем.

У Нишу и Београду, новембар 2025. године

Глава 1

Основни појмови и тврђења

Као што смо већ рекли, у овом поглављу ћемо увести основне ознаке и направити преглед већ постојеће теорије која ће се користити у овој дисертацији. Нека тврђења ћемо само навести јер су докази опште познати док ћемо нека тврђења и доказати, уколико су идеје доказа битне за даљи рад или уколико се ради о тврђењима која нису део стандардних курсева Математичке анализе.

Ако је $z \in \mathbb{C}$ тада дефинишемо $\operatorname{sgn}(z) = \frac{|z|}{z}$, ако је $z \neq 0$ и $\operatorname{sgn}(z) = 0$, ако је $z = 0$. Уколико је V векторски простор (над пољем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и $S \subset V$, тада ћемо са $\operatorname{lin}(S)$ означаваати *линеарни омотач* тј. *линеал* скупа S . Такође, са $\dim V$ означавамо *алгебарску димензију* векторског простора V . Простор свих линеарних и ограничених оператора између Банахових простора E и F је означен са $\mathcal{B}(E, F)$. Дуални простор $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ простора E је означен са E^* . Простор компактних оператора који делују између E и F је означен са $\mathcal{C}_\infty(E, F)$. Уколико је $E = F$ тада користимо ознаке $\mathcal{B}(E)$ и $\mathcal{C}_\infty(E)$ и у том случају *идентички* тј. *јединични* оператор на E означавамо са I_E или I . Ако је $A \in \mathcal{B}(E)$ тада је *слика* оператора A означена са $\mathcal{R}(A)$, док је његово *језгро* означено са $\operatorname{Ker}(A)$. Користићемо и стандардну нотацију $\langle e, e^* \rangle$ за *дуално сјаривање* између E и E^* , тј. уколико је $e \in E$ и $e^* \in E^*$ тада ћемо користити запис $e^*(e) = \langle e, e^* \rangle$. Изометрички изоморфизам простора E и F означавамо са $E \cong F$.

Партитивни скуп скупа A ће бити означаван са $\mathcal{P}(A)$. Дисјунктне уније скупова A и B означавамо са $A \sqcup B$, док ће се иста нотација користити и за произвољне уније. Уколико је $\mathcal{F}$ фамилија подскупова скупа X , тада ће најмања σ -алгебра на X која садржи фамилију скупова $\mathcal{F}$ бити означена са $\sigma(\mathcal{F})$.

Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Да бисмо избегли тривијалне случајеве у разматрањима претпостављамо да је $0 < \mu(A) < +\infty$ за неко $A \in \mathfrak{M}$. Кажемо да је скуп $A \in \mathfrak{M}$ σ -коначан у односу на меру μ ако постоји низ скупова $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ из $\mathfrak{M}$ такав да је $A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} X_k$ и $\mu(X_k) < +\infty$ за свако $k \in \mathbb{N}$. Борелова¹ σ -алгебра на $[0, 1]$ је означена са $\mathcal{B}_{[0,1]}$ док је Борелова σ -алгебра на $\mathbb{R}^k$ означена са $\mathcal{B}_k$. Општије, уколико је (Y, d) метрички простор тада ћемо Борелову σ -алгебру на Y индуковану метриком d означаваати са $\mathcal{B}_Y$. Такође, Лебегова мера на $\mathbb{R}^k$ је означена са m_k док је у случају реалне праве ознака $m = m_1$. Диракова² мера у тачки a ће бити означавана са δ_a .

Уколико је $\mathfrak{M}$ σ -алгебра и μ позитивна мера на њој тада ћемо са $\overline{\mathfrak{M}}^\mu$ означаваати *комплетирање* σ -алгебре $\mathfrak{M}$ у односу на меру μ . Мера добијена у поступку комплетирања σ -алгебре $\mathfrak{M}$ у односу на μ биће означена са $\bar{\mu}$. Кроз цео текст ове дисертације, под μ -мерљивом функцијом подразумеваћемо функцију која је мерљива у односу на

¹Émile Borel (1871–1956), француски математичар

²Paul Dirac (1902–1984), британски физичар и математичар

комплетирање σ -алгебре $\mathfrak{M}$ у односу на меру μ тј. у односу на $\overline{\mathfrak{M}}^\mu$. Битно је истаћи да за сваку сваку $\overline{\mathfrak{M}}^\mu$ -мерљиву функцију $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ постоји функција $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ која је $\mathfrak{M}$ -мерљива и једнака μ -скоро свуда са f (видети [28, Пропозиција 2.12]).

Ако је $f \in L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ онда са $f d\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}$ означавамо комплексну меру дефинисану изразом $(f d\mu)(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$ за свако $A \in \mathfrak{M}$. Функција f се често у литератури назива *густина* мере $f d\mu$ па ћемо и у овој дисертацији користити овај термин. Познато је (видети нпр. [9, Поглавље 9]) да се *шопална варијација* комплексне мере $f d\mu$ на скупу $A \in \mathfrak{M}$ може израчунати следећом формулом:

$$(1.1) \quad |f d\mu|(A) = \int_A |f(x)| d\mu(x).$$

У овој дисертацији често ћемо користити добро познате теореме конвергенције за скаларне функције, тј. *Теорему о доминантној конвергенцији* и *Теорему о мононој конвергенцији*. Ради краћег записа, за ове теореме ћемо користити ознаке ТДК и ТМК.

Нека је $\mathfrak{N}$ σ -алгебра на скупу Y . Ако је ν пребројиво адитивна комплексна мера на $\mathfrak{N}$ и $B \in \mathfrak{N}$, тада $|\nu|(B)$ означава тоталну варијацију мере ν на B . Простор свих комплексних мера на $\mathfrak{N}$ је означен са $ca(Y, \mathfrak{N})$ и у питању је Банахов простор са нормом $\|\nu\| = |\nu|(Y)$ (видети [9, Поглавље 9, Резултат 9.18]). Ако је $\nu \in ca(Y, \mathfrak{N})$ тада је функција $\bar{\nu} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{C}$ дата са $\bar{\nu}(B) = \overline{\nu(B)}$ за свако $B \in \mathfrak{N}$ елемент простора $ca(Y, \mathfrak{N})$ и важи једнакост $|\nu|(B) = |\bar{\nu}|(B)$ за свако $B \in \mathfrak{N}$. Свака комплексна мера ν генерише реалне мере $\operatorname{Re} \nu = \frac{1}{2}(\nu + \bar{\nu})$ и $\operatorname{Im} \nu = \frac{1}{2i}(\nu - \bar{\nu})$ на σ -алгебри $\mathfrak{N}$. Јасно је да важи разлагање $\nu = \operatorname{Re} \nu + i \operatorname{Im} \nu$.

Уколико је ν реална мера (мера са знаком) на $(Y, \mathfrak{N})$ тада за свако $B \in \mathfrak{N}$ важи

$$(1.2) \quad \sup_{C \subset B, C \in \mathfrak{N}} |\nu(C)| \leq |\nu|(B) \leq 2 \sup_{C \subset B, C \in \mathfrak{N}} |\nu(C)|.$$

Применом (1.2) на $\operatorname{Re} \nu$ и $\operatorname{Im} \nu$ имамо да за произвољно $\nu \in ca(Y, \mathfrak{N})$ и $B \in \mathfrak{N}$ важи

$$(1.3) \quad \sup_{C \subset B, C \in \mathfrak{N}} |\nu(C)| \leq |\nu|(B) \leq 4 \sup_{C \subset B, C \in \mathfrak{N}} |\nu(C)|.$$

Лема 1.1. [48] Нека је $\nu \in ca(Y, \mathfrak{N})$ и $B \in \mathfrak{N}$. Постоји скуп $\mathfrak{N} \ni B_0 \subset B$ такав да је

$$(1.4) \quad |\nu(B_0)| \geq \frac{1}{\pi} |\nu|(B).$$

За дату меру ν на σ -алгебри $\mathfrak{N}$ са $ca_\nu^{ac}(Y, \mathfrak{N})$ ћемо означавати векторски простор свих комплексних мера λ на $\mathfrak{N}$ које су *аисолутивно непрекидне* у односу на ν , тј. таквих да је $\lambda \ll \nu$. Такође, $ca_\nu^s(Y, \mathfrak{N})$ означава векторски простор свих мера λ на $\mathfrak{N}$ таквих да је мера λ *сингуларна* у односу на ν , што ћемо означавати са $\lambda \perp \nu$. Оба векторска простора $ca_\nu^{ac}(Y, \mathfrak{N})$ и $ca_\nu^s(Y, \mathfrak{N})$ су затворена у Банаховом простору $ca(Y, \mathfrak{N})$.

Заиста, нека је $\lambda \in ca(Y, \mathfrak{N})$ и $\lambda \notin ca_\nu^{ac}(Y, \mathfrak{N})$. Следи да постоји $B_0 \in \mathfrak{N}$ такво да је $\nu(B_0) = 0$ и $\lambda(B_0) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Нека је $\delta = |\lambda(B_0)| > 0$ и $\eta \in ca_\nu(Y, \mathfrak{N})$. Имамо да је

$$\|\lambda - \eta\| = |\lambda - \eta|(Y) \geq |(\lambda - \eta)(B_0)| = |\lambda(B_0) - \eta(B_0)| = |\lambda(B_0)| = \delta$$

јер је $\eta(B_0) = 0$ због $\eta \ll \nu$ и $\nu(B_0) = 0$. Дакле, у кугли полупречника $\frac{\delta}{2}$ око елемента $\lambda \in ca(Y, \mathfrak{N})$ нема елемената из $ca_\nu^{ac}(Y, \mathfrak{N})$ па је $ca_\nu^{ac}(Y, \mathfrak{N})$ затворен потпростор Банаховог простора $ca(Y, \mathfrak{N})$.

Напоменимо да је простор $ca_\nu^{ac}(Y, \mathfrak{N})$ изометрички изоморфан са $L^1(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ уколико је мера ν σ -коначна.

Ако је $\lambda = \lambda^{ac} + \lambda^s$ Лебегова декомпозиција мере $\lambda \in ca(Y, \mathfrak{N})$, где је $\lambda^{ac} \in ca_\nu^{ac}(Y, \mathfrak{N})$ и $\lambda^s \in ca_\nu^s(Y, \mathfrak{N})$, тада важи $|\lambda|(B) = |\lambda^{ac}|(B) + |\lambda^s|(B)$ за свако $B \in \mathfrak{N}$.

Најчешће, Банахов простор $ca(Y, \mathfrak{N})$ није сепарабилан јер важи $\|\delta_{y_1} - \delta_{y_2}\| = 2$ за све $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Приметимо да Банахов простор $ca(Y, \mathfrak{N})$ може бити истовремено бесконачне димензије и сепарабилан. Заиста, уколико је $\lambda \in ca(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ онда се λ идентификује са $(L_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ где је $L_n(\lambda) = \lambda(\{n\})$ за свако $n \in \mathbb{N}$, и ова идентификација омогућава изометрички изоморфизам између $ca(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ и ℓ^1 . Низ $(L_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$ је *Рагон*³-*Никодимов*⁴ извод мере λ у односу на бројачку меру на $\mathbb{N}$. Дакле, простор $ca(Y, \mathfrak{N})$ је бесконачне димензије а јесте сепарабилан.

Наредна тврђење је добро познато из стандардних курсева који се баве Теоријом мере и интеграције.

Лема 1.2. [5, Сшав 3.25] Нека је ν коначна мера на σ -алгебри $\mathfrak{N}$ и нека је $\mathfrak{N}$ тенерисана подалгебром $\mathcal{B}$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ и $B \in \mathfrak{N}$ постоји $B_0 \in \mathcal{B}$ за које је $\nu(B \Delta B_0) < \varepsilon$.

Ако је $\mathcal{B}$ подалгебра σ -алгебре $\mathfrak{N}$, тада ћемо за дати скуп $B \in \mathcal{B}$ са $\pi(B)$ означавати колекцију свих коначних партиција скупа B на подскупове из алгебре $\mathcal{B}$. Такав скуп је непразан јер очигледно важи $\{B\} \in \pi(B)$. Наредна лема ће нам бити од значаја у Поглављу 5.

Лема 1.3. Нека је $\nu \in ca(Y, \mathfrak{N})$ и нека је $\mathfrak{N}$ тенерисана подалгебром $\mathcal{B}$. Тада важи

$$(1.5) \quad |\nu|(B) = \sup_{P \in \pi(B)} \sum_{C \in P} |\nu(C)| \text{ за свако } B \in \mathcal{B}.$$

Доказ. Означимо десну страну једнакости (1.5) са $|\nu|_{\mathcal{B}}(B)$. Тада је $|\nu|_{\mathcal{B}}(B) \leq |\nu|(B)$.

Узмимо коначну партицију $Q = \{D_1, \dots, D_n\}$ скупа B на подскупове из $\mathfrak{N}$ и одаберимо $\varepsilon > 0$ произвољно. На основу Леме 1.2 постоје скупи $E_j \in \mathcal{B}$ такви да $|\nu|(D_j \Delta E_j) < \frac{\varepsilon}{n^2}$ за $j \in \{1, \dots, n\}$. Нека је $F_j = E_j \cap B \in \mathcal{B}$ за свако $j \in \{1, \dots, n\}$. Како важи $D_j \Delta F_j \subseteq D_j \Delta E_j$ добијамо неједнакост $|\nu|(D_j \Delta F_j) < \frac{\varepsilon}{n^2}$ за свако $j \in \{1, \dots, n\}$. Лако се проверава да важи $F_j \cap F_k \subseteq (D_j \Delta F_j) \cup (D_k \Delta F_k)$ и зато $|\nu|(F_j \cap F_k) < \frac{2\varepsilon}{n^2}$ за све $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k$.

Формирајмо сада партицију $P = \{C_1, \dots, C_n, C_{n+1}\} \in \pi(B)$ тако што дефинишемо $C_1 = F_1$ као и $C_j = F_j \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{j-1})$ за свако $j \in \{2, \dots, n\}$. Такође, нека је $C_{n+1} = B \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_n)$. Тада имамо

$$\begin{aligned} \sum_{C \in P} |\nu(C)| &\geq \sum_{j=1}^n |\nu(C_j)| \geq |\nu(C_1)| + \sum_{j=2}^n \left(|\nu(F_j)| - \left| \nu \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} (F_j \cap F_k) \right) \right| \right) \\ &\geq |\nu(F_1)| + \sum_{j=2}^n \left(|\nu(F_j)| - \sum_{k=1}^{j-1} |\nu|(F_j \cap F_k) \right) \\ &\geq \sum_{j=1}^n |\nu(F_j)| - 2\varepsilon \geq \sum_{j=1}^n \left(|\nu(D_j)| - \frac{\varepsilon}{n^2} \right) - 2\varepsilon \geq \sum_{j=1}^n |\nu(D_j)| - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Узимајући $\varepsilon \rightarrow 0+$ добијамо $|\nu|_{\mathcal{B}}(B) \geq \sum_{j=1}^n |\nu(D_j)|$. Преласком сада на супремум по свим партицијама Q добијамо и неједнакост $|\nu|_{\mathcal{B}}(B) \geq |\nu|(B)$. $\square$

³Johann Radon (1887–1956), аустријски математичар

⁴Otto Marcin Nikodým (1887–1974), пољски математичар

У разним разматрањима у Поглављу 5 биће нам од користи да постоји генераторна подаггебра разматране σ -алгебре која је још и пребројива. Са тим у вези дајемо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.4. Нека је на скупу Y даћа σ -алгебра $\mathfrak{N}$. Кажемо да је σ -алгебра $\mathfrak{N}$ **пребројиво генерисана** уколико постоји скуп $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{N}$ такав да је најмања σ -алгебра која садржи скуп $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ једнака $\mathfrak{N}$, тј. $\sigma(\{B_n : n \in \mathbb{N}\}) = \mathfrak{N}$.

Уколико је σ -алгебра пребројиво генерисана тада постоји пребројива алгебра $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{N}$ која генерише $\mathfrak{N}$.

Лема 1.5. Нека су $(X, \mathfrak{M})$ и $(Y, \mathfrak{N})$ мерљиви простори са пребројиво генерисаним σ -алгебрама. Тада је σ -алгебра $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ на скупу $X \times Y$ пребројиво генерисана.

Доказ. Нека је $\mathfrak{M} = \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$ и $\mathfrak{N} = \sigma(\{B_m : m \in \mathbb{N}\})$. Посматрајмо пребројиву фамилију правоугаоника $\mathcal{R} = \{A_n \times B_m : n, m \in \mathbb{N}\}$. Очигледно је $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$. За фиксирано $n \in \mathbb{N}$ посматрајмо $\mathcal{A}_n := \{B \subseteq Y : A_n \times B \in \sigma(\mathcal{R})\}$. Тада је $\mathcal{A}_n$ σ -алгебра на Y . Како $B_m \in \mathcal{A}_n$ за свако $m \in \mathbb{N}$ (јер је $A_n \times B_m \in \mathcal{R}$), следи $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{A}_n$. Дакле, за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $B \in \mathfrak{N}$ важи $A_n \times B \in \sigma(\mathcal{R})$. Сада, ако је $B \in \mathfrak{N}$ произвољно тада је $\{A \subseteq X : A \times B \in \sigma(\mathcal{R})\}$ једна σ -алгебра на X која садржи A_n за свако $n \in \mathbb{N}$. Одавде следи да $\{A \subseteq X : A \times B \in \sigma(\mathcal{R})\}$ садржи и сваки скуп из $\mathfrak{M} = \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$. Доказали смо да за свако $A \in \mathfrak{M}$ и $B \in \mathfrak{N}$ важи $A \times B \in \sigma(\mathcal{R})$, одакле следи $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}\}) \subseteq \sigma(\mathcal{R})$. Дакле, σ -алгебра $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ је пребројиво генерисана. $\square$

У Поглављу 5 често ћемо радити са фамилијама мера $(\lambda^x)_{x \in X}$ на истој σ -алгебри $\mathfrak{N}$ и биће нам потребна мерљивост функције $X \ni x \mapsto \sup\{|\lambda^x(B)| : B \in \mathfrak{N}\} \in \mathbb{R}$. Мерљивост овако дефинисане функције ће обезбедити наредни технички резултат под претпоставком да је σ -алгебра $\mathfrak{N}$ пребројиво генерисана.

Лема 1.6. Нека је σ -алгебра $\mathfrak{N}$ генерисана алгебром скупова $\mathcal{B}$ и $\lambda \in \text{ca}(Y, \mathfrak{N})$. Тада је

$$(1.6) \quad \sup_{B \in \mathcal{B}} |\lambda(B)| = \sup_{B \in \mathfrak{N}} |\lambda(B)|.$$

Додаћно, ако је λ реална мера тада важе једнакости

$$(1.7) \quad \sup_{B \in \mathcal{B}} \lambda(B) = \sup_{B \in \mathfrak{N}} \lambda(B),$$

$$(1.8) \quad \inf_{B \in \mathcal{B}} \lambda(B) = \inf_{B \in \mathfrak{N}} \lambda(B).$$

Доказ. Познато је да је свака комплексна мера ограничена. Зато су оба супремума из (1.6) коначана. Нека је $L = \sup_{B \in \mathcal{B}} |\lambda(B)|$ и $R = \sup_{B \in \mathfrak{N}} |\lambda(B)|$. Јасно је да важи $L \leq R$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Постоји скуп $B \in \mathfrak{N}$ такав да је $R - \varepsilon \leq |\lambda(B)|$. Користећи Лему 1.2 налазимо скуп $B_0 \in \mathcal{B}$ за који је $|\lambda|(B_0 \triangle B) < \varepsilon$. Сада имамо да је

$$\begin{aligned} R - \varepsilon &\leq |\lambda(B)| = |\lambda(B \setminus B_0) + \lambda(B \cap B_0)| \\ &= |\lambda(B \setminus B_0) + (\lambda(B \cap B_0) + \lambda(B_0 \setminus B)) - \lambda(B_0 \setminus B)| \\ &\leq |\lambda(B \setminus B_0)| + |\lambda(B_0)| + |\lambda(B_0 \setminus B)| \\ &\leq |\lambda(B_0)| + |\lambda|(B \triangle B_0) \leq |\lambda(B_0)| + \varepsilon \leq L + \varepsilon \end{aligned}$$

Зато, за свако $\varepsilon > 0$ имамо $R \leq L + 2\varepsilon$. Одатле следи $R \leq L$. Приметимо да се једнакост (1.7) доказује благом модификацијом горњег доказа. Што се тиче једнакости (1.8), применимо једнакост (1.7) на реалну меру $-\lambda$. Добијамо да важи једнакост $\sup_{B \in \mathcal{B}}(-\lambda(B)) = \sup_{B \in \mathfrak{M}}(-\lambda(B))$, што је еквивалентно са (1.8). $\square$

Следећа лема ће нам бити корисна у конструкцији мерљивих функција у Поглављу 5. Нагласимо да је у раду [7] ово твђење примењено без навођења доказа или одговарајуће литературе. Такође, треба напоменути да у литератури постоје теореме које се баве мерљивим изборима; у том погледу упућујемо читаоца на резултате из [13, Секција 9, Поглавље 6]. Како у нашем случају конструишемо мерљиве функције чији су кодомени коначни скупови, у могућности смо да дамо и директан доказ.

Лема 1.7. Нека је $M \geq 0$, $(X, \mathfrak{M})$ мерљив простор, (Y, d) метрички простор, $S \subset Y$ коначан скуп и нека је $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ $\mathfrak{M} \otimes \mathcal{B}_Y$ -мерљива функција.

- (а) Ако за свако $x \in X$ постоји $y \in S$ такво да је $f(x, y) > M$, онда можемо одабрати функцију $X \ni x \mapsto y(x) \in Y$ која је $(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_Y)$ -мерљива и за коју важи $y(x) \in S$ и $f(x, y(x)) > M$ за свако $x \in X$.
- (б) Ако за свако $x \in X$ постоје елементи $y_1, y_2 \in S$ тако да је $\frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{d(y_1, y_2)} > M$, онда можемо одабрати функције $X \ni x \mapsto y_1(x) \in Y$ и $X \ni x \mapsto y_2(x) \in Y$ које су $(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_Y)$ -мерљиве и за које важи $y_1(x), y_2(x) \in S$ као и неједнакост $\frac{|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))|}{d(y_1(x), y_2(x))} > M$ за свако $x \in X$.

Доказ. Нека је $S = \{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$. Можемо сматрати да је $n > 1$.

- (а) Дефинишимо $X_1 = \{x \in X : f(x, y_1) > M\}$ и за $m \in \{2, \dots, n\}$ скупове

$$X_m = \{x \in X : f(x, y_m) > M, f(x, y_k) \leq M \text{ за свако } k \in \{1, \dots, m-1\}\}.$$

Дефинисани скупови $X_1, \dots, X_n$ су елементи σ -алгебре $\mathfrak{M}$, међусобно су дисјунктни и важи $X_1 \cup \dots \cup X_n = X$. Дефинишимо сада функцију $y : X \rightarrow Y$ изразом $y(x) = y_m$ за свако $x \in X_m$. Овако дефинисана функција y је $(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_Y)$ -мерљива јер је $y^{-1}(\{y_m\}) = X_m \in \mathfrak{M}$ за свако $m \in \{1, \dots, n\}$. Такође, функција $y : X \rightarrow Y$ испуњава услове $y(x) \in S$ као и $f(x, y(x)) > M$ за свако $x \in X$.

- (б) Како је S коначан скуп, скуп уређених парова $S \times S$ је коначан. Нека је $S \times S = \{(y_1^1, y_2^1), \dots, (y_1^m, y_2^m)\}$, при чему је број ових уређених парова једнак n^2 . За свако $j \in \{1, \dots, m\}$ дефинишемо скупове

$$B_j := \left\{ x \in X : d(y_1^j, y_2^j) > 0, \frac{|f(x, y_1^j) - f(x, y_2^j)|}{d(y_1^j, y_2^j)} > M \right\} \in \mathfrak{M}.$$

По претпоставци важи $\bigcup_{j=1}^m B_j = X$ јер за свако $x \in X$ постоји бар један пар из $S \times S$ који задовољава тражене услове. Слично као у првом делу доказа, дефинишемо функцију $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ изразом $j(x) := \min\{i \in \{1, \dots, m\} : x \in B_i\}$ за свако $x \in X$. Функција j је $\mathfrak{M}$ -мерљива јер важи $\{x \in X : j(x) = 1\} = B_1 \in \mathfrak{M}$ и $\{x \in X : j(x) = k\} = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \in \mathfrak{M}$ за свако $k \in \{2, \dots, m\}$. Дефинишемо сада

функције $y_1, y_2 : X \rightarrow Y$ изразима $y_1(x) := y_1^{j(x)}$ и $y_2(x) := y_2^{j(x)}$ за свако $x \in X$. Сада, по конструкцији важи $y_1(x), y_2(x) \in S$ као и

$$d(y_1(x), y_2(x)) > 0 \text{ и } \frac{|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))|}{d(y_1(x), y_2(x))} > M \text{ за свако } x \in X.$$

Како су функције y_1 и y_2 представљене као композиције мерљиве функције j са константним вредностима из S оне су такође $(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_Y)$ -мерљиве. Тиме смо конструисали функције $y_1, y_2 : X \rightarrow Y$ које испуњавају услове тврђења. $\square$

Напоменимо да ћемо мерљивост функција које узимају вредности у неком Банаховом простору детаљније разматрати у Секцији 1.1.

Наредно тврђење је у литератури познато и као *Лема о моноћоним класама* (видети нпр. [5, Лема 3.22], [9, Поглавље 5] или [13, Теорема 2.12.9]). Ово тврђење ћемо често користити у Поглављу 5.

Лема 1.8. *(О моноћоним класама) Нека је $\mathcal{A}$ алгебра скупова на Y . Тада је најмања моноћона класа на Y која садржи $\mathcal{A}$ једнака најмањој σ -алгебри на Y која садржи $\mathcal{A}$.*

Парцијални резултати везани за сепарабилност класичних L^p простора могу се наћи у литератури углавном као вежбања (видети [13, Вежбање 4.7.63, стр. 306]). Наредно тврђење је техничког карактера и бави се карактеризацијом сепарабилности L^p простора. Ово тврђење је коришћено приликом неких разматрања у раду [7], што ће бити презентовано у Поглављу 5. Напоменимо најпре да су L^p простори над пребројиво генерисаним σ -алгебрама нужно сепарабилни. Заиста, ако је $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ пребројива алгебра и $\sigma(\mathfrak{M}_0) = \mathfrak{M}$ тада је пребројив и густ скуп у посматраном L^p простору облика $\{\sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k)\chi_{A_k} : \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}, A_k \in \mathfrak{M}_0, k \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}\}$, што следи из [5, Став 5.12] и Леме 1.2.

Лема 1.9. *Нека је $p \in [1, +\infty)$ и нека је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са коначном мером.*

- (а) *Простор $L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ је сепарабилан ако и само ако постоји пребројиво генерисана σ -алгебра $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ таква да је $\overline{\mathfrak{M}_0}^\mu = \overline{\mathfrak{M}}^\mu$.*
- (б) *Ако је $q \in [1, +\infty)$ тада је простор $L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ је сепарабилан ако и само ако је $L^q(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ сепарабилан.*

Доказ. Напоменимо најпре да је $\chi_A \in L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ за свако $A \in \mathfrak{M}$ јер је μ коначна мера.

- (а) Нека је најпре простор $L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ сепарабилан. Тада постоји пребројив густ подскуп $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ у $L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. Свака функција f_n се може апроксимирати низом простих функција $(\phi_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$, од којих је свака представљива као линеарна комбинација карактеристичних функција скупова $A_{n,k,i} \in \mathfrak{M}$. Уочимо пребројиву фамилију скупова $\mathcal{E} = \{A_{n,k,i} : n, k, i \in \mathbb{N}\}$ и нека је $\mathfrak{M}_0 := \sigma(\mathcal{E})$. Тада је $\mathfrak{M}_0$ пребројиво генерисана σ -алгебра и $\phi_{n,k} \in L^p(\Omega, \mathfrak{M}_0, \mu)$ за свако $n, k \in \mathbb{N}$. Како је скуп $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ густ у $L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ и како се свака функција f_n апроксимира функцијама из $L^p(\Omega, \mathfrak{M}_0, \mu)$ следи да је $L^p(\Omega, \mathfrak{M}_0, \mu)$ густ у $L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. Како је $L^p(\Omega, \mathfrak{M}_0, \mu) \cong L^p(\Omega, \overline{\mathfrak{M}_0}^\mu, \bar{\mu})$ и $L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu) \cong L^p(\Omega, \overline{\mathfrak{M}}^\mu, \bar{\mu})$ следи $\overline{\mathfrak{M}_0}^\mu = \overline{\mathfrak{M}}^\mu$ јер имамо да је $L^p(\Omega, \overline{\mathfrak{M}_0}^\mu, \bar{\mu})$ густ у $L^p(\Omega, \overline{\mathfrak{M}}^\mu, \bar{\mu})$.

Нека сада постоји пребројиво генерисана σ -алгебра $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ са својством $\overline{\mathfrak{M}_0}^\mu = \overline{\mathfrak{M}}^\mu$. Тада је $L^p(\Omega, \mathfrak{M}_0, \mu) \cong L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ па је $L^p(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ сепарабилан простор јер је такав $L^p(\Omega, \mathfrak{M}_0, \mu)$.

(б) Овај део доказа следи директно на основу дела под (а) јер можемо приметити да у овом делу тврђења експонент простора не утиче на његову сепарабилност. $\square$

За меру μ на $(X, \mathfrak{M})$ кажемо да је *сепарабилна* уколико је $L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ сепарабилан простор. У наредној леми је zgodније користити ознаку $L^1(d\mu)$ уместо $L^1(\mu)$.

Лема 1.10. *Нека је $L^1(d\mu)$ сепарабилан простор и нека је $f \in L^1(d\mu)$ ненегативна функција. Тада је простор $L^1(f d\mu)$ сепарабилан.*

Доказ. Без умањења општости претпоставимо да је функција f строго позитивна на скупу Ω . Дефинишимо оператор $T : L^1(f d\mu) \rightarrow L^1(d\mu)$ изразом $Tg = fg$ за свако $g \in L^1(f d\mu)$. Имамо да је $\|Tg\|_{L^1(d\mu)} = \int_{\Omega} |g(t)| \cdot f(t) d\mu(t) = \|g\|_{L^1(f d\mu)}$ за свако $g \in L^1(f d\mu)$ па одавде закључујемо да је простор изометрички изоморфан са потпростором $T(L^1(f d\mu))$ простора $L^1(d\mu)$ јер мере μ и $f d\mu$ имају исте скупе мере нула. Како је $L^1(d\mu)$ сепарабилан простор, имамо да је и $\mathcal{R}(T) = T(L^1(f d\mu))$ сепарабилан а самим тим и $L^1(f d\mu)$. $\square$

У наставку наводимо познату последицу *Берове*⁵ теореме о калтеоријама (видети [68, Поглавље 5, Вежбање 13]) која ће нам такође бити потребна.

Лема 1.11. *Нека је (X, d_X) комплетан метрички простор, (Y, d_Y) метрички простор и нека је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ непрекидних функција из X у Y такав да гранична вредност $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ постоји у Y за свако $x \in X$. Тада, за свако $\varepsilon > 0$ постоји отворен скуи $\emptyset \neq U \subseteq X$ и $N \in \mathbb{N}$ такав да је $d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ за свако $x \in U$ и $n \geq N$.*

Наредна два тврђења се тичу конвергенције низа оператора. У случају Хилбертових простора, кажемо да је оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *позитиван* ако важи неједнакост $\langle Af, f \rangle \geq 0$ за сваки вектор $f \in \mathcal{H}$.

Теорема 1.12. [5, Теорема 12.7] *Сваки монононо оадајући низ позитивних оераора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ конвертира јако. Уколико је низ монононо растући и отраничен одозго, такође конвертира јако.*

Наредно тврђење ће бити коришћено у Поглављу 4.

Тврђење 1.13. *Нека су Y и Z нормирани простори и нека је X Банахов простор и нека низ оераора $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$ конвертира јако ка оераору $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Ако је $K \in \mathcal{C}_{\infty}(Z, X)$ тада важи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n K - AK\| = 0$.*

Доказ. Уколико тврђење не би било тачно тада постоји низ јединичних вектора $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у Z и $\delta > 0$ такво да је $\|(A_n - A)Kz_n\| \geq \delta$ за свако $n \in \mathbb{N}$. На основу компактности оператора K постоји подниз $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ низа $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да $(Kz_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ конвертира ка неком вектору $a \in X$ у норми простора X . Сада, за свако $k \in \mathbb{N}$ добијамо

$$\begin{aligned} \delta &\leq \|(A_{n_k} - A)Kz_{n_k}\| = \|(A_{n_k} - A)(Kz_{n_k} - a) + (A_{n_k} - A)a\| \\ &\leq \|A_{n_k} - A\| \cdot \|Kz_{n_k} - a\| + \|(A_{n_k} - A)a\|. \end{aligned}$$

Низ $(\|A_{n_k}\|)_{k \in \mathbb{N}}$ је ограничен што следи на основу Теореме Банаха-Штајнхауса⁶, која се може применити јер је X Банахов простор. Контрадикција следи из

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_{n_k} - A\| < +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \|Kz_{n_k} - a\| = 0 \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} \|(A_{n_k} - A)a\| = 0. \quad \square$$

⁵René-Louis Baire (1874–1932), француски математичар

⁶Ernst Steinhaus (1882–1972), пољско-немачко-француски математичар

Уколико је неки позитиван оператор из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ мајориран компактним оператором тада можемо закључити да је полазни оператор компактан (погледати [19, Вежбање 33, Поглавље 12] или [60, Лема 1.1.10]).

Лема 1.14. Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и нека су даћи оператори $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ за које важи $0 \leq A \leq B$. Ако је $B \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ тада $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$.

Доказ. Приметимо најпре да за $x \in \mathcal{H}$ и позитиван оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ важи

$$\begin{aligned} \langle A^2 x, x \rangle &= \|Ax\|^2 = \|\sqrt{A}\sqrt{A}x\|^2 \leq \|\sqrt{A}\|^2 \|\sqrt{A}x\|^2 \\ &= \|(\sqrt{A})^* \sqrt{A}\| \cdot \langle \sqrt{A}\sqrt{A}x, x \rangle = \|A\| \cdot \langle Ax, x \rangle. \end{aligned}$$

Из горњег рачуна следи да важи неједнакост $A^2 \leq \|A\|A$. Узмимо произвољан ограничени низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у $\mathcal{H}$. Из $B \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ имамо да постоји конвергентан подниз $(Bx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ низа $(Bx_n)_{n \in \mathbb{N}}$. На основу изведене неједнакости $A^2 \leq \|A\|A$ и из $A \leq B$ добијамо да важи

$$\begin{aligned} \|Ax_{n_k} - Ax_{n_l}\|^2 &= \langle A^2(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l} \rangle \\ &\leq \|A\| \cdot \langle A(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l} \rangle \leq \|A\| \cdot \langle B(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l} \rangle \\ &\leq \|A\| \cdot \|B(x_{n_k} - x_{n_l})\| \cdot \|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leq \|A\| \|B(x_{n_k} - x_{n_l})\| \cdot 2 \sup\{\|x_{n_k}\| : k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

за свако $k, l \in \mathbb{N}$. Низ вектора $(Bx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ је конвергентан па је и Кошијев⁷ у $\mathcal{H}$. На основу изведених неједнакости следи да је низ $(Ax_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Кошијев у $\mathcal{H}$. Самим тим је и конвергентан у $\mathcal{H}$, чиме смо доказали да је $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. $\square$

Наредна неједнакост *Коши-Шварцовой*⁸ *шија* је последица *поларне декомпозиције*⁹ оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и може се наћи у [27, Поглавље 3]. Ова неједнакост је специфичност Хилбертових простора и нема аналогу верзију за операторе не Банаховом простору. Доказ наводимо ради прегледности излагања.

Теорема 1.15. Нека је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тада важи неједнакост

$$(1.9) \quad |\langle Af, g \rangle| \leq \sqrt{\langle |A|f, f \rangle \cdot \langle |A^*|g, g \rangle} \text{ за свако } f, g \in \mathcal{H}.$$

Доказ. Постоји *парцијална изометрија* $W : \overline{\mathcal{R}(|A|)} \rightarrow \overline{\mathcal{R}(A)}$ за коју је $A = W|A|$. Имамо

$$\begin{aligned} |\langle Af, g \rangle|^2 &= |\langle W|A|f, g \rangle|^2 = |\langle |A|f, W^*g \rangle|^2 \\ (1.10) \quad &\leq |\langle |A|f, f \rangle| \cdot |\langle |A|(W^*g), W^*g \rangle| \\ &= |\langle |A|f, f \rangle| \cdot |\langle (W|A|W^*)g, g \rangle| \\ &= |\langle |A|f, f \rangle| \cdot |\langle |A^*|g, g \rangle| \text{ за свако } f, g \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Оправдајмо сада кораке које смо користили у горњем рачуну. Наиме, изразом $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (f, g) \mapsto \langle |A|f, g \rangle \in \mathbb{C}$ је задата једна позитивна сесквилинеарна форма $\mathcal{H}$. Коши-Шварцова неједнакост (видети [5, Теорема 10.5]) је примењена на ову сесквилинеарну форму и тако је добијена неједнакост у (1.10). Даље, трећа једнакост у (1.10) следи на

⁷Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), француски математичар

⁸Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), немачки математичар

⁹Видети [5, Теорема 12.22].

основу $W|A|W^* = |A^*|$, што ћемо сада доказати а тиме и завршити доказ овог тврђења. На основу [5, Теорема 12.21] имамо

$$(1.11) \quad WW^* = P_{\overline{\mathcal{R}(|A^*|)}} \quad \text{и} \quad W^*W = P_{\overline{\mathcal{R}(|A|)}}.$$

Уведимо ознаку $S = W|A|W^*$. Користећи (1.11) имамо следећи рачун:

$$S^2 = W|A|(W^*W)|A|W^* = W|A|P_{\overline{\mathcal{R}(|A|)}}|A|W^* = W|A|^2W^*.$$

Оператор S је позитиван па из јединствености квадратног корена позитивног оператора следи $S = \sqrt{W|A|^2W^*} = W|A|W^*$. Одавде је

$$|A^*| = \sqrt{AA^*} = \sqrt{(W|A|)(W|A|)^*} = \sqrt{W|A|^2W^*} = W|A|W^*. \quad \square$$

1.1 Неке класичне теореме Теорије мере и Функционалне анализе

У овој секцији формулисаћемо нека значајна тврђења класичне Теорије мере као и Функционалне анализе која су битна за излагање у овој дисертацији и која су значајно допринела у истраживањима везаним за теорију интеграције функција које узимају вредности у неком векторском простору.

Напоменимо да тврђења о којима ће бити речи у наставку најчешће нису део редовних курсева Теорије мере и Функционалне анализе па ћемо зато дати и одговарајуће доказе за нека од њих.

Две теореме о комплексним мерама

Наведимо најпре познату теорему Виталија¹⁰, Хана¹¹ и Сакса¹². Ова теорема је једна од централних теорема у теорији мере. Доказ је базиран на примени Берове теореме (погледати [13, Теорема 4.6.3]) или [77, Поглавље 2]).

Теорема 1.16. *(Витали, Хан, Сакс) Нека је $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ комплексних мера на σ -алгебри $\mathfrak{M}$ такав да постоји гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(E)$ за свако $E \in \mathfrak{M}$. Тада је функција $\lambda : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана са $\lambda(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(E)$ такође комплексна мера на $\mathfrak{M}$.*

Уколико су у питању векторске мере, тј. уколико је мера $\lambda : \mathfrak{M} \rightarrow X$ дата изразом $\lambda(E) = (\text{weak}) \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(E)$ за свако $E \in \mathfrak{M}$, при чему је $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ векторских мера на $\mathfrak{M}$, тада је функција λ такође векторска мера на $\mathfrak{M}$. Заиста, на основу дефиниције функције λ имамо да важи $\langle \lambda(E), x^* \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \lambda_n(E), x^* \rangle$ за свако $E \in \mathfrak{M}$ и $x^* \in X^*$. За свако фиксирано $n \in \mathbb{N}$ и свако $x^* \in X^*$ функција $\mathfrak{M} \ni E \mapsto \langle \lambda_n(E), x^* \rangle \in \mathbb{C}$ је једна комплексна мера на $\mathfrak{M}$ па је на основу скаларне варијанте Витали-Хан-Сакс теореме (тј. на основу Теореме 1.16) функција $\mathfrak{M} \ni E \mapsto \langle \lambda(E), x^* \rangle \in \mathbb{C}$ такође једна комплексна мера на $\mathfrak{M}$ за свако фиксирано $x^* \in X^*$. Одавде следи да је λ слабо пребројиво адитивна

¹⁰Giuseppe Vitali (1875–1932), италијански математичар

¹¹Hans Hahn (1879–1934), аустријски математичар

¹²Stanisław Saks (1897–1942), пољски математичар

векторска мера па је на основу Теореме Орлич¹³-Петиса (видети [25, стр. 22]) и јако пребројиво адитивна на $\mathfrak{M}$, тј. у питању је заиста векторска мера.

Наредна теорема представља *принцип униформне ограничености за мере*.

Теорема 1.17. (Никодим) Нека је даџа фамилија мера $(\lambda^x)_{x \in X}$ из $ca(X, \mathfrak{M})$ за коју важи $\sup\{|\lambda^x(A)| : x \in X\} < +\infty$ за свако $A \in \mathfrak{M}$. Тада је $\sup\{|\lambda^x|(X) : x \in X\} < +\infty$.

Напоменимо и то да Никодимова теорема о униформној ограничености има своју варијанту и за векторске мере (погледати рецимо [25, Поглавље 1]).

Мерљивост вектор-вредносних функција

У овој секцији разматрамо мерљивост функција које су дефинисане на мерљивом простору $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ и које узимају вредности у неком нормираном простору X . Напоменимо да ћемо изложити само онај део теорије који је потребан ради даљег излагања материје у овој дисертацији, док за више детаља упућујемо на [2, Поглавље 4] и [33, Поглавље 1], где су детаљније разматрана питања мерљивости оваквих функција.

За функцију $s : \Omega \rightarrow X$ кажемо да је $\mathfrak{M}$ -просџа уколико узима коначно много вредности $x_1, \dots, x_n \in X$ и ако је $s^{-1}(\{x_k\}) \in \mathfrak{M}$ за свако $k \in \{1, \dots, n\}$.

Дефиниција 1.18. Функција $f : \Omega \rightarrow X$ је μ -мерљива (или јако μ -мерљива) уколико постоји низ $\mathfrak{M}$ -просџих функција $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да важи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(t) - f(t)\| = 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. За функцију $f : \Omega \rightarrow X$ кажемо да је **слабо μ -мерљива** уколико је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle \in \mathbb{C}$ μ -мерљива за свако $x^* \in X^*$.

Једноставно се проверава да је свака јако μ -мерљива функција $f : \Omega \rightarrow X$ и слабо μ -мерљива. Однос између слабе и јаке мерљивости функције $f : \Omega \rightarrow X$ је детаљно дат познатом Петисовом теоремом о мерљивости (видети Теорему 1.20).

Напоменимо да μ -мерљиве функције $f, g : \Omega \rightarrow X$ идентификујемо уколико је $f(t) = g(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ и у том случају кажемо да су f и g јако μ -еквивалентне функције. Уколико посматрамо слабо μ -мерљиве функције $f, g : \Omega \rightarrow X$, тада кажемо да су ове функције **слабо μ -еквивалентне** уколико за сваки елемент $x^* \in X^*$ једнакост $\langle f(t), x^* \rangle = \langle g(t), x^* \rangle$ важи за μ -скоро свако $t \in \Omega$.

Следеће тврђење је последица Хан-Банахове теореме.

Лема 1.19. Нека је X сепарабилан нормиран просџор. Постоји низ $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ из X^* такав да важи једнакост $\|x\| = \sup\{|\langle x, x_n^* \rangle| : n \in \mathbb{N}\}$ за свако $x \in X$.

Доказ. Како је X сепарабилан нормиран простор, постоји скуп $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ такав да је $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X$. На основу последице теореме Хан-Банаха имамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $x_n^* \in X^*$ такав да важе једнакости $\|x_n^*\| = 1$ и $\langle x_n, x_n^* \rangle = \|x_n\|$. Доказаћемо да је тражени низ функционала управо $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$. Заиста, за произвољно $x \in X$ важи $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| \leq \|x\|$. Из $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ имамо да постоји подниз $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

¹³Władysław Roman Orlicz (1903–1990), пољски математичар

такав да је $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x\| = 0$. Одавде и на основу непрекидности норме следи

$$\begin{aligned} \|x\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle x_{n_k}, x_{n_k}^* \rangle| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle (x_{n_k} - x) + x, x_{n_k}^* \rangle| \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} |\langle x_{n_k} - x, x_{n_k}^* \rangle| + \limsup_{k \rightarrow \infty} |\langle x, x_{n_k}^* \rangle| \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}^*\| \cdot \|x_{n_k} - x\| + \sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, x_{n_k}^* \rangle| = 0 + \sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, x_{n_k}^* \rangle| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, x_n^* \rangle|. \quad \square \end{aligned}$$

Напоменимо да се Лема 1.19 може применити и на скуп X_0 који је сепарабилан у нормираном простору X (тј. на скуп X_0 који поседује подскуп $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X_0$ чије је затворење једнако X_0).

Као што смо већ нагласили, наредна теорема суштински описује мерљивост функција које узимају вредности у нормираним просторима. Напоменимо да у наредној теорему није претпостављена комплетност простора X али је претпостављена коначност мере μ .

Теорема 1.20. (Пейтисова теорема о мерљивости) Нека је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са коначном мером и нека је X нормиран простор. Функција $f : \Omega \rightarrow X$ је μ -мерљива ако и само ако важе следећи услови:

1. Постоји скуп $E \in \mathfrak{M}$, $\mu(E) = 0$ такав да је $f(\Omega \setminus E)$ сепарабилан скуп у X .
2. Функција f је слабо μ -мерљива.

Доказ. Нека је $f : \Omega \rightarrow X$ μ -мерљива функција. На основу Дефиниције 1.18 постоји низ $\mathfrak{M}$ -простих функција $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да важи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(t) - f(t)\| = 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Одавде следи да постоји скуп $E \in \mathfrak{M}$, $\mu(E) = 0$ такав да једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(t) - f(t)\| = 0$ важи за свако $t \in \Omega \setminus E$. Нека је $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_n(\Omega \setminus E)$. Тада је A пребројив скуп и како је A густ у свом затворењу $\overline{A}$, имамо да је $\overline{A}$ сепарабилан скуп. Уколико је $y \in f(\Omega \setminus E)$ тада је $y = f(t)$ за неко $t \in \Omega \setminus E$ па је $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - s_n(t)\| = 0$, одакле следи $y \in \overline{A}$. Овиме смо показали да је $f(\Omega \setminus E)$ подскуп сепарабилног скупа $\overline{A}$ па је и сам сепарабилан.

За произвољан елемент x^* дуала X^* скаларна функција $x^* \circ f_n$ је проста и $\mathfrak{M}$ -мерљива а како важи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(t), x^* \rangle = \langle f(t), x^* \rangle$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ закључујемо да је f слабо μ -мерљива функција. Овиме смо показали да је и други услов теореме испуњен.

Нека сада важе услови 1 и 2 теореме и нека је E скуп из услова 1 теореме. Одаберимо било који скуп $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ који је густ у $f(\Omega \setminus E)$. Применом Леме 1.19 имамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји елемент x_n^* дуала X^* тако да је $\langle x_n, x_n^* \rangle = \|x_n\|$, $\|x_n^*\| = 1$ и да важи

$$\|f(t)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f(t), x_n^* \rangle| \quad \text{за свако } t \in \Omega \setminus E.$$

Одавде следи да је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \|f(t)\| \in \mathbb{R}$ μ -мерљива јер је на основу услова 2 функција f слабо μ -мерљива. Нека је за свако $n \in \mathbb{N}$ функција $g_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана изразом $g_n(t) = \|f(t) - x_n\|$ за свако $t \in \Omega$. На исти начин добијамо и μ -мерљивост функције $g_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, јер је скуп $f(\Omega \setminus E) - x_n$ такође сепарабилан. Нека је $\varepsilon > 0$ и дефинишимо скупове

$$E_n^\varepsilon := \{t \in \Omega \setminus E : g_n(t) < \varepsilon\} \in \overline{\mathfrak{M}}^\mu.$$

Приметимо да важи једнакост $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n^\varepsilon = \Omega \setminus E$ због тога што је скуп $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ густ у $f(\Omega \setminus E)$. За свако $n \in \mathbb{N}$ постоје¹⁴ скупови $B_n^\varepsilon, C_n^\varepsilon \in \mathfrak{M}$ за које је $B_n^\varepsilon \subseteq E_n^\varepsilon \subseteq C_n^\varepsilon$ и $\mu(C_n^\varepsilon \setminus B_n^\varepsilon) = 0$. Дефинишимо функцију $h_\varepsilon : \Omega \rightarrow X$ изразом

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} x_1, & \text{ако је } t \in B_1^\varepsilon, \\ x_n, & \text{ако је } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \text{ и } t \in B_n^\varepsilon \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k^\varepsilon, \\ 0, & \text{ако је } t \in \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n^\varepsilon. \end{cases}$$

На основу конструкције имамо да је h_ε μ -мерљива функција јер за свако $t \in \Omega$ важи

$$h_\varepsilon(t) = \chi_{B_1^\varepsilon}(t) \cdot x_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \chi_{B_n^\varepsilon \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k^\varepsilon}(t) \cdot x_n = \chi_{B_1^\varepsilon}(t) \cdot x_1 + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m \chi_{B_n^\varepsilon \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k^\varepsilon}(t) \cdot x_n.$$

Такође, важи и неједнакост $\operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} \|f(t) - h_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon$. Зато, узимајући $\varepsilon = \frac{1}{n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ добијамо μ -мерљиву функцију $h_n : \Omega \rightarrow X$ која узима пребројиво много вредности у X и за коју важи неједнакост $\operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} \|f(t) - h_n(t)\| \leq \frac{1}{n}$. Одавде следи да постоји скуп $F \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(F) = 0$ и $\|f(t) - h_n(t)\| \leq \frac{1}{n}$ за свако $t \in \Omega \setminus F$ и свако $n \in \mathbb{N}$. Свака од функција h_n има облик

$$(1.12) \quad h_n(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \chi_{B_{n,j}}(t) \cdot x_{n,j} \text{ за свако } t \in \Omega,$$

при чему је $B_{n,k} \in \mathfrak{M}$ и $B_{n,k} \cap B_{n,j} = \emptyset$ кад год је $k \neq j$ и скуп $\Omega \setminus (F \cup \bigsqcup_{m=1}^{+\infty} B_{n,m}) \in \mathfrak{M}$ је μ -мере нула, док су вектори $x_{n,j}$ елементи скупа $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ који је густ у $f(\Omega \setminus E)$.

За свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $N_n \in \mathbb{N}$ такав да је $\mu\left(\bigcup_{j > N_n} B_{n,j}\right) < \frac{1}{2^n}$, што следи на основу коначности мере μ . Нека је за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $t \in \Omega$ дефинисана проста $\mathfrak{M}$ -мерљива функција s_n изразом

$$s_n(t) = \sum_{j=1}^{N_n} \chi_{B_{n,j}}(t) \cdot x_{n,j} \text{ за свако } t \in \Omega.$$

Уочимо скупове $B_n = \bigcup_{k > n} \bigcup_{j > N_n} B_{k,j} \in \mathfrak{M}$ и $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathfrak{M}$. Тада је $\mu(B) = 0$ јер важи $\mu(B) \leq \sum_{k > n} \mu\left(\bigcup_{j > N_n} B_{k,j}\right) < \sum_{k > n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Одаберимо сада $t \notin B \cup F$. Тада постоји $n_0 = n_0(t) \in \mathbb{N}$ такав да $t \notin B_{n_0}$. То значи да $t \notin B_{k,j}$ за $k > n_0$ и $j > N_{n_0}$. Сада, за свако $k \in \mathbb{N}$ за које је $k > n_0$ имамо да важи $\chi_{B_{k,j}}(t) = 0$ одакле је

$$\|h_k(t) - s_k(t)\| = \sum_{j=N_k+1}^{+\infty} \chi_{B_{k,j}}(t) \cdot \|x_{k,j}\| = 0.$$

Из неједнакости троугла у $(X, \|\cdot\|)$ добијамо да важи

$$\|f(t) - s_n(t)\| = \|f(t) - h_n(t)\| + \|h_n(t) - s_n(t)\| \leq \frac{1}{n} + \|h_n(t) - s_n(t)\| = \frac{1}{n}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ за које је $n > n_0(t)$. Одавде следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - s_n(t)\| = 0$. $\square$

¹⁴Не мора бити $E_n^\varepsilon \in \mathfrak{M}$ ако μ није комплетна мера на $\mathfrak{M}$.

На основу доказа Петисове теореме одмах добијамо следеће тврђење.

Последица 1.21. *Функција $f : \Omega \rightarrow X$ је јако μ -мерљива ако и само ако је једнака μ -скоро свуда униформној граничној вредности низа μ -мерљивих функција које узимају пребројиво мноштво вредности у нормираном простору X .*

Приметимо да горња последица не захтева услов $\mu(\Omega) < +\infty$. Битно је напоменути да Петисова теорема о мерљивости важи и за σ -коначну меру μ .

Напоменимо да постоје функције које су слабо мерљиве али које нису јако мерљиве (видети [25, Пример 5, стр. 43]). Постојање оваквог примера следи из тога што не мора бити испуњен први услов Петисове теореме који се тиче сепарабилности слике разматране функције. Заједно са овим примером погледати Пример 4.15 и Пример 5.22 у којима поменути несепарабилност долази до изражаја.

За крај ове секције повезаћемо μ -мерљивост функције $f : \Omega \rightarrow X$ која је уведена Дефиницијом 1.18 са стандардном мерљивошћу која зависи од Борелове σ -алгебре $\mathcal{B}_X$ на нормираном простору X .

Тврђење 1.22. *Функција $f : \Omega \rightarrow X$ μ -мерљива ако и само ако је њена слика μ -скоро свуда сепарабилна у X и уколико је f $(\overline{\mathfrak{M}}^\mu, \mathcal{B}_X)$ -мерљива функција.*

Доказ. Уколико је f μ -мерљива тада поменути сепарабилност следи из доказане Петисове теореме. Да бисмо доказали $(\overline{\mathfrak{M}}^\mu, \mathcal{B}_X)$ -мерљивост функције f довољно је доказати да важи $f^{-1}(K(x_0, r)) \in \mathfrak{M}$ за свако $x_0 \in X$ и $r > 0$. Нека је $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ одговарајући апроксимирајући низ за функцију f из Дефиниције 1.18 и нека је $E \in \mathfrak{M}$ скуп μ -мере нула где низ $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не конвергира ка f . Тада преласком на низ $p_n = s_n \cdot \chi_{\Omega \setminus E}$ и на функцију $g = f \chi_{\Omega \setminus E}$ имамо да важи

$$g^{-1}(K(x_0, r)) = \bigcup_{q \in (0, r) \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{m=k}^{+\infty} p_m^{-1}(K(x_0, q)) \in \mathfrak{M}.$$

Следи да је g једна $(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_X)$ -мерљива функција а то значи да је f $(\overline{\mathfrak{M}}^\mu, \mathcal{B}_X)$ -мерљива функција. Обратно, ако је $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ свуда густ скуп у $f(\Omega \setminus E)$, где је $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) = 0$ тада за фиксирано $\varepsilon > 0$ посматрајмо кугле $K(x_n, \varepsilon)$. Очигледно важи инклузија $f(\Omega \setminus E) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K(x_n, \varepsilon)$. Уколико посматрамо скупове $K_1 = K(x_1, \varepsilon)$ и $K_n = K(x_n, \varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} K(x_k, \varepsilon)$ за свако $n > 1$ добијамо низ међусобно дисјунктних скупова $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathcal{B}_X$ чија унија покрива $f(\Omega \setminus E)$. Нека је функција $g_\varepsilon : \Omega \rightarrow X$ задата изразом

$$g_\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{f^{-1}(K_n)}(t) \cdot x_n \text{ за свако } t \in \Omega.$$

Овако дефинисана функција g_ε је μ -мерљива и на основу конструкције имамо да важи неједнакост $\operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} \|f(t) - g_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon$. Доказ се завршава применом Последице 1.21. $\square$

1.2 Интеграција функција са вредностима у Банаховим просторима

Бохнеров интеграл

У овом делу ћемо кратко изложити конструкцију Бохнеровог интеграла и његова основна својства. Концепт Бохнеровог интеграла је директна генерализација Лебеговог

интеграла функција које узимају вредности у пољу скалара $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Као и скаларном случају, полазна тачка су функције које узимају вредности у неком нормираном простору, који је најчешће комплетан. Дефинишемо простор $L_B^1(\Omega, \mu, X)$ Бохнер интеграбилних функција који се састоји од (класа еквиваленција) јако μ -мерљивих функција $f : \Omega \rightarrow X$ таквих да је

$$(1.13) \quad \|f\|_B := \int_{\Omega} \|f(t)\| d\mu(t) < +\infty.$$

У питању је Банахов простор у односу на горе дефинисану норму $\|\cdot\|_B$ уколико је X Банахов простор. Поставља се питање о интегралу такве функције f . Наведени интеграл, који ће бити означен са $\int_E^B f(t) d\mu(t)$, је елемент нормираног простора X и можемо га дефинисати на следећи начин. Претпоставимо најпре да је X Банахов простор и нека је $f : \Omega \rightarrow X$ јако μ -мерљива функција. Уколико претпоставимо да постоји низ $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{M}$ -простих и μ -интеграбилних функција за који важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|s_n(t) - f(t)\| d\mu(t) = 0$ тада имамо да низ вектора $\left(\int_E^B s_n(t) d\mu(t) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ чини Кошијев низ у простору X , за свако $E \in \mathfrak{M}$. Тада дефинишемо елемент $\int_E^B f(t) d\mu(t) \in X$ изразом

$$(1.14) \quad \int_E^B f(t) d\mu(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E^B s_n(t) d\mu(t).$$

Лако се показује да је ова гранична вредност не зависи од избора апроксимирајућег низа $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. За овако дефинисан X -вредносни интеграл важе својства аналогна оним које смо имали у скаларном случају: $\left\| \int_E^B f(t) d\mu(t) \right\| \leq \int_E \|f(t)\| d\mu(t)$ и $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E^B f(t) d\mu(t) = 0$. Такође, свака Бохнер интеграбилна функција f дефинише једну X -вредносну меру $\nu_f : \mathfrak{M} \rightarrow X$, задату формулом $\nu_f(E) = \int_E^B f(t) d\mu(t)$ за свако $E \in \mathfrak{M}$. Још једно од значајних својстава Бохнеровог интеграла је однос према ограниченим операторима из $\mathcal{B}(X)$. Наиме, уколико је $T \in \mathcal{B}(X)$ и $f \in L_B^1(\Omega, \mu, X)$ тада $Tf \in L_B^1(\Omega, \mu, X)$ и важи

$$(1.15) \quad T \int_E^B f(t) d\mu(t) = \int_E^B (Tf)(t) d\mu(t)$$

за свако $E \in \mathfrak{M}$. Слично, уколико је $x^* \in X^*$ тада $x^* \circ f \in L^1(\Omega, \mu)$ и важи

$$(1.16) \quad \left\langle \int_E^B f(t) d\mu(t), x^* \right\rangle = \int_E \langle f(t), x^* \rangle d\mu(t)$$

за свако $E \in \mathfrak{M}$. Релације типа (1.16) представљаће дефиниционе релације за слабије типове векторских интеграла о којима ће тек бити реч.

Уколико су $f, g : \Omega \rightarrow X$ јако μ -мерљиве функције слабо μ -еквивалентне (видети коментаре дате након Дефиниције 1.18) тада важи $f(t) = g(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ (доказ видети у [25, Последица 7, стр. 48]). У поглављима 4 и 5 разматраћемо под којим условима слабо еквивалентне фамилије можемо идентификовати и у јаком смислу (видети Лему 4.22 и Лему 5.3).

Простор $L_B^1(\Omega, \mu, X)$ је изграђен тако да су по конструкцији просте X -вредносне функције густе у њему. Због тога лако можемо добити следећи резултат.

Лема 1.23. Нека је $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ туси скуи у нормираном простору X . Линеарни омошач скуи $\{(g(t)x_n)_{t \in \Omega} : g \in L^1(\Omega, \mu), n \in \mathbb{N}\}$ је туси у $L_B^1(\Omega, \mu, X)$.

За крај ове секције, напомнимо и то да Бохнеров интеграл функције $f : \Omega \rightarrow X$ можемо рачунати чак и ако нормиран простор X није Банахов. У том случају разматрани Кошијев низ $\left(\int_E^B s_n(t) d\mu(t)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ не мора бити конвергентан у X али ће бити конвергентан у комплетирању нормираног простора X . Због тога се вредност Бохнеровог интеграла узима у комплетирању простора X . Може се пак десити да и у оваквом случају вредност Бохнеровог интеграла остане у X а не у комплетирању нормираног простора X . Прецизније говорећи, уколико за неко $I_E \in X$ важе једнакости

$$(1.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|s_n(t) - f(t)\| d\mu(t) = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_E^B s_n(t) d\mu(t) - I_E \right\| = 0,$$

тада је вектор I_E Бохнеров интеграл функције f у односу на меру μ по скупу $E \in \mathfrak{M}$ и пишемо $I_E = \int_E^B f(t) d\mu(t)$. Једна оваква (свакако не честа) ситуација ће бити презентована у Поглављу 5 (видети Тврђење 5.49).

Теорема о спектралном полупречнику Бохнеровог интеграла функције $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(X)$

Иако је тематика ове дисертације превасходно оријентисана ка општијим видовима интеграције вектор-вредносних функција него што је Бохнеров вид интеграције, даћемо и један резултат који се односи на Бохнеров интеграл. Са $r(A)$ ћемо означавати *спектрални полупречник* оператора $A \in \mathfrak{B}(X)$, где је X Банахов простор. Познато је да из $A, B \in \mathfrak{B}(X)$ и $AB = BA$ следи $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ (видети нпр. [62] или [69, Поглавље 11]).

У скорашњем раду [73] је добијен следећи резултат, који је генерализација ове неједнакости за фамилије међусобно комутирајућих оператора из $\mathfrak{B}(X)$.

Теорема 1.24. [73, Теорема 2.3] Нека је функција $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(X)$ елементи простора $L_B^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X))$ и нека су оператори $\mathcal{A}_t$ међусобно комутирајући. Тада важи

$$(1.18) \quad r\left(\int_{\Omega}^B \mathcal{A}_t d\mu(t)\right) \leq \int_{\Omega} r(\mathcal{A}_t) d\mu(t).$$

Доказ ове теореме прати кораке који су презентовани кроз доказ Петисове теореме о мерљивости (Теорема 1.20) и може се наћи у поменутом раду [73]. Наведени резултат се може доказати и користећи теорију Банахових алгебри.

Доказ Теореме 1.24. Посматрајмо скуп $\mathcal{M} := \{\mathcal{A}_t : t \in \Omega\}$. На основу претпоставке теореме, елементи скупа $\mathcal{M}$ међусобно комутирају. Други комутант $\mathcal{M}''$ скупа $\mathcal{M}$ је унитарна (јер садржи идентички оператор I на X), затворена и комутативна подалгебра у $\mathfrak{B}(X)$ и садржи $\mathcal{M}$ (видети [69, Поглавље 11]). Оператор $\int_{\Omega}^B \mathcal{A}_t d\mu(t)$ комутира са оператором $\mathcal{A}_s$ за свако $s \in \Omega$. Уколико је $T \in \mathcal{M}'$ тада T комутира са сваким $\mathcal{A}_s$ па T комутира и са оператором $\int_{\Omega}^B \mathcal{A}_t d\mu(t)$. Због тога важи и $\int_{\Omega}^B \mathcal{A}_t d\mu(t) \in \mathcal{M}''$. Такође, имамо да је $r_{\mathcal{M}''}(A) = r(A)$ за свако $A \in \mathcal{M}''$, што следи на основу Гелфандове формуле о спектралном полупречнику (видети нпр. [69, Теорема 10.13]).

Нека је $\varphi : \mathcal{M}'' \rightarrow \mathbb{C}$ произвољан карактер комутативне и унуталне Банахове алгебре $\mathcal{M}''$. Тада је функција $\Omega \ni t \mapsto \varphi(\mathcal{A}_t) \in \mathbb{C}$ μ -мерљива. Такође, имамо да важи неједнакост $|\varphi(\mathcal{A}_t)| \leq r_{\mathcal{M}''}(\mathcal{A}_t)$ за свако $t \in \Omega$. Функција

$$\Omega \ni t \mapsto r(\mathcal{A}_t) = r_{\mathcal{M}''}(\mathcal{A}_t) \in \mathbb{R}$$

је μ -мерљива, што следи из Гелфандове формуле за спектрални полупречник и из постојања апроксимирајућег низа из (1.14), видети [73, Теорема 2.1]. Како функција $\mathcal{A}$ може бити третирана и као функција из Ω у $\mathcal{M}''$, имамо да φ и $\int_{\Omega}^B \mathcal{A}_t d\mu(t)$ могу заменити места, што оправдава следећи рачун:

$$\left| \varphi \left(\int_{\Omega}^B \mathcal{A}_t d\mu(t) \right) \right| = \left| \int_{\Omega} \varphi(\mathcal{A}_t) d\mu(t) \right| \leq \int_{\Omega} |\varphi(\mathcal{A}_t)| d\mu(t) \leq \int_{\Omega} r_{\mathcal{M}''}(\mathcal{A}_t) d\mu(t) = \int_{\Omega} r(\mathcal{A}_t) d\mu(t).$$

Узимајући супремум по свим карактерима $\varphi : \mathcal{M}'' \rightarrow \mathbb{C}$ разматране Банахове алгебре $\mathcal{M}''$, уз помоћ трећег дела тврђења [69, Теорема 11.9], добијамо неједнакост (1.18). $\square$

Петисов, Данфордов и Гелфандов интеграл

У векторским просторима Данфорд и Петис интеграбилних функција подразумевамо идентификацију слабо μ -еквивалентних функција као у Дефиницији 1.18. Прецизно говорећи, простор *Данфорд интеграбилних функција* $L_D^1(\Omega, \mu, Y)$ се састоји од слабо μ -еквивалентних функција $f : \Omega \rightarrow Y$ у ком је норма дата са

$$(1.19) \quad \|f\|_D = \sup_{\|y^*\|=1} \int_{\Omega} |\langle f(t), y^* \rangle| d\mu(t) < +\infty.$$

У суштини, довољно је претпоставити да за сваки функционал $y^* \in Y^*$ скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \langle f(t), y^* \rangle \in \mathbb{C}$ припада Банаховом простору $L^1(\Omega, \mu)$ и то ће дати коначност функције $\|\cdot\|_D$ која је дефинисана изразом (1.19), што следи на основу Теореме о затвореном графику.

Тврђење 1.25. Нека је $\Omega \ni t \mapsto \langle f(t), y^* \rangle \in \mathbb{C}$ елементи простора $L^1(\Omega, \mu)$ за сваки фиксиран функционал $y^* \in Y^*$. Тада је $\sup_{\|y^*\|=1} \int_{\Omega} |\langle f(t), y^* \rangle| d\mu(t) < +\infty$.

Доказ. Нека је линеарни оператор $T : Y^* \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$ задат са $(Ty^*)(t) = \langle f(t), y^* \rangle$ за свако $y^* \in Y^*$. Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n^* - y^*\|_{Y^*} = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ty_n^* - z\|_{L^1(\mu)} = 0$ за неко $z \in L^1(\Omega, \mu)$ тада за неки подниз важи $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(t), y_{n_k}^* \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} Ty_{n_k}^*(t) = z(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ (видети нпр. [5, Став 5.11]). Одавде и из $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{n_k}^* - y^*\|_{Y^*} = 0$ следи да је $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(t), y^* \rangle = z(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ тј. $Ty^* = z$ у $L^1(\Omega, \mu)$. Доказали смо да важи $T \in \mathcal{B}(Y^*, L^1(\Omega, \mu))$ одакле следи $\|f\|_D = \sup_{\|y^*\|=1} \int_{\Omega} |\langle f(t), y^* \rangle| d\mu(t) = \sup_{\|y^*\|=1} \|Ty^*\|_{L^1(\mu)} = \|T\| < +\infty$. $\square$

Треба напоменути да у горњем тврђењу не морамо претпоставити комплетност простора Y , јер је за примену теореме о затвореном графику на оператор T потребно да оба простора Y^* и $L^1(\Omega, \mu)$ буду Банахови, што је у овом случају испуњено без обзира на комплетност простора Y .

Како је рестрикција интеграбилне функције на мерљив подскуп такође интеграбилна функција, имамо да за $f \in L_D^1(\Omega, \mu, Y)$ и за скуп $E \in \mathfrak{M}$ постоји јединствен елемент простора Y^{**} , који ћемо означавати са $\int_E^D f(t) d\mu(t)$, такав да важи једнакост

$$(1.20) \quad \left\langle y^*, \int_E^D f(t) d\mu(t) \right\rangle = \int_E \langle f(t), y^* \rangle d\mu(t) \text{ за свако } y^* \in Y^*.$$

Ако је Y сепарабилан нормиран простор тада је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \|f(t)\| \in \mathbb{R}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива. У том случају, за свако $E \in \mathfrak{M}$, једнакост (1.20) даје

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \left\| \int_E^D f(t) d\mu(t) \right\| &= \sup_{\|y^*\|=1} \left| \left\langle y^*, \int_E^D f(t) d\mu(t) \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\|y^*\|=1} \left| \int_E \langle f(t), y^* \rangle d\mu(t) \right| \leq \int_E \|f(t)\| d\mu(t). \end{aligned}$$

У досадашњем тексту смо већ помињали постојање слабо мерљиве функције f из Ω у неки несепарабилан Банахов простор Y код којих је $\|f(t)\|_Y = 1$ за свако $t \in \Omega$, док је $\|f\|_D = 0$ (погледати и [70, Поглавље 3]). Постојање наведеног промера нам указује на то да ће у разним разматрањима сепарабилност играти битну улогу.

Простор $L_P^1(\Omega, \mu, Y)$ *Петис интеграбилних функција* се састоји од класа слабо μ -еквивалентних Данфорд интеграбилних функција $f : \Omega \rightarrow Y$ таквих да је $\int_E^D f(t) d\mu(t) \in Y$ за свако $E \in \mathfrak{M}$. Тада користимо ознаку $\int_E^P f(t) d\mu(t)$. Ради прецизности, напомнимо да последњи услов заправо значи да је $\int_E^D f(t) d\mu(t) \in \mathcal{R}(J_Y)$, где је $J_Y : Y \rightarrow Y^{**}$ канонско $\bar{\mu}$ ресликавање задато изразом $J_X(x)x^* := \langle x, x^* \rangle$. Наравно, уколико је Y рефлексиван простор тада се појмови Петисовог и Данфордовог интеграла поклапају тј. из Данфорд интеграбилности следи Петис интеграбилност. Са друге стране, постоје примери функција које су Данфорд интеграбилне али нису Петис интеграбилне.

Пример 1.26. [25, Пример 3, стр. 53] Нека је функција $f : [0, 1] \rightarrow c_0$ дата изразом $f(t) = (n\chi_{(0, 1/n]}(t))_{n=1}^{+\infty}$ за свако $t \in [0, 1]$ (на $[0, 1]$ се подразумева Лебејева мера). Тада је функција f Данфорд интеграбилна али није Петис интеграбилна на $[0, 1]$. Заиста, ако је функционал $x^* \in c_0^* \cong \ell^1$ репрезентован са $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ имамо $\int_{[0, 1]} |\langle f(t), x^* \rangle| dm(t) = \int_{[0, 1]} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} n\chi_{(0, 1/n]}(t) \cdot \alpha_n \right| dm(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| < +\infty$, одакле следи да је f Данфорд интеграбилна функција. Такође, добијамо да важи $\left\langle x^*, \int_{[0, 1]}^D f dm \right\rangle = \int_{[0, 1]} \langle f(t), x^* \rangle dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle e_n, x^* \rangle$. Претпоставимо да је функција f Петис интеграбилна на $[0, 1]$. Тада постоји вектор $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ за који је $J_{c_0}(a) = \int_{[0, 1]}^D f dm$. Следи да важи $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \alpha_n = \langle x^*, J_{c_0}(a) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$. Уколико у последњој једнакости ставимо $\alpha_n = e_n \in \ell^1$ добијамо $a_n = 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$, што је контрадикција са $a \in c_0$. $\triangle$

За разлику од Бохнер интеграбилне функције, Данфорд интеграбилна функција не мора генерисати Y^{**} -вредносну меру (видети [25, Пример 4, стр. 53]). Насупрот томе, Петис интеграбилна функција генерише Y -вредносну меру и таква мера се испоставља да је μ -непрекидна¹⁵. Ово тврђење ће бити коришћено у Примеру 2.29.

¹⁵Векторска мера ν је μ -непрекидна ако важи $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \nu(E) = 0$.

Теорема 1.27. [25, Теорема 5, стр. 53]) Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и $f \in P_1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, Y)$. Тада је функција $\nu_f : \mathfrak{M} \rightarrow Y$ задаћа изразом $\nu_f(E) = \int_E f d\mu$ за свако $E \in \mathfrak{M}$ једна Y -вредносна мера која је још и μ -нејрекидна.

Напоменимо и један од нетривијалних резултата теорије интеграције у Банаховом простору који каже да се Данфордов и Петисов интеграл поклапају уколико је $\mu(\Omega) < +\infty$ и уколико је Y Банахов простор који у себи не садржи копију простора c_0 . За више детаља видети [25, Теорема 7, стр. 54].

Векторски простор $L_P^1(\Omega, \mu, Y)$ наслеђује норму простора $L_D^1(\Omega, \mu, Y)$ и у том случају ћемо ту норму означавати са $\|\cdot\|_P$. Због тога је *Петисова норма* $\|\cdot\|_P$ на $L_P^1(\Omega, \mu, Y)$ задата изразом $\|f\|_P = \sup_{\|y^*\|=1} \int_{\Omega} |\langle f(t), y^* \rangle| d\mu(t)$ за свако $f \in L_P^1(\Omega, \mu, Y)$. Норма $\|\cdot\|_P$ на $L_P^1(\Omega, \mu, Y)$ је еквивалентна са нормом $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$ која је дата изразом $\|f\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{E \in \mathfrak{M}} \left\| \int_E f(t) d\mu(t) \right\|$ за свако $f \in L_P^1(\Omega, \mu, Y)$ (видети нпр. [63, Поглавље 4]). Са тим у вези погледати и Тврђење 4.20.

На основу дефиниције уведених простора природно добијамо утапање $L_B^1(\Omega, \mu, Y) \hookrightarrow L_P^1(\Omega, \mu, Y)$. Илуструјмо ово утапање као и до сада изложену теорију једним једноставним примером у ком ћемо видети конкретан рачун са уведеним типовима интеграла.

Пример 1.28. Нека је функција $f : [0, 1] \rightarrow c_0$ дефинисана изразом $f(t) = \left(\frac{\cos nt}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ за свако $t \in [0, 1]$. Израчунаћемо Бохнеров интеграл $\int_{[0,1]}^B f dt$. Простор c_0 је сепарабилан па је јака мерљивост функције f еквивалентна са slabом на основу Теореме 1.20. Имамо да је $\int_{[0,1]} \|f(t)\|_{\infty} dm(t) = 1 < +\infty$ одакле следи да је функција f Бохнер интеграбилна а самим тим и Петис интеграбилна и па два интеграла се поклапају. Потребно је наћи вектор $x \in c_0$ тако да важи $\langle x, x^* \rangle = \int_{[0,1]} \langle f(t), x^* \rangle dm(t)$ за свако $x^* \in c_0^*$. Нека је $x^* \in c_0^* \cong \ell^1$ произвољно. Тада је функционал x^* репрезентован вектором $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$. Одакле добијамо $\int_{[0,1]} \langle f(t), x^* \rangle dm(t) = \int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{\cos nt}{n} dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n} \int_{[0,1]} \cos nt dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cdot \frac{\sin n}{n^2} = \left\langle \left(\frac{\sin n}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}, x^* \right\rangle$ па можемо закључити да важе једнакости $x = \left(\frac{\sin n}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \int_{[0,1]}^P f dt = \int_{[0,1]}^B f dt$. $\triangle$

У општем случају, простор $L_P^1(\Omega, \mu, Y)$ не мора бити Банахов, о чему говори наредна значајна теорема.

Теорема 1.29 ([34], Теорема 3). Нека је Y Банахов простор и $\dim Y = +\infty$. Тада простор $L_P^1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, Y)$ није Банахов.

Напоменимо да је у литератури разматран проблем модификације норме $\|\cdot\|_P$ која доводи до комплетне норме на $L_P^1(\Omega, \mu, Y)$ (видети [64, Поглавље 12, стр. 575]).

У настаку ћемо разматрати интеграл функције која узима вредности у дуалу неког Банаховог простора. Наредна теорема омогућава дефиницију Гелфандовог интеграла функције $f : \Omega \rightarrow X^*$ и биће употребљена у специјалној ситуацији када је $X = \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, за неки сепарабилни Хилбертов простор $\mathcal{H}$ (видети почетак Поглавља 2). Идеја доказа наредне теореме је слична идеји коју смо имали када смо примењивали Теорему о затвореном графику да бисмо добили коначност израза (1.19). Треба нагласити да сада претпостављамо комплетност простора X , што није био случај у Тврђењу 1.25.

Теорема 1.30. [2, 25] Нека је $A \in \mathfrak{M}$, X Банахов простор и нека је функција $f : \Omega \rightarrow X^*$ таква да је $\Omega \ni t \mapsto \langle x, f(t) \rangle \in \mathbb{C}$ елементи простора $L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ за свако $x \in X$. Тада

постоји јединствен елемент $\int_A^G f(t) d\mu(t) \in X^*$ тако да важи једнакост

$$(1.22) \quad \left\langle x, \int_A^G f(t) d\mu(t) \right\rangle = \int_A \langle x, f(t) \rangle d\mu(t) \text{ за свако } x \in X.$$

Такође, имамо да је $\sup_{\|x\|_X=1} \int_\Omega |\langle x, f(t) \rangle| d\mu(t) < +\infty$.

Доказ. Ако је $A \in \mathfrak{M}$ и уколико постоји елемент $\int_A^G f(t) d\mu(t) \in X^*$ тада је овај елемент јединствен, што следи на основу његове дефиниционе једнакости (1.22). На основу услова теореме можемо дефинисати линеарно пресликавање $X \ni x \mapsto \int_A \langle x, f(t) \rangle d\mu(t) \in \mathbb{C}$. Да бисмо показали непрекидност овако дефинисаног функционала довољно је показати да је пресликавање $\Gamma : X \rightarrow L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ дефинисано са $\Gamma(x)(t) = \langle x, f(t) \rangle$ непрекидно. Нека је зато $x \in X$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ у X и $g \in L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ тако да је испуњено $\lim_{n \rightarrow \infty} [\|x_n - x\|_X + \|\Gamma(x_n) - g\|_{L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)}] = 0$. Из $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma(x_n) - g\|_{L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)} = 0$ следи да постоји подниз $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такав да је $\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma(x_{n_k})(t) = g(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Како је $\Gamma(x_n)(t) = \langle x_n, f(t) \rangle$, из $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$ следи $\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma(x_{n_k})(t) = \Gamma(x)(t)$, одакле је $\Gamma(x)(t) = g(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ тј. важи једнакост $\Gamma(x) = g$ у $L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. Доказали смо $\Gamma \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ па на основу реченог следи $\sup_{\|x\|=1} \int_\Omega |\langle x, f(t) \rangle| d\mu(t) < +\infty$. $\square$

Дефиниција 1.31. Функција $f : \Omega \rightarrow X^*$ која има својство да је $\Omega \ni t \mapsto \langle x, f(t) \rangle \in \mathbb{C}$ μ -мерљива за свако $x \in X$ назива се **слабо* μ -мерљива функција**. Уколико је $\Omega \ni t \mapsto \langle x, f(t) \rangle \in \mathbb{C}$ додато и μ -интеграбилна функција за свако $x \in X$ онда кажемо да је f **слабо* μ -интеграбилна функција** или **Гелфанд μ -интеграбилна** на Ω .

Напоменимо да сви типови векторских интеграла које смо у досадашњем излагању помињали (Бохнеров, Данфордов, Петисов и Гелфандов) поседују, као што је се могло и очекивати, својства *хомогености*, *линеарности* и *коначне адитивности*.

Из Теореме 1.30 одмах следи да слабо* μ -интеграбилна функција која има ограничену слику у простору X^* мора бити Гелфанд интеграбилна уколико је μ коначна мера.

Наредно тврђење следи на основу дефиниције Бохнеровог интеграла и из доказане Теореме 1.30 о постојању Гелфандовог интеграла.

Тврђење 1.32. [2, Секција 11.9] Ако је $f \in L_B^1(\Omega, \mu, X^*)$ тада је функција f и Гелфанд μ -интеграбилна и важи $\int_E^B f(t) d\mu(t) = \int_E^G f(t) d\mu(t)$ за свако $E \in \mathfrak{M}$.

Доказ. Ако је $E \in \mathfrak{M}$ и $\varphi = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} x_i^*$ $\mathfrak{M}$ -проста функција са вредностима у X^* , где су $A_i \in \mathfrak{M}$ међусобно дисјунктни скупови, тада за свако $x \in X$ имамо

$$\left\langle x, \int_E^B \varphi(t) d\mu(t) \right\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n x_i^* \mu(E \cap A_i) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i^* \rangle \mu(E \cap A_i) = \int_E \langle x, \varphi(t) \rangle d\mu(t).$$

Ово показује да је функција φ Гелфанд μ -интеграбилна и да се њен Гелфандов интеграл поклапа са Бохнеровим интегралом ове функције на E . Нека је сада $f \in L_B^1(\Omega, \mu, X^*)$

произвольно и изабери́мо низ $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{M}$ -простих интегралних X^* -вредносних функција за који је $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f(t) - \varphi_n(t)\|_{X^*} d\mu(t) = 0$. Тада, за свако $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \Omega$ важи $\langle x, f(t) \rangle = \langle x, f(t) - \varphi_n(t) \rangle + \langle x, \varphi_n(t) \rangle$, одакле следи да је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \langle x, f(t) \rangle \in \mathbb{C}$ μ -интеграбилна за свако $x \in X$. Такође, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$(1.23) \quad \int_E \langle x, f(t) \rangle d\mu(t) = \int_E \langle x, f(t) - \varphi_n(t) \rangle d\mu(t) + \int_E \langle x, \varphi_n(t) \rangle d\mu(t).$$

Приметимо да за свако $x \in X$ имамо следеће граничне вредности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_E \langle x, f(t) - \varphi_n(t) \rangle d\mu(t) \right| \leq \|x\|_X \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \|f(t) - \varphi_n(t)\|_{X^*} d\mu(t) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \langle x, \varphi_n(t) \rangle d\mu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle x, \int_E^B \varphi_n(t) d\mu(t) \right\rangle = \left\langle x, \int_E^B \varphi(t) d\mu(t) \right\rangle.$$

Користећи ове једнакости као и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_E^B \varphi_n(t) d\mu(t) - \int_E^B f(t) d\mu(t) \right\|_{X^*} = 0$, на основу (1.23) можемо закључити да је $\int_E \langle x, f(t) \rangle d\mu(t) = \left\langle x, \int_E^B f(t) d\mu(t) \right\rangle$ за свако $x \in X$. $\square$

1.3 Идеали $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ компактних оператора

Нека је у овој секцији $\mathcal{H}$ сепарабилан комплексан Хилбертов простор. Као што смо већ рекли, нека су са $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ означени векторски простори свих ограничених, односно коначно димензионалних и компактних линеарних оператора на $\mathcal{H}$. Основни алат у раду са компактним операторима је *сингуларни* тј. *Шмидтов*¹⁶ *развој* који је последица *Спектралне теореме* (видети [5, Поглавље 14]). Наиме, за $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ посматрајмо оператор A^*A . У питању је позитиван компактан оператор чије сопствене вредности можемо уредити у опадајућем поретку: $\lambda_1(A^*A) \geq \lambda_2(A^*A) \geq \dots \geq \lambda_n(A^*A) \geq \dots$. Последњи низ је или коначан или конвергира нули. Уведимо ознаку $s_n(A) := \sqrt{\lambda_n(A^*A)} = \sqrt{\lambda_n(|A|^2)} = \lambda_n(|A|)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ (уколико је поменути низ коначан онда сматрамо да је остатак низа допуњен нулама). Број $s_n(A)$ се назива *n-та сингуларна вредност* оператора A . На основу Спектралне теореме имамо да постоји о. н. б. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у $\overline{\mathcal{R}}(|A|)$ тако да важи $|A| = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(|A|) f_n \otimes f_n^*$, при чему овај ред конвергира у норми простора $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Како је $A = V|A|$ за неку парцијалну изометрију V са полазним простором $\overline{\mathcal{R}}(|A|) = \overline{\mathcal{R}}(A^*)$ и долазним простором $\overline{\mathcal{R}}(A)$, добијамо $A = V|A| = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(A) (V f_n \otimes f_n^*)$. Уколико је $e_n := V f_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо *сингуларни развој* оператора A : $A = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(A) e_n \otimes f_n^*$. Низ вектора $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је о. н. б. у $\overline{\mathcal{R}}(A)$.

Скуп $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{J} \neq \{0\}$, $\mathcal{J} \neq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ је *двострани идеал* у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ уколико је $\mathcal{J}$ векторски потпростор у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ за који важи: $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $X \in \mathcal{J}$ тада $AXB \in \mathcal{J}$. Показује се да важи $\mathfrak{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ а одатле одмах следи да је једини затворен идеал у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ управо $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ јер је затворење од $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ у операторној норми једнако $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$.

Функција $\|\cdot\| : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ је *симетрична норма* на двостраном идеалу $\mathcal{J}$ уколико је норма на векторском простору $\mathcal{J}$ са додатним особинама: $\|AXB\| \leq \|A\| \cdot \|X\| \cdot \|B\|$

¹⁶Erhard Schmidt (1876–1959), немачки математичар

за све $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и све $X \in \mathcal{J}$ (овај услов се назива *симетричношћу*) и $\|X\| = \|X\|$ уколико је X оператор ранга 1. Уколико уместо услова симетричности захтевамо услов $\|UXV\| = \|X\|$ онда је у питању *унитарно инваријантна* норма $\|\cdot\|$ на $\mathcal{J}$. Лако се показује да је свака симетрична уједно и унитарно инваријантна норма али важи и више (видети Теорему 1.42).

Нека је са c_{00} означен простор реалних низова који имају само коначно много елемената различитих од нуле. Функција $\Phi : c_{00} \rightarrow \mathbb{R}$ је *нормирајућа функција* на c_{00} уколико је важи: $\Phi(a) > 0$ кад год је $a \in c_{00}$ и a није састављен само од нула, $\Phi(\lambda a) = |\lambda|\Phi(a)$ за свако $\lambda \in \mathbb{R}$ и свако $a \in c_{00}$, $\Phi(a+b) \leq \Phi(a) + \Phi(b)$ и $\Phi(1, 0, 0, \dots) = 1$. Уколико је још и $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = \Phi(\varepsilon_1 a_{\pi(1)}, \dots, \varepsilon_n a_{\pi(n)}, \dots)$ за сваку пермутацију $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и сваки избор $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ онда кажемо да је Φ *симетрично нормирајућа функција* (краће ћемо писати с. н. функција). Битно својство с. н. функција је да из $|a_n| \leq |b_n|$ за свако $n \in \mathbb{N}$ следи $\Phi(a) \leq \Phi(b)$, кад год су $a, b \in c_{00}$ (видети [30, стр. 71]).

Природни домен функције Φ је надскуп скупа c_{00} дат са

$$c_\Phi := \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c : \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) < +\infty \right\}.$$

Напоменимо да је могуће увести на овај начин дефиницију скупа c_Φ јер је низ бројева $(\Phi(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots))_{n \in \mathbb{N}}$ растући. Такође, лако се види да у поступку проширења функције Φ са c_{00} на c_Φ она задржава све особине које је имала на почетку.

Са $s(A)$ означавамо низ бројева $(s_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ који је придружен оператору $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. Свака с. н. функција Φ генерише један идеал компактних оператора. Заиста, нека је $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}) : s(A) \in c_\Phi\}$. Показује се да је скуп $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ векторски простор над пољем $\mathbb{C}$ који је комплетан у односу на норму $\|\cdot\|_\Phi$ дату са

$$\begin{aligned} \|A\|_\Phi &= \Phi(s(A)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(s_1(A), \dots, s_n(A), 0, 0, \dots) \\ (1.24) \quad &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(s_1(A), \dots, s_n(A), 0, 0, \dots) \text{ за свако } A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Такође, $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ представља двострани идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, што се може видети у [30, Теорема 4.1]. Из (1.24) непосредно следи да је $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ елемент идеала $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ако и само ако је $\sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(s_n(A)) < +\infty$, при чему је A_n n -та парцијална сума из сингуларног развоја компактног оператора A . Притом, идеал $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ је сепарабилан ако и само ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\|_\Phi = 0$ за свако $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, тј. уколико сингуларни развој оператора A конвергира у норми идеала $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Са $\mathcal{C}_\Phi^\circ(\mathcal{H})$ означавамо затворење оператора коначног ранга у норми $\|\cdot\|_\Phi$. Сваки идеал $\mathcal{C}_\Phi^\circ(\mathcal{H})$ је сепарабилан у $\|\cdot\|_\Phi$ норми и важи

$$\mathcal{C}_\Phi^\circ(\mathcal{H}) = \left\{ A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}) : \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(s_{n+1}(A), s_{n+2}(A), \dots) = 0 \right\},$$

што следи на основу [30, Лема 6.1] и [30, Теорема 6.1].

За дату с. н. функцију Φ на c_{00} њена *адјунгована* с. н. функција се означава са Φ^* и за свако $b \in c_{00}$ дата је изразом

$$(1.25) \quad \Phi^*(b) = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k \right| : a \in c_{00}, \Phi(a) \leq 1 \right\} = \sup_{0 \neq a \in c_{00}} \frac{1}{\Phi(a)} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k \right|.$$

Овако дефинисана функција Φ^* је такође с. н. функција и важи једнакост $(\Phi^*)^* = \Phi$ на c_{00} (видети [72, Секција 1.7]).

Уколико за свако $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ дефинишемо $\|A\|_{(k)} = s_1(A) + \dots + s_k(A)$ тада функција $\|\cdot\|_{(k)}$ представља норму на $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. За доказ наредног тврђења погледати [56, Теорема 1.20] и [56, Лема 1.22].

Теорема 1.33. *За свако $k \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ важе следећа тврђења.*

$$(a) \quad \|A\|_{(k)} = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^k \langle Ae_j, f_j \rangle \right| : (e_j)_{j \in \mathbb{N}}, (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ су о. н. б. у } \mathcal{H} \right\},$$

$$\|A\|_{(k)} = \sup \left\{ \sum_{j=1}^k |\langle Ae_j, f_j \rangle| : (e_j)_{j \in \mathbb{N}}, (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ су о. н. б. у } \mathcal{H} \right\}.$$

$$(b) \quad \|A\|_{(k)} = \inf \{ \|B\|_1 + k \cdot \|C\| : B \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}), C \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) \}.$$

Такође, торњи супремуми и инфимум се досижу.

Наредно тврђење је важно јер оно представља критеријум за припадност компактног оператора идеалу који је генерисан датом с. н. функцијом Φ .

Теорема 1.34. [30, стр. 82] *Нека је $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и нека је $B \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ са својством да важи $\|A\|_{(k)} \leq \|B\|_{(k)}$ за свако $k \in \mathbb{N}$. Тада је $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и $\|A\|_\Phi \leq \|B\|_\Phi$.*

Напоменимо да у литератури постоје разне неједнакости које су везане за сингуларне бројеве компактног оператора, при чему ћемо овде навести само оне неједнакости које су битне за даљи рад.

Теорема 1.35. [25, стр. 49] *Нека је $n \in \mathbb{N}$ произвољно и нека су даћи оператори $A, B \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$. Тада важи неједнакост $\sum_{k=1}^n s_k(AB) \leq \sum_{k=1}^n s_k(A)s_k(B)$.*

Уколико је $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ позитиван оператор тада се његова n -та сингуларна вредност $s_n(A)$ и његова n -та сопствена вредност $\lambda_n(A)$ поклапају. Такође, за свако $A \in \mathfrak{C}_\infty(A)$ важи једнакост $\lambda_n(AA^*) = \lambda_n(A^*A)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, што следи на основу сингуларног развоја оператора A (видети [30, стр 28]). Такође, уколико је $0 \leq A \leq B$ тада важи $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(B)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ (видети [30, Лема 1.1]).

Теорема 1.36. ([43, стр. 62]) *Нека за операторе $A, B, C, D \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ важи $A^*A \leq C^*C$, $BB^* \leq DD^*$ и нека је $X \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Тада важи неједнакост*

$$(1.26) \quad \|AXB\|_\Phi \leq \|CXD\|_\Phi.$$

Доказ. Важи $AXB, CXD \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ јер је $X \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$. За свако $n \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned} s_n^2(AXB) &= \lambda_n((AXB)^*(AXB)) = \lambda_n(B^*X^*A^*AXB) \\ &= \lambda_n((XB)^*A^*A(XB)) \leq \lambda_n((XB)^*C^*C(XB)) \\ &= \lambda_n(B^*X^*C^*CXB) = \lambda_n((CXB)^*(CXB)) \\ &= \lambda_n((CXB)(CXB)^*) = \lambda_n(CXBB^*X^*C^*) \\ &= \lambda_n((CX)BB^*(CX)^*) \leq \lambda_n((CX)DD^*(CX)^*) \\ &= \lambda_n(CXDD^*X^*C^*) = \lambda_n((CXD)(CXD)^*) \\ &= \lambda_n((CXD)^*(CXD)) = s_n^2(CXD). \end{aligned}$$

На основу Теореме 1.34 следи $\|AXB\|_\Phi \leq \|CXD\|_\Phi$. □

Ако је $p > 0$ и Φ с.н. функција, дефинишемо функцију $\Phi^{(p)}$ на скупу $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}} = \{z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid (|z_n|^p)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_\Phi\}$ изразом $\Phi^{(p)}((z_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sqrt[p]{\Phi((|z_n|^p)_{n \in \mathbb{N}})}$. Зато, норма $\|\cdot\|_\Phi$ може бити p -модификована изразом $\|A\|_{\Phi^{(p)}} := \sqrt[p]{\| |A|^p \|_\Phi}$ за све $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за које је $|A|^p \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ тј. за све $A \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$. Тада је скуп $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}) : |A|^p \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})\}$ сепарабилан идеал са нормом $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$, уколико је $p \geq 1$ (да функција $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ задовољава својства норме на $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ може се видети у [35]). Са $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ означавамо затворење оператора коначног ранга у норми $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$. Унитарно инваријантне норме $\|\cdot\|_{\Phi^{(2)}}$ које су настале 2-модификацијом неке унитарно инваријантне норме $\|\cdot\|_\Phi$ називају се Q норме док се норме $\|\cdot\|_{\Phi^{(2)*}}$ називају Q^* норме. Ако је $p \geq 2$ тада је свака p -модификација норми $\|\cdot\|_\Phi$ уједно и Q норма јер важи једнакост $\Phi^{(p)} = (\Phi^{(\frac{p}{2})})^2$. Напоменимо да ће Q и Q^* норми играти битну улогу у разматрањима у Поглављу 3.

*Шаџен*¹⁷ - *Фон Нојманова*¹⁸ класа $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ је пример идеала са модификацијом степена p нуклеарне норми $\|\cdot\|_1$ идеала $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, док је $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ позната као *Хилберт-Шмиџова класа*. Норма идеала $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ је означена са $\|\cdot\|_p$ и једнака је $\|A\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^p(A)}$.

Односи између овако дефинисаних идеала су прегледно наведени у [55, Лема 1.4].

Са $\text{tr} : \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ ћемо означавати *траг* нуклеарног оператора. У питању је линеаран функционал на идеалу нуклеарних оператора $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ за који важи једнакост $\|\text{tr}\| = 1$ (видети [5, Лема 14.19]). Уколико је оператор ранга 1 дефинисан изразом $(e \otimes f^*)x = \langle x, f \rangle e$ за свако $x \in \mathcal{H}$ и ако је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада важе једнакости

$$(1.27) \quad \text{tr}(e \otimes f^*) = \langle e, f \rangle, \quad \|e \otimes f^*\|_1 = \|e \otimes f^*\| = \|e\| \cdot \|f\|, \quad A(e \otimes f^*) = Ae \otimes f^*.$$

Уколико су $a, b \in \mathcal{C}_\Phi$ и $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ тада важи неједнакост

$$(1.28) \quad \Phi(a_1 b_1, \dots, a_n b_n, \dots) \leq \sqrt[p]{\Phi(|a_1|^p, \dots, |a_n|^p, \dots)} \cdot \sqrt[q]{\Phi(|b_1|^q, \dots, |b_n|^q, \dots)}.$$

Заиста, на основу дефиниције с.н. функције Φ довољно је доказати горњу неједнакост уколико су a и b низови из $\mathcal{C}_{00} \subseteq \mathcal{C}_\Phi$ и уколико имају ненегативне елементе. На основу Јангове¹⁹ неједнакости (видети [5, Лема 5.4]) имамо да важи $a_n b_n \leq \frac{a_n^p}{p} + \frac{b_n^q}{q}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је $\Phi(a_1 b_1, \dots, a_n b_n, \dots) \leq \frac{1}{p} \Phi(a_1^p, \dots, a_n^p, \dots) + \frac{1}{q} \Phi(b_1^q, \dots, b_n^q, \dots)$. Нека је $\alpha > 0$ и низ a заменимо са $\alpha \cdot a \in \mathcal{C}_{00}$ док низ b заменимо са $\frac{1}{\alpha} b \in \mathcal{C}_{00}$. Добијамо да важи неједнакост $\Phi(a_1 b_1, \dots, a_n b_n, \dots) \leq \frac{\alpha^p}{p} \Phi(a_1^p, \dots, a_n^p, \dots) + \frac{1}{q \alpha^q} \Phi(b_1^q, \dots, b_n^q, \dots)$. Лева страна горње неједнакости је константна док десна зависи од $\alpha > 0$, уколико су низови a и b фиксирани. Минимизацијом десне стране по $\alpha > 0$ добијамо жељену неједнакост (1.28).

Следећа неједнакост следи директно из Теореме 1.35 и дефиниционе једнакости (1.25) за с.н. функцију Φ^* .

Лема 1.37. *За $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ важи $AB \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ као и $\|AB\|_1 \leq \|A\|_\Phi \cdot \|B\|_{\Phi^*}$.*

Сада наводимо Хелдерову²⁰ неједнакост за идеале компактних оператора (за општију варијанту ове неједнакости погледати [35]).

Лема 1.38. *Нека је $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $A \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ и $B \in \mathcal{C}_{\Phi^{(q)}}(\mathcal{H})$. Тада $AB \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и важи неједнакост $\|AB\|_\Phi \leq \sqrt[p]{\|A\|_{\Phi^{(p)}}} \cdot \sqrt[q]{\|B\|_{\Phi^{(q)}}}$.*

¹⁷Robert Schatten (1911–1977), амерички математичар

¹⁸John von Neumann (1903–1957), мађарско-амерички математичар

¹⁹William Henry Young (1863–1942), британски математичар

²⁰Ludwig Otto Hölder (1859–1937), немачки математичар

Доказ. На основу $AB \in \mathbf{C}_\infty(\mathcal{H})$ следи да можемо посматрати низ бројева $s(AB)$. На основу Теореме 1.35 закључујемо да важи неједнакост $\Phi(s_1(AB), \dots, s_n(AB), \dots) \leq \Phi(s_1(A)s_1(B), \dots, s_n(A)s_n(B), \dots)$. Применом Хелдерове неједнакости (1.28) добијемо

$$\begin{aligned} \|AB\|_\Phi &\leq \sqrt[p]{\Phi(s_1^p(A), \dots, s_n^p(A), \dots)} \cdot \sqrt[q]{\Phi(s_1^q(B), \dots, s_n^q(B), \dots)} \\ &= \sqrt[p]{\Phi(s(|A|^p))} \cdot \sqrt[q]{\Phi(s(|B|^q))} \\ &= \sqrt[p]{\| |A|^p \|_\Phi} \cdot \sqrt[q]{\| |B|^q \|_\Phi} = \sqrt[p]{\|A\|_{\Phi(p)}^p} \cdot \sqrt[q]{\|B\|_{\Phi(q)}^q}. \end{aligned} \quad \square$$

Наредна теорема представља варијанту ТДК за сепарабилне идеале $\mathbf{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Доказ ове теореме је базиран на идеји доказа Теореме 2.16 из [72] и на Хелдеровој неједнакости за идеале датог у Лемми 1.38.

Теорема 1.39. [51, 52] *Нека је $\mathbf{C}_\Phi(\mathcal{H})$ сепарабилан идеал генерисан с. н. функцијом Φ , $A_n, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и нека низ оїєратіора $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира слабо ка оїєратіору A . Ако постоји оїєратіор $B \in \mathbf{C}_\Phi(\mathcal{H})$ такав да је $|A_n|, |A_n^*|, |A|, |A^*| \leq B$ за свако $n \in \mathbb{N}$ тада $A_n, A \in \mathbf{C}_\Phi(\mathcal{H})$ за све $n \in \mathbb{N}$ и важи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\|_\Phi = 0$.*

Доказ. Најпре, имамо $A_n, A \in \mathbf{C}_\Phi(\mathcal{H})$ јер је $|A_n|, |A| \in \mathbf{C}_\Phi(\mathcal{H})$ за све $n \in \mathbb{N}$. Како је $\mathbf{C}_\Phi(\mathcal{H})$ сепарабилан идеал, постоји ортопројектор коначног ранга P такав да је $Q = I - P$ и $\|QBQ\|_\Phi < \varepsilon$. Из $Q|A_n|Q \leq QBQ$ и $Q|A|Q \leq QBQ$ такође добијемо $\|Q|A_n|Q\|_\Phi < \varepsilon$ за свако $n \in \mathbb{N}$, као и $\|Q|A|Q\|_\Phi < \varepsilon$.

На основу Леме 1.38, користећи поларну декомпозицију, имамо

$$\|A_n Q\|_\Phi \leq \| |A_n| Q \|_\Phi = \left\| \sqrt{|A_n|} \sqrt{|A_n|} Q \right\|_\Phi \leq \sqrt{\| |A_n| \|_\Phi} \cdot \sqrt{\| Q |A_n| Q \|_\Phi} \leq \sqrt{\|B\|_\Phi} \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

Слично, имамо да све три величине $\|AQ\|_\Phi, \|QA_n\|_\Phi$ и $\|QA\|_\Phi$ можемо проценити са $\sqrt{\|B\|_\Phi} \cdot \sqrt{\varepsilon}$. Зато, за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо да важи

$$\begin{aligned} \|A_n - A\|_\Phi &= \|(P + Q)(A_n - A)(P + Q)\|_\Phi \\ (1.29) \quad &\leq \|P(A_n - A)P\|_\Phi + \|QA\|_\Phi + \|QA_n\|_\Phi + \|PAQ\|_\Phi + \|PA_nQ\|_\Phi \\ &\leq \|P(A_n - A)P\|_\Phi + 4\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\|B\|_\Phi}. \end{aligned}$$

На основу $\dim \mathcal{R}(P) < +\infty$ имамо $P = \sum_{k=1}^m e_k \otimes e_k^*$ за неки ортонормиран скуп вектора $e_1, \dots, e_m \in \mathcal{H}$. Директним рачуном добијемо

$$P(A_n - A)P = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \langle (A_n - A)e_k, e_l \rangle e_k \otimes e_l^*.$$

Како за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\|P(A_n - A)P\|_\Phi \leq \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m |\langle (A_n - A)e_k, e_l \rangle|$, следи

$$(1.30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P(A_n - A)P\|_\Phi = 0$$

на основу слабе конвергенције низа $(A_n)_{n \geq 1}$ ка A . Коначно, из (1.29) и (1.30) имамо $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\|_\Phi \leq 4\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\|B\|_\Phi}$. Како је $\varepsilon > 0$ произвољно и $B \in \mathbf{C}_\Phi(\mathcal{H})$ жељени закључак следи. $\square$

Следеће тврђење представља варијанту Фатуове²¹ леме за идеале оператора. Пре тога, напоменимо да из слабе конвергенције низа $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ка оператору A и $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(X_n K) = \text{tr}(XK)$. Заиста, на основу линеарности трага довољно је доказати ову једнакост уколико је $\dim \mathcal{R}(K) = 1$. У том случају, ако је $K = e \otimes f^*$, $\|e\| = \|f\| = 1$, на основу (1.27) имамо $(A_n - A)(e \otimes f^*)(x) = \langle x, f \rangle (A_n - A)e = (((A_n - A)e) \otimes f^*)(x)$ одакле је $\text{tr}(A_n e \otimes f^* - A e \otimes f^*) = \langle (A_n - A)e, f \rangle$ а овај израз тежи нули када $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1.40. [44] Нека с. н. функција Φ не генерише идеал $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ и нека низ оператора $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ слабо конвертира у идеалу $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Тада важи неједнакост

$$(1.31) \quad \left\| (\text{weak}) \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \right\|_\Phi \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_\Phi.$$

Доказ. На основу [25, Лема 12.1] имамо да за свако $X \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ важи формула

$$(1.32) \quad \|X\|_\Phi = \sup_{0 \neq Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})} \frac{|\text{tr}(XY)|}{\|Y\|_{\Phi^*}}.$$

Из $X_n \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ следи $\frac{|\text{tr}(X_n Y)|}{\|Y\|_{\Phi^*}} \leq \|X_n\|_\Phi$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и за свако $0 \neq Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Из слабе конвергенције низа $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ закључујемо да важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(X_n Y) = \text{tr}(XY)$ за свако $Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (видети разматрање пре формулације овог тврђења), при чему смо означили $X = (\text{weak}) \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$. Преласком на $n \rightarrow \infty$ добијамо да важи неједнакост $\frac{|\text{tr}(XY)|}{\|Y\|_{\Phi^*}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_\Phi$ за свако $0 \neq Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Узимањем супремума по свим $0 \neq Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ следи тврђење, поновном употребом формуле (1.32). $\square$

Теорема 1.41. [30, Теорема 6.2] Нека је $(\mathcal{J}, \|\cdot\|)$ сепарабилан двострани идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тада постоји с. н. функција Φ тако да важи $\mathcal{J} = \mathcal{C}_\Phi^\circ(\mathcal{H})$.

Директни смер наредног тврђења је наведен у [30, стр. 68] док је обратни смер на идеалу $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ наведен у [30, Последица 3.1, стр. 79]. Да обратни смер важи и у општем случају се показује применом резултата из [45] који каже да из $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\|X\| \leq 1 - \frac{2}{n}$ за неко $n \in \mathbb{N}$ следи да постоје унитарни оператори $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тако да је $X = \frac{1}{n}(U_1 + \dots + U_n)$.

Теорема 1.42. Норма $\|\cdot\|$ на идеалу $\mathcal{J} \subset \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ је симетрична ако и само ако је унитарно инваријантна.

Доказ. Нека је најпре $\|\cdot\|$ симетрична норма на идеалу $\mathcal{J} \subset \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ и нека су $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ унитарни. Тада важи $\|UXV\| \leq \|U\| \cdot \|X\| \cdot \|V\| = \|X\|$ за свако $X \in \mathcal{J}$. Такође, имамо $\|X\| = \|U^{-1}UXV^{-1}V\| \leq \|U^{-1}\| \cdot \|UXV\| \cdot \|V^{-1}\| = \|UXV\|$. Дакле, имамо да важи $\|X\| = \|UXV\|$, па је тиме доказан један смер овог тврђења. Ако је $X \in \mathcal{J}$, $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\delta > 0$ тада је $\left\| \frac{A}{\|A\| + \delta} \right\| < 1$. Следи да постоји $n \in \mathbb{N}$ за које је $\left\| \frac{A}{\|A\| + \delta} \right\| \leq 1 - \frac{2}{n}$. На основу поменутог тврђења из рада [45] следи да је $\frac{A}{\|A\| + \delta} = \frac{1}{n}(U_1 + \dots + U_n)$ за неке

²¹Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929), француски математичар и астроном

унитарне операторе $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Сада, за свако $\delta > 0$ имамо

$$\begin{aligned} \|AXB\| &= (\|A\| + \delta) \cdot \left\| \frac{A}{\|A\| + \delta} XB \right\| \\ &\leq \frac{\|A\| + \delta}{n} \cdot (\|U_1 XB\| + \dots + \|U_n XB\|) \\ &= \frac{\|A\| + \delta}{n} \cdot (\|XB\| + \dots + \|XB\|) = (\|A\| + \delta) \cdot \|XB\|. \end{aligned}$$

Одавде следи неједнакост $\|AXB\| \leq \|A\| \cdot \|XB\|$ када пређемо на $\delta \rightarrow 0+$. На исти начин се показује неједнакост $\|XB\| \leq \|X\| \cdot \|B\|$, одакле следи тврђење. $\square$

Директни зборови Хилбертових простора

Ако је $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ Хилбертових простора тада је скуп

$$\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n = \left\{ f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \prod_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n \mid f_n \in \mathcal{H}_n \text{ за свако } n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|^2 < +\infty \right\}$$

са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle : \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n \times \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисаним са

$$(1.33) \quad \langle (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f_n, g_n \rangle \text{ за свако } (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$$

Хилбертов простор. Ако је $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тада добијамо Хилбертов простор $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n = \ell^2(\mathcal{H})$.

Ако је $\mathcal{H}_n$ сепарабилан Хилбертов простор за свако $n \in \mathbb{N}$, тада је Хилбертов простор $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$ такође сепарабилан. Заиста, ако је $(e_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ о.н.б. у $\mathcal{H}_n$, тада је скуп свих низова $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$ са својством $f_n = e_k^{(n)}$ за неко $n, k \in \mathbb{N}$ и $f_m = 0$ за све $m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ једна о.н.б. у $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$.

Нека је $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$. Тада пресликавање $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n : \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n \rightarrow \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$ задато изразом $(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n)((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (A_n f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ за свако $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$ представља један ограничен линеаран оператор и важи $\|\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|$. Уколико је $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| = +\infty$, тада оператор $A \in \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ за који је $A|_{\mathcal{H}_n} = A_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ не постоји. Уколико је $A_n, B_n \in \mathcal{H}_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|B_n\| < +\infty$ тада важи једнакост $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n \bigoplus_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n B_n$. Специјално, имамо да важи једнакост

$$(1.34) \quad \left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n \right)^k = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n^k \text{ за свако } k \in \mathbb{N}.$$

Биће нам потребан резултат [21, Теорема 2.2] који се бави компактношћу директног збира оператора. У поменутом раду овај резултат је наведен без доказа па зато укључујемо и доказ.

Лема 1.43. [52] Нека је $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ Хилбертових простора, $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$. Тада, имамо $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ ако и само ако $A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = 0$.

Доказ. ($\Rightarrow$.) Нека је $k \in \mathbb{N}$. Низ $(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathcal{H}_k$ конвергира слабо ка 0 ако и само ако низ $(y_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, где је $y_n^{(k)} = (0, 0, \dots, 0, x_n^{(k)}, 0, \dots)$ (на позицији k се налази $x_n^{(k)}$), конвергира слабо ка $(0, 0, \dots, 0, \dots) \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$. Из $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ имамо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_k x_n^{(k)}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\bigoplus_{m=1}^{+\infty} A_m) y_n^{(k)}\| = 0$. Одавде следи $A_k \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}_k)$.

Докажимо сада $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = 0$. Претпоставимо да постоји $\varepsilon > 0$ и подниз $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такав да је $\|A_{n_k}\| \geq 2\varepsilon$ за свако $k \in \mathbb{N}$. Постоје вектори $x_{n_k} \in \mathcal{H}_{n_k}$, $\|x_{n_k}\| = 1$, тако да је $\|A_{n_k} x_{n_k}\| \geq \varepsilon$ за свако $k \in \mathbb{N}$. Уколико формирамо векторе $v^{(k)} = (0, 0, \dots, 0, x_{n_k}, 0, \dots) \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$ (на позицији n_k се налази x_{n_k}) добијамо низ $(v^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ у $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$ који слабо конвергира ка $0 \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$. Заиста, ако $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$, тада $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0$ на основу $\sum_{n=1}^{+\infty} \|y_n\|^2 < +\infty$. Зато, имамо $|\langle v^{(k)}, y \rangle| = |\langle x_{n_k}, y_{n_k} \rangle| \leq \|x_{n_k}\| \cdot \|y_{n_k}\| = \|y_{n_k}\| \rightarrow 0$ када $k \rightarrow \infty$. На основу претпоставке $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ следи $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n) v^{(k)}\| = 0$ тј. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{n_k} x_{n_k}\| = 0$. Ово је контрадикција са $\|A_{n_k} x_{n_k}\| \geq \varepsilon > 0$ за свако $k \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$.) Нека је $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ низ из $\bigoplus_{m=1}^{+\infty} \mathcal{H}_m$, при чему је $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$, који слабо конвергира ка 0 и нека је $N \in \mathbb{N}$ фиксирано. Тада постоји $M > 0$ тако да је $\|a^{(n)}\| \leq M$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада, имамо

$$\begin{aligned} \left\| \left(\bigoplus_{k=1}^{+\infty} A_k \right) a^{(n)} \right\|^2 &= \sum_{k=1}^N \|A_k a_k^{(n)}\|^2 + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \|A_k a_k^{(n)}\|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^N \|A_k a_k^{(n)}\|^2 + M^2 \sup_{N \ni k \geq N+1} \|A_k\|^2. \end{aligned}$$

Низ $(a_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathcal{H}_k$ конвергира слабо ка 0 за свако $k \in \mathbb{N}$. Из $A_k \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}_k)$ за $k \in \{1, \dots, N\}$ добијамо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \|A_k a_k^{(n)}\|^2 = 0$. Одавде, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(\bigoplus_{k=1}^{+\infty} A_k) a^{(n)}\|^2 \leq M^2 \sup_{N \ni k \geq N+1} \|A_k\|^2$ за свако $N \in \mathbb{N}$. Ако $N \rightarrow \infty$ добијамо

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\bigoplus_{k=1}^{+\infty} A_k \right) a^{(n)} \right\|^2 &\leq M^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{N \ni k \geq N+1} \|A_k\|^2 \\ &= M^2 \limsup_{k \rightarrow \infty} \|A_k\|^2 = M^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо да је $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$. □

Глава 2

Интеграција функција $A : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Нека је у овом поглављу $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор над комплексним пољем скалара. Напоменимо да ћемо се у овом делу дисертације бавити резултатима који су већ познати, а који се односе на слабо* интеграбилност фамилија оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Посебно издвајамо радове [42, 38, 43, 59, 41, 39, 40, 44, 36]. Поред наведених радова упућујемо читаоца и на скорашње резултате [10, Пример 4.10] и [11, Пример 2.26, Пример 3.15] у којима оператор-вредносни интеграл играју значајну улогу при конструкцији позитивних пресликавања као и на рад [74] у коме се истражују питања *нумеричког* и *спектралног радијуса* фамилија оператора корисетћи оператор-вредносне интеграле.

Приметимо да су поменути радови углавном новијег датума, што указује на то да је тема о којој ће бити речи модерна и актуелна. Сажети приказ ове тематике, са акцентом на разне типове *операторних* и *норма* Коши–Шварцових неједнакости, представљен је и у [4, Поглавље 6]. Такође, у овом поглављу дисертације наводимо и оригиналне резултате аутора добијене у [51, 52], који су повезани са резултатима наведеним у горе цитираној литератури.

2.1 Гелфандов оператор-вредносни интеграл

У овој секцији извршићемо конкретизацију Дефиниције 1.31, имајући у виду да је дуални простор простора $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ изометрички изоморфан са простором $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (видети [30, Теорема 12.1]). Прецизније, за пресликавање $\Omega \ni t \mapsto A_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ кажемо да је *слабо* мерљиво* уколико је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \text{tr}(A_t Y) \in \mathbb{C}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива за свако $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Ако функција $\Omega \ni t \mapsto \text{tr}(A_t Y) \in \mathbb{C}$ припада простору $L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ за свако $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, на основу Теореме 1.30, следи да постоји јединствен елемент из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ који ће бити означен са $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$, такав да је

$$(2.1) \quad \text{tr} \left(\int_{\Omega} A_t d\mu(t) Y \right) = \int_{\Omega} \text{tr}(A_t Y) d\mu(t) \quad \text{за свако } Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}).$$

У том случају, кажемо да је фамилија оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ *слабо* интеграбилна* и оператор $\int_{\Omega} A_t d\mu(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ се назива *слабо* интеграл* или *Гелфандов интеграл* фамилије $(A_t)_{t \in \Omega}$. Такође, кажемо да је функција $A : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *слабо* интеграбилна*, где је слово A придружено слабо* интеграбилној фамилији оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$. Уколико одаберемо

оператор Y који је ранга 1 у (2.1), добијамо¹ једнакост

$$(2.2) \quad \left\langle \int_{\Omega} A_t d\mu(t) f, g \right\rangle = \int_{\Omega} \langle A_t f, g \rangle d\mu(t) \text{ за све векторе } f, g \in \mathcal{H}.$$

Једнакост (2.2) је битна јер даје *сесквилинеарну форму* оператора $\int_{\Omega} A_t d\mu(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ако је функција $\Omega \ni t \mapsto \langle A_t f, g \rangle \in \mathbb{C}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива за свако $f, g \in \mathcal{H}$, тада је функција $A : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* мерљива. Заиста, уколико је $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ тада имамо развој $Y = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) e_n \otimes f_n^*$ у норми идеала $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Одавде и из (1.27) следи

$$(2.3) \quad \text{tr}(A_t Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) \text{tr}(A_t e_n \otimes f_n^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) \langle A_t e_n, f_n \rangle$$

за свако $t \in \Omega$, па је функција $\Omega \ni t \mapsto \text{tr}(A_t Y) \in \mathbb{C}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива као сума таквих.

Наредна теорема је важна јер показује да из интеграбилности функције $\Omega \ni t \mapsto \langle A_t f, g \rangle \in \mathbb{C}$ за свако $f, g \in \mathcal{H}$ следи интеграбилност функције $\Omega \ni t \mapsto \text{tr}(A_t Y) \in \mathbb{C}$ за свако $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, што у конкретним ситуацијама значајно олакшава рад.

Такође, кроз доказ поменуте теореме ћемо видети да је у том случају испуњено $\sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle A_t f, g \rangle| d\mu(t) < +\infty$, што ће бити значајно у питањима нормирања векторских простора оваквих $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција. Треба напоменути да је доказ ове теореме први пут презентован у [51, Лема 1.1] али се ово тврђење јавља и користи и раније, што се може видети у [36, Лема 1.1] као и у коментарима из [42, Страна 3].

Теорема 2.1. Нека је $\Omega \ni t \mapsto \langle A_t f, g \rangle \in \mathbb{C}$ елементи простора $L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ за све векторе $f, g \in \mathcal{H}$. Тада је фамилија $(A_t)_{t \in \Omega}$ слабо* интеграбилна и важи једнакост (2.1)

Доказ. За $t \in \Omega$ имамо једнакост (2.3). Дефинишимо пресликавање $\Psi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ изразом $\Psi(f, g)(t) = \langle A_t f, g \rangle$ за $(f, g) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ и $t \in \Omega$. Јасно је да је Ψ сесквилинеарна форма. Доказаћемо да је Ψ ограничена форма, тј. да је

$$\sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle A_t f, g \rangle| d\mu(t) = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \|\Psi(f, g)\|_{L^1(\Omega, \mu)} = M < +\infty$$

јер у том случају из (2.3) и $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ одмах добијамо

$$\int_{\Omega} |\text{tr}(A_t Y)| d\mu(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) \int_{\Omega} |\langle A_t e_n, f_n \rangle| d\mu(t) \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(Y) < +\infty.$$

Нека је $g \in \mathcal{H}$ фиксиран вектор и посматрајмо пресликавање $\mathcal{J}_g : \mathcal{H} \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$ које је дефинисано изразом $\mathcal{J}_g(f)(t) = \langle A_t f, g \rangle$. У питању је линеарно пресликавање док његову ограниченост показујемо Теоремом о затвореном графику. Нека је зато

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\|f_n - f\| + \|\mathcal{J}_g(f_n) - h\|_{L^1(\Omega, \mu)}] = 0,$$

при чему је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ у $\mathcal{H}$, $f \in \mathcal{H}$ и $h \in L^1(\Omega, \mu)$. Постоји подниз $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такав да је $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}_g(f_{n_k})(t) = h(t)$ тј. $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle A_{t_{n_k}} f_{n_k}, g \rangle = h(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. За такве $t \in \Omega$ и из $A_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ закључујемо $\langle A_t f, g \rangle = h(t)$ тј. $\mathcal{J}_g(f)(t) = h(t)$. Како последња релација важи за μ -скоро свако $t \in \Omega$ следи да је $\mathcal{J}_g(f) = h$ у $L^1(\Omega, \mu)$. Доказали смо да је

¹Овде користимо (1.27).

$\mathcal{J}_g \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, L^1(\Omega, \mu))$. Слично, за фиксиран вектор $f \in \mathcal{H}$ дефинишимо пресликавање $\mathcal{I}_f : \mathcal{H} \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$ изразом $\mathcal{I}_f(g)(t) = \langle A_t^* g, f \rangle$. Опет, у питању је линеарно пресликавање за које на исти начин закључујемо да је ограничено, те коначни закључак изводимо на следећи начин. Имамо да важи

$$\sup_{\|f\|=\|g\|=1} \|\Psi(f, g)\|_{L^1(\Omega, \mu)} = \sup_{\|g\|=1} \sup_{\|f\|=1} \|\mathcal{J}_g(f)\|_{L^1(\Omega, \mu)} \leq \sup_{\|g\|=1} \|\mathcal{J}_g\| < +\infty$$

јер је на основу Теореме Банаха-Штајнхауса за свако фиксирано $f \in \mathcal{H}$ испуњено

$$\begin{aligned} \sup_{\|g\|=1} \|\mathcal{J}_g(f)\|_{L^1(\Omega, \mu)} &= \sup_{\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle A_t f, g \rangle| d\mu(t) \\ &= \sup_{\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle A_t^* g, f \rangle| d\mu(t) = \sup_{\|g\|=1} \|\mathcal{I}_f(g)\|_{L^1(\Omega, \mu)} = \|\mathcal{I}_f\| < +\infty, \end{aligned}$$

тј. фамилија оператора $\{\mathcal{J}_g : g \in \mathcal{H}, \|g\| = 1\}$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H}, L^1(\Omega, \mu))$ је пунктуално ограничена а самим тим и униформно ограничена. $\square$

Последица 2.2. Нека је $\Omega \ni t \mapsto \langle A_t f, g \rangle \in \mathbb{C}$ елементи простора $L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ за све векторе $f, g \in \mathcal{H}$. Тада је $M := \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle A_t f, g \rangle| d\mu(t) < +\infty$.

Напомена 2.3. Може се показати да под условима из Последице 2.2 важи и једнакост $M = \sup_{Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}), \|Y\|_1=1} \int_{\Omega} |\text{tr}(A_t Y)| d\mu(t)$ (видети [59, Произвојица 1.8]).

Како је рестриција интеграбилне функције на мерљив подскуп опет интеграбилна функција, за слабо* интеграбилну фамилију $(A_t)_{t \in \Omega}$ и за свако $\mathfrak{M} \ni E \subseteq \Omega$ имамо да постоји јединствен оператор $\int_E A_t d\mu(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ који задовољава једнакост

$$(2.4) \quad \left\langle \int_E A_t d\mu(t) f, g \right\rangle = \int_E \langle A_t f, g \rangle d\mu(t) \text{ за све векторе } f, g \in \mathcal{H}.$$

Уколико је $f \in \mathcal{H}$ тада је $(A_t f)_{t \in \Omega}$ фамилија вектора у $\mathcal{H}$. Ако је $(A_t)_{t \in \Omega}$ слабо* интеграбилна фамилија тада је $(A_t f)_{t \in \Omega}$ Петис интеграбилна фамилија вектора у $\mathcal{H}$ и важи једнакост $\int_E A_t f d\mu(t) = \int_E A_t d\mu(t) f$ за свако $E \in \mathfrak{M}$. Ово следи директно на основу (2.4), Рисове² теореме о репрезентацији функционала на Хилбертовом простору и дефиниције Петисовог интеграла.

Лако се проверава да важе једнакости $\int_E \alpha \mathcal{A}_t d\mu(t) = \alpha \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$, $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) + \int_E \mathcal{B}_t d\mu(t) = \int_E (\mathcal{A}_t + \mathcal{B}_t) d\mu(t)$ и $\int_{E \sqcup F} \mathcal{A}_t d\mu(t) = \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) + \int_F \mathcal{A}_t d\mu(t)$ за све $\alpha \in \mathbb{C}$, $E, F \in \mathfrak{M}$, $E \cap F = \emptyset$ и за произвољне слабо* интеграбилне фамилије оператора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Такође, ако је $(A_t)_{t \in \Omega}$ слабо* интеграбилна фамилија оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и ако су дати оператори $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тада су и фамилије оператора $(A_t^*)_{t \in \Omega}$, $(BA_t)_{t \in \Omega}$ и $(A_t C)_{t \in \Omega}$ слабо* интеграбилне и за свако $E \in \mathfrak{M}$ важе једнакости

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \left(\int_E A_t d\mu(t) \right)^* &= \int_E A_t^* d\mu(t), \\ B \int_E A_t d\mu(t) &= \int_E BA_t d\mu(t), \int_E A_t d\mu(t) C = \int_E A_t C d\mu(t). \end{aligned}$$

Једнакости (2.5) као и остала наведена својства се лако доказују употребом дефиниционе релације (2.4). Такође, ове једнакости ће бити разматране у Поглављу 4 у знатно општијем контексту (видети Тврђење 4.12 и Тврђење 4.13).

²Frigyies Riesz (1880–1956), мађарски математичар

Матрични оператори и Гельфандов интеграл

Претходна разматрања су вршена за слабо* интеграбилне фамилије ограничених оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Сада ћемо посматрати фамилију оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$, при чему је $A_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ за $t \in \Omega$ и где је $\mathcal{K}$ неки сепарабилни Хилбертов простор не обавезно једнак са $\mathcal{H}$. Дакле, нека је функција $\Omega \ni t \mapsto \langle A_t f, g \rangle_{\mathcal{K}} \in \mathbb{C}$ елемент простора $L^1(\Omega, \mu)$ за свако фиксирано $f \in \mathcal{H}$ и $g \in \mathcal{K}$. Можемо посматрати фамилију оператора $\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} \right)_{t \in \Omega}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$. На основу дефиниције скаларног производа (1.33) у $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ имамо $\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}} = \langle A_t f, g \rangle_{\mathcal{K}}$ за свако $t \in \Omega$. За фиксирано $E \in \mathfrak{M}$, на основу горњег разматрања, имамо да постоји оператор $\int_E \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} d\mu(t)$ у простору $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ за који важи

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \left\langle \int_E \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} d\mu(t) \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}} &= \int_E \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}} d\mu(t) \\ &= \int_E \langle A_t f, g \rangle_{\mathcal{K}} d\mu(t) \text{ за свако } \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}. \end{aligned}$$

На основу једнакости (2.6) можемо доказати да је сесквилинеарна форма $\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (f, g) \mapsto \int_E \langle A_t f, g \rangle_{\mathcal{K}} d\mu(t) \in \mathbb{C}$ ограничена. Заиста, применом Коши-Шварцове неједнакости и из постојања оператора $\int_E \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} d\mu(t)$ у простору $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ следи да важи

$$\begin{aligned} \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}=\|g\|_{\mathcal{K}}=1} \left| \int_E \langle A_t f, g \rangle_{\mathcal{K}} d\mu(t) \right| &= \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}=\|g\|_{\mathcal{K}}=1} \left| \left\langle \int_E \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} d\mu(t) \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}} \right| \\ &\leq \left\| \int_E \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} d\mu(t) \right\| \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}}=\|g\|_{\mathcal{K}}=1} \left\| \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}}^2 = 2 \left\| \int_E \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} d\mu(t) \right\| < +\infty. \end{aligned}$$

На основу [53, Теорема 6.3] постоји оператор $\int_E A_t d\mu(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ такав да важи

$$\left\langle \int_E A_t d\mu(t) f, g \right\rangle_{\mathcal{K}} = \int_E \langle A_t f, g \rangle_{\mathcal{K}} d\mu(t) \text{ за свако } (f, g) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}.$$

Приметимо да за овако дефинисан оператор $\int_E A_t d\mu(t)$ важи очекивана једнакост

$$\int_E \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_t & 0 \end{bmatrix} d\mu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \int_E A_t d\mu(t) & 0 \end{bmatrix},$$

јер оба оператора имају исте сесквилинеарне форме. Напоменимо да ћемо у Поглављу 4 додатно уопштити претходна разматрања тј. посматраћемо фамилије оператора, при чему ће овог пута оператори деловати између два Банахова простора.

Наредни пример је такође повезан са матрицама. Прецизније, показаћемо да Теорема 1.24 не важи за слабије концепте интеграције, као што је уведени концепт интеграције $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција.

Пример 2.4. [73] Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор, $\dim \mathcal{H} = +\infty$ и нека је $M > 0$ произвољно. Посматрајмо низ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нилпотентних ојератора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за који је

(а) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$; (б) $\inf_{n \geq 2} \|A_n\| \geq M$; (в) $\|A_{n+1}^n\| = \|A_{n+1}\|^n$ за све $n \in \mathbb{N}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо оћератћор $\widetilde{A}_n \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ изразом

$$\widetilde{A}_n = \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \chi_{\{n\}}(k) A_k.$$

Тада је $r(\widetilde{A}_n) = r(A_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ а очигледно важи и $\widetilde{A}_n \widetilde{A}_m = \widetilde{A}_m \widetilde{A}_n$ за свако $n, m \in \mathbb{N}$. Доказаћемо да важи неједнакост

$$r\left(\left(\text{weak}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n\right) > \sum_{n=1}^{+\infty} r(\widetilde{A}_n).$$

Важи $(\widetilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L_G^1(\mathbb{N}, \mu, \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H})))$, при чему је μ бројачка мера на $\mathbb{N}$. Такође је

$$\int_{\mathbb{N}} \widetilde{A}_n d\mu(n) = \left(\text{weak}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Заиста, ово следи јер за свако $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathcal{H})$ важи

$$\left\langle \left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n\right) x, x \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_n x_n, x_n \rangle = \left\langle \left(\int_{\mathbb{N}} \widetilde{A}_n d\mu(n)\right) x, x \right\rangle = \left\langle \left(\left(\text{weak}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n\right) x, x \right\rangle.$$

На основу једнакости (1.34) добијамо да за свако $k \in \mathbb{N}$ важи

$$\left(\left(\text{weak}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n\right)^k = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n^k.$$

На основу услова (б) и (в) имамо да је за свако $k \in \mathbb{N}$ испуњено

$$\left\| \left(\left(\text{weak}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n\right)^k \right\|^{\frac{1}{k}} = \left\| \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n^k \right\|^{\frac{1}{k}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n^k\|^{\frac{1}{k}} \geq \|A_{k+1}^k\|^{\frac{1}{k}} = \|A_{k+1}\| \geq M.$$

Користећи Гелфандову формулу за спектрални полућречник добијамо

$$r\left(\int_{\mathbb{N}} \widetilde{A}_n d\mu(n)\right) = r\left(\left(\text{weak}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n\right) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n\right)^k \right\|^{\frac{1}{k}} \geq M > 0.$$

Са друге стране, сви оћератћори A_n су нильотенентни, одакле је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r(\widetilde{A}_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} r(A_n) = 0.$$

Битно је напоменути да низ нильотенентних оћератћора $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који задовољава услове (а), (б) и (в) постоји. Рецимо, уколико је $\mathcal{H} = \ell^2$ тада можемо узети низ

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus 0, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus 0, \quad \dots$$

Сличан низ се може конструисати и у опћем случају. △

2.2 Простори $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и $L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$

Норму оператора $\int_E A_t d\mu(t)$ процењујемо са

$$\left\| \int_E A_t d\mu(t) \right\| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \left| \int_E \langle A_t f, g \rangle d\mu(t) \right| \leq \int_E |\langle A_t f, g \rangle| d\mu(t) \leq M < +\infty,$$

где је број $M < +\infty$ из Последице 2.2. Од интереса је посматрати величину

$$(2.7) \quad \|(A_t)_{t \in \Omega}\|_G = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle A_t f, g \rangle| d\mu(t) < +\infty$$

за сваку слабо* интегралну фамилију оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Напоменимо да једнакост

$$\sup_{\|f\|=\|g\|=1} \left| \int_{\Omega} \langle A_t f, g \rangle d\mu(t) \right| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \int_{\Omega} |\langle A_t f, g \rangle| d\mu(t)$$

не мора бити тачна у општем случају. Једноставан пример је дат са $\Omega = \{t_1, t_2\}$, $t_1 \neq t_2$ и $0 \neq A_{t_1} = -A_{t_2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Дефиниција 2.5. Слабо* мерљиве фамилије оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ и $(B_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ су слабо* μ -еквивалентне ако је за свако $f, g \in \mathcal{H}$ важи једнакост $\langle A_t f, g \rangle = \langle B_t f, g \rangle$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$.

Напоменимо да скуп μ -мере нула где једнакост $\langle A_t f, g \rangle = \langle B_t f, g \rangle$ (евентуално) не важи зависи од вектора $f, g \in \mathcal{H}$. На основу поларизационог идентитета довољно је проверити да ли за свако $f \in \mathcal{H}$ важи једнакост $\langle A_t f, f \rangle = \langle B_t f, f \rangle$ μ -скоро свуда.

Дефиниција 2.6. Нека је $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ скуи свих слабо* еквивалентних фамилија $(A_t)_{t \in \Omega}$ оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ код којих је $\|(A_t)_{t \in \Omega}\|_G < +\infty$.

Нека је за сваки вектор $f \in \mathcal{H}$ испуњен услов $\int_{\Omega} \|A_t f\|^2 d\mu(t) < +\infty$. Последње је еквивалентно са тим да постоји интеграл $\int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t)$ као елемент простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Како је у том случају оператор $\int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t)$ позитиван, имамо да важи

$$(2.8) \quad \sup_{\|f\|=1} \int_{\Omega} \|A_t f\|^2 d\mu(t) = \sup_{\|f\|=1} \left\langle \int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t) f, f \right\rangle = \left\| \int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t) \right\|.$$

На основу (2.8) можемо увести следећу дефиницију (видети [42, Дефиниција 1]).

Дефиниција 2.7. Нека је $L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ скуи свих слабо* μ -еквивалентних фамилија $(A_t)_{t \in \Omega}$ код којих је $\int_{\Omega} \|A_t f\|^2 d\mu(t) < +\infty$ за свако $f \in \mathcal{H}$.

Битно је истаћи да скуп $L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ уведен Дефиницијом 2.7, са стандардно дефинисаним операцијама, чини векторски простор. На овом векторском простору норма се може задати изразом

$$\|(A_t)_{t \in \Omega}\|_{L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))} = \sqrt{\left\| \int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t) \right\|} = \sup_{\|f\|=1} \sqrt{\int_{\Omega} \|A_t f\|^2 d\mu(t)}.$$

Заиста, уколико је $\|(A_t)_{t \in \Omega}\|_{L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))} = 0$ за неко $(A_t)_{t \in \Omega}$ из $L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ тада је $\int_{\Omega} \|A_t f\|^2 d\mu(t) = 0$ за сваки вектор $f \in \mathcal{H}$, одакле закључујемо да је $\|A_t f\| = 0$ за

μ -скоро свако $t \in \Omega$. Зато је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \langle A_t f, f \rangle \in \mathbb{C}$ једнака нули за μ -скоро свако $t \in \Omega$, што значи да је фамилија оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ нула елемент векторског простора $L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Такође, функција $\|\cdot\|_{L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))}$ задовољава неједнакост троугла, што можемо видети користећи (2.8) на следећи начин. За $\alpha \in (0, 1)$ и за произвољно одабране фамилије оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ и $(B_t)_{t \in \Omega}$ из $L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, користећи конвексност квадратне функције, добијемо да важи

$$\begin{aligned} \|(A_t)_{t \in \Omega} + (B_t)_{t \in \Omega}\|_{L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))}^2 &\leq \sup_{\|f\|=1} \int_{\Omega} (\|A_t f\| + \|B_t f\|)^2 d\mu(t) \\ &= \sup_{\|f\|=1} \int_{\Omega} \left(\alpha \cdot \frac{\|A_t f\|}{\alpha} + (1-\alpha) \cdot \frac{\|B_t f\|}{1-\alpha} \right)^2 d\mu(t) \\ &\leq \sup_{\|f\|=1} \int_{\Omega} \left(\alpha \cdot \left(\frac{\|A_t f\|}{\alpha} \right)^2 + (1-\alpha) \cdot \left(\frac{\|B_t f\|}{1-\alpha} \right)^2 \right) d\mu(t) \\ &= \sup_{\|f\|=1} \int_{\Omega} \left(\frac{\|A_t f\|^2}{\alpha} + \frac{\|B_t f\|^2}{1-\alpha} \right) d\mu(t) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sup_{\|f\|=1} \int_{\Omega} \|A_t f\|^2 d\mu(t) + \frac{1}{1-\alpha} \sup_{\|f\|=1} \int_{\Omega} \|B_t f\|^2 d\mu(t) \\ &= \frac{\|(A_t)_{t \in \Omega}\|_{L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))}^2}{\alpha} + \frac{\|(B_t)_{t \in \Omega}\|_{L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))}^2}{1-\alpha} \leq (\|A_t\|_{L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))} + \|B_t\|_{L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))})^2. \end{aligned}$$

Последња неједнакост следи на основу тога што функција $f_{a,b} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ дата са

$$f_{a,b}(x) = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x} \text{ за свако } x \in (0, 1),$$

има минимум на $(0, 1)$ за $x_0 = \frac{a}{a+b}$ и тај минимум износи $f_{a,b}(x_0) = (a+b)^2$.

2.3 Некомплетност простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$

У овој секцији показаћемо да нормиран простор $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, који је дефинисан у прошлој секцији, типично није комплетан (заједно са Теоремом 2.9 погледати и [6, Теорема 3.6] о некомплетности слично дефинисаног простора интеграбилних фамилија мера из Поглавља 5). Наредна два тврђења су добијена у [52].

Лема 2.8. Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор, $\dim \mathcal{H} = +\infty$, $a \in \mathcal{H}$, $\|a\| = 1$ и

$$X_a = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A(x) = 0 \in \mathcal{H} \text{ за све } x \in \{a\}^\perp\}.$$

- (а) Нормиран простор X_a је затворен у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и X_a је изометрички изоморфан са $\mathcal{H}$.
- (б) Ако је $F \in \mathcal{B}(X_a, \mathbb{C})$ тада постоји јединствен елемент $x_F \in \mathcal{H}$ такав да је $F(A) = \langle Aa, x_F \rangle$ за свако $A \in X_a$ и важи једнакост $\|F\| = \|x_F\|$. Такође, за свако $x \in \mathcal{H}$ функција $F_x : X_a \rightarrow \mathbb{C}$ дата са $F_x(A) = \langle Aa, x \rangle$ дефинише ограничени, линеаран функционал на X_a и важи једнакост $\|F_x\| = \|x\|$.
- (в) Нормиран простор $L_G^1(\Omega, \mu, X_a)$ је затворен простор нормираног простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ уколико је $\mathcal{H}$ сепарабилан.

Доказ. (а) Скуп X_a је векторски потпростор у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Уколико је низ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из X_a конвергентан ка неком $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тада за свако $x \in \{a\}^\perp$ имамо једнакост $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$. Зато, $A = 0$ на $\{a\}^\perp$. Дефинишимо пресликавање $\varphi : X_a \rightarrow \mathcal{H}$ изразом

$$\varphi_a(A) = Aa \text{ за свако } A \in X_a.$$

Пресликавање φ_a је линеарно, изометрично и бијективно између Банахових простора X_a и $\mathcal{H}$. Заиста, линеарност овог пресликавања је очигледна а користећи $\|a\| = 1$ као и разлагање $x = \langle x, a \rangle a + a_x$, при чему је $a_x \in \{a\}^\perp$, закључујемо³ да важи

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, a \rangle| \cdot \|Aa\| = \|a\| \cdot \|Aa\| = \|Aa\| = \|\varphi_a(A)\|$$

за свако $A \in X_a$, што доказује изометричност пресликавања φ_a . Докажимо да је φ_a бијекција. Из доказане једнакости $\|A\| = \|\varphi_a(A)\|$ следи да је $\varphi_a : X_a \rightarrow \mathcal{H}$ инјективно пресликавање. Нека је сада $f \in \mathcal{H}$ произвољно и дефинишимо оператор $A_f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ изразом $A_f(x) = \langle x, a \rangle f$. Тада је $A_f \in X_a$ и важи $\varphi_a(A_f) = A_f(a) = \langle a, a \rangle f = \|a\|^2 f = f$ јер је $\|a\| = 1$. Овине смо доказали да је φ_a бијекција а тиме и да је φ_a изоморфизам простора X_a и $\mathcal{H}$.

(б) Нека је $F \in \mathcal{B}(X_a, \mathbb{C})$ и дефинишимо пресликавање $G : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ изразом

$$G(f) = F(\varphi_a^{-1}(f)) \text{ за свако } f \in \mathcal{H}.$$

Тада, $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$. На основу Рисове теореме постоји $x_F \in \mathcal{H}$ такав да је $G(f) = \langle f, x_F \rangle$ за све $f \in \mathcal{H}$. Уколико ставимо $f = Aa = \varphi_a(A) \in \mathcal{H}$ добијамо

$$\langle Aa, x_F \rangle = F(\varphi_a^{-1}(\varphi_a(A))) = F(A) \text{ за све } A \in X_a.$$

Уколико је $\langle Aa, x'_F \rangle = \langle Aa, x''_F \rangle$ тј. $\langle Aa, x'_F - x''_F \rangle = 0$ за све $A \in X_a$ тада за оператор $A_{x'_F - x''_F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ који је дат изразом

$$A_{x'_F - x''_F}(y) = \langle y, a \rangle \cdot (x'_F - x''_F) \text{ за свако } y \in \mathcal{H}$$

важи $A_{x'_F - x''_F} \in X_a$ и $\langle A_{x'_F - x''_F} a, x'_F - x''_F \rangle = 0$ тј.

$$0 = \langle \langle a, a \rangle (x'_F - x''_F), x'_F - x''_F \rangle = \|a\|^2 \cdot \|x'_F - x''_F\|^2$$

одакле следи $x'_F = x''_F$. Да докажемо остатак дела **(б)** овог тврђења, нека је $x \in \mathcal{H}$ произвољно а можемо претпоставити да је и $x \neq 0$. Тада имамо $|F_x(A)| \leq \|Aa\| \cdot \|x\| = \|A\| \cdot \|x\|$ за свако $A \in X_a$, одакле је $\|F_x\| \leq \|x\|$. За оператор $A_x : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ дефинисан изразом

$$A_x(y) = \langle y, a \rangle x \text{ за свако } y \in \mathcal{H},$$

имамо $A_x \in X_a$, $\|A_x\| = \|a\| \cdot \|x\| = \|x\|$ као и

$$\|F_x\| \geq \frac{|F_x(A_x)|}{\|A_x\|} = \frac{|\langle A_x(a), x \rangle|}{\|x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$$

па можемо закључити да важи једнакост $\|F_x\| = \|x\|$.

³Овде смо користили $A(a_x) = 0 \in \mathcal{H}$.

(в) Нека је $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ низ из $L_G^1(\Omega, \mu, X_a)$ такав да конвергира ка неком $A = (A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и нека је $0 \neq b \in \{a\}^\perp$. За $n \in \mathbb{N}$ имамо $A_t^{(n)}b = 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ (и тај скуп зависи од n и b). Тада, за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо

$$\|A^{(n)} - A\|_G = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \int_{\Omega} |\langle A_t^{(n)}x - A_tx, y \rangle| d\mu(t) \geq \frac{1}{\|b\|} \sup_{\|y\|=1} \int_{\Omega} |\langle A_tb, y \rangle| d\mu(t).$$

Једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^{(n)} - A\|_G = 0$ повлачи $\int_{\Omega} |\langle A_tb, y \rangle| d\mu(t) = 0$ за свако $y \in \mathcal{H}$. За фиксиран $y \in \mathcal{H}$ постоји скуп $N_{b,y} \in \mathfrak{M}$, $\mu(N_{b,y}) = 0$ такав да је $|\langle A_tb, y \rangle| = 0$ за свако $t \in \Omega \setminus N_{b,y}$. Нека је $N_b = \bigcup_{y \in \mathcal{B}} N_{b,y}$, при чему је $\mathcal{D}$ неки пребројив и густ скуп у затвореној јединичној лопти у $\mathcal{H}$. Зато, имамо $N_b \in \mathfrak{M}$ и $\mu(N_b) = 0$.

Сада, за све $t \in \Omega \setminus N_b$ добијамо $\|A_tb\| = \sup_{y \in \mathcal{D}} |\langle A_tb, y \rangle| = 0$. Нека је $N = \bigcup_{b \in \mathcal{D}} N_b$. Поново, $N \in \mathfrak{M}$, $\mu(N) = 0$ и $\|A_t\| = \sup_{b \in \mathcal{D}} \|A_tb\| = 0$ за све $t \in \Omega \setminus N$. То значи $A_t = 0$ на $\{a\}^\perp$ за све $t \in \Omega \setminus N$ тј. $A = (A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, X_a)$. $\square$

У наредној теореме ћемо доказати да нормиран простор $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ не мора бити Банахов индиректним аргуменом који се ослања на значајну Теорему 1.29.

Теорема 2.9. Нека је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор и $\dim \mathcal{H} = +\infty$. Нормиран простор $L_G^1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ није Банахов.

Доказ. Нека је $e \in \mathcal{H}$ јединични вектор и нека је X_e Банахов простор из Леме 2.8. Ако је $A_t \in X_e$ за $t \in [0, 1]$, тада се слаба* мерљивост и слаба мерљивост фамилије оператора $(A_t)_{t \in [0,1]}$ поклапају на основу дела (б) Леме 2.8. Слично као малопре, за $x \in \mathcal{H}$ постоји јединствен елемент $a_x \in \{e\}^\perp$ такав да важи разлагање $x = \langle x, e \rangle e + a_x$. Зато, за слабо мерљиве фамилије оператора $(A_t)_{t \in [0,1]}$ у X_e имамо

$$\begin{aligned} \|(A_t)_{t \in [0,1]}\|_G &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \int_{[0,1]} |\langle A_tx, y \rangle| dm(t) \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \int_{[0,1]} \left| \langle x, e \rangle \langle A_te, y \rangle + \underbrace{\langle A_ta_x, y \rangle}_{=0 \text{ м.с.с.}} \right| dm(t) \\ (2.9) \quad &= \sup_{\|x\|=1} |\langle x, e \rangle| \cdot \sup_{\|y\|=1} \int_{[0,1]} |\langle A_te, y \rangle| dm(t) \\ &= \sup_{\substack{F \in X_e^* \\ \|F\|=1}} \int_{[0,1]} |F(A_t)| dm(t) = \|(A_t)_{t \in [0,1]}\|_P. \end{aligned}$$

Простор X_e је рефлексиван на основу дела (а) Леме 2.8. Зато, $\|(A_t)_{t \in [0,1]}\|_P < +\infty$ за слабо мерљиве фамилије $(A_t)_{t \in [0,1]}$ из X_e повлачи да је $(A_t)_{t \in [0,1]}$ елемент простора $P_1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, X_e)$. Користећи (2.9) добијамо једнакост

$$P_1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, X_e) = L_G^1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, X_e).$$

На основу дела (а) Леме 2.8, нормиран простор X_e је затворен у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Користећи $\dim \mathcal{H} = +\infty$, уз помоћ Теореме 1.29 имамо да нормиран простор $P_1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, X_e)$ није Банахов. Зато, постоји Кошијев низ $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ у $P_1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, X_e)$ који не конвергира у $P_1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, X_e)$. Из (2.9) следи да је низ $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев у простору $L_G^1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, X_e)$. Низ $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ је онда Кошијев и у $L_G^1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и овај низ не конвергира у $L_G^1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ на основу дела (в) Леме 2.8. Зато, $L_G^1([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ није Банахов простор. $\square$

2.4 Припадност оператора $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ идеалима $\mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$

Нека је Φ произвољна с. н. функција и нека је $(A_t)_{t \in \Omega}$ слабо* интеграбилна фамилија оператора. Ову секцију започињемо познатим резултатом о припадности ограниченог оператора $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ идеалу $\mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$, који се може наћи у [31, А. 5]. Треба напоменути да је доказ овог тврђења у неким деловима измењен и прилагођен материји и духу излагања у овој дисертацији. За општије резултате погледати [59, Теорема 2.3].

Напоменимо да ћемо са $\mathcal{D}$ означавати произвољан пребројив и густ скуп у затвореној јединичној лопти сепарабилног Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ (као у доказу Леме 2.8), док ћемо са $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ означавати векторски простор оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ чија је слика коначне димензије (простор оператора *коначног ранга*). Слично, за $n \in \mathbb{N}$ са $\mathcal{K}_n(\mathcal{H})$ означавамо векторски простор оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ чија је слика димензије највише n (простор оператора *ранга највише n*). Напоменимо да је Хилбертов простор $\mathcal{H}$ сепарабилан ако и само ако је $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ сепарабилан (у односу на операторну норму). У том случају је $\mathcal{K}_n(\mathcal{H})$ сепарабилан за свако $n \in \mathbb{N}$ као потпростор сепарабилног простора.

Теорема 2.10. *Нека је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор, Φ произвољна с. н. функција и нека је $(A_t)_{t \in \Omega}$ слабо* мерљива фамилија тако да је $A_t \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ за свако $t \in \Omega$. Тада је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t\|_{\Phi} \in \mathbb{R}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива. Додајно, ако важи услов*

$$\int_{\Omega} \|A_t\|_{\Phi} d\mu(t) < +\infty$$

тада $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $\int_E A_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ и важи неједнакост

$$(2.10) \quad \left\| \int_E A_t d\mu(t) \right\|_{\Phi} \leq \int_E \|A_t\|_{\Phi} d\mu(t) \text{ за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

Доказ. Функција $\Omega \ni t \mapsto s_1(A_t) \in \mathbb{R}$ је $\mathfrak{M}$ -мерљива јер за свако $t \in \Omega$ важи

$$s_1(A_t) = \|A_t\| = \sup_{a \in \mathcal{D}} \|A_t a\| = \sup_{a, b \in \mathcal{D}} |\langle A_t a, b \rangle|.$$

Као што смо већ рекли, како је $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ сепарабилан имамо да је и $\mathcal{K}_n(\mathcal{H})$ сепарабилан простор за свако $n \in \mathbb{N}$. Означимо са $\mathcal{K}_n^0(\mathcal{H})$ било који пребројив и свуда густ скуп у $\mathcal{K}_n(\mathcal{H})$. Одавде и на основу [30, Теорема 2.1] имамо да важи

$$(2.11) \quad s_{n+1}(A_t) = \inf_{K \in \mathcal{K}_n(\mathcal{H})} \|A_t - K\| = \inf_{K \in \mathcal{K}_n^0(\mathcal{H})} \|A_t - K\| \text{ за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Из слабе* мерљивости фамилије оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ следи и слаба* мерљивост фамилије оператора $(A_t - K)_{t \in \Omega}$ за фиксиран оператор $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. На основу мерљивости функције која је дефинисана првим сингуларним бројем и из тога што је последњи инфимум у (2.11) разматран по пребројивом скупу закључујемо да је функција $\Omega \ni t \mapsto s_n(A_t) \in \mathbb{R}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива за свако $n \in \mathbb{N}$.

Из (1.24) видимо да је довољно доказати $\mathfrak{M}$ -мерљивост функције

$$(2.12) \quad \Omega \ni t \mapsto \Phi(s_1(A_t), \dots, s_N(A_t), 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}$$

за свако фиксирано $N \in \mathbb{N}$. Како је функција $\Omega \ni t \mapsto (s_1(A_t), \dots, s_N(A_t)) \in \mathbb{R}^N$ мерљива и како је функција Φ непрекидна на скупу низова који почев од $(N+1)$ -ве координате

имају нуле следи да је композиција ових функција мерљива тј. доказали смо да је функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t\|_{\Phi} \in \mathbb{R}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива⁴. До сада речено важи за било коју с. н. функцију и сваку слабо* мерљиву фамилију $(A_t)_{t \in \Omega}$.

Претпоставимо сада да важи $\int_{\Omega} \|A_t\|_{\Phi} d\mu(t) < +\infty$. Како је $|\langle A_t f, g \rangle| \leq \|A_t\| \leq \|A_t\|_{\Phi}$ за свако $f, g \in \mathcal{H}$, $\|f\| = \|g\| = 1$ и свако $t \in \Omega$ имамо $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$.

Размотримо најпре случај када с. н. функција Φ не генерише идеал компактних оператора $\mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$. Ако је $E \in \mathfrak{M}$ и $K \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})$ тада на основу Леме 1.37 имамо да важи неједнакост $|\text{tr}(A_t K)| \leq \|K\|_{\Phi^*} \cdot \|A_t\|_{\Phi}$ за свако $t \in \Omega$. Применом (2.1) (на скуп E уместо на Ω) закључујемо да важи

$$\left| \text{tr} \left(\int_E A_t d\mu(t) K \right) \right| = \left| \int_E \text{tr}(A_t K) d\mu(t) \right| \leq \int_E |\text{tr}(A_t K)| d\mu(t) \leq \|K\|_{\Phi^*} \int_E \|A_t\|_{\Phi} d\mu(t),$$

тј. имамо да за свако $K \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})$, $K \neq 0$ важи неједнакост

$$\frac{1}{\|K\|_{\Phi^*}} \left| \text{tr} \left(\int_E A_t d\mu(t) K \right) \right| \leq \int_E \|A_t\|_{\Phi} d\mu(t).$$

Применом [30, Лема 12.1, стр. 132] (овде користимо да Φ не генерише $\mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$) добијамо да је $\int_E A_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ као и да важи неједнакост (2.10).

Размотримо сада случај када с. н. функција Φ генерише идеал компактних оператора $\mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$. Тада је норма $\|\cdot\|_{\Phi}$ еквивалентна операторној норми $\|\cdot\|$. Докажимо најпре да је $\int_E A_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$. Зато, одаберимо произвољан низ вектора $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ који слабо тежи нули. Како је $A_t \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за свако $t \in \Omega$, из (1.21) следи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_E A_t d\mu(t) f_n \right\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_E A_t f_n d\mu(t) \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \|A_t f_n\| d\mu(t) = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_t f_n\| d\mu(t) = 0. \end{aligned}$$

Претпоследња једнакост у горњем рачуну је оправдана на основу ТДК јер знамо да важи неједнакост $\|A_t f_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| \cdot \|A_t\|$ а на основу претпоставке имамо да је функција $\Omega \ni t \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| \cdot \|A_t\| \in \mathbb{R}$ елемент простора $L^1(\Omega, \mu)$.

Докажимо да и у овом случају важи неједнакост (2.10). Имамо да је с. н. функција Φ^* еквивалентна са ℓ^1 с. н. функцијом одакле следи да се идеал $\mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ поклапа (као скуп) са идеалом нуклеарних оператора $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Поновном применом Леме 1.37 добијамо да је $\|A_t X\|_1 \leq \|A_t\|_{\Phi} \cdot \|X\|_{\Phi^*}$ за свако $t \in \Omega$ и $X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Сада, на основу [30, Теорема 12.4, стр. 134] имамо да је

$$\begin{aligned} \left\| \int_E A_t d\mu(t) \right\|_{\Phi} &= \sup_{\substack{X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}) \\ X \neq 0}} \frac{1}{\|X\|_{\Phi^*}} \left| \text{tr} \left(\int_E A_t d\mu(t) X \right) \right| \\ &= \sup_{\substack{X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}) \\ X \neq 0}} \frac{1}{\|X\|_{\Phi^*}} \left| \int_E \text{tr}(A_t X) d\mu(t) \right| \leq \sup_{\substack{X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}) \\ X \neq 0}} \frac{1}{\|X\|_{\Phi^*}} \int_E |\text{tr}(A_t X)| d\mu(t) \\ &\leq \sup_{\substack{X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}) \\ X \neq 0}} \frac{1}{\|X\|_{\Phi^*}} \int_E \|A_t X\|_1 d\mu(t) \leq \int_E \|A_t\|_{\Phi} d\mu(t). \end{aligned} \quad \square$$

⁴Ради прецизности, напоменимо да је (2.12) композиција функција $\varphi_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ и $\Phi_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ датих са $\varphi_N(t) = (s_1(A_t), \dots, s_N(A_t))$ и $\Phi_N(z_1, \dots, z_N) = \Phi(z_1, \dots, z_N, 0, 0, \dots)$. Функција φ_N је $\mathfrak{M}$ -мерљива јер су такве све њене координатне функције, док је функција Φ_N непрекидна јер је $|\Phi_N(z_1, \dots, z_N) - \Phi_N(\omega_1, \dots, \omega_N)| \leq \Phi_N(z_1 - \omega_1, \dots, z_N - \omega_N) \leq \sum_{k=1}^N |z_k - \omega_k|$.

У наредном тврђењу дајемо потребне и довољне услове да Гелфандов интеграл фамилије оператора припада идеалу нуклеарних оператора $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ уколико је фамилија оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ састављена од позитивних оператора из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Пре формулације саме теореме, наведимо неке познате чињенице које су везане за критеријум припадности позитивног оператора идеалу нуклеарних оператора. Нека је $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ позитиван оператор. Тада ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle A e_n, e_n \rangle$ има исту суму (коначну или бесконачну) за сваку о. н. б. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Хилбертовог простора $\mathcal{H}$. Притом, важи $A \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ ако и само ако је $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle A e_n, e_n \rangle < +\infty$. У том случају је $\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A e_n, e_n \rangle$. За доказ наведених тврђења погледати [30, Лема 8.1] или [5, Теорема 14.15].

Тврђење 2.11. [51] Нека је $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, при чему је $A_t \geq 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Тада важи $\int_{\Omega} A_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ ако и само ако је $A_t \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ и $\int_{\Omega} \|A_t\|_1 d\mu(t) < +\infty$. При том, важи $\|\int_{\Omega} A_t d\mu(t)\|_1 = \int_{\Omega} \|A_t\|_1 d\mu(t)$.

Доказ. Оператор $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ је позитиван јер за свако $f \in \mathcal{H}$ важи $\langle \int_{\Omega} A_t d\mu(t) f, f \rangle = \int_{\Omega} \langle A_t f, f \rangle d\mu(t) \geq 0$. Ако је $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ било која ортонормирана база Хилбертовог простора $\mathcal{H}$, тада на основу коментара датих пре формулације ове теореме имамо да позитиван оператор $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ припада идеалу $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ ако и само ако

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\langle \int_{\Omega} A_t d\mu(t) e_n, e_n \right\rangle < +\infty.$$

Како је $A_t \geq 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ закључујемо да за свако фиксирано $n \in \mathbb{N}$ важи неједнакост $\langle A_t e_n, e_n \rangle \geq 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Одавде следи да интеграл и сума могу мењати места тј. да важи низ једнакости

$$(2.13) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left\langle \int_{\Omega} A_t d\mu(t) e_n, e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\Omega} \langle A_t e_n, e_n \rangle d\mu(t) = \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_t e_n, e_n \rangle d\mu(t).$$

Претпоставимо најпре да оператор $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ припада идеалу $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Из (2.13) закључујемо да важи $\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_t e_n, e_n \rangle d\mu(t) < +\infty$, одакле следи да је подинтегрална функција $\Omega \ni t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_t e_n, e_n \rangle \in [0, +\infty]$ коначна за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Дакле, имамо да је $A_t \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ и за све такве t важи једнакост $\|A_t\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_t e_n, e_n \rangle$. Из $\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_t e_n, e_n \rangle d\mu(t) < +\infty$ закључујемо и $\int_{\Omega} \|A_t\|_1 d\mu(t) < +\infty$.

Претпоставимо сада да важи $A_t \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ и нека је испуњен услов⁵ $\int_{\Omega} \|A_t\|_1 d\mu(t) < +\infty$. Одавде и опет из (2.13) следи $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle \int_{\Omega} A_t d\mu(t) e_n, e_n \rangle < +\infty$ одакле је $\int_{\Omega} A_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$.

Приметимо да смо показали да важи и једнакост $\|\int_{\Omega} A_t d\mu(t)\|_1 = \int_{\Omega} \|A_t\|_1 d\mu(t)$ кад год је $\int_{\Omega} A_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. $\square$

Сада ћемо видети да у другим идеалима компактних оператора Тврђење 2.11 не мора бити тачно. Прецизније, може се десити да сви оператори неке фамилије буду компактни оператори а да Гелфандов интеграл те фамилије не буде компактан оператор, као што показује следећи значајан пример.

⁵Напоменимо да је функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t\|_1 \in \mathbb{R}$ μ -мерљива јер важи једнакост $\|A_t\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_t e_n, e_n \rangle$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$.

Пример 2.12. [51] Нека је функција $f_{n,k}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ за $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \dots, n\}$ даја са

$$f_{n,k}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}], \\ 0, & t \in [0, 1] \setminus [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]. \end{cases}$$

Такође, нека се низ функција $(g_n)_{n \geq 1}$ састоји од свих чланова двоструко индексираног низа $(f_{n,k})_{n,k \geq 1}$ у произвољно изабраном редоследу. Примећујемо да тада низ бројева $(g_n(t))_{n \geq 1}$ дивергира за свако $t \in [0, 1]$. Такође, важи једнакост

$$(2.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(t) dt = 0.$$

Нека је $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нека о. н. б. Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ и дефинишимо фамилију оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ изразом $A_t(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \cdot \langle f, e_n \rangle e_n$ за свако $f \in \mathcal{H}$. Применом Беселове⁶ неједнакости добијамо да за сваки вектор $f \in \mathcal{H}$ важи

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \langle A_t f, f \rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \cdot \langle f, e_n \rangle \langle e_n, f \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \cdot |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

На основу (2.15) закључујемо да је фамилија оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ слабо* мерљива. Такође, из (2.15) следи да је скаларна функција $[0, 1] \ni t \mapsto \langle A_t f, f \rangle \in \mathbb{C}$ елементи простора $L^1([0, 1], m)$ за свако фиксирано $f \in \mathcal{H}$ па имамо да постоји $\int_{[0,1]} A_t d\mu(t) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Да бисмо израчунали Гелфандов интеграл фамилије $(A_t)_{t \in [0,1]}$ примећујемо да је

$$\left\langle \int_{[0,1]} A_t dm(t) f, f \right\rangle = \int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \cdot |\langle f, e_n \rangle|^2 dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_0^1 g_n(t) dt \right] |\langle f, e_n \rangle|^2$$

за свако $f \in \mathcal{H}$ (замена интеграла и суме је дозвољена јер су сабирци ненегативне мерљиве функције). Одавде следи да важи⁷ једнакост

$$\int_{[0,1]} A_t dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_0^1 g_n(t) dt \right] e_n \otimes e_n^*,$$

при чему последња сума конвертира у норми простора $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. На основу једнакости (2.14) закључујемо да је $\int_{[0,1]} A_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$. Како за свако фиксирано $t \in [0, 1]$ низ $(g_n(t))_{n \geq 1}$ садржи бесконачно много нула и бесконачно много јединица имамо да је оператор A_t ортогнална пројекција. Како је $\dim \mathcal{R}(A_t) = +\infty$ имамо да је $A_t \notin \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за свако фиксирано $t \in [0, 1]$. $\square$

Напоменимо да ограничен оператор $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ из Примера 2.12 припада Шатен-Фон Нојмановом идеалу $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ за све $2 < p < +\infty$ јер је низ дијагоналних елемената оператора $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ (у односу на $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$) заправо нека пермутација низа

$$(2.16) \quad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{=n}, \dots \right).$$

⁶Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), немачки астроном и математичар

⁷Користимо да оператори $\int_{[0,1]} A_t dm(t)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_0^1 g_n(t) dt \right] e_n \otimes e_n^*$ имају исте квадратне форме.

Одавде следи да је низ сингуларних бројева $s\left(\int_{[0,1]} A_t d\mu(t)\right)$ оператора $\int_{[0,1]} A_t d\mu(t)$ управо низ дат у (2.16), одакле закључујемо да важи

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} A_t d\mu(t) \right\|_p^p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[s_n \left(\int_{[0,1]} A_t d\mu(t) \right) \right]^p \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{m} \right)^p + \cdots + \left(\frac{1}{m} \right)^p}_{=m} \right] = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{p-1}} < +\infty. \end{aligned}$$

Појам који уводимо наредном дефиницијом је битан и представља генерализацију својства *ајсолућне нејрекидносћи* Лебеговог интеграла (видети [5, Задатак 6, стр. 84] или [68, Задатак 10, Поглавље 6]).

Дефиниција 2.13. *Фамилија $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ задовољава $\mathcal{AC}_{\mu}$ услов ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) < \delta$ повлачи $\left\| \int_E A_t d\mu(t) \right\| < \varepsilon$.*

Следеће две теореме представљају главне резултате из рада [51].

Теорема 2.14. *Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ задовољава $\mathcal{AC}_{\mu}$ услов. Ако је $A_t \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ тада $\int_{\Omega} A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$.*

Доказ овог тврђења нећемо дати одмах, јер ћемо у Поглављу 4 презентовати доказ овог тврђења у општијем контексту, са скоро идентичним корацима. Са тим у вези, погледати Теорему 4.25.

Наредно тврђење представља обрат Теореме 2.14 за фамилије позитивних оператора. Пре самог тврђења, подсетимо да је дуални простор од $\mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ изометрички изоморфан са $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, док је дуални простор од $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ изометрички изоморфан са $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (погледати [30, Теорема 12.1, Теорема 12.3]).

Теорема 2.15. *Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека је фамилија $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ таква да је $A_t \geq 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ и нека је $\int_{\Omega} A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$. Тада фамилија оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ задовољава $\mathcal{AC}_{\mu}$ услов.*

Доказ. Одаберимо један репрезент класе у којој се налази фамилија оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$, што можемо урадити тако да је $A_t \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за свако $t \in \Omega$. Сада можемо дефинисати пресликавање f на скупу Ω изразом $f(t) = A_t$ за свако $t \in \Omega$. Уколико овако задату функцију f посматрамо као функцију са вредностима у $\mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ довољно је доказати да је она Петис интеграбилна и наше тврђење ће следити на основу Теореме 1.27, која се може применити јер је $\mu(\Omega) < +\infty$.

Најпре, функција $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ је слабо мерљива јер је функција $\Omega \ni t \mapsto \text{tr}(A_t Y) \in \mathbb{C}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива за свако $Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, што следи из тога што је фамилија $(A_t)_{t \in \Omega}$ слабо* мерљива. Имамо и више, фамилија оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ је слабо* интеграбилна па закључујемо да је функција $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ Данфорд интеграбилна на Ω .

Како је $A_t \geq 0$ за свако $t \in \Omega$ следи $0 \leq \int_E A_t d\mu(t) \leq \int_{\Omega} A_t d\mu(t)$, па применом Леме 1.14 добијамо $\int_E A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за свако $E \in \mathfrak{M}$. Доказаћемо да важи једнакост

$$(2.17) \quad J_{\mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})} \left(\int_E A_t d\mu(t) \right) = \int_E^D f(t) d\mu(t) \text{ за свако } E \in \mathfrak{M},$$

што ће значити да је функција $f : \Omega \rightarrow \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ Петис интеграбилна. Одаберимо $y^* \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})^*$ произвољно и нека је $Y \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ оператор који одговара ограниченом функционалу y^* . Сада, за сваки фиксиран скуп $E \in \mathfrak{M}$ имамо

$$\begin{aligned} \left\langle y^*, J_{\mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})} \left(\int_E A_t d\mu(t) \right) \right\rangle &= \left\langle \int_E A_t d\mu(t), y^* \right\rangle = \text{tr} \left(\int_E A_t d\mu(t) Y \right) \\ &= \int_E \text{tr}(A_t Y) d\mu(t) = \int_E \langle f(t), y^* \rangle d\mu(t) = \left\langle y^*, \int_E^D f(t) d\mu(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Како је елемент y^* из $\mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})^*$ произвољно биран једнакост (2.17) следи. $\square$

Нека је $(A_t)_{t \in \Omega}$ елемент простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$. У наредном тврђењу дајемо довољне услове да оператор $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ буде компактан, без претпоставке да је $A_t \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Користићемо *матричну репрезентацију операјора* који делују на Хилбертовом простору (за основне резултате који су везани за матричну репрезентацију оператора погледати [5, Секција 4, Поглавље 11]).

Теорема 2.16. [51] Нека је $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ и нека постоји ортонормирана база $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ и коначан скуп $S \subset \mathbb{Z}$ такав да важи:

$$(2.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle A_t e_n, e_{n+i} \rangle d\mu(t) = 0 \text{ за свако } i \in S,$$

$$(2.19) \quad \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i-j \notin S}} \left| \int_{\Omega} \langle A_t e_i, e_j \rangle d\mu(t) \right|^2 < +\infty.$$

Тада је операјор $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ компактан.

Пре него што кренемо са формалним доказом ове теореме илуструјмо значење услова (2.18) и (2.19). Наиме, уколико посматрамо матрицу M оператора $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ у бази $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, услови ове теореме дају да постоји коначан број дијагонала матрице M које су паралелене главној дијагонали и које поседују својство да низови бројева по свакој од тих дијагонала теже нули (што је дато условом (2.18)) и да је сума квадрата модула свих елемената ван тих дијагонала конвергентна (што је дато условом (2.19)).

Доказ Теореме 2.16. Матрична репрезентација ограниченог оператора $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ у ортонормираној бази $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ дата је бесконачном матрицом

$$\left[\int_{\Omega} \langle A_t e_j, e_i \rangle d\mu(t) \right]_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \in \mathfrak{B}(\ell^2).$$

Стога, оператор $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ можемо записати као коначан збир $B + \sum_{k \in S} A^{(k)}$, при чему оператор $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ задовољава једнакост

$$\langle B e_j, e_i \rangle = \begin{cases} \int_{\Omega} \langle A_t e_j, e_i \rangle d\mu(t), & \text{ако је } i - j \notin S, \\ 0, & \text{ако је } i - j \in S. \end{cases}$$

За произвољан број $k \in S$ оператор $A^{(k)}$ је дијагоналан са дијагоналним елементима

$$\int_{\Omega} \langle A_t e_n, e_{n+k} \rangle d\mu(t) \in \mathbb{C} \text{ за свако } \mathbb{N} \ni n \geq \max\{1, 1 - k\}.$$

На основу (2.18) дијагонални елементи матрице $A^{(k)}$ конвергирају нули. Како је

$$A^{(k)} = \sum_{n=\max\{1, 1-k\}}^{+\infty} \left[\int_{\Omega} \langle A_t e_n, e_{n+k} \rangle d\mu(t) \right] e_{n+k} \otimes e_n^*$$

закључујемо да важи $A^{(k)} \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ (конвергенција последњег реда је у норми простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$). Из (2.19) и на основу [5, Теорема 14.21] добијамо $B \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. Одавде следи да је $\int_{\Omega} A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ због тога што смо оператор $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ представили као збир једног Хилберт-Шмитовог и једног компактног оператора. $\square$

Практични значај ове теореме је тај што можемо доказати компактност оператора $\int_{\Omega} A_t d\mu(t)$ и без конкретног одређивања овог оператора. Примера ради, применом Теореме 2.16 директно следи да је оператор $\int_{[0,1]} A_t dm(t)$ из Примера 2.12 компактан јер је $\langle A_t e_k, e_l \rangle = 0$ за свако $k \neq l$ (за скуп S из Теореме 2.16 можемо узети $S = \{0\}$).

2.5 Оператор интеграције $T : L^\infty(\Omega, \mu) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Нека је $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и дефинишимо функцију $\nu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ са

$$(2.20) \quad \nu(E) = \int_E A_t d\mu(t) \text{ за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

Овако дефинисана функција ν задаје једну *коначно адитивну* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносну меру на σ -алгебри $\mathfrak{M}$. Такође, можемо добити и јаче закључке, који су везани за пребројиву адитивност функције ν у *слабом* и у *јаким* смислу. Најпре, приметимо да је функција ν *слабо пребројиво адитивна* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносна мера на σ -алгебри $\mathfrak{M}$, тј. да за све $f, g \in \mathcal{H}$ и за сваки низ међусобно дисјунктних скупова $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathfrak{M}$ важи

$$\left\langle \nu \left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right) f, g \right\rangle = \int_{\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n} \langle A_t f, g \rangle d\mu(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} \langle A_t f, g \rangle d\mu(t) = \left\langle \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \nu(E_n) \right) f, g \right\rangle.$$

Напоменимо да је друга једнакост у горњем рачуну оправдана јер скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \langle A_t f, g \rangle \in \mathbb{C}$ задаје једну комплексну меру на σ -алгебри $\mathfrak{M}$. Како се ово расуђивање може применити и на било који подниз низа $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, на основу Теореме Орлич-Петиса (видети [25, Последица 4, стр. 22]), закључујемо и више: мера $\nu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ је *јаким пребројиво адитивна* тј. за свако $f \in \mathcal{H}$ функција $\mathfrak{M} \ni E \mapsto \nu(E)f \in \mathcal{H}$ је једна $\mathcal{H}$ -вредносна мера на $\mathfrak{M}$.

На основу Последице 2.2 можемо да извршимо следећу конструкцију. Нека је са $\Pi(\Omega, \mu)$ означен потпростор свих простих функција из $L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. У питању је густ потпростор у $L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ (видети нпр. [28, Теорема 6.8]). Дефинишимо оператор $T : \Pi(\Omega, \mu) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ изразом

$$T \left(\sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k} \right) = \sum_{k=1}^n c_k \int_{E_k} A_t d\mu(t),$$

за било који одабир скалара $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ и за било који одабир међусобно дисјунктних скупова $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{M}$ позитивне μ -мере. Треба напоменути да је оператор T добро

дефинисан, што следи из његове добре дефинисаности на скупу карактеристичних функција $\{\chi_E : E \in \mathfrak{M}\}$. Последње следи из тога што важи импликација

$$E \in \mathfrak{M}, \mu(E) = 0 \implies T(\chi_E) = \int_E A_t d\mu(t) = 0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Сада имамо да важи

$$\begin{aligned} \left\| T \left(\sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k} \right) \right\| &= \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \left| \left\langle \left(\sum_{k=1}^n c_k T(\chi_{E_k}) \right) f, g \right\rangle \right| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |c_k| \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \sum_{k=1}^n | \langle T(\chi_{E_k}) f, g \rangle | \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k} \right\|_\infty \cdot \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \sum_{k=1}^n \int_{E_k} | \langle A_t f, g \rangle | d\mu(t) \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k} \right\|_\infty \cdot M, \end{aligned}$$

при чему је број M из Последице 2.2. Како је потпростор $\Pi(\Omega, \mu)$ густ у простору $L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ у односу на супремум норму $\|\cdot\|_\infty$ и како је $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ Банахов простор, имамо да се ограничен оператор T на $\Pi(\Omega, \mu)$, на јединствен начин шири по непрекидности до оператора $T : L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (видети нпр. [5, Став 7.3]). Писаћемо

$$(2.21) \quad Tf = \int_\Omega f(t) d\nu(t) \text{ за свако } f \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{M}, \mu),$$

где је $\nu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ функција дефинисана у (2.20). Норма оператора T у поступку проширења се није повећала, па имамо неједнакост $\|T\| \leq M$.

У наредној теорему посматрамо мере на σ -алгебри $\mathfrak{M}$ које узимају вредности у неком сепарабилном идеалу $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, генерисаном с.н. функцијом Φ . Ова теорема је генерализација Теореме 1.3 из [51] јер не претпостављамо позитивност оператора A_t за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Треба напоменути да је идеја доказа слична са доказом поменуте теореме из [51].

Теорема 2.17. [52] Нека је $(A_t)_{t \in \Omega}$ слабо* мерљива фамилија у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за коју је испуњено $(|A_t|)_{t \in \Omega}, (|A_t^*|)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Тада имамо $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Додаћно, нека је $X \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ са својством да је за свако $E \in \mathfrak{M}$ испуњено $|\int_E A_t d\mu(t)| \leq X$ и $|\int_E A_t^* d\mu(t)| \leq X$, где је $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ сепарабилни идеал. Тада имамо:

(а) Функција $\nu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, даћа изразом

$$\nu(E) = \int_E A_t d\mu(t) \text{ за свако } E \in \mathfrak{M},$$

је једна добро дефинисана $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ -вредносна мера на σ -алгебри $\mathfrak{M}$.

(б) Нека је $p \in [1, +\infty)$ и $\int_\Omega |A_t| d\mu(t) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$. Ако важи неједнакост

$$(2.22) \quad \left| \int_E A_t d\mu(t) \right| \leq \int_E |A_t| d\mu(t) \text{ за свако } E \in \mathfrak{M},$$

тада за све низове $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathfrak{M}$, $E_n \cap E_m = \emptyset$, $n \neq m$ важи $\sum_{n=1}^{+\infty} \|\nu(E_n)\|_p^p < +\infty$.

Доказ. Из претпостављене слабе* мерљивости фамилије $(A_t)_{t \in \Omega}$ и из (1.9) добијамо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\langle A_t f, f \rangle| d\mu(t) &\leq \int_{\Omega} \sqrt{\langle |A_t| f, f \rangle \cdot \langle |A_t^*| f, f \rangle} d\mu(t) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle |A_t| f, f \rangle d\mu(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle |A_t^*| f, f \rangle d\mu(t) < +\infty \end{aligned}$$

за све векторе $f \in \mathcal{H}$. Дакле, имамо $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

(а) Из $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ следи да је функција ν слабо пребројиво адитивна мера на $\mathfrak{M}$. Ако је $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $E_n \in \mathfrak{M}$, $E_n \cap E_m = \emptyset$, $n \neq m$ имамо да $\nu \left(\bigsqcup_{n=1}^N E_n \right)$ конвергира слабо ка $\nu \left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right)$, када $N \rightarrow \infty$. За сваки скуп $E \in \mathfrak{M}$ важи $|\int_E A_t d\mu(t)| \leq X$, $|\int_E A_t^* d\mu(t)| \leq X$ и $X \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ па користећи Теорему 1.39 добијамо да $\nu \left(\bigsqcup_{n=1}^N E_n \right)$ конвергира у норми идеала $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ка $\nu \left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right)$. Одавде следи део (а) овог тврђења.

(б) Из $0 \leq |\int_E A_t d\mu(t)| \leq \int_{\Omega} |A_t| d\mu(t) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ имамо $|\int_E A_t d\mu(t)| \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ одакле следи $\int_E A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ за све $E \in \mathfrak{M}$. Нека је $N \in \mathbb{N}$. Ако применимо неједнакост [32, Лема 2.1, (с)] и неједнакост (2.22) за произвољну с. н. функцију Ψ (прецизније, за с. н. функцију Ψ за коју су изрази испод дефинисани) добијамо

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^N \left| \int_{E_k} A_t d\mu(t) \right|^p \right\|_{\Psi} &\leq \left\| \left[\sum_{k=1}^N \left| \int_{E_k} A_t d\mu(t) \right| \right]^p \right\|_{\Psi} \\ &\leq \left\| \left[\sum_{k=1}^N \int_{E_k} |A_t| d\mu(t) \right]^p \right\|_{\Psi} = \left\| \left[\int_{\bigsqcup_{k=1}^N E_k} |A_t| d\mu(t) \right]^p \right\|_{\Psi}. \end{aligned}$$

Специјално, за $\Psi = \ell^1$, неједнакости изнад постају

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \|\nu(E_k)\|_p^p &= \sum_{k=1}^N \left\| \int_{E_k} A_t d\mu(t) \right\|_p^p = \sum_{k=1}^N \left\| \left| \int_{E_k} A_t d\mu(t) \right| \right\|_1^p \\ (2.23) \quad &= \left\| \sum_{k=1}^N \left| \int_{E_k} A_t d\mu(t) \right| \right\|_1^p \leq \left\| \left[\int_{\bigsqcup_{k=1}^N E_k} |A_t| d\mu(t) \right]^p \right\|_1 \\ &= \left\| \int_{\bigsqcup_{k=1}^N E_k} |A_t| d\mu(t) \right\|_p^p \leq \left\| \int_{\Omega} |A_t| d\mu(t) \right\|_p^p < +\infty. \end{aligned}$$

Последња неједнакост следи из $(|A_t|)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и $\int_{\Omega} |A_t| d\mu(t) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$. Сада имамо да важи $\sum_{k=1}^{+\infty} \|\nu(E_k)\|_p^p < +\infty$ када узмемо $N \rightarrow +\infty$ у (2.23). $\square$

Размотримо сада следеће питање везано за репрезентацију простих и $\mathfrak{M}$ -мерљивих скаларних функција. Уколико је $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k}$ за неке међусобно дисјунктне скупове $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{M}$ и скаларе $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, тада функцију g можемо написати у облику

$$g = \alpha_1 \sum_{k=1}^n \chi_{E_k} + \sum_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \sum_{j=k}^n \chi_{E_j} = \sum_{k=1}^n \beta_k \chi_{F_k}$$

за неке $F_1, \dots, F_n \in \mathfrak{M}$. Ово видимо на следећи начин. Нека је $F_k = E_k \sqcup \dots \sqcup E_n$ за свако $k \in \{1, \dots, n\}$ и ставимо $F_{n+1} = \emptyset$. Тада имамо

$$\begin{aligned} g &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{F_k \setminus F_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{F_k} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{F_{k+1}} \\ &= \alpha_1 \chi_{F_1} + \sum_{k=2}^n (\alpha_k \chi_{F_k} - \alpha_{k-1} \chi_{F_k}) = \alpha_1 \sum_{k=1}^n \chi_{E_k} + \sum_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \sum_{j=k}^n \chi_{E_j}. \end{aligned}$$

Наведимо познато тврђење које ће нам требати за даљи рад.

Лема 2.18. [69, Пољавље 1, Вежбање 3] Нека је $\alpha \in \mathbb{C}$ и нека су скупови K_1 и K_2 компактни у векторском тополошком простору (X, τ) . Тада су скупови αK_1 и $K_1 + K_2$ такође компактни у (X, τ) .

Напомена 2.19. Следећа чињенице и начин на које се оне комбинују ће нам бити од значаја. Уколико је X банахов простор тада је затворена јединична лопта у X^* компактна у слабој* топологији на основу Теореме Банах-Алаоглуа⁸. Уколико је још X и сепарабилан простор тада је затворена јединична лопта у X^* метризабилна у односу на слабо* топологију (видети [69, Теорема 3.16]). Комбинијући последња два тврђења добијамо да је затворена јединична лопта у X^* сепарабилна у односу на слабо* топологију јер компактан и метризабилан скупи у сваком тополошком простору мора бити сепарабилан. Такође, речено важи за било коју кулу из X^* са центром у нули.

Наредно тврђење је добијено у [51] и тиче се компактности оператора T дефинисаног у (2.21). У поменутом раду нису дати детаљи доказа, док их овде наводимо прецизно. Неки делови доказа садрже идеје из [25, Теорема 8, (б), стр. 55].

Теорема 2.20. Нека је $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и $A_t \geq 0$ за μ -скоро $t \in \Omega$ и нека је $\int_\Omega A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. Тада је оператор интєрације $T : L^\infty(\Omega, \mu) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ дефинисан у (2.21) компактан.

Доказ. Са ν ћемо означавати функцију дефинисану у (2.20), која је придружена датој фамилији оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$. За сваки скуп $E \in \mathfrak{M}$ имамо $0 \leq \nu(E) \leq \int_\Omega A_t d\mu(t)$. Одавде закључујемо да важи инклузија

$$\nu(\mathfrak{M}) \subseteq \left\{ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid 0 \leq A \leq \int_\Omega A_t d\mu(t) \right\}.$$

Докажимо да је за сваки позитиван оператор $B \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ скуп

$$K_B = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid 0 \leq A \leq B\}$$

компактан у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ у односу на топологију индуковану операторном нормом⁹. Како је $\|A\| \leq \|B\|$ за свако $A \in K_B$ имамо да је K_B ограничен скуп у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. На основу идентификације простора $(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))^*$ са $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, Теорема Банах-Алаоглуа даје да је скуп K_B релативно компактан у слабој* топологији (јер је подскуп компактног скупа у слабој* топологији, што је заправо затворена кугла у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ полупречника $\|B\|$). Како је пред-дуал $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ сепарабилан имамо да је скуп K_B , посматран као скуп у

⁸Leonidas Alaoglu (1914–1981), канадско-амерички математичар

⁹На основу Леме 1.14 имамо да је $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за свако $A \in K_B$.

$(\mathcal{C}_1(\mathcal{H}))^*$, слабо* метризубилан (видети Напомену 2.19) па (сваки) низ оператора $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из K_B има слабо* конвергентан подниз $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. То значи да је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(A_{n_k}(f \otimes g^*)) = \operatorname{tr}(A(f \otimes g^*)) \text{ за свако } f, g \in \mathcal{H}.$$

На основу (1.27) добијамо да се последња једнакост своди на то да важи $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle A_{n_k} f, g \rangle = \langle A f, g \rangle$ за све векторе $f, g \in \mathcal{H}$, што значи да низ $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ конвергира слабо ка A . Како за свако $k \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{H}$ важи неједнакост $\langle A_{n_k} f, f \rangle \leq \langle B f, f \rangle$, граничним преласком $k \rightarrow \infty$ у последњој неједнакости имамо да је $0 \leq A \leq B$ тј. $A \in K_B$. Такође, на основу Теореме 1.39 (која се може применити јер је $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ сепарабилан идеал) имамо $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{n_k} - A\| = 0$. Овиме је доказана компактност скупа K_B у односу на операторну топологију на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Нека је у даљем разматрању $K := \nu(\Omega) = \int_\Omega A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. На основу разматања које је извршено пре формулације ове теореме, просту функцију $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k}$, где је $0 \leq \alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq 1$ и где су скупови $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{M}$ међусобно дисјунктни, можемо написати у облику

$$g = \alpha_1 \sum_{k=1}^n \chi_{E_k} + \sum_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \sum_{j=k}^n \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^n \beta_k \chi_{F_k},$$

при чему је $F_k = E_k \sqcup \dots \sqcup E_n \in \mathfrak{M}$ и $\sum_{k=1}^n \beta_k = \alpha_n \leq 1$. На основу линеарности оператора T имамо да је $Tg = \sum_{k=1}^n \beta_k T(\chi_{F_k}) \leq \alpha_n \nu(\Omega) \leq \nu(\Omega)$ па добијамо $Tg \in K$. Стандардним растављањем комплексне мерљиве функције најпре на реални и имагинарни део а потом на разлике ненегативних мерљивих функција закључујемо да је

$$Tg \in K + (-K) + iK + (-i)K$$

за свако $g \in \Pi(\Omega, \mu)$ за које је $\|g\|_\infty \leq 1$.

На основу доказане компактности скупа L и из Леме 2.18 имамо да је скуп $K + (-K) + iK + (-i)K$ компактан у топологији индукованој операторном нормом простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Сада закључујемо да је оператор T компактан, посматран као оператор на $\Pi(\Omega, \mu)$. Како смо показали непрекидност оператора T на целом простору $L^\infty(\Omega, \mu)$ и како је затворење јединичне лопте простора $\Pi(\Omega, \mu)$ једнако затвореној јединичној лопти у $L^\infty(\Omega, \mu)$ добијамо компактност оператора $T : L^\infty(\Omega, \mu) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ на основу

$$\begin{aligned} T(\{g \in L^\infty(\Omega, \mu) : \|g\|_\infty \leq 1\}) &= T(\overline{\{g \in \Pi(\Omega, \mu) : \|g\|_\infty \leq 1\}}) \\ &\subseteq \overline{T(\{g \in \Pi(\Omega, \mu) : \|g\|_\infty \leq 1\})} \\ &\subseteq \overline{K + (-K) + iK + (-i)K} = K + (-K) + iK + (-i)K. \end{aligned}$$

Напоменимо да прва инклузија у горњем рачуну следи на основу [26, Пропозиција 1.4.1] док смо у последњем кораку доказа користили да је подскуп

$$T(\{g \in L^\infty(\Omega, \mu) : \|g\|_\infty \leq 1\})$$

компактног скупа $K + (-K) + iK + (-i)K$ релативно компактан. □

2.6 Тврђења о општим особинама функција из $L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$

Основне Коши-Шварцове неједнакости за фамилије оператора

Наредно тврђење представља основну Коши-Шварцову неједнакост за фамилије оператора из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ чији доказ наводимо због комплетности излагања. Напоменимо и то да се наредна теорема бави довољним условима да Гелфандов интеграл фамилије оператора облика $(A_t X B_t)_{t \in \Omega}$ припада идеалима $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$.

Теорема 2.21. ([42, Лема 3.1]) Нека су $(A_t)_{t \in \Omega}$ и $(B_t)_{t \in \Omega}$ слабо* мерљиве фамилије оператора из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и нека је $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

- (а) Нека је $\int_\Omega \|A_t^* f\|^2 + \|B_t f\|^2 d\mu(t) < +\infty$ за свако $f \in \mathcal{H}$. Тада $(A_t X B_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ и важи неједнакост

$$\left\| \int_\Omega A_t X B_t d\mu(t) \right\| \leq \sqrt{\left\| \int_\Omega A_t A_t^* d\mu(t) \right\| \cdot \left\| \int_\Omega B_t^* B_t d\mu(t) \right\|} \|X\|.$$

- (б) Нека је $X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Ако је $\int_\Omega \|A_t f\|^2 + \|B_t^* f\|^2 d\mu(t) < +\infty$ за свако $f \in \mathcal{H}$ тада је $(A_t X B_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, ограничен оператор $\int_\Omega A_t X B_t d\mu(t)$ припада идеалу $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и важи неједнакост

$$\left\| \int_\Omega A_t X B_t d\mu(t) \right\|_1 \leq \sqrt{\left\| \int_\Omega A_t^* A_t d\mu(t) \right\| \cdot \left\| \int_\Omega B_t B_t^* d\mu(t) \right\|} \|X\|_1.$$

- (в) Нека је $X \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и нека важи $\int_\Omega \|A_t f\|^2 + \|A_t^* f\|^2 + \|B_t f\|^2 + \|B_t^* f\|^2 d\mu(t) < +\infty$ за свако $f \in \mathcal{H}$. Тада $(A_t X B_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, оператор $\int_\Omega A_t X B_t d\mu(t)$ припада идеалу $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и важи неједнакост

$$\left\| \int_\Omega A_t X B_t d\mu(t) \right\|_\Phi \leq \max\{C_1, C_2\} \|X\|_\Phi,$$

при чему је

$$C_1 = \sqrt{\left\| \int_\Omega A_t^* A_t d\mu(t) \right\| \cdot \left\| \int_\Omega B_t B_t^* d\mu(t) \right\|}, \quad C_2 = \sqrt{\left\| \int_\Omega A_t A_t^* d\mu(t) \right\| \cdot \left\| \int_\Omega B_t^* B_t d\mu(t) \right\|}.$$

Доказ. Слаба* мерљивост фамилије $(A_t X B_t)_{t \in \Omega}$ следи из слабе* мерљивости фамилија $(A_t)_{t \in \Omega}$ и $(B_t)_{t \in \Omega}$ јер је $\langle A_t X B_t f, g \rangle = \langle X B_t f, A_t^* g \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle B_t f, X^* e_n \rangle \cdot \langle A_t e_n, g \rangle$, при чему је $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нека о. н. б. сепарабилног Хилбертовог простора $\mathcal{H}$.

- (а) Користећи (2.8) за фамилије $(A_t A_t^*)_{t \in \Omega}$ и $(B_t^* B_t)_{t \in \Omega}$, имамо да важи

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\langle A_t X B_t f, g \rangle| d\mu(t) &\leq \|X\| \int_\Omega \|A_t^* g\| \cdot \|B_t f\| d\mu(t) \\ &\leq \|X\| \sqrt{\int_\Omega \|A_t^* g\|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_\Omega \|B_t f\|^2 d\mu(t)} \\ &\leq \|X\| \sqrt{\left\| \int_\Omega A_t A_t^* d\mu(t) \right\| \cdot \left\| \int_\Omega B_t^* B_t d\mu(t) \right\|}. \end{aligned}$$

Одавде следи $(A_t X B_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$. Имајући у виду да важи неједнакост $|\langle \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) f, g \rangle| \leq \int_{\Omega} |\langle A_t X B_t f, g \rangle| d\mu(t)$ за све $f, g \in \mathcal{H}$, уз употребу горе добијене неједнакости и преласком на супремум по свим $f, g \in \mathcal{H}$ за које је $\|f\| = \|g\| = 1$ добијамо тражену неједнакост.

(б) Нека је $X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ са својим сингуларним развојем $X = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n e_n \otimes f_n^*$ који конвергира у норми простора $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, при чему је $s_n = s_n(X)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада важи једнакост $A_t X B_t = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n (A_t e_n) \otimes (B_t^* f_n)^*$ за свако $t \in \Omega$, такође у норми простора $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. За $g, h \in \mathcal{H}$, $\|g\| = \|h\| = 1$ имамо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\langle A_t X B_t g, h \rangle| d\mu(t) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \int_{\Omega} |\langle g, B_t^* f_n \rangle| \cdot |\langle A_t e_n, h \rangle| d\mu(t) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sqrt{\int_{\Omega} |\langle g, B_t^* f_n \rangle|^2 d\mu(t)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |\langle A_t e_n, h \rangle|^2 d\mu(t)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sqrt{\int_{\Omega} \|B_t^* f_n\|^2 d\mu(t)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} \|A_t e_n\|^2 d\mu(t)} \\ &\leq \sqrt{\left\| \int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t) \right\|} \cdot \left\| \int_{\Omega} B_t B_t^* d\mu(t) \right\| \sum_{n=1}^{+\infty} s_n < +\infty. \end{aligned}$$

Одавде следи да је $(A_t X B_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ па постоји оператор $\int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t)$ као елемент простора $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Покажимо сада да је $\int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Нека су зато $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ и $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ било које две о. н. б. Хилбертовог простора $\mathcal{H}$. Сличним поступком као што смо имали изнад, применом Коши-Шварцове неједнакости и једнакости (2.8) имамо следећи рачун:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \left\langle \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) g_m, h_m \right\rangle \right| &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \int_{\Omega} \langle A_t X B_t g_m, h_m \rangle d\mu(t) \right| \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sqrt{\int_{\Omega} |\langle g_m, B_t^* f_n \rangle|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_{\Omega} |\langle A_t e_n, h_m \rangle|^2 d\mu(t)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sqrt{\sum_{m=1}^{+\infty} \int_{\Omega} |\langle A_t e_n, h_m \rangle|^2 d\mu(t)} \sqrt{\sum_{m=1}^{+\infty} \int_{\Omega} |\langle B_t^* f_n, g_m \rangle|^2 d\mu(t)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{m=1}^{+\infty} |\langle A_t e_n, h_m \rangle|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{m=1}^{+\infty} |\langle B_t^* f_n, g_m \rangle|^2 d\mu(t)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sqrt{\int_{\Omega} \|A_t e_n\|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_{\Omega} \|B_t^* f_n\|^2 d\mu(t)} \\ &\leq \sqrt{\left\| \int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t) \right\|} \cdot \left\| \int_{\Omega} B_t B_t^* d\mu(t) \right\| \sum_{n=1}^{+\infty} s_n < +\infty. \end{aligned}$$

Сада ћемо применити Теорему 14.16 из [5] (за примену ове теореме није потребно да имамо $\int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ већ само $\int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, што смо већ

доказали). Узимањем супремума по свим о. н. б. $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ и $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ у претходно изведеној процени добијамо да $\int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ као и

$$\left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_1 \leq \sqrt{\left\| \int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t) \right\| \cdot \left\| \int_{\Omega} B_t B_t^* d\mu(t) \right\|} \cdot \|X\|_1.$$

(в) Нека је линеарно пресликавање $\mathcal{I} : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ дефинисано изразом $\mathcal{I}(X) = \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t)$ за свако $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Оператор $\mathcal{I}(X)$ постоји за свако $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Докажимо најпре да је $\mathcal{I}(X) \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за свако $X \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$. На основу дела под (б) имамо да је $\mathcal{I}(X) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за свако $X \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})$. Како је оператор $\mathcal{I}$ ограничен као оператор из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и како је $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ густ у $\mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ имамо да је $\mathcal{I}$ инваријантан за $\mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$. Нека је сада $X \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ и нека је $X = Y + Z$ произвољно растављање такво да је $Y \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и $Z \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$. Тада, за произвољно $k \in \mathbb{N}$, на основу дела под (а) и (б) имамо

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_{(k)} &\leq \left\| \int_{\Omega} A_t Y B_t d\mu(t) \right\|_1 + k \left\| \int_{\Omega} A_t Z B_t d\mu(t) \right\| \\ &= C_1 \|Y\|_1 + k C_2 \|Z\| \leq \max\{C_1, C_2\} (\|Y\|_1 + k \|Z\|). \end{aligned}$$

Како је растављање $X = Y + Z$, $Y \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, $Z \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ било произвољно, из дела (б) Теореме 1.33 закључујемо

$$\left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_{(k)} \leq \max\{C_1, C_2\} \inf_{\substack{X=Y+Z \\ Y \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}) \\ Z \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})}} (\|Y\|_1 + k \|Z\|) = \max\{C_1, C_2\} \|X\|_{(k)}.$$

На основу Теореме 1.34, из $\int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ и из $\left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_{(k)} \leq \max\{C_1, C_2\} \|X\|_{(k)}$, што важи за свако $k \in \mathbb{N}$ добијамо $\int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ и $\left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_{\Phi} \leq \max\{C_1, C_2\} \|X\|_{\Phi}$. $\square$

У наставку дајемо преглед неједнакости Коши-Шварцовог типа које ће се користити у Поглављу 4 о Лапласовим трансформерима. У питању су неједнакости у идеалима $\mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$, за $p \geq 1$ (погледати Секцију 1.3 у којој су дате дефиниције ових идеала компактних оператора).

У наставку наводимо значајну теорему из рада [39] која се тиче Коши-Шварцових неједнакости за трансформере облика $\int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t)$. За фамилију оператора из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ кажемо да је м. к. н. о. фамилија уколико се састоји од међусобно комутирајућих и нормалних оператора.

Теорема 2.22. [39, Теорема 3.1] Нека је Φ гаџа с. н. функција, $p \geq 2$, $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и претпоставимо да је $L^2(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ сепарабилан простор. Нека је $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотонно растући низ скупова из $\mathfrak{M}$ и нека је $\delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$.

(а) Ако $(A_t^*)_{t \in \Omega}, (B_t)_{t \in \Omega} \in L_G^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ и уколико је $(A_t)_{t \in \Omega}$ м. к. н. о. фамилија са својством $\sqrt{\int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t)} X \in \mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ тада важи неједнакости

$$(2.24) \quad \left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_{\Phi(p)} \leq \left\| \sqrt{\int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t)} X \right\|_{\Phi(p)} \sqrt{\left\| \int_{\Omega} B_t^* B_t d\mu(t) \right\|}.$$

Уколико је $(B_t)_{t \in \Omega}$ м.к.н.о. за коју важи $X \sqrt{\int_{\Omega} B_t B_t^* d\mu(t)} \in \mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ њага

$$(2.25) \quad \left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_{\Phi(p)} \leq \sqrt{\left\| \int_{\Omega} A_t A_t^* d\mu(t) \right\|} \left\| X \sqrt{\int_{\Omega} B_t B_t^* d\mu(t)} \right\|_{\Phi(p)}.$$

Такође, за свако $X \in \mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\delta_n} A_t X B_t d\mu(t) - \int_{\delta} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_{\Phi(p)} = 0$.

(б) Уколико је $\|\cdot\|_{\Phi(p)}$ Хилберт-Шмишовица норма њага комулативности и нормалности фамилија $(A_t)_{t \in \Omega}$ и $(B_t)_{t \in \Omega}$ не мора бити претпостављена за важење неједнакости (2.24) уколико $(A_t)_{t \in \Omega}, (B_t)_{t \in \Omega} \in L_G^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$. Слично, у овом случају важи и неједнакости (2.25) уколико $(A_t^*)_{t \in \Omega}, (B_t^*)_{t \in \Omega} \in L_G^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$. У оба случаја имамо да за свако $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ важи једнакости $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\delta_n} A_t X B_t d\mu(t) - \int_{\delta} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_2 = 0$.

(в) Ако $(A_t)_{t \in \Omega}, (B_t^*)_{t \in \Omega} \in L_G^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, $X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ њага $\int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$,

$$(2.26) \quad \left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_1 \leq \left\| \sqrt{\int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t)} X \sqrt{\int_{\Omega} B_t B_t^* d\mu(t)} \right\|_1$$

и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\delta_n} A_t X B_t d\mu(t) - \int_{\delta} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_1 = 0$ за свако $X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$.

(г) Ако $(A_t)_{t \in \Omega}, (B_t^*)_{t \in \Omega} \in L_G^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ и уколико је барем једна од фамилија $(A_t)_{t \in \Omega}$ и $(B_t)_{t \in \Omega}$ м.к.н.о. њага за свако $Y \in \mathfrak{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$ важи $\int_{\Omega} A_t X B_t \in \mathfrak{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$,

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_{\Phi(p)^*} &\leq \left\| \sqrt{\int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t)} X \sqrt{\int_{\Omega} B_t B_t^* d\mu(t)} \right\|_{\Phi(p)^*} \\ &\leq \sqrt{\left\| \int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t) \right\|} \cdot \left\| \int_{\Omega} B_t B_t^* d\mu(t) \right\| \|Y\|_{\Phi(p)^*} \end{aligned}$$

као и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\delta_n} A_t X B_t d\mu(t) - \int_{\delta} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_2 = 0$ за свако $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$.

(д) Уколико су обе фамилије $(A_t)_{t \in \Omega}$ и $(B_t)_{t \in \Omega}$ м.к.н.о. њага неједнакости (2.27) важи за било коју с.н. функцију Φ (уместо $\Phi^{(p)^*}$) и свако $Y \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$.

Напоменимо да се део (д) горе наведене Теореме 2.22 већ јављао у литератури, као што наводимо у наставку. Треба имати у виду да је у [39] презентована нова техника доказивања оваквих неједнакости (са тим у вези видети занимљиву Лему 2.2 из [39]).

Теорема 2.23. [42, Теорема 3.2] Нека су обе м.к.н.о. фамилије $(A_t)_{t \in \Omega}$ и $(B_t)_{t \in \Omega}$ елементи простора $L_G^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$. Тада, за $X \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ важи $\int_{\Omega} A_t X B_t \in \mathfrak{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ и

$$(2.28) \quad \left\| \int_{\Omega} A_t X B_t d\mu(t) \right\|_{\Phi} \leq \left\| \sqrt{\int_{\Omega} A_t^* A_t d\mu(t)} X \sqrt{\int_{\Omega} B_t^* B_t d\mu(t)} \right\|_{\Phi}.$$

Униформна интеграбилност скупова у $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$

У наставку радимо са фамилијама интеграбилних $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних пресликавања.

Скуп $S \subseteq L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ је *униформно интеграбилан* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за све $f \in S$ услови $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) < \delta$ повлаче неједнакост $|\int_E f d\mu| < \varepsilon$.

Дефиниција 2.24. Скупу $\{A^{(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\} \subset L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ задовољава *униформно* $\mathcal{A}\mathcal{C}_\mu$ *својство* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за свако $\lambda \in \Lambda$ важи

$$E \in \mathfrak{M}, \mu(E) < \delta \implies \left\| \int_E A_t^{(\lambda)} d\mu(t) \right\| < \varepsilon.$$

За дату фамилију оператора $A^{(n)} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ дефинишемо функцију $v_n : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ изразом $v_n(E) = \int_E A_t^{(n)} d\mu(t)$ за свако $E \in \mathfrak{M}$. У складу са уведеном нотацијом имамо следеће тврђење.

Теорема 2.25. [52] Нека је $\mathcal{A}^{(n)} = (A_t^{(n)})_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ фамилија позитивних оператора са својством $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n(\Omega)\| < +\infty$ и нека низ $(A_t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира слабо ка $A_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ када $n \rightarrow \infty$ за свако $t \in \Omega$.

(а) Тада је $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и важи неједнакост

$$\left\| \int_\Omega A_t d\mu(t) \right\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_\Omega A_t^{(n)} d\mu(t) \right\|.$$

(б) Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека скупу $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ задовољава униформно $\mathcal{A}\mathcal{C}_\mu$ својство. Функција $v_A : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ дефинисана са $v_A(E) = \int_E A_t d\mu(t)$, $E \in \mathfrak{M}$, је $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносна мера на $\mathfrak{M}$.

Доказ. Имамо $A_t \geq 0$ на основу једнакости $\langle A_t f, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_t^{(n)} f, f \rangle \geq 0$, која је задовољена за свако $t \in \Omega$ и свако $f \in \mathcal{H}$.

(а) Из $A_t^{(n)} \geq 0$ за $t \in \Omega$ следи $v_n(\Omega) \geq 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Фамилија $(A_t)_{t \in \Omega}$ је слабо* мерљива јер је $\langle A_t f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_t^{(n)} f, g \rangle$ за све $t \in \Omega$ и $f, g \in \mathcal{H}$. Услов $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n(\Omega)\| < +\infty$ даје $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, што следи на једноставан начин из Фатуове леме. Заиста, за све векторе $f \in \mathcal{H}$ имамо

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle A_t f, f \rangle d\mu(t) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \langle A_t^{(n)} f, f \rangle d\mu(t) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle v_n(\Omega) f, f \rangle \leq \|f\|^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n(\Omega)\| < +\infty. \end{aligned}$$

Из горњег рачуна добијамо $\langle v_A(\Omega) f, f \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n(\Omega)\| \langle f, f \rangle$ за све $f \in \mathcal{H}$ и користећи $v_A(\Omega) \geq 0$ закључујемо $\|v_A(\Omega)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n(\Omega)\|$.

(б) Користећи део (а), имамо да је функција v_A добро дефинисана, слабо пребројиво адитивна мера на $\mathfrak{M}$. Нека је $N \in \mathbb{N}$ и $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ међусобно дисјунктних скупова

из $\mathfrak{M}$. Опет, на основу Фатуове леме и на основу елементарних својстава инфимума и супремума¹⁰ добијамо

$$\begin{aligned}
 & \left\| v_A \left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right) - v_A \left(\bigsqcup_{k=1}^N E_k \right) \right\| = \left\| \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} A_t d\mu(t) \right\| \\
 &= \sup_{\|f\|=1} \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} \langle A_t f, f \rangle d\mu(t) \\
 &= \sup_{\|f\|=1} \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_t^{(n)} f, f \rangle d\mu(t) \\
 &\leq \sup_{\|f\|=1} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} \langle A_t^{(n)} f, f \rangle d\mu(t) \\
 &= \sup_{\|f\|=1} \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{N \ni n \geq m} \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} \langle A_t^{(n)} f, f \rangle d\mu(t) \\
 &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{\|f\|=1} \inf_{N \ni n \geq m} \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} \langle A_t^{(n)} f, f \rangle d\mu(t) \\
 &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{N \ni n \geq m} \sup_{\|f\|=1} \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} \langle A_t^{(n)} f, f \rangle d\mu(t) \\
 &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{N \ni n \geq m} \sup_{\|f\|=1} \left\langle \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} A_t^{(n)} d\mu(t) f, f \right\rangle \\
 &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{N \ni n \geq m} \left\| \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} A_t^{(n)} d\mu(t) \right\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} A_t^{(n)} d\mu(t) \right\|.
 \end{aligned}$$

На основу $\mu(\Omega) < +\infty$ можемо закључити да важи $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k) = 0$ па из претпостављеног униформног $\mathcal{AC}_\mu$ својства скупа $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ следи да последњи лимес инфериор може бити довољно мали када $N \rightarrow \infty$. Овиме смо доказали да важи једнакост $v_A(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_A(E_n)$, при чему је конвергенција последњег реда у норми простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. $\square$

У наредној теореме дајемо довољне услове под којима скуп $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ задовољава униформно $\mathcal{AC}_\mu$ својство. Користимо исту нотацију као и у Теорему 2.25.

Теорема 2.26. [52] Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека је даџа фамилија $\mathcal{A}^{(n)} = (A_t^{(n)})_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ која се састоји од позитивних оператора и нека $(A_t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира слабо ка $A_t \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за $t \in \Omega$. Ако $v_A(\Omega) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$, $A_t^{(n)} \leq A_t^{(n+1)}$ за све $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \Omega$ и ако је $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n(\Omega)\| < +\infty$ тада скуп $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ задовољава униформно $\mathcal{AC}_\mu$ својство.

Доказ. Фамилија оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ је елемент простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ на основу дела

¹⁰Ако су A и B произвољни непразни скупови и $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ тада важи неједнакост $\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \leq \inf_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y)$.

(а) Теореме 2.25. За свако $E \in \mathfrak{M}$ имамо да важе једнакости

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n(E)f, f \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \langle A_t^{(n)} f, f \rangle d\mu(t) \\ &= \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_t^{(n)} f, f \rangle d\mu(t) = \int_E \langle A_t f, f \rangle d\mu(t) = \langle v_A(E)f, f \rangle, \end{aligned}$$

што следи на основу ТМК. Одавде имамо да низ $(v_n(E))_{n \in \mathbb{N}}$ слабо конвергира ка $v_A(E)$ за свако фиксирано $E \in \mathfrak{M}$. Из $0 \leq v_n(E) \leq v_A(E) \leq v_A(\Omega) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$, на основу Леме 1.14 следи $v_n(E) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $E \in \mathfrak{M}$. Из [51, Лема 1.2] или из Теореме 1.39 добијамо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n(E) - v_A(E)\| = 0$ за све $E \in \mathfrak{M}$.

Користећи $\mu(\Omega) < +\infty$, $v_A(\Omega) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $A_t \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за $t \in \Omega$, на основу Теореме 2.15 имамо да за $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) < \delta$ даје $\|v_A(E)\| < \varepsilon$. Нека је $\varepsilon > 0$ и одаберимо $\delta > 0$ из поменуте теореме и $E \in \mathfrak{M}$ са својством $\mu(E) < \delta$. Постоји број $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такав да је $\|v_n(\Omega) - v_A(\Omega)\| < \varepsilon$ за свако $n \geq n_0$. Сада, за $n \geq n_0$ имамо $\|v_n(E)\| \leq \|v_n(E) - v_A(E)\| + \|v_A(E)\| \leq \|v_n(\Omega) - v_A(\Omega)\| + \|v_A(E)\| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Опет, на основу Теореме 2.15 коначан скуп $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \{1, \dots, N\}\}$ задовољава униформно $\mathcal{AC}_\mu$ својство јер је $A_t^{(n)} \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $v_n(\Omega) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за све $t \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$. Одавде закључујемо да и скуп $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ задовољава униформно $\mathcal{AC}_\mu$ својство. $\square$

У наставку наводимо два примера који су повезани са Теоремом 2.14 која повезује компактност оператора A_t за μ -скоро свако $t \in \Omega$ и компактност ограниченог оператора $\int_\Omega A_t d\mu(t)$. Први од два поменута примера показује да не можемо добити резултат ове теореме ако мера простора није коначна.

Пример 2.27. Нека је $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ и нека је μ бројачка мера на $\mathbb{N}$. За о. н. б. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у $\mathcal{H}$ дефинишимо $A_n(f) = \langle f, e_n \rangle e_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $f \in \mathcal{H}$. Имамо да је $A_n \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Такође, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да $E \in \mathfrak{M}$, $\mu(E) < \delta$ повлачи¹¹ $\|\int_E A_n d\mu(n)\| < \varepsilon$. Фамилија оператора $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је елементи простора $L_G^1(\mathbb{N}, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и за свако $f \in \mathcal{H}$ важи

$$\left\langle \int_{\mathbb{N}} A_n d\mu(n) f, f \right\rangle = \int_{\mathbb{N}} \langle A_n f, f \rangle d\mu(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_n f, f \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2 = \langle I f, f \rangle.$$

Одавде и из $\dim \mathcal{H} = +\infty$ закључујемо $\int_{\mathbb{N}} A_n d\mu(n) = I \notin \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. $\triangle$

Наредни пример показује да се услов $\mathcal{AC}_\mu$ не може изоставити у Теорему 2.14.

Пример 2.28. Нека је μ мера на $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ таква да је $\mu(\{n\}) = 2^{-n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и нека је $\mathcal{H}$ сејарабилан Хилбертов простор са о. н. б. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Примећимо да је μ коначна мера тј. $\mu(\mathbb{N}) = 1$. За свако $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ са $A_n = 2^n P_n$, при чему је P_n ортогонална пројекција на $\text{lin}\{e_n\}$. Јасно је да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $A_n \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. Са друге стране, имамо да је испуњено $\int_{\mathbb{N}} A_n d\mu(n) = I$ јер је $\langle \int_{\mathbb{N}} A_n d\mu(n) f, f \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \langle \langle f, e_n \rangle e_n, f \rangle \cdot \frac{1}{2^n} = \langle f, f \rangle$ за свако $f \in \mathcal{H}$. Наравно, $\mathcal{AC}_\mu$ својство није задовољено у овом примеру. $\triangle$

За крај ове секције наводимо пример функције $A : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ која је Гелфанд интеграбилна али није Петис интеграбилна.

¹¹Јер је μ бројачка мера код које је једини скуп мере нула празан скуп.

Пример 2.29. [8] Нека је $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ о. н. б. Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ и нека је пресликавање $A_t : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ задато изразом

$$A_t f = \sum_{n=1}^{+\infty} n \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(t) \langle f, e_n \rangle e_n \text{ за свако } f \in \mathcal{H}.$$

Имамо $(A_t)_{t \in [0, 1]} \in L_G^1([0, 1], m, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ јер на основу Парсевалове¹² једнакости важи

$$\int_{[0, 1]} \langle A_t f, f \rangle dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{[0, 1]} n \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(t) dm(t) \right) |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2$$

за свако $f \in \mathcal{H}$. Ако је $E_k = [0, \frac{1}{k}]$ тада важи $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = 0$ као и

$$(2.29) \quad \left\| \int_{E_k} A_t dm(t) \right\| = \sup_{\|f\|=1} \int_{E_k} \langle A_t f, f \rangle dm(t) = \sup_{\|f\|=1} \sum_{n=1}^{+\infty} n \int_{E_k} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(t) dm(t) |\langle f, e_n \rangle|^2 \\ \geq k \int_{E_k} \chi_{[0, \frac{1}{k}]}(t) dm(t) \sup_{\|f\|=1} |\langle f, e_k \rangle|^2 = 1 \text{ за свако } k \in \mathbb{N}.$$

Из (2.29) следи да функција $A : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ не може бити Пејис интеграбилна на основу Теореме 1.27. $\triangle$

Веза Гелфандовог и спектралног интеграла

Пример 2.12, Пример 2.27 као и Пример 2.29 нас мотивишу да добијемо везу између Гелфандовог и сјекторалног интеграла, у случају када сви оператори A_t настају од исте спектралне мере.

Нека је $(X, \mathfrak{N})$ неки (други) мерљив простор и нека је $E : \mathfrak{N} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ сјекторална мера. Тада, за $f \in \mathcal{H}$ дефинишемо меру $\eta_f : \mathfrak{N} \rightarrow [0, +\infty]$ изразом $\eta_f(\delta) = \langle E(\delta)f, f \rangle$, $\delta \in \mathfrak{N}$. Мера η_f је коначна за свако $f \in \mathcal{H}$, јер имамо

$$\eta_f(X) = \langle E(X)f, f \rangle = \langle E(X)^2 f, f \rangle = \|E(X)f\|^2 = \|If\|^2 = \|f\|^2.$$

За $\varphi \in L^\infty(X, \mathfrak{N}, E)$ спектрални интеграл $\int_X \varphi(x) dE(x)$ постоји у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и важи

$$(2.30) \quad \left\langle \int_X \varphi(x) dE(x) f, f \right\rangle = \int_X \varphi(x) d\eta_f(x) \text{ за све } f \in \mathcal{H}.$$

Интеграција у односу на спектралну меру E је изометрички* изоморфизам Банахове алгебре $L^\infty(X, \mathfrak{N}, E)$ са затвореном и нормалном подалгебром у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Зато важи

$$(2.31) \quad \sup_{x \in X} |\varphi(x)| = \left\| \int_X \varphi(x) dE(x) \right\| \text{ за свако } \varphi \in L^\infty(X, \mathfrak{N}, E).$$

Теорема 2.30. [52] Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор, $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ σ -коначан мерљив простор и $(X, \mathfrak{N})$ мерљив простор са сјекторалном мером $E : \mathfrak{N} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Такође, нека је $\varphi : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$ функција са следећим особинама:

¹²Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836), француски математичар

(а) Функција $X \ni x \mapsto \varphi(t, x) \in \mathbb{C}$ припада простору $L^\infty(X, \mathfrak{N}, E)$ за свако $t \in \Omega$.

(б) $\varphi \in L^1(\Omega \times X, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \mu \otimes \eta_f)$ за свако $f \in \mathcal{H}$.

(в) Функција $X \ni x \mapsto \int_\Omega \varphi(t, x) d\mu(t) \in \mathbb{C}$ припада простору $L^\infty(X, \mathfrak{N}, E)$.

Тада, за свако $t \in \Omega$ оператор $A_t = \int_X \varphi(t, x) dE(x)$ постоји као елемент простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, важи $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и имамо једнакост

$$(2.32) \quad \int_\Omega A_t d\mu(t) = \int_X \int_\Omega \varphi(t, x) d\mu(t) dE(x).$$

Такође, оператор $\int_\Omega A_t d\mu(t)$ је нормалан и имамо

$$(2.33) \quad \left\| \int_\Omega A_t d\mu(t) \right\| = \sup_{x \in X} \operatorname{ess} \left| \int_\Omega \varphi(t, x) d\mu(t) \right|.$$

Доказ. Користећи претпоставку (а) имамо да спектрални интеграл $A_t = \int_X \varphi(t, x) dE(x)$ постоји у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за свако $t \in \Omega$. За произвољно $f \in \mathcal{H}$, из услова (б) и применом Фубинијеве¹³ теореме, користећи (2.30), имамо да функција

$$\Omega \ni t \mapsto \langle A_t f, f \rangle = \left\langle \int_X \varphi(t, x) dE(x) f, f \right\rangle = \int_X \varphi(t, x) d\eta_f(x) \in \mathbb{C}$$

припада простору $L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. Одавде следи $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Опет, на основу Фубинијеве теореме имамо

$$(2.34) \quad \int_{\Omega \times X} \varphi(t, x) d(\mu \otimes \eta_f) = \int_\Omega \left(\int_X \varphi(t, x) d\eta_f(x) \right) d\mu(t) = \int_\Omega \langle A_t f, f \rangle d\mu(t).$$

Из претпоставке (б) добијамо да функција $X \ni x \mapsto \int_\Omega \varphi(t, x) d\mu(t) \in \mathbb{C}$ постоји за скоро свако $x \in X$ у односу на меру η_f . Користећи претпоставку (в) можемо да применимо (2.30) и из (2.34) закључујемо

$$\begin{aligned} \left\langle \int_X \left(\int_\Omega \varphi(t, x) d\mu(t) \right) dE(x) f, f \right\rangle &= \int_X \left(\int_\Omega \varphi(t, x) d\mu(t) \right) d\eta_f(x) \\ &= \int_\Omega \langle A_t f, f \rangle d\mu(t) = \left\langle \int_\Omega A_t d\mu(t) f, f \right\rangle. \end{aligned}$$

Како је $f \in \mathcal{H}$ било произвољно, добијамо формулу (2.32).

Оператор $\int_\Omega A_t d\mu(t)$ је нормалан у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и то следи директно из формуле (2.32) и из поменутог својства да је интеграција у односу на спектралну меру E изометрички* изоморфизам Банахове алгебре $L^\infty(X, \mathfrak{N}, E)$ са неком затворном нормалном подалгебром у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Из услова (в) следи да можемо применити (2.31) и добити (2.33). $\square$

У наставку излагања наводимо резултат из [52] који даје репрезентацију Гелфандовог интеграла $\int_\Omega f(t) A_t d\mu(t)$ под условом да елементи фамилије $(A_t)_{t \in \Omega}$ имају нека додатна својства. Да будемо прецизнији, уколико оператор-вредносна функција $A : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ има константну вредност на сваком елементу $\mathfrak{M}$ -мерљиве партиције $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ простора Ω тада дајемо формулу за Гелфандов интеграл $\int_\Omega f(t) A_t d\mu(t)$ у облику слабе суме оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Такође, дајемо довољне услове да сума у поменутој формули конвергира у норми сепарабилног идеала $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$.

¹³Guido Fubini (1879–1943), италијански математичар

Теорема 2.31. [52] Нека је $(A_t)_{t \in \Omega}$ фамилија у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ таква да је $\sup_{t \in \Omega} \|A_t\| < +\infty$ и $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. Ако је $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ у $\mathfrak{M}$, $\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \Omega$ и ако $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ погскуу у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ такав да је $A_t = B_k$ за сваки $t \in E_k$, тада $(f(t)A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и имамо

$$(2.35) \quad \int_{\Omega} f(t)A_t d\mu(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\int_{E_k} f(t) d\mu(t) \right] B_k,$$

где ред у (2.35) конвертира слабо. Ако $f(t)A_t \geq 0$ за свако $t \in \Omega$ и ако $\int_{\Omega} f(t)A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ тада ред (2.35) конвертира у норми $\|\cdot\|_{\Phi}$ сејарабилној идеала $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$.

Доказ. Фамилија $(f(t)A_t)_{t \in \Omega}$ припада простору $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ јер за $x, y \in \mathcal{H}$ имамо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\langle f(t)A_t x, y \rangle| d\mu(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k} |\langle A_t x, y \rangle| \cdot |f(t)| d\mu(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle B_k x, y \rangle| \int_{E_k} |f(t)| d\mu(t) \\ &\leq \sup_{t \in \Omega} \|A_t\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k} |f(t)| d\mu(t) \\ &= \sup_{t \in \Omega} \|A_t\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|f\|_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Функција $\mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_E f(t) \langle A_t x, y \rangle d\mu(t) \in \mathbb{C}$ је комплексна мера на $\mathfrak{M}$ за фиксиране $x, y \in \mathcal{H}$. Зато, имамо

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{\Omega} f(t)A_t d\mu(t) x, y \right\rangle &= \int_{\Omega} f(t) \langle A_t x, y \rangle d\mu(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k} f(t) \langle A_t x, y \rangle d\mu(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \left(\sum_{k=1}^n \left(\int_{E_k} f(t) d\mu(t) \right) B_k \right) x, y \right\rangle, \end{aligned}$$

што потврђује формулу (2.35). Такође, ако $f(t)A_t \geq 0$ за $t \in \Omega$ и ако $\int_{\Omega} f(t)A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ тада део (а) Теореме 2.17 даје да је функција $\mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_E f(t)A_t d\mu(t)$ једна $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ -вредносна мера. На основу (4.19) добијамо

$$\int_{\Omega} f(t)A_t d\mu(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k} f(t)A_t d\mu(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{E_k} f(t)B_k d\mu(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{E_k} f(t) d\mu(t) \right) B_k$$

у норми $\|\cdot\|_{\Phi}$ идеала $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$. □

Нека је $A_t \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Ако је $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и ако је функција v_A придружена фамилији $(A_t)_{t \in \Omega}$ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносна мера на $\mathfrak{M}$, тада имамо исти закључак као у [51, Теорема 2.3, (а)], уколико је мера μ σ -коначна.

Теорема 2.32. [52] Нека је μ σ -коначна мера на $\mathfrak{M}$ и нека је $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ тако да је $A_t \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Ако је функција $v_A : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ дефинисана са $v_A(E) = \int_E A_t d\mu(t)$, $E \in \mathfrak{M}$, једна $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносна мера и ако фамилија $(A_t)_{t \in \Omega}$ задовољава $\mathcal{AC}_{\mu}$ услов тада важи $\int_{\Omega} A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_{\infty}(\mathcal{H})$.

Доказ. Постоји низ $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ међусобно дисјунктних скупова из $\mathfrak{M}$ са својством $\mu(E_n) < +\infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \Omega$. Применом [51, Теорема 2.3, (а)] на сваки E_n добијамо

$v_A(E_n) = \int_{E_n} A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Функција v_A је $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносна мера на σ -алгебри $\mathfrak{M}$, тј. важе једнакости

$$\int_{\Omega} A_t d\mu(t) = v_A(\Omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_A(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} A_t d\mu(t),$$

где је конвергенција последњег реда у норми простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Сада тврђење теореме следи из чињенице да је идеал $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ затворен у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. $\square$

Напоменимо да у Примеру 2.27 функција $v_A(E) = \int_E A_n d\mu(n)$, $E \in \mathfrak{M}$, није $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносна мера на $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, иако је коначно адитивна. Заиста, ако би функција v_A била $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносна мера на σ -алгебра $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, тада би на основу Теореме 2.32 следило $I \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$, што је контрадикција са $\dim \mathcal{H} = +\infty$.

Нека је $(A_t)_{t \in \Omega}$ фамилија оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Следећа теорема добијена у [52] даје довољне услове за конвергенцију низа Гелфандових интеграла $(\int_{\Omega} f_n(t) A_t d\mu(t))_{n \in \mathbb{N}}$ у норми простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ка оператору $\int_{\Omega} f(t) A_t d\mu(t)$, где су $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и f елементи простора $L^2(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$, са још неким додатним особинама.

Теорема 2.33. *Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и $f_n \in L^2(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ тако да је $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Ако је $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < +\infty$ и ако је скуи функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t x\|^2 \in \mathbb{R}$, $\|x\| \leq 1$, униформно интеграбилан, тада су обе фамилије оператора $(f_n(t) A_t)_{t \in \Omega}$ и $(f(t) A_t)_{t \in \Omega}$ елементи простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и важи*

$$(2.36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\Omega} f_n(t) A_t d\mu(t) - \int_{\Omega} f(t) A_t d\mu(t) \right\| = 0.$$

Доказ. За свако $n \in \mathbb{N}$ и $x, y \in \mathcal{H}$ неједнакост Коши-Шварца даје да важи

$$(2.37) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} |\langle f_n(t) A_t x, y \rangle| d\mu(t) &\leq \sqrt{\int_{\Omega} |f_n(t)|^2 d\mu(t)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |\langle A_t x, y \rangle|^2 d\mu(t)} \\ &\leq \|f_n\|_2 \sqrt{\int_{\Omega} \|A_t x\|^2 d\mu(t)} \cdot \|y\| < +\infty, \end{aligned}$$

одакле следи да је $(f_n(t) A_t)_{t \in \Omega}$ елемент простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Применом Фатуове леме добијамо $f \in L^2(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ јер важи $L := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < +\infty$ и

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{\Omega} |f(t)|^2 d\mu(t) = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(t)|^2 d\mu(t) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n(t)|^2 d\mu(t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2^2 \leq L^2. \end{aligned}$$

На исти начин као у (2.37) добијамо да за свако $x, y \in \mathcal{H}$ важи $\int_{\Omega} |\langle f(t) A_t x, y \rangle| d\mu(t) < +\infty$, одакле следи $(f(t) A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Такође, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи неједнакост

$$(2.38) \quad \left\| \int_{\Omega} f_n(t) A_t d\mu(t) - \int_{\Omega} f(t) A_t d\mu(t) \right\| \leq \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \int_{\Omega} |f_n(t) - f(t)| \cdot |\langle A_t x, y \rangle| d\mu(t).$$

Нека је $\varepsilon > 0$ произолно и одаберимо број $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ из дефиниције униформне интеграбилности скупа функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t x\|^2 \in \mathbb{R}$, $\|x\| \leq 1$. На основу теореме Јегорова¹⁴ (видети [5, Теорема 5.21]) можемо наћи скуп $\mathfrak{M} \ni E_\delta \subseteq \Omega$ за који је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in E_\delta} |f_n(t) - f(t)| = 0 \text{ и } \mu(\Omega \setminus E_\delta) < \delta.$$

За свако $x \in \mathcal{H}$ имамо $\int_\Omega \|A_t x\|^2 d\mu(t) < +\infty$ одакле закључујемо да је фамилија оператора $(A_t^* A_t)_{t \in \Omega}$ елемент простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathbf{B}(\mathcal{H}))$. Из (2.8) имамо

$$M := \sup_{\|x\|=1} \int_\Omega \langle A_t^* A_t x, x \rangle d\mu(t) = \sup_{\|x\|=1} \int_\Omega \|A_t x\|^2 d\mu(t) < +\infty.$$

На основу неједнакости Коши-Шварца добијамо

$$\begin{aligned} & \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \int_{E_\delta} |f_n(t) - f(t)| \cdot |\langle A_t x, y \rangle| d\mu(t) \\ & \leq \sup_{t \in E_\delta} |f_n(t) - f(t)| \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \int_{E_\delta} |\langle A_t x, y \rangle| d\mu(t) \\ (2.39) \quad & \leq \sup_{t \in E_\delta} |f_n(t) - f(t)| \sup_{\|x\|=1} \int_{E_\delta} \|A_t x\| d\mu(t) \\ & \leq \sup_{t \in E_\delta} |f_n(t) - f(t)| \sqrt{\sup_{\|x\|=1} \int_{E_\delta} \|A_t x\|^2 d\mu(t)} \cdot \sqrt{\mu(E_\delta)} \\ & \leq \sqrt{M \cdot \mu(\Omega)} \sup_{t \in E_\delta} |f_n(t) - f(t)| \text{ за свако } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Неједнакост троугла у простору $L^2(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ даје $\|f_n - f\|_2 \leq \|f_n\|_2 + \|f\|_2 \leq 2L$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Користећи опет неједнакост Коши-Шварца и униформну интеграбилност скупа функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t x\|^2 \in \mathbb{R}$, $\|x\| \leq 1$, комбиновано са $\mu(\Omega \setminus E_\delta) < \delta$, добијамо

$$\begin{aligned} & \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \int_{\Omega \setminus E_\delta} |f_n(t) - f(t)| \cdot |\langle A_t x, y \rangle| d\mu(t) \\ & \leq \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \sqrt{\int_{\Omega \setminus E_\delta} |f_n(t) - f(t)|^2 d\mu(t)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega \setminus E_\delta} |\langle A_t x, y \rangle|^2 d\mu(t)} \\ (2.40) \quad & \leq \|f_n - f\|_2 \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \sqrt{\int_{\Omega \setminus E_\delta} |\langle A_t x, y \rangle|^2 d\mu(t)} \\ & \leq 2L \sup_{\|x\|=1} \sqrt{\int_{\Omega \setminus E_\delta} \|A_t x\|^2 d\mu(t)} \leq 2L\sqrt{\varepsilon} \text{ за свако } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Сада, из (2.38), (2.39) и (2.40), следи да за све $n \in \mathbb{N}$ важи неједнакост

$$\left\| \int_\Omega f_n(t) A_t d\mu(t) - \int_\Omega f(t) A_t d\mu(t) \right\| \leq \sqrt{M \cdot \mu(\Omega)} \sup_{t \in E_\delta} |f_n(t) - f(t)| + 2L\sqrt{\varepsilon}.$$

Користећи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in E_\delta} |f_n(t) - f(t)| = 0$ и $\mu(\Omega) < +\infty$ имамо да важи

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_\Omega f_n(t) A_t d\mu(t) - \int_\Omega f(t) A_t d\mu(t) \right\| \leq 2L\sqrt{\varepsilon} \text{ за свако } \varepsilon > 0,$$

одакле следи једнакост (2.36). □

¹⁴Дмитрий Фёдорович Егоров (1869–1931), руски математичар

Напоменимо да није претпостављено $(A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ у претходној теорему.

Услов равномерне интеграбилност скупа функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t x\|^2 \in \mathbb{R}$, $\|x\| \leq 1$, је тривијално задовољен ако је $\mu(\Omega) < +\infty$ и $\sup_{t \in \Omega} \|A_t\| < +\infty$.

Лако можемо видети да је скуп $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ из Теореме 2.33 равномерно интеграбилан. Заиста, из $\mu(\Omega) < +\infty$ и $f_n \in L^2(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ следи $f_n \in L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Ако скуп $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ не би био равномерно интеграбилан, тада можемо наћи $\varepsilon_0 > 0$ и низ скупова $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathfrak{M}$, тако да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$ и тако да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $m(n) \in \mathbb{N}$ за које је $\left| \int_{E_n} f_{m(n)}(t) d\mu(t) \right| \geq \varepsilon_0$. Тада, за све $n \in \mathbb{N}$ имамо

$$\varepsilon_0 \leq \left| \int_{E_n} f_{m(n)}(t) d\mu(t) \right| \leq \sqrt{\int_{E_n} |f_{m(n)}(t)|^2 d\mu(t)} \cdot \sqrt{\mu(E_n)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 \cdot \sqrt{\mu(E_n)}.$$

Сада, добијамо контрадикцију из $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$.

Наредни пример показује да се услов $\mu(\Omega) < +\infty$ у Теорему 2.33 не може изоставити. За низ функција $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ћемо изабрати онај који је равномерно интеграбилан.

Пример 2.34. Нека је $\Omega = [1, +\infty)$. Дефинишимо $A : [1, +\infty) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ са $A_t(f) = \langle f, e_{[t]} \rangle e_{[t]}$ за све $f \in \mathcal{H}$ и $t \in [1, +\infty)$, где је $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нека ортонормирана база Хилбертовог простора $\mathcal{H}$. За $n \in \mathbb{N}$ следи $\chi_{[n, n+1)}(t) A_t(f) = \langle f, e_n \rangle e_n$, уколико је $t \in [n, n+1)$ и $\chi_{[n, n+1)}(t) A_t(f) = 0$ уколико је $t \notin [n, n+1)$. Због тога, за све $f \in \mathcal{H}$ имамо

$$(2.41) \quad \int_{[1, +\infty)} \langle \chi_{[n, n+1)}(t) A_t(f), f \rangle dm(t) = \int_{[n, n+1)} |\langle f, e_n \rangle|^2 dm(t) = |\langle f, e_n \rangle|^2,$$

одакле је $(\chi_{[n, n+1)}(t) A_t)_{t \in [1, +\infty)} \in L_G^1([1, +\infty), m, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Из Беселове неједнакости следи

$$(2.42) \quad \int_{[1, +\infty)} \|A_t f\|^2 dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[n, n+1)} \|A_t f\|^2 dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Такође, за све Лебеј мерљиве скупове $E \subseteq [1, +\infty)$ са својством $m(E) < +\infty$ и за све векторе $f \in \mathcal{H}$ за које је $\|f\| \leq 1$ важи

$$\int_E \|A_t f\|^2 dm(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 m(E \cap [n, n+1)) \leq \|f\|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} m(E \cap [n, n+1)) \leq m(E).$$

Одавде имамо да је скуп функција $[1, +\infty) \ni t \mapsto \|A_t f\|^2 \in \mathbb{R}$, $\|f\| \leq 1$, равномерно интеграбилан. Користећи (2.41) добијамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\left\| \int_{[1, +\infty)} \chi_{[n, n+1)}(t) A_t dm(t) \right\| = \sup_{\|f\|=1} \int_{[1, +\infty)} \langle \chi_{[n, n+1)}(t) A_t(f), f \rangle dm(t) = \sup_{\|f\|=1} |\langle f, e_n \rangle|^2 = 1,$$

што показује да услов (2.36) не важи. Користећи (2.41) имамо да фамилија оператора $(A_t)_{t \in [1, +\infty)}$ припада простору $L_G^1([1, +\infty), m, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ као и то да важи $\int_{[1, +\infty)} A_t dm(t) = I$. Из (2.42) такође следи да фамилија оператора $(A_t^* A_t)_{t \in [1, +\infty)}$ припада простору $L_G^1([1, +\infty), m, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и да важи једнакост $\int_{[1, +\infty)} A_t^* A_t dm(t) = I$. $\triangle$

Следеће тврђење је последица Теореме 2.33 и даје конвергенцију низа оператора $\left(\int_{E_n} A_t d\mu(t) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ у норми простора $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ка $\int_E A_t d\mu(t)$, где низ скупова $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathfrak{M}$ конвертира ка скупу $E \in \mathfrak{M}$ (видети [5, стр. 45]).

Последица 2.35. Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека је скућ функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t x\|^2, \|x\| \leq 1$, униформно интеграбилан. Ако је низ скућова $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у $\mathfrak{M}$ такав да постоји гранична вредност $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$, тада оператори $\int_{E_n} A_t d\mu(t)$ и $\int_E A_t d\mu(t)$ постоје у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и важи

$$(2.43) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{E_n} A_t d\mu(t) - \int_E A_t d\mu(t) \right\| = 0.$$

Доказ. Из $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ имамо $E \in \mathfrak{M}$. Означимо $f_n = \chi_{E_n}$ за $n \in \mathbb{N}$ и $f = \chi_E$. За све $n \in \mathbb{N}$ имамо $\|f_n\|_2 = \mu(E_n) \leq \mu(\Omega) < +\infty$, тј. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 < +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{E_n}(t) = \chi_E(t) = f(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Такође, $f \in L^2(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. Све претпоставке Теореме 2.33 су испуњене па добијамо да су фамилије $(\chi_{E_n}(t)A_t)_{t \in \Omega}$ и $(\chi_E(t)A_t)_{t \in \Omega}$ елементи простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ а из (2.36) директно закључујемо да важи једнакост (2.43). $\square$

Напоменимо да су слични проблеми разматрани у [39, Лема 2.1].

2.7 Интеграција слабо* мерљивих функција

$$A : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$$

Функција $\Omega \ni t \mapsto \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} \in \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ је слабо* мерљива ако и само ако је функција $\Omega \ni t \mapsto A_t^{(n)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ слабо* мерљива за све $n \in \mathbb{N}$ и то следи директно из дефиниције (1.33) скаларног производа у Хилбертовом простору $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$.

Следећа теорема је реформулација потребних и довољних услова да функција $\Omega \ni t \mapsto \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} \in \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ буде елемент простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n))$. У овој теорему ћемо размотрити и везу између оператора $\int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t)$ и $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_E A_t^{(n)} d\mu(t)$ за $E \in \mathfrak{M}$, ако оператор $\int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t)$ постоји у $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$.

Резултати ове секције су садржани у [52].

Теорема 2.36. Нека је $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ Хилбертових простора и нека је $(A_t^{(n)})_{t \in \Omega}$ фамилија оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Оператор $\int_\Omega \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t)$ постоји у $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ ако и само ако важе следећи услови:

$$(a) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_t^{(n)}\| < +\infty \text{ за } \mu\text{-скоро свако } t \in \Omega.$$

$$(b) \quad \text{Функција } \Omega \ni t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_t^{(n)} f_n, f_n \rangle \in \mathbb{C} \text{ припада простору } L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu) \text{ за свако } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n.$$

Под условима (a) и (b) имамо

$$(2.44) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \int_E A_t^{(n)} d\mu(t) \right\| < +\infty \text{ за свако } E \in \mathfrak{M},$$

оператор $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_E A_t^{(n)} d\mu(t)$ постоји у $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ и важи једнакост

$$(2.45) \quad \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t) = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_E A_t^{(n)} d\mu(t).$$

Доказ. Услов **(а)** је еквивалентан са постојањем оператора $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)}$ из $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. На основу дефиниције скаларног производа у Хилбертовом простору $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$ услов **(б)** је еквивалентан са тиме да функција

$$\Omega \ni t \mapsto \left\langle \left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} \right) (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_t^{(n)} f_n, f_n \rangle \in \mathbb{C}$$

припада простору $L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ за све векторе $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$. Зато, услови **(а)** и **(б)** су еквиваленти са $\left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} \right)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n))$.

Из услова **(б)** следи да оператор $\int_{\Omega} A_t^{(n)} d\mu(t)$ постоји у $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ јер можемо узети $f_n \in \mathcal{H}_n$ произвољно и $f_k = 0$ за све $k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ у **(б)**, и добити скаларну функцију $\Omega \ni t \mapsto \langle A_t^{(n)} f_n, f_n \rangle \in \mathbb{C}$ која припада простору $L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ за све $f_n \in \mathcal{H}_n$.

Докажимо да важи (4.39) под условима **(а)** и **(б)**. Нека је $E \in \mathfrak{M}$ и $k \in \mathbb{N}$ произвољно одабрано. Користећи једнакости (2.4) и (1.33) добијамо

$$\begin{aligned} \left\| \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t) \right\| &= \sup_{\|(f_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \|(g_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = 1} \left| \left\langle \left(\int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t) \right) (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\|(f_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \|(g_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = 1} \left| \int_E \left\langle \left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t) \right) (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\rangle \right| \\ &= \sup_{\|(f_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \|(g_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = 1} \left| \int_E \sum_{n=1}^{+\infty} \langle A_t^{(n)} f_n, g_n \rangle d\mu(t) \right| \\ &\geq \left| \int_E \langle A_t^{(k)} x_k, y_k \rangle d\mu(t) \right| = \left| \left\langle \int_E A_t^{(k)} d\mu(t) x_k, y_k \right\rangle \right| \end{aligned}$$

за све јединичне векторе $x_k, y_k \in \mathcal{H}_k$. Зато, имамо да је

$$\left\| \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \geq \sup_{\|x_k\| = \|y_k\| = 1} \left| \left\langle \int_E A_t^{(k)} d\mu(t) x_k, y_k \right\rangle \right| = \left\| \int_E A_t^{(k)} d\mu(t) \right\|.$$

Одавде следи

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \int_E A_t^{(k)} d\mu(t) \right\| \leq \left\| \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t) \right\| < +\infty \text{ за све } E \in \mathfrak{M}.$$

Доказали смо једнакост (4.39). Зато, оператор $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_E A_t^{(n)} d\mu(t)$ постоји у $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$.

Покажимо сада једнакост (2.45). Поново, нека је $k \in \mathbb{N}$ фиксирано. Дефинишимо пројекцију $T_k : \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_k$ са $T_k((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_k$ за свако $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$. Како је

$$\|T_k((x_n)_{n \in \mathbb{N}})\|^2 = \|x_k\|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2 = \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|^2$$

за свако $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$ закључујемо $T_k \in \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n, \mathcal{H}_k)$. На основу друге и треће једнакости у (2.5) добијамо

$$\begin{aligned} T_k \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t) &= \int_E T_k \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t) \\ &= \int_E A_t^{(k)} T_k d\mu(t) = \int_E A_t^{(k)} d\mu(t) T_k = T_k \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_E A_t^{(n)} d\mu(t). \end{aligned}$$

Одавде закључујемо је вектор на позицији k у низу $\left(\int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t)\right) (f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ једнак вектору на позицији k у низу $\left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_E A_t^{(n)} d\mu(t)\right) (f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ за свако $(f_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$. Како је $k \in \mathbb{N}$ било произвољно, добијамо једнакост (2.45). $\square$

Под условима (а) и (б) Теореме 2.36, једнакост (2.45) даје

$$(2.46) \quad \left\| \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t) \right\| = \left\| \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_E A_t^{(n)} d\mu(t) \right\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \int_E A_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \quad \text{за све } E \in \mathfrak{M}.$$

Може се десити да оператор $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega A_t^{(n)} d\mu(t)$ постоји у $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ али да оператор $\int_\Omega \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} d\mu(t)$ не постоји, што је илустровано следећим примером.

Пример 2.37. Нека је $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ Хилбертових простора, $\Omega = (-1, 1)$ и $\varphi_n = -n\chi_{(-1,0)} + n\chi_{(0,1)}$ за $n \in \mathbb{N}$. Дефинишимо $A_t^{(n)} = \varphi_n(t)I_n$ за све $t \in (-1, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$. Из (4.19) имамо $\int_{(-1,1)} A_t^{(n)} dm(t) = \int_{(-1,1)} \varphi_n(t) dm(t) I_n = 0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Одавде је $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_{(-1,1)} A_t^{(n)} dm(t) = 0 \in \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$. Са групе сјирање, за $t \in (-1, 0)$ важи $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_t^{(n)}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n(t)I_n\| = +\infty$ иј. оператор $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)}$ не постоји иа не постоји ни оператор $\int_{(-1,1)} \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_t^{(n)} dm(t)$. $\triangle$

Нека је $k \in \mathbb{N}$. Наредни пример даје мотивацију за анализу односа између мера на σ -алгебри $\mathfrak{M}$ које узимају вредности у $\mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$ и $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$.

Пример 2.38. Нека је $\Omega = (0, 1]$ и нека је $\mathfrak{M}$ Лебејева σ -алгебра на $(0, 1]$ и $f_n = n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Тада $\int_{(0,1]} f_n(t) dm(t) = 1$ и из (2.5) добијамо $\int_E f_n(t) I_n dm(t) = \left(\int_E f_n(t) dm(t)\right) I_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $E \in \mathfrak{M}$. За $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо $v_n : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ изразом $v_n(E) = \int_E f_n(t) I_n dm(t) = \left(\int_E f_n(t) dm(t)\right) I_n = n \cdot m\left(E \cap \left(0, \frac{1}{n}\right]\right) I_n$ за све $E \in \mathfrak{M}$. Функција $\mathfrak{M} \ni E \mapsto n \cdot m\left(E \cap \left(0, \frac{1}{n}\right]\right) \in [0, 1]$ је позитивна, коначна мера на ис $\mathfrak{M}$, иа одакле добијамо да је v_n једна $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ -вредносна мера на $\mathfrak{M}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Имамо $(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) I_n)_{t \in (0,1]} \in L_G^1((0, 1], m, \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n))$. Заста, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n(t) I_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}(t) < +\infty$ за свако $t \in (0, 1]$. Одавде следи да оператор $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) I_n$ постоји у $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ за свако $t \in (0, 1]$. Такође, за свако $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n$ имамо

$$\begin{aligned} \int_{(0,1]} \left\| \left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) I_n \right) (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\|^2 dm(t) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2 \int_{(0,1]} |f_n(t)| dm(t) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Заста, применом Теореме 2.36 дефинишемо функцију $v : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ изразом

$$v(E) = \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) I_n dm(t) = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \left(\int_E f_n(t) dm(t) \right) I_n = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} v_n(E) \quad \text{за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

Функција $v : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ је слабо пребројиво адитивна векторска мера на $\mathfrak{M}$, али иа функција није $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ -вредносна мера. Заста, нека је $E_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \in \mathfrak{M}$,

$k \in \mathbb{N}$. Тада имамо $\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k = (0, 1]$ и $v((0, 1]) = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} I_n$. За фиксиран број $N \in \mathbb{N}$ имамо следећи рачун:

$$\begin{aligned} \left\| v((0, 1]) - v\left(\bigsqcup_{k=1}^N E_k\right) \right\| &= \left\| \bigoplus_{n=1}^{+\infty} I_n - \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{\bigsqcup_{k=1}^N E_k} f_n(t) dm(t) \right) I_n \right\| \\ &= \left\| \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\int_{\bigsqcup_{k=1}^N E_k} f_n(t) dm(t) \right) \right) I_n \right\| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| 1 - \int_{(\frac{1}{N+1}, 1]} f_n(t) dm(t) \right| \geq \left| 1 - \int_{(\frac{1}{N+1}, 1]} f_N(t) dm(t) \right| = \frac{N}{N+1}. \end{aligned}$$

Одавде следи да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} v(E_n)$ не конвертира ка $v(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_k)$ у $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_n)$ -норми. $\triangle$

Напоменимо да у Примеру 2.38 низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ није униформно интеграбилан.

У наредној теорему, претпостављамо $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. За дат низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{M}$ -мерљивих функција и за дату фамилију $(A_t)_{t \in \Omega}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за коју је $(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H})))$ дефинишемо функције $v_n : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $v : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ изразима $v_n(E) = \int_E f_n(t) A_t d\mu(t)$ и $v(E) = \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t d\mu(t)$, редом. Истражићемо потребне и довољне услове да функција v буде $\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ -вредносна мера на $\mathfrak{M}$.

Ако је функција v једна $\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ -вредносна мера на $\mathfrak{M}$, тада је функција v_n добро дефинисана $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносна мера на $\mathfrak{M}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Заиста, фамилија $(f_n(t) A_t)_{t \in \Omega}$ припада простору $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. На основу Теореме 2.36 имамо једнакости

$$(2.47) \quad v(E) = \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t d\mu(t) = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_E f_n(t) A_t d\mu(t) = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} v_n(E) \quad \text{за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

На основу (2.47), за низ $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $E_n \cap E_m = \emptyset$, $n \neq m$ из $\mathfrak{M}$ имамо

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| v_n \left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k \right) - v_n \left(\bigsqcup_{k=1}^N E_k \right) \right\| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| v_n \left(\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k \right) \right\| \leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| v_n \left(\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k \right) \right\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \bigoplus_{n=1}^{+\infty} v_n \left(\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k \right) \right\| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| v \left(\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k \right) \right\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| v \left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k \right) - v \left(\bigsqcup_{k=1}^N E_k \right) \right\| = 0. \end{aligned}$$

Зато, функција v_n је $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносна мера за свако $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.39. Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ $\mathfrak{M}$ -мерљивих и $(A_t)_{t \in \Omega}$ фамилија у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Уколико је скуи функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t\| f_n(t) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, униформно интеграбилан и уколико $(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H})))$ тада је функција $v : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ из (2.47) добро дефинисана $\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ -вредносна мера на $\mathfrak{M}$.

Доказ. Из $(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H})))$ следи да интеграл $\int_E f_n(t) A_t d\mu(t)$ постоји у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $E \in \mathfrak{M}$. Нека је $E \in \mathfrak{M}$ произвољно и нека је

$(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ у $\mathfrak{M}$ међусобно дисјунктних скупова и $E = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Можемо применити једнакост (2.46) и добити

$$\begin{aligned}
 (2.48) \quad & \left\| v \left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k \right) - v \left(\bigsqcup_{k=1}^N E_k \right) \right\| = \left\| \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t d\mu(t) - \int_{\bigsqcup_{k=1}^N E_k} \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t d\mu(t) \right\| \\
 & = \left\| \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t d\mu(t) \right\| = \left\| \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} f_n(t) A_t d\mu(t) \right\| \\
 & = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} f_n(t) A_t d\mu(t) \right\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k} |f_n(t)| \cdot \|A_t\| d\mu(t)
 \end{aligned}$$

за свако $N \in \mathbb{N}$. Из $\mu(\Omega) < +\infty$ имамо једнакост $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\bigsqcup_{k=N+1}^{+\infty} E_k) = 0$. Из униформне интеграбилности скупа функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t\| \cdot f_n(t) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ даје униформну интеграбилност скупа функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t\| \cdot |f_n(t)| \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Зато, последњи супремум у (2.48) може бити учињен довољно малим ако $N \rightarrow \infty$. Одавде следи да је функција v једна $\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ -вредносна мера. $\square$

У наредној теорми дајемо довољне услове за компактност Гелфандовог интеграла слабо* интеграбилне функције $\Omega \ni t \mapsto \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$, где је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ $\mathfrak{M}$ -мерљивих функција са неким додатним особинама.

Теорема 2.40. *Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ $\mathfrak{M}$ -мерљивих функција таквих да $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Нека је $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathfrak{M}$ -мерљивих функција такав да је $|f_n(t)| \leq g(t)$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и μ -скоро свако $t \in \Omega$. Ако је фамилија оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ слабо* мерљива и ако функција $\Omega \ni t \mapsto \|A_t\| \cdot g(t) \in \mathbb{C}$ припада простору $L^1(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ и $A_t \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$, тада $(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H})))$ и важи $\int_\Omega \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_\infty(\ell^2(\mathcal{H}))$.*

Доказ. На основу претпоставки теореме, за све скупове $E \in \mathfrak{M}$ имамо да важи

$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_E \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t d\mu(t) \right\| = \sup_{\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \|(y_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = 1} \left| \int_E \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \langle A_t x_n, y_n \rangle d\mu(t) \right| \\
 & \leq \sup_{\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \|(y_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = 1} \int_E \sum_{n=1}^{+\infty} g(t) \cdot \|A_t x_n\| \cdot \|y_n\| d\mu(t) \\
 & \leq \sup_{\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \|(y_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = 1} \int_E g(t) \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \|A_t x_n\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \|y_n\|^2} d\mu(t) \leq \int_E g(t) \cdot \|A_t\| d\mu(t).
 \end{aligned}$$

Горњи рачун даје $(\bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t)_{t \in \Omega} \in L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{H})))$. Такође, имамо $f_n(t) A_t \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t) A_t\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(t)| \cdot \|A_t\| = 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. На основу Леме 1.43 имамо $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t \in \mathcal{C}_\infty(\ell^2(\mathcal{H}))$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Пресликавање $\mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_E g(t) \cdot \|A_t\| d\mu(t) \in [0, +\infty)$ је једна позитивна мера на $\mathfrak{M}$, која је апсолутно непрекидна у односу на меру μ . Зато, услови Теореме 2.14 су испуњени па добијамо $\int_\Omega \bigoplus_{n=1}^{+\infty} f_n(t) A_t d\mu(t) \in \mathcal{C}_\infty(\ell^2(\mathcal{H}))$. $\square$

Глава 3

Лапласови трансформери у идеалима $\mathcal{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$

Резултати у овом поглављу су добијени пре свега у раду [37] и представљају примену досадашње теорије која је изложена током Поглавља 2. Поменути рад [37] се ослања на примену резултата из [39, Теорема 3.1] (која је у овој дисертацији наведена као Теорема 2.22) на Лапласове трансформације, који чине поткласу трансформација типа унутрашњег производа које су индуковане Лапласовим трансформацијама Борелових мера на $\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{деф}}{=} [0, +\infty)$. Неједнакости које ћемо извести у овом поглављу везане су за идеале $\mathcal{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$, чије су дефиниције као и основна својства дата у Секцији 1.3 која је садржана у Поглављу 1.

У овом поглављу дисертације *слаби*, *јаки* и *униформни* лимес низа оператора $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ биће означавани са ${}^w\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, ${}^s\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и ${}^{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Уколико је E Банахов простор тада је оператор $e^T : \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathcal{B}(E)$ дефинисан изразом $e^T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{n!}$ за свако $T \in \mathcal{B}(E)$. Ако су $S, T \in \mathcal{B}(E)$ и $ST = TS$ тада важи једнакост (видети [62, Теорема 1.2.9])

$$(3.1) \quad e^{T+S} = e^T e^S.$$

Подсетимо се да су најједноставнији *елементарни трансформери* на простору $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *леви множиоци* (са $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$) $A \otimes I : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) : X \mapsto AX$, *десни множиоци* (са $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$) $I \otimes B : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) : X \mapsto XB$, а након тога и *билашерални множиоци* $A \otimes B : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) : X \mapsto AXB$, док је са $\Delta_{A,B} \stackrel{\text{деф}}{=} A \otimes I + I \otimes B$ означена придружена *дериwација* пару оператора (A, B) . Приметимо да оператори $A \otimes I, I \otimes B \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ комутирају, одакле следи да важи једнакост $e^{A \otimes I + I \otimes B} = e^{A \otimes I} e^{I \otimes B} = e^A \otimes e^B$ за све операторе $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ јер је

$$e^{A \otimes I + I \otimes B} = e^{A \otimes I} e^{I \otimes B} = (e^A \otimes I)(I \otimes e^B) = e^A \otimes e^B.$$

Због тога имамо да важи $e^{A \otimes I + I \otimes B} X = e^A \otimes e^B X = e^A X e^B$ за свако $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

У овој глави фамилије оператора $(A_t)_{t \in \Omega}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ћемо означавати са $\{A_t\}_{t \in \Omega}$, као што је рађено у раду [37]. Као и у Поглављу 2, фамилије оператора које се састоје од нормалних и међусобно комутирајућих оператора биће кратко означаване са *м. к. н. о.*

Нагласимо да ћемо у овом поглављу дисертације цитирати сваку нунумерисану линију у вишелинијском изразу као део следеће линије која је нумерисана.

Наведимо најпре концизно, у облику дефиниције, појмове који ће бити битни за излагање у овом поглављу.

Дефиниција 3.1. Нека је $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $N \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{A} := (A_n)_{n=1}^N \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})^N$.

- (1) A је **акреїиван** (**полуакреїиван**) ако је $A^* + A \geq 0$ (ако је A или $-A$ акреїиван).
- (2) A је **сїриктїно акреїиван** ако постої константа $c > 0$ тако да је $A^* + A \geq cI$.
- (3) A је **N -акреїиван** ако важи

$$\Delta_{A^*, A}^N(I) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} A^{*n} A^{N-n} \geq 0.$$

Такође, A је **N -хиїеракреїиван** ако за свако $n \in \{1, \dots, N\}$ важи

$$\Delta_{A^*, A}^n(I) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^{*i} A^{n-i} \geq 0.$$

- (4) A је **сїриктїно N -хиїеракреїиван** ако постої $c > 0$ тако да је

$$\Delta_{A^*, A}^n(I) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^{*i} A^{n-i} \geq cI$$

за свако $n \in \{1, \dots, N\}$.

- (5) N -торка опејатора $(A_n)_{n=1}^N$ је **уређено акреїивна** ако важи

$$\Theta_{A,n} \stackrel{\text{деф}}{=} \left(\prod_{k=1}^n (A_k^* \otimes I + I \otimes A_k) \right)(I) \geq 0$$

за свако $n \in \{1, \dots, N\}$.

- (6) N -торка опејатора $(A_n)_{n=1}^N$ је **сїриктїно уређено акреїивна** ако постої $c > 0$ тако да је $\Theta_{A,n} \geq cI$ за свако $n \in \{1, \dots, N\}$.
- (7) N -торка опејатора $(A_n)_{n=1}^N$ је **акреїивна** (**сїриктїно акреїивна**) ако је N -торка опејатора $(A_{\sigma(n)})_{n=1}^N$ уређено акреїивна (сїриктїно уређено акреїивна) за сваку пермутацију σ скупа $\{1, \dots, N\}$.
- (8) За акреїиван опејатор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ њена придружена јако неїрекидна полуїрупа опејатора $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ је **јако сїабилна** ако важи једнакост $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{-tA}h\| = 0$ за сваки вектор $h \in \mathcal{H}$, т.ј. ако је

$$(3.2) \quad \mathcal{U}_A^-(I) := \mathcal{U}_{A^*, A}^-(I) \stackrel{\text{деф}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tA^*} e^{-tA} = 0.$$

Полугрупа оператора $(A_t)_{t \geq 0}$ из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ назива се јако неїрекидна ако за свако $h \in \mathcal{H}$ важи једнакост $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|A_t h - h\| = 0$. Уколико је $A_t := e^{-tA}$ за $t \in \mathbb{R}_+$, тада за фиксиран вектор $h \in \mathcal{H}$ добијамо

$$\|e^{-tA}h - h\| = \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-tA)^n}{n!} h \right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \|h\| = (e^{t\|A\|} - 1) \|h\|.$$

Како је $\lim_{t \rightarrow 0+} e^{t\|A\|} = 1$, следи да $\lim_{t \rightarrow 0+} \|e^{-tA}h - h\| = 0$ за свако $h \in \mathcal{H}$, тј. полугрупа $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ је јако непрекидна. Приметимо да у овом случају имамо и више, тј. да је $\lim_{t \rightarrow 0+} \|e^{-tA} - I\| = 0$. Гранична вредност дефинисана у (3.2) постоји за сваки акретиван оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и представља позитиван оператор у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, што ћемо показати ускоро. Са друге стране, ова гранична вредност не мора бити једнака нула оператору за све акретивне операторе A , што се може видети из наредног познатог примера.

Пример 3.2. Нека је $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ортопројектор и нека је $A := I - P$. Оператор A је акретиван јер за свако $x \in \mathcal{H}$ важи

$$\langle Ah, h \rangle = \langle (I - P)h, h \rangle = \|h\|^2 - \langle Ph, h \rangle \geq 0$$

Напоменимо да последња неједнакост следи из тога што је P ортопројектор и из тога што важи неједнакост $\langle Ph, h \rangle \leq \|h\|^2$ за свако $h \in \mathcal{H}$. Сада је

$$\begin{aligned} e^{-t(I-P)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} (I - P)^n = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} (I - P) = I + (I - P) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \\ &= I + (I - P)(e^{-t} - 1) = I - (I - P) + e^{-t}(I - P) = P + e^{-t}(I - P). \end{aligned}$$

Следи да је $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tA}h = Ph \neq 0$ уколико $h \notin \text{Ker} P = \mathcal{R}(I - P)$. $\triangle$

Наредно тврђење представља битно својство операторне експоненцијалне функције чији су експоненти акретивни оператори.

Теорема 3.3. [41, Лема 2.5(б)] Ако је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ акретиван оператор тада важи

$$\|e^{-tA}\| \leq 1 \text{ за свако } t \geq 0.$$

Доказ. На основу једнакости (3.3), применом Њутн¹-Лајбнице² формуле имамо

$$e^{-tA^*}e^{-tA} - e^{-TA^*}e^{-TA} = \int_{[t,T]} e^{-sA^*}(A^* + A)e^{-sA} dm(s) \geq 0 \text{ кад год је } 0 \leq t \leq T.$$

Уколико у горњој једнкости узмемо $t = 0$ добијамо

$$I - e^{-TA^*}e^{-TA} = \int_{[0,T]} e^{-sA^*}(A^* + A)e^{-sA} dm(s) \geq 0.$$

То значи да је $e^{-TA^*}e^{-TA} \leq I$ па закључујемо да важи

$$\|e^{-TA}\|^2 = \|e^{-TA^*}e^{-TA}\| = \sup_{\|h\|=1} \langle e^{-TA^*}e^{-TA}h, h \rangle \leq \sup_{\|h\|=1} \langle Ih, h \rangle = 1. \quad \square$$

Приметимо да из доказа Теореме 3.3 следи да је $\{e^{-tA^*}e^{-tA}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ опадајућа фамилија позитивних оператора одакле закључујемо, на основу Теореме 1.12, да постоји гранична вредност $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tA^*}e^{-tA}$ наведена у (3.2).

У наредном примеру показујемо да је $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ јако непрекидна полугрупа кад год је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ строго акретиван оператор.

¹Sir Isaac Newton (1643–1727), енглески математичар, физичар и астроном, оснивач класичне механике и коаутор развоја инфинитезималног рачуна

²Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), немачки математичар и филозоф, коаутор развоја инфинитезималног рачуна

Пример 3.4. Уколико је $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ строго акрећиван ојерайтор тј. ако важи $A + A^* \geq cI$ за неко $c > 0$, имамо да важи

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \|e^{-TA}h\| = \lim_{T \rightarrow +\infty} \|e^{-T(A - \frac{c}{2}I + \frac{c}{2}I)}h\| \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-\frac{cT}{2}} \|e^{-T(A - \frac{c}{2}I)}h\| = 0$$

за свако фиксирано $h \in \mathcal{H}$. Одавде следи да је за сваки такав ојерайтор A одговарајућа пољуїруїа ојерайтора $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ јако сїабилна. $\triangle$

Наредно тврђење је базирано на *Њуїн-Лаїбницової формули* за $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ -вредносне функције (видети [5, Став 15.14]) и користиће се често у овом поглављу. Пре самог тврђења, као припрема, приметимо да за све $t \in \mathbb{R}$ и $A, B, X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ важи једнакост

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt}(e^{-tA}Xe^{-tB}) = -e^{-tA}(AX + XB)e^{-tB}$$

Нагласимо да се у једнакости (3.3) јавља извод $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ -вредносне функције. Ова једнакост је подразумевана у *јаком* тј. у *Фрешеовом смислу* (видети [5, Дефиниција 15.1]). Ради прегледности, покажимо једнакост (3.3). Како је $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A$ за свако $t \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и како за Фрешеов извод важе уобичајна правила за рад са изводима имамо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-tA}Xe^{-tB}) &= \frac{d}{dt}(e^{-tA}X) \cdot e^{-tB} + e^{-tA} \cdot \frac{d}{dt}(Xe^{-tB}) \\ &= \frac{d}{dt}(e^{-tA}) \cdot Xe^{-tB} + e^{-tA}X \cdot \frac{d}{dt}(e^{-tB}) \\ &= -e^{-tA}AXe^{-tB} - e^{-tA}XB e^{-tB} = -e^{-tA}(AX + XB)e^{-tB}. \end{aligned}$$

Пример 3.5. N -шорка ојерайтора $(A, \dots, A) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})^N$ је акрећивна ако и само ако је ојерайтор A N -хиїеракрећиван. $\triangle$

За нека основна својства N -хиперакретивних оператора погледати [41, Лема 2.2, Лема 2.5, Лема 2.7] и [38].

3.1 Лапласова трансформація на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и Лапласови трансформери

Оператор-вредносне Лапласове трансформаціїе функција и Лапласови трансформери функција су разматрани у [40, Дефиниција 2.1]. Наредном дефиницијом се претходна дефиниција проширује на произољне Борелове мере на $\mathbb{R}_+$.

Дефиниција 3.6. Нека је μ Борелова мера на $\mathbb{R}_+$ и $A, B, X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Ако је функција $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto e^{-tA} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ елементиї просїора $L_G^1(\mathbb{R}_+, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, шада је са

$$\mathcal{L}[\mu](A) \stackrel{\text{деф}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} d\mu(t)$$

означена ојерайтор-вредносна Лаїласова трансформація мере μ , која је израчунаїа у A . Ако је функција $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto e^{-tA}Xe^{-tB} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ елементиї нормираної просїора $L_G^1(\mathbb{R}_+, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ шада је са

$$\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A,B}X \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{L}[\mu](\Delta_{A,B})X \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{L}[\mu](A \otimes I + I \otimes B)X \stackrel{\text{деф}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA}Xe^{-tB} d\mu(t)$$

означена Лајласова трансформација мере μ индукована генерализованом деривацијом $A \otimes I + I \otimes B$, која је израчунаива у X . У овом случају, кажемо да је X у домену од $\mathcal{L}[\mu]_{\Delta_{A,B}}$ и означавамо ово са $X \in \mathcal{D}[\mu]_{\Delta_{A,B}}$.

Мотивација за увођење Дефиниције 3.6 лежи у следећем формалном рачуну. Ако је $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тада дефинишемо и на основу изведених једнакости добијамо

$$\mathcal{L}[\mu](\Delta_{A,B})X \stackrel{\text{деф}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t(A \otimes I + I \otimes B)} X d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{((-tA) \otimes I) + (I \otimes (-tB))} X d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t).$$

За N -торке Борелових мера $(\mu_n)_{n=1}^N$ на $\mathbb{R}_+$ као и за производ ових мера $\tilde{\mu}_N := \prod_{n=1}^N \mu_n$ на Бореловој σ -алгебри у $\mathbb{R}_+^N$ користимо нотацију $d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \stackrel{\text{деф}}{=} \prod_{n=1}^N d\mu_n(t_n)$, при чему је $\mathbf{t}_N := (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}_+^N$.

Ако је $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ тада за N -торку оператора $(\mathcal{T}_n)_{n=1}^N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^N$ и за свако $n \in \{2, \dots, N\}$ индуктивно дефинишемо њихов производ тј. композицију $\prod_{k=1}^n \mathcal{T}_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ са $\prod_{k=1}^1 \mathcal{T}_k \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{T}_1$ и $\prod_{k=1}^n \mathcal{T}_k \stackrel{\text{деф}}{=} (\prod_{k=1}^{n-1} \mathcal{T}_k) \mathcal{T}_n$. Такође, користимо поједностављену нотацију $\prod_{k=1}^n \mathcal{T}_k X \stackrel{\text{деф}}{=} (\prod_{k=1}^n \mathcal{T}_k) X \stackrel{\text{деф}}{=} (\prod_{k=1}^n \mathcal{T}_k)(X)$ као и $\prod_{k=1}^n \mathcal{T}_k(I) \stackrel{\text{деф}}{=} (\prod_{k=1}^n \mathcal{T}_k)(I)$, при чему је I идентички оператор на $\mathcal{H}$.

Коначна Борелова мера μ на скупу $\mathbb{R}_+$ са коначним моментом реда 1, тј. она коначна Борелова мера μ која задовољава $\int_{\mathbb{R}_+} (1+t) d\mu(t) < +\infty$ биће означавана³ као ф.ф.м.о.1 Борелова мера. Ова претпоставка ће играти битну улогу у наставку текста јер ће обезбеђивати постојање различитих оператор-вредносних интеграла.

Наредни пример даје довоље услове при којима је домен $\mathcal{D}[\mu]_{\Delta_{A,B}}$ Лајласове трансформације једнак целом простору $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Пример 3.7. Ако су $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ акрејивни оператори, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и ако је μ коначна Борелова мера на $\mathbb{R}_+$, тада је $\mathcal{D}[\mu]_{\Delta_{A,B}} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, јер важи

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} e^{-tA^*} d\mu(t) \leq \int_{\mathbb{R}_+} I d\mu(t) = \mu(\mathbb{R}_+)I.$$

Слично, имамо да важи неједнакост $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-tB^*} e^{-tB} d\mu(t) \leq \mu(\mathbb{R}_+)I$. Одавде закључујемо да су $\{e^{-tA^*}\}_{t \geq 0}$ и $\{e^{-tB}\}_{t \geq 0}$ јако квадрантно интеграбилне фамилије оператора и стога је једнакост $\mathcal{L}[\mu]_{\Delta_{A,B}} X = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t)$ добро дефинисана. Такође, важи и процена

$$\|\mathcal{L}[\mu]_{\Delta_{A,B}} X\| = \left\| \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t) \right\| \leq \mu(\mathbb{R}_+) \|X\|,$$

на основу неједнакости (а) из Теореме 2.21. △

Нагласимо да у даљем разматрању изводимо неке резултате који ће нам у наредној секцији послужити при извођењу формула интегралних репрезентација итерираних формула оператор-вредносних интеграла.

Лема 3.8. Нека су $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ акрејивни оператори, нека је Φ с. н. функција и нека је μ коначна Борелова мера на $\mathbb{R}_+$. Ако фамилија оператора $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ задовољава

³Уведена скраћеница потиче од *finite first moment order one*.

$0 \leq Y_s \leq Y_t$ за $0 \leq s \leq t$ и ако важи једнакост $\lim_{T \rightarrow \infty} Y_T = Y$ за неки оператор $Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ њада је

$$(3.4) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA^*} Y e^{-tA} d\mu(t).$$

Ако $X \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и ако фамилија $\{X_t\}_{t \geq 0}$ из $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ задовољава $\lim_{T \rightarrow \infty} \|X_T - X\|_\Phi = 0$, онда важе једнакости

$$(3.5) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \int_{[0,T]} e^{-tA} X_T e^{-tB} d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t) \right\|_\Phi = 0,$$

$$(3.6) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \int_{[0,T]} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t) \right\|_\Phi = 0.$$

Доказ. Приметимо најпре да за све $t \in \mathbb{R}_+$ и $0 \leq s \leq t$ важи

$$e^{-tA^*} Y_s e^{-tA} \chi_{[0,s]}(t) \leq e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} \chi_{[0,s]}(t) \leq e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} \chi_{[0,t]}(t) \leq e^{-tA^*} Y e^{-tA} \chi_{[0,t]}(t),$$

јер на основу претпоставке $\lim_{T \rightarrow \infty} Y_T = Y$ имамо да је за било које $t \in \mathbb{R}_+$ и $h \in \mathcal{H}$ скаларна функција $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \langle e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} h, h \rangle \chi_{[0,t]}(t) \in \mathbb{R}_+$ растућа на $\mathbb{R}_+$. Приметимо да је $\left\{ \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} \chi_{[0,t]}(t) d\mu(t) \right\}_{T \geq 0}$ растућа и ограничена фамилија оператора јер важи

$$\begin{aligned} \int_{[0,s]} e^{-tA^*} Y_s e^{-tA} d\mu(t) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA^*} Y_s e^{-tA} \chi_{[0,s]}(t) d\mu(t) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} \chi_{[0,t]}(t) d\mu(t) = \int_{[0,T]} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} d\mu(t) \leq \mu(\mathbb{R}_+) \|Y\| I, \end{aligned}$$

што на основу Теореме 1.12 оправдава постојање граничне вредности

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} d\mu(t) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

Доказаћемо да је горња гранична вредност једнака $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA^*} Y e^{-tA} d\mu(t)$ тако што ћемо доказати да је квадратна форма оператора $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} d\mu(t)$ заправо једнака квадратној форми коју дефинише горња гранична вредност. Заиста, имамо да је

$$\begin{aligned} &\left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} d\mu(t) h, h \right\rangle = \\ &= \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} \chi_{[0,t]}(t) d\mu(t) h, h \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} \chi_{[0,t]}(t) d\mu(t) h, h \right\rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \langle e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} h, h \rangle \chi_{[0,t]}(t) d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{T \rightarrow \infty} \langle e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} h, h \rangle \chi_{[0,t]}(t) d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \langle e^{-tA^*} Y e^{-tA} h, h \rangle d\mu(t) = \left\langle \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA^*} Y e^{-tA} d\mu(t) h, h \right\rangle \text{ за свако } h \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Да бисмо аргументовали кораке које смо примењивали, приметимо да друга једнакост у горњем рачуну следи из дефиниције јаке конвергенције оператора, док трећа једнакост у овом рачуну представља дефинициону једнакост (2.2) за Гелфандов интеграл. Четврта

једнакост следи директно на основу ТМК за Лебегов интеграл док последња једнакост следи на основу једнакости $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-tA^*} Y_T e^{-tA} = e^{-tA^*} Y e^{-tA}$ која важи за свако фиксирано $t \in \mathbb{R}_+$. Дакле, на основу горњег низа једнакости и на основу Теореме 1.12 закључујемо да важи једнакост (3.4). Докажимо сада једнакост (3.5). Како се у овом делу јављају норме $\|\cdot\|_\Phi$ идеала $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, потребно је најпре проверити да важи за свако $T > 0$ важи

$$\int_{[0,T]} e^{-tA} X_T e^{-tB} d\mu(t) \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}) \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} X_T e^{-tB} d\mu(t) \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}).$$

Заиста, ово следи на основу Теореме 2.10 и коначности мере μ јер важи неједнакост $\|e^{-tA} X_T e^{-tB}\|_\Phi \leq \|e^{-tA}\| \cdot \|X_T\|_\Phi \cdot \|e^{-tB}\| \leq \|X_T\|_\Phi$ (оператори A и B су акретивни па се може применити Теорема 3.3). Нека је са c_T означен максимум бројева

$$\left\| \int_{[0,T]} e^{-tA^*} e^{-tA} d\mu(t) \right\|^{1/2} \left\| \int_{[0,T]} e^{-tB} e^{-tB^*} d\mu(t) \right\|^{1/2} \quad \text{и} \quad \left\| \int_{[0,T]} e^{-tA} e^{-tA^*} d\mu(t) \right\|^{1/2} \left\| \int_{[0,T]} e^{-tB^*} e^{-tB} d\mu(t) \right\|^{1/2}$$

и нека је са d_T означен максимум бројева

$$\left\| \int_{(T,\infty)} e^{-tA^*} e^{-tA} d\mu(t) \right\|^{1/2} \left\| \int_{(T,\infty)} e^{-tB} e^{-tB^*} d\mu(t) \right\|^{1/2} \quad \text{и} \quad \left\| \int_{(T,\infty)} e^{-tA} e^{-tA^*} d\mu(t) \right\|^{1/2} \left\| \int_{(T,\infty)} e^{-tB^*} e^{-tB} d\mu(t) \right\|^{1/2}.$$

Тада бројеви c_T и d_T задовољавају неједнакости

$$c_T \leq \mu([0, T]) \leq \mu(\mathbb{R}_+) \quad \text{и} \quad d_T \leq \mu((T, +\infty))$$

за свако $T > 0$ одакле следи да важи

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \int_{[0,T]} e^{-tA} X_T e^{-tB} d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t) \right\|_\Phi \leq \\ & \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \int_{[0,T]} e^{-tA} (X_T - X) e^{-tB} d\mu(t) \right\|_\Phi + \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \int_{(T,+\infty)} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t) \right\|_\Phi \\ & \leq \lim_{T \rightarrow \infty} c_T \|X_T - X\|_\Phi + \lim_{T \rightarrow \infty} d_T \|X\|_\Phi \\ (3.7) \quad & \leq \mu(\mathbb{R}_+) \lim_{T \rightarrow \infty} \|X_T - X\|_\Phi + \|X\|_\Phi \lim_{T \rightarrow \infty} \mu((T, +\infty)) = 0, \end{aligned}$$

при чему је прва неједнакост у (3.7) заснована на двострукој примени неједнакости из дела (в) у Теорему 2.21. Са доказаном формулом (3.5), њен посебан случај $X_T := X$ за $T \geq 0$ даје формулу (3.6). $\square$

Напоменимо да Лема 3.8 омогућава да добијамо следеће формуле које представљају интегралне репрезентације и које ће играти важну улогу. Треба напоменути да се у поменутим формулама први пут у нашем излагању јављају *ионовљени оператор-вредносни интеграл*.

Нагласимо да се у наредном тврђењу користи претпоставка да мера μ има ф.ф.м.о.1 својство.

Лема 3.9. Нека су даћи оператори $A, B, C, D, X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такви да су A, B, C, D акретивни и нека задовољавају $AC = CA, BD = DB$, при чему је μ ф.ф.м.о.1 Борелова мера на $\mathbb{R}_+$. Ако фамилије $\{X_T\}_{T \geq 0}, \{Y_T\}_{T \geq 0}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ задовољавају $\lim_{T \rightarrow \infty} \|X_T - X\| = 0$,

$\lim_{T \rightarrow \infty} Y_T = Y$, $0 \leq Y_s \leq Y_t$, $0 \leq \Delta_{C^*-A^*, C-A} Y_s \leq \Delta_{C^*-A^*, C-A} Y_t$ и $0 \leq \Delta_{D-B, D^*-B^*} Y_s \leq \Delta_{D-B, D^*-B^*} Y_t$ за $0 \leq s \leq t$, *тада важе једнакости*

$$(3.8) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA-stC} \Delta_{C-A, D-B} X_T e^{-(1-s)tB-stD} t ds d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA-stC} \Delta_{C-A, D-B} X e^{-(1-s)tB-stD} t ds d\mu(t) \right\| = 0,$$

$$(3.9) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA^*-stC^*} \Delta_{C^*-A^*, C-A} Y_T e^{-(1-s)tA-stC} t ds d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA^*-stC^*} \Delta_{C^*-A^*, C-A} Y e^{-(1-s)tA-stC} t ds d\mu(t),$$

$$(3.10) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tB-stD} \Delta_{D-B, D^*-B^*} Y_T e^{-(1-s)tB^*-stD^*} t ds d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tB-stD} \Delta_{D-B, D^*-B^*} Y e^{-(1-s)tB^*-stD^*} t ds d\mu(t).$$

Доказ. Да бисмо доказали формулу (3.9), треба напоменути да су оба интеграла која се јављају у (3.9) добро дефинисана, јер је $\{\sqrt{t} \sqrt{\Delta_{C^*-A^*, C-A}}(Y) e^{-(1-s)tA-stC}\}_{0 \leq t, 0 \leq s \leq 1}$ јако квадратно интеграбилна фамилија оператора на $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ (овде користимо да мера μ има ф.ф.м.о.1 својство). Скаларна функција

$$\mathbb{R} \ni T \mapsto t \langle e^{-(1-s)tA^*-stC^*} \Delta_{C^*-A^*, C-A} Y_T e^{-(1-s)tA-stC} h, h \rangle \chi_{[0,T]}(t) \in \mathbb{R}$$

је монотono растућа на $\mathbb{R}_+$ за било који фиксиран вектор $h \in \mathcal{H}$ и за било који пар бројева $(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, јер на основу претпоставке теореме оператор $\Delta_{C^*-A^*, C-A}$ чува поредак фамилије $\{Y_T\}_{T \geq 0}$. Дакле, формула (3.9) следи из ТМК за Лебегов интеграл и на основу Теореме 1.12. Коришћењем истих аргумената доказује се формула (3.10).

Доказ за преосталу формулу (3.8) је базиран на

$$(3.11) \quad \begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA-stC} \Delta_{C-A, D-B} X_T e^{-(1-s)tB-stD} t ds d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA-stC} \Delta_{C-A, D-B} X e^{-(1-s)tB-stD} t ds d\mu(t) \right\| \\ & \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA-stC} \Delta_{C-A, D-B} (X_T - X) e^{-(1-s)tB-stD} t ds d\mu(t) \right\| + \\ & \quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \int_{(T, +\infty)} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA-stC} \Delta_{C-A, D-B} X e^{-(1-s)tB-stD} t ds d\mu(t) \right\| \\ & \leq \|\Delta_{C-A, D-B} (X_T - X)\| \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} t d\mu(t) + \|\Delta_{C-A, D-B} X\| \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{(T, +\infty)} t d\mu(t) = 0. \end{aligned}$$

Неједнакост у (3.11) следи на основу Теореме 2.10, при чему користимо неједнакости $\|e^{-(1-s)tA-stC}\| \leq 1$ и $\|e^{-(1-s)tB-stD}\| \leq 1$ (видети Теорему 3.3), док једнакост у (3.11) следи јер је μ ф.ф.м.о.1 мера на $\mathbb{R}_+$. $\square$

У доказу наредног тврђења примењујемо Њутн-Лајбницову формулу за функције са вредностима у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ова формула важи и када функције узимају вредности у Банаховом простору (видети нпр. [5, Став 15.14]).

Последица 3.10. Нека су $A, B, C, D, X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ такви да је $AC = CA$, $BD = DB$ и нека су оператори $A, B, C - A, D - B$ акретивни. Нека је Ψ с. н. функција за коју је $CX + XD - AX - XB \in \mathfrak{C}_\Psi(\mathcal{H})$ и нека је μ коначна Борелова мера на $\mathbb{R}_+$. Тада су оператори $\mathcal{L}[\mu](A^* \otimes I + I \otimes A)(I) - \mathcal{L}[\mu](C^* \otimes I + I \otimes C)(I)$ и $\mathcal{L}[\mu](B \otimes I + I \otimes B^*)(I) - \mathcal{L}[\mu](D \otimes I + I \otimes D^*)(I)$ позитивни и важи

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \mu(\mathbb{R}_+)I &\geq \mathcal{L}[\mu](A^* \otimes I + I \otimes A)(I) - \mathcal{L}[\mu](C^* \otimes I + I \otimes C)(I) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA^* - stC^*} (C^* + C - A^* - A) e^{-(1-s)tA - stC} t ds d\mu(t), \end{aligned}$$

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \mu(\mathbb{R}_+)I &\geq \mathcal{L}[\mu](B \otimes I + I \otimes B^*)(I) - \mathcal{L}[\mu](D \otimes I + I \otimes D^*)(I) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tB - stD} (D + D^* - B - B^*) e^{-(1-s)tB^* - stD^*} t ds d\mu(t), \end{aligned}$$

$$(3.14) \quad \begin{aligned} &\mathcal{L}[\mu](A \otimes I + I \otimes B)X - \mathcal{L}[\mu](C \otimes I + I \otimes D)X \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) e^{-(1-s)tB - stD} t ds d\mu(t), \\ &\sqrt{C + C^* - A - A^*} (\mathcal{L}[\mu](A \otimes I + I \otimes B)X - \mathcal{L}[\mu](C \otimes I + I \otimes D)X) \sqrt{D + D^* - B - B^*} \end{aligned}$$

$$(3.15) \quad \begin{aligned} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{C + C^* - A - A^*} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) \\ &\times e^{-(1-s)tB - stD} t ds d\mu(t) \sqrt{D + D^* - B - B^*} \end{aligned}$$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} \sqrt{C + C^* - A - A^*} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) \\ &\times e^{-(1-s)tB - stD} \sqrt{D + D^* - B - B^*} t ds d\mu(t), \end{aligned}$$

иод било којим од следећих услова:

- (а) ако $\Psi := \ell^1$,
- (б) ако $\Psi := \Phi^{(p)*}$ за неко $p \geq 2$, $L^2(\mathbb{R}_+, \mu)$ је сејарабилан и барем један од парова (A, C) и (B, D) је м. к. н. о.,
- (в) ако су оба пара (A, C) и (B, D) м. к. н. о.

Додајно, уколико је μ ф.ф.м.о.1 Борелова мера на $\mathbb{R}_+$ и $\lim_{T \rightarrow \infty} \|X_T - X\| = 0$ за неку фамилију $\{X_T\}_{T \geq 0}$ у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, тада важе једнакости

$$(3.17) \quad \begin{aligned} &\mathcal{L}[\mu](A \otimes I + I \otimes B)X - \mathcal{L}[\mu](C \otimes I + I \otimes D)X = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA - stC} (CX_T + X_T D - AX_T - X_T B) e^{-(1-s)tB - stD} t ds d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) e^{-(1-s)tB - stD} t ds d\mu(t). \end{aligned}$$

Доказ. Како су оператори $A, B, C - A$ и $D - B$ акретивни, следи да су и оператори $C = (C - A) + A$ и $D = (D - B) + B$ акретивни. Како је $AC = CA$ и $BD = DB$ тада директним рачуном добијамо $\frac{d}{du}(e^{uC - uA} X e^{uD - uB}) = e^{uC - uA} (CX - AX + XD - XB) e^{uD - uB}$. Зато, за

свако фиксирано $t \geq 0$ имамо

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad & e^{-tA} X e^{-tB} - e^{-tC} X e^{-tD} = e^{-tC} (e^{tC-tA} X e^{tD-tB} - X) e^{-tD} \\
 & = e^{-tC} \int_{[0,t]} \frac{d}{du} (e^{uC-uA} X e^{uD-uB}) du e^{-tD} \\
 & = e^{-tC} \int_{[0,t]} e^{uC-uA} (CX - AX + XD - XB) e^{uD-uB} du e^{-tD} \\
 & = \int_{[0,t]} e^{-(t-u)C-uA} (CX - AX + XD - XB) e^{-(t-u)D-uB} du \\
 (3.19) \quad & = \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA-stC} (CX + XD - AX - XB) e^{-(1-s)tB-stD} t ds,
 \end{aligned}$$

при чему је последња једнакост у (3.18) последица примене Њутн-Лајбницевог формуле док једнакост у (3.19) добијамо сменом променљивих $u := t - st$. Сада, за фиксирано $t \geq 0$ можемо извршити интеграцију добијеног идентитета

$$e^{-tA} X e^{-tB} - e^{-tC} X e^{-tD} = \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA-stC} (CX + XD - AX - XB) e^{-(1-s)tB-stD} t ds$$

по скупу $[0, T]$ у односу на меру μ , где је $T > 0$ произвољно. Добијамо једнакост

$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad & \int_{[0,T]} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t) - \int_{[0,T]} e^{-tC} X e^{-tD} d\mu(t) = \\
 & = \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA-stC} (CX + XD - AX - XB) e^{-(1-s)tB-stD} t ds d\mu(t).
 \end{aligned}$$

Када пређемо на граничну вредност $T \rightarrow +\infty$ у горњој једнакости (3.20), двоструком применом⁴ формуле (3.6) (други пут на (C, D) уместо (A, B)) добијамо да важи

$$\mathcal{L}[\mu](A \otimes I + I \otimes B) X - \mathcal{L}[\mu](C \otimes I + I \otimes D) X = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\int_{[0,T]} e^{-tA} X e^{-tB} d\mu(t) - \int_{[0,T]} e^{-tC} X e^{-tD} d\mu(t) \right),$$

одакле следи (3.14). Приметимо да су фамилије оператора

$$\left\{ \sqrt{t} \sqrt{\Delta_{C^*, A^*, C-A}(I)} e^{-(1-s)tA-stC} \right\}_{0 \leq t, 0 \leq s \leq 1} \quad \text{и} \quad \left\{ \sqrt{t} \sqrt{\Delta_{D-B, D^*-B^*}(I)} e^{-(1-s)tB^*-stD^*} \right\}_{0 \leq t, 0 \leq s \leq 1}$$

јако квадратно интеграбилне на скупу $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ јер применом формуле (3.14) на (A^*, A, C^*, C, I) уместо на (A, B, C, D, X) добијамо једнакост

$$\mathcal{L}[\mu] \Delta_{A^*, A}(I) - \mathcal{L}[\mu] \Delta_{C^*, C}(I) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA^*-stC^*} (C^* + C - A^* - A) e^{-(1-s)tA-stC} t ds d\mu(t).$$

Оператор $\mathcal{L}[\mu] \Delta_{A^*, A}(I) - \mathcal{L}[\mu] \Delta_{C^*, C}(I)$ је позитиван јер је на основу горње једнакости ова разлика представљена као јаки лимес позитивних оператора (приметимо да овде користимо претпоставку да је оператор $C - A$ акретиван). Одавде следи постојање двојних оператор-вредносних интеграла који се јављају у (3.12) и (3.13). Неједнакост у (3.12) следи на основу тога што оператор-вредносни интеграл који се јављају у (3.12)

⁴Приметимо да формула (3.6) важи и за операторну норму.

заправо предствљају растућу операторну функцију на $\mathbb{R}_+$, која је очигледно ограничена одозго јер важе операторне неједнакости

$$\mu(\mathbb{R}_+)I \geq \mathcal{L}[\mu]\Delta_{A^*A}(I) \geq \mathcal{L}[\mu]\Delta_{A^*A}(I) - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C^*C}(I) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

Због тога, речено остаје тачно и за јаки лимес посматране оператор-вредносне функције, чиме је доказана и једнакост у (3.12). Примена доказане формуле (3.12) на (B^*, D^*) уместо на (A, C) даје формулу (3.13). Доказ формуле (3.16) је базиран на рачуну

$$\begin{aligned} & \sqrt{C^* + C - A^* - A} (\mathcal{L}[\mu](A \otimes I + I \otimes B)X - \mathcal{L}[\mu](C \otimes I + I \otimes D)X) \sqrt{D + D^* - B - B^*} \\ &= \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{C^* + C - A^* - A} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) \\ & \quad \times e^{-(1-s)tB - stD} t ds d\mu(t) \sqrt{D + D^* - B - B^*} \\ (3.21) \quad &= \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} \sqrt{C^* + C - A^* - A} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) \\ & \quad \times e^{-(1-s)tB - stD} \sqrt{D + D^* - B - B^*} t ds d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} \sqrt{C^* + C - A^* - A} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) \\ (3.22) \quad & \times e^{-(1-s)tB - stD} \sqrt{D + D^* - B - B^*} t ds d\mu(t), \end{aligned}$$

при чему (3.21) следи на основу (3.14). Формуле (3.12) и (3.13) доказују да су фамилије

$$\left\{ \sqrt{t} \sqrt{\Delta_{C^*A^*, C-A}(I)} e^{-(1-s)tA - stC} \right\}_{0 \leq t, 0 \leq s \leq 1} \quad \text{и} \quad \left\{ \sqrt{t} \sqrt{\Delta_{D-B, D^*-B^*}(I)} e^{-(1-s)tB^* - stD^*} \right\}_{0 \leq t, 0 \leq s \leq 1}$$

јако квадратно интеграбилне на скупу $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, одакле следи постојање оператора

$$I = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} \sqrt{\Delta_{C^*A^*, C-A}(I)} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) e^{-t(1-s)B - stD} \sqrt{\Delta_{D-B, D^*-B^*}(I)} t ds d\mu(t).$$

Имамо и више, оператор $I \in \mathfrak{C}_\Psi(\mathcal{H})$ у зависности од следећих случајева. У случају (а) ове теореме важи $I \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, на основу дела (в) Теореме 2.22. У случају (б) имамо $I \in \mathfrak{C}_{\Psi(p)^*}(\mathcal{H})$, на основу дела (г) Теореме 2.22. У случају (в) добијамо $I \in \mathfrak{C}_\Psi(\mathcal{H})$ на основу Теореме 2.23. За свако $t \geq 0$ са $I_t \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ћемо означити оператор

$$\int_{[0,t]} \int_{[0,1]} \sqrt{\Delta_{C^*A^*, C-A}(I)} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) e^{-t(1-s)B - stD} \sqrt{\Delta_{D-B, D^*-B^*}(I)} t ds d\mu(t).$$

Исто као и горе, у сваком од три случаја ове теореме имамо припадност оператора I_t одговарајућем идеалу. У случају (а) важи једнакост $\lim_{T \rightarrow \infty} \|I_t - I\|_1 = 0$ на основу дела (в) Теореме 2.22. У случају (б) имамо $\lim_{T \rightarrow \infty} \|I_t - I\|_2 = 0$, што је базирано на Хилберт-Шмитовом својству конвергенције тј. на основу дела (г) Теореме 2.22. У случају (в) једнакост $\lim_{T \rightarrow \infty} \|I_t - I\|_\Phi = 0$ следи на основу дела (д) Теореме 2.22.

Све наведене теореме тј. неједнакости из ових теорема се могу применити, што следи из јаке квадратне интеграбилности горе поменутих фамилија на $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$. На основу доказане конвергенције оператора I_t ка I када $t \rightarrow +\infty$, у сваком од горе наведених случајева, следи одговарајућа конвергенција у норми простора $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Како

конвергенција у норми идеала повлачи⁵ конвергенцију у операторној норми, добијамо и једнакост (3.22), чиме су доказане формуле (3.15) и (3.16).

Доказ формуле (3.17) заснива се на једнакостима

$$(3.23) \quad \begin{aligned} & \mathcal{L}[\mu](A \otimes I + I \otimes B)X - \mathcal{L}[\mu](C \otimes I + I \otimes D)X = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty}^{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \left(\int_{[0,T]} e^{-tA} X_T e^{-tB} d\mu(t) - \int_{[0,T]} e^{-tC} X_T e^{-tD} d\mu(t) \right) \end{aligned}$$

$$(3.24) \quad = \lim_{T \rightarrow \infty}^{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA - stC} (CX_T + X_T D - AX_T - X_T B) e^{-(1-s)tB - stD} t ds d\mu(t),$$

при чему једнакост у (3.23) следи на основу двоструке примене формуле (3.5) на (A, B) и (C, D) , док једнакост у (3.24) следи применом (3.20) на X_T уместо X , што доказује прву једнакост у (3.17), док друга једнакост у (3.17) је само реформулација формуле (3.8), за коју нам је и потребна претпоставка да мера μ има својство ф.ф.м.о.1. $\square$

Напомена 3.11. Напоменуемо да за свако $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ важи једнакост

$$(3.25) \quad \begin{aligned} & \mathcal{L}[\mu](A \otimes I + I \otimes B)X - \mathcal{L}[\mu](C \otimes I + I \otimes D)X = \\ & = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) e^{-(1-s)tB - stD} t ds d\mu(t) \end{aligned}$$

и без претпоставке о конвергенцији $\lim_{T \rightarrow \infty}^{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \|X_T - X\| = 0$ у шта се можемо уверити ако применимо формулу (3.17) на посебан случај у коме је $X_T := X$ за свако $T \geq 0$.

У разматрањима која следе биће од значаја приметити да $\mathcal{L}[\mu](A \otimes I + I \otimes B) - \mathcal{L}[\mu](C \otimes I + I \otimes D)$ и $\mathcal{L}[\mu](A_1 \otimes I + I \otimes B_1) - \mathcal{L}[\mu](C_1 \otimes I + I \otimes D_1)$ комутирају⁶ ако оператори из скупова $\{A, A_1, C, C_1\}$ и $\{B, B_1, D, D_1\}$ међусобно комутирају. Ово се може доказати директним рачуном, примењујући једнакост (3.25).

3.2 Формуле интегралних репрезентација

Уведимо најпре дефиницију која ће стандардизовати ознаке у наставку текста.

Дефиниција 3.12. Нека је $N \in \mathbb{N}$ и нека је $(\mu_n)_{n=1}^N$ гаџа N -торка Борелових мера на $\mathbb{R}_+$ и $T > 0$. Тада са $(\mu_{n,T})_{n=1}^N$ означавамо придружене контракције (мера μ_n) на $\mathbb{R}_+$ гаџих са $d\mu_{n,T} \stackrel{\text{деф}}{=} \chi_{[0,T]} d\mu_n$ за свако $n \in \{1, \dots, N\}$. Такође, за све $\mathbf{s}_K := (s_1, \dots, s_K) \in \mathbb{R}_+^K$ и $\mathbf{t}_K := (t_1, \dots, t_K) \in \mathbb{R}_+^K$ дефинишемо $d\mathbf{s}_K \stackrel{\text{деф}}{=} \prod_{k=1}^K ds_k$, $\tilde{\mu}_K \stackrel{\text{деф}}{=} \prod_{k=1}^K \mu_k$ и $d\tilde{\mu}_K(\mathbf{t}_K) \stackrel{\text{деф}}{=} \prod_{k=1}^K d\mu_k(t_k)$ за свако $K \in \{1, \dots, N\}$.

Другим речима, за сваки Борелов скуп $\delta \subset \mathbb{R}_+$ је $\mu_{n,T}(\delta) = \mu_n(\delta \cap [0, T])$.

Ради припреме за наредна тврђења у којима ћемо имати интеграцију оператор-вредносних функција на коцки $[0, T]^N$, прво дајемо формуле одговарајућих интегралних репрезентација.

У неким од наредних тврђења у угластим заградама дати су и алтернативни облици израза који се претходно појављују.

⁵За свако $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ важи неједнакост $\|A\| \leq \|A\|_\Phi$.

⁶као елементи простора $\mathfrak{B}(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))$

Лема 3.13. Нека су датие N -торке $(A_n)_{n=1}^N, (B_n)_{n=1}^N, (C_n)_{n=1}^N, (D_n)_{n=1}^N \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})^N$ акрејивних оџераџора и нека су обе фамилије $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ састављене од међусобно комутирајућих оџераџора. Тада важи једнакост

$$\begin{aligned}
 & \prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, D_n}) X = \\
 & \left[\int_{[0,T]^N} \left(\prod_{n=1}^N (e^{-t_n A_n} \otimes e^{-t_n B_n} - e^{-t_n C_n} \otimes e^{-t_n D_n}) \right) X d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right] = \\
 & (3.26) \quad \int_{[0,T]^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, D_n - B_n} \right) X e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \prod_{n=1}^N t_n ds_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N)
 \end{aligned}$$

за сваки низ $(\mu_n)_{n=1}^N$ коначних Борелових мера на $\mathbb{R}_+$ и за сваки оџераџор $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Доказ. Применом формуле (3.20) на (A_1, B_1, C_1, D_1) уместо на (A, B, C, D) добијамо

$$\begin{aligned}
 & \int_{[0,T]} (e^{-tA_1} X e^{-tB_1} - e^{-tC_1} X e^{-tD_1}) d\mu_1(t) = \\
 & (3.27) \quad = \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s)tA_1 - stC_1} (C_1 X + D_1 X - A_1 X - X B_1) e^{-(1-s)tB_1 - stD_1} t ds d\mu_1(t),
 \end{aligned}$$

што представља случај $N := 1$ формуле (3.26) коју доказујемо.

За $T > 0$ и $\mathbb{N} \ni n \leq N$ посматрајмо горе дефинисане контракције мера $\mu_{n,T}(\delta) = \mu_n(\delta \cap [0, T])$ за сваки Борелов скуп $\delta \subset \mathbb{R}_+$. Лева страна једнакости (3.27) може бити препозната као $\mathcal{L}[\mu_{1,T}] \Delta_{A_1, B_1}(X) - \mathcal{L}[\mu_{1,T}] \Delta_{C_1, D_1}(X)$. Итеративна примена формуле (3.27) на све $(A_k, B_k, C_k, D_k, \mu_{k,T})$ уместо на $(A_1, B_1, C_1, D_1, \mu_{1,T})$ даје да важи

$$\begin{aligned}
 & \prod_{k=1}^K (\mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{A_k, B_k} - \mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{C_k, D_k}) X = \\
 & \left[\int_{[0,T]^K} \prod_{k=1}^K (e^{-t_k A_k} \otimes e^{-t_k B_k} - e^{-t_k C_k} \otimes e^{-t_k D_k}) X d\tilde{\mu}_K(\mathbf{t}_K) \right] = \\
 & (3.28) \quad \int_{[0,T]^K} \int_{[0,1]^K} e^{-\sum_{k=1}^K ((1-s_k)t_k A_k + s_k t_k C_k)} \left(\prod_{k=1}^K \Delta_{C_k - A_k, D_k - B_k} \right) X e^{-\sum_{k=1}^K ((1-s_k)t_k B_k + s_k t_k D_k)} \prod_{k=1}^K t_k ds_K d\tilde{\mu}_K(\mathbf{t}_K).
 \end{aligned}$$

Докажимо формулу (3.27) математичком индукцијом. Имајући у виду коментаре о комутативности оператора $\mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{A_k, B_k} - \mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{C_k, D_k}$ и $\mathcal{L}[\mu_{l,T}] \Delta_{A_l, B_l} - \mathcal{L}[\mu_{l,T}] \Delta_{C_l, D_l}$ за $k, l \in \{1, \dots, N\}$, који су дати у Напомени 3.11 и полазећи од индуктивне хипотезе (3.28),

при чему је $K \in \{1, \dots, N-1\}$, имамо

$$\begin{aligned}
 & \prod_{k=1}^{K+1} (\mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{A_k, B_k} - \mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{C_k, D_k}) X = \\
 & = (\mathcal{L}[\mu_{K+1,T}] \Delta_{A_{K+1}, B_{K+1}} - \mathcal{L}[\mu_{K+1,T}] \Delta_{C_{K+1}, D_{K+1}}) \left(\prod_{k=1}^K (\mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{A_k, B_k} - \mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{C_k, D_k}) X \right) \\
 & = \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-((1-s_{K+1})t_{K+1}A_{K+1} + s_{K+1}t_{K+1}C_{K+1})} \Delta_{C_{K+1}-A_{K+1}, D_{K+1}-B_{K+1}} \times \\
 & \int_{[0,T]^K} \int_{[0,1]^K} e^{-\sum_{k=1}^K ((1-s_k)t_k A_k + s_k t_k C_k)} \left(\prod_{k=1}^K \Delta_{C_k-A_k, D_k-B_k} \right) X e^{-\sum_{k=1}^K ((1-s_k)t_k B_k + s_k t_k D_k)} \prod_{k=1}^K t_k ds_K d\tilde{\mu}_K(\mathbf{t}_K) \\
 & (3.29) \\
 & \times e^{-((1-s_{K+1})t_{K+1}B_{K+1} + s_{K+1}t_{K+1}D_{K+1})} t_{K+1} ds_{K+1} d\mu_{K+1}(t_{K+1}) = \\
 & \int_{[0,T]^{K+1}} \int_{[0,1]^{K+1}} e^{-\sum_{k=1}^{K+1} ((1-s_k)t_k A_k + s_k t_k C_k)} \left(\prod_{k=1}^{K+1} \Delta_{C_k-A_k, D_k-B_k} \right) X e^{-\sum_{k=1}^{K+1} ((1-s_k)t_k B_k + s_k t_k D_k)} \prod_{k=1}^{K+1} t_k ds_{K+1} d\tilde{\mu}_{K+1}(\mathbf{t}_{K+1}).
 \end{aligned}$$

Друга једнакост у (3.29) базирана је на индуктивној хипотези (3.28). Напоменимо и то да се претпостављене комутативности оператора користе у доказу јер у индуктивном прелазу примењујемо својство (3.1) операторне експоненцијалне функције. Овиме је доказана формула (3.26). $\square$

За разлику од претходног тврђења у коме су вишеструки $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносни интеграли разматрани по компактним скуповима у $\mathbb{R}^n$, у наредном тврђењу вршимо интеграцију истих оператор-вредносних функција по неограниченом скупу $\mathbb{R}^N \times [0, 1]^N$ и дајемо одговарајуће формуле интегралних репрезентација.

Напоменимо да је у наредном тврђењу претпостављено ф.ф.м.о.1 својство.

Теорема 3.14. Нека је $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и нека су N -торке $(A_n)_{n=1}^N, (B_n)_{n=1}^N, (C_n)_{n=1}^N, (D_n)_{n=1}^N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^N$ акрејивних оператора такве да су $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ фамилије комутирајућих оператора и да су $(C_n - A_n)_{n=1}^N$ и $(D_n^* - B_n^*)_{n=1}^N$ акрејивне N -торке. Ако је $(\mu_n)_{n=1}^N$ N -торка ф.ф.м.о.1 Борелових мера тада важи

$$\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I) \geq 0, \quad \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I) \geq 0$$

и имамо следеће интегралне репрезентације:

$$\begin{aligned}
 & \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I) = \\
 & (3.30) \\
 & \int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n^* + s_n t_n C_n^*)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n} \right) (I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \prod_{n=1}^N t_n ds_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I) = \\
 (3.31) \quad & \int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n^* + s_n t_n D_n^*)} \prod_{n=1}^N t_n ds_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X = \\
 (3.32) \quad & \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, D_n - B_n} \right) X e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \prod_{n=1}^N t_n ds_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (3.33) \\
 & = \int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, D_n - B_n} \right) X e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \prod_{n=1}^N t_n ds_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)} = \\
 & = \int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I)} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, D_n - B_n} \right) X \\
 (3.34) \quad & \times e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} X \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)} \prod_{n=1}^N t_n ds d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N).
 \end{aligned}$$

Доказ. Примењујући једнакости (3.12) и (3.13) на $(A_1, B_1, C_1, D_1, \mu_1, s_1, t_1)$ уместо на (A, B, C, D, μ, s, t) добијамо формуле (3.30) и (3.31) у специјалном случају за $N := 1$. На основу Теореме 2.10, Теореме 3.3 и претпостављеног својства ф.ф.м.о.1 за N -торку мера $(\mu_n)_{n=1}^N$ имамо да постоје оператор-вредносни интеграли који се јављају на десним странама у једнакостима (3.30) и (3.31).

Да бисмо доказали формуле (3.30) и (3.34) за све m уместо N , при чему је $m \in$

$\{2, \dots, N\}$, уведемо следеће ознаке:

$$\begin{aligned}
 X_{m-1,T} &:= \left(\prod_{k=1}^{m-1} (\mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{A_k, B_k} - \mathcal{L}[\mu_{k,T}] \Delta_{C_k, D_k}) \right) X = \\
 &= \int_{[0,T]^{m-1}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} (e^{-t_k A_k} \otimes e^{-t_k B_k} - e^{-t_k C_k} \otimes e^{-t_k D_k}) \right) X d\tilde{\mu}_{m-1}(\mathbf{t}_{m-1}) \\
 &= \int_{[0,T]^{m-1}} \int_{[0,1]^{m-1}} e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^{m-1} \Delta_{C_n - A_n, D_n - B_n} \right) X \\
 &\quad \times e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \prod_{n=1}^{m-1} t_n d\mathbf{s}_{m-1} d\tilde{\mu}_{m-1}(\mathbf{t}_{m-1}),
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
 X_{m-1} &:= \int_{\mathbb{R}_+^{m-1}} \int_{[0,1]^{m-1}} e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^{m-1} \Delta_{C_n - A_n, D_n - B_n} \right) X \\
 &\quad \times e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \prod_{n=1}^{m-1} t_n d\mathbf{s}_{m-1} d\tilde{\mu}_{m-1}(\mathbf{t}_{m-1}).
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

На сличан начин дефинишимо изразе:

$$\begin{aligned}
 Y_{m-1,T} &:= \int_{[0,T]^{m-1}} \int_{[0,1]^{m-1}} e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n A_n^* + s_n t_n C_n^*)} \left(\prod_{n=1}^{m-1} \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \\
 &\quad \times e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \prod_{n=1}^{m-1} t_n d\mathbf{s}_{m-1} d\tilde{\mu}_{m-1}(\mathbf{t}_{m-1}),
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{m-1} &:= \int_{\mathbb{R}_+^{m-1}} \int_{[0,1]^{m-1}} e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n A_n^* + s_n t_n C_n^*)} \left(\prod_{n=1}^{m-1} \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \\
 &\quad \times e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \prod_{n=1}^{m-1} t_n d\mathbf{s}_{m-1} d\tilde{\mu}_{m-1}(\mathbf{t}_{m-1}),
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{m-1,T} &:= \int_{[0,T]^{m-1}} \int_{[0,1]^{m-1}} e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\prod_{n=1}^{m-1} \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) \\
 &\quad \times e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n B_n^* + s_n t_n D_n^*)} \prod_{n=1}^{m-1} t_n d\mathbf{s}_{m-1} d\tilde{\mu}_{m-1}(\mathbf{t}_{m-1}),
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{m-1} &:= \int_{\mathbb{R}_+^{m-1}} \int_{[0,1]^{m-1}} e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\prod_{n=1}^{m-1} \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) \\
 &\quad \times e^{-\sum_{n=1}^{m-1} ((1-s_n)t_n B_n^* + s_n t_n D_n^*)} \prod_{n=1}^{m-1} t_n d\mathbf{s}_{m-1} d\tilde{\mu}_{m-1}(\mathbf{t}_{m-1}).
 \end{aligned}$$

Када је $m = 2$, на основу (3.9) знамо да важи

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Y_{1,T} = Y_1.$$

На основу дефиниције (3.37) и (3.38), као и из индуктивне хипотезе

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Y_{m-1,T} = Y_{m-1},$$

примењене на једнакост у (3.40) добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} Y_{m,T} = \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]^m} \int_{[0,1]^m} e^{-\sum_{n=1}^m ((1-s_n)t_n A_n^* + s_n t_n C_n^*)} \left(\prod_{n=1}^m \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) e^{-\sum_{n=1}^m ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \prod_{n=1}^m t_n ds_n d\tilde{\mu}_m(\mathbf{t}_m) \end{aligned}$$

(3.40)

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-((1-s_m)t_m A_m^* + s_m t_m C_m^*)} \Delta_{C_m^* - A_m^*, C_m - A_m} Y_{m-1,T} e^{-((1-s_m)t_m A_m + s_m t_m C_m)} t_m ds_m d\mu_m(t_m)$$

(3.41)

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} e^{-((1-s_m)t_m A_m^* + s_m t_m C_m^*)} \Delta_{C_m^* - A_m^*, C_m - A_m} Y_{m-1} e^{-((1-s_m)t_m A_m + s_m t_m C_m)} t_m ds_m d\mu_m(t_m) = Y_m.$$

Напоменимо да једнакост (3.41) следи применом (3.9) на $(A_m, C_m, Y_{m-1,T}, Y_{m-1})$ уместо на (A, C, Y_T, Y) . Примена ове једнакости је оправдана јер су за сваки фиксиран вектор $f \in \mathcal{H}$ скаларне функције

$$\mathbb{R}_+ \ni T \mapsto \langle Y_{m-1,T} f, f \rangle \in \mathbb{R} \text{ и } \mathbb{R}_+ \ni T \mapsto \langle \Delta_{C_m^* - A_m^*, C_m - A_m} Y_{m-1,T} f, f \rangle \in \mathbb{R}$$

монотono растуће на $\mathbb{R}_+$ због тога што важи $(\prod_{n=1}^m \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n})(I) \geq 0$ за свако $m \in \{1, \dots, N\}$, на основу претпостављене акретивности N -торке $(C_n - A_n)_{n=1}^N$.

Приметимо да формула (3.41) директно даје $Y_N \geq 0$.

Тачност једнакости (3.32) и (3.33) за $N := 1$ следи на основу специјалног случаја $X_T := X$ за свако $T \geq 0$ у формули (3.17). Полазећи од индуктивне хипотезе

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} X_{m-1,T} \left[= \mathbb{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{m-1} (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, D_n}) X \right] \\ = X_{m-1} = \prod_{n=1}^{m-1} (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) X \end{aligned}$$

закључујемо да важе једнакости

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} X_{m,T} &= \mathbb{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, D_n}) X = \\ (3.42) \quad &= \mathbb{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} (\mathcal{L}[\mu_{m,T}] \Delta_{A_m, B_m} - \mathcal{L}[\mu_{m,T}] \Delta_{C_m, D_m}) X_{m-1,T} \end{aligned}$$

$$(3.43) \quad = \mathbb{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} (e^{-t_m A_m} X_{m-1,T} e^{-t_m B_m} - e^{-t_m C_m} X_{m-1,T} e^{-t_m D_m}) d\mu_m(t_m)$$

$$(3.44) \quad = \mathbb{B}(\mathcal{H}) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]} \int_{[0,1]} e^{-(1-s_m)t_m A_m - s_m t_m C_m} X_{m-1,T} e^{-(1-s_m)t_m B_m - s_m t_m D_m} t_m ds_m d\mu_m(t_m)$$

$$(3.45) \quad = \mathcal{L}[\mu_m](A_m \otimes I + I \otimes B_m) X_{m-1} - \mathcal{L}[\mu_m](C_m \otimes I + I \otimes D_m) X_{m-1} = X_m.$$

Да бисмо оправдали горе изведен рачун, приметимо да обе једнакости у (3.42) следе на основу дефиниције (3.35) док једнакост (3.43) следи комбиновањем дефиниције

Борелове мере $\mu_{m,T}$ за свако $m \in \{1, \dots, N\}$ са интегралном формом Лапласових трансформера $\mathcal{L}[\mu_{m,T}]\Delta_{A_m,B_m}$ и $\mathcal{L}[\mu_{m,T}]\Delta_{C_m,D_m}$, као што је већ рађено у доказу Леме 3.13. Сада, једнакост (3.44) следи применом формуле (3.27) на $(A_m, B_m, C_m, D_m, \mu_m, X_{m-1})$ уместо на $(A_1, B_1, C_1, D_1, \mu_1, X)$, док је прва једнакост у (3.45) базирана на примени формуле (3.17) на $(A_m, B_m, C_m, D_m, X_{m-1}, X_{m-1,T}, \mu_m)$ уместо на $(A, B, C, D, X, X_T, \mu)$. Друга једнакост у (3.45) следи на основу дефиниције (3.36), комбиновано са применом формуле (3.17) на $(A_m, B_m, C_m, D_m, X_{m-1}, \mu_m)$ уместо на (A, B, C, D, X, μ) . Како се лева страна у (3.45) може препознати као производ $\prod_{n=1}^m (\mathcal{L}[\mu_n]\Delta_{A_n,B_n} - \mathcal{L}[\mu_n]\Delta_{C_n,D_n})X$, на основу индуктивне хипотезе то потврђује индуктивни корак и тачност формула (3.32) и (3.33).

Одавде добијамо да важи (3.30) јер је

$$\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n]\Delta_{A_n^*,A_n} - \mathcal{L}[\mu_n]\Delta_{C_n^*,C_n})(I) = \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{[0,T]^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n^* + s_n t_n C_n^*)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n} \right)(I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \prod_{n=1}^N t_n ds_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \\ & = \int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n^* + s_n t_n C_n^*)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n} \right)(I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \prod_{n=1}^N t_n ds_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N), \end{aligned} \quad (3.47)$$

што следи применом (3.32) (односно (3.33)) на $(A_n^*, A_n, C_n^*, C_n, I)$ уместо (A_n, B_n, C_n, D_n, X) и потврђује једнакост (3.46) (односно (3.47)). Одавде закључујемо да формула (3.31) следи применом (3.30) на (B_n^*, D_n^*) уместо на (A_n, C_n) за свако $n \in \{1, \dots, N\}$.

Сада ћемо доказати и формулу (3.34). Ако помножимо обе стране формуле (3.33) са леве стране са $\sqrt{(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n})(I)}$ и са десне са $\sqrt{(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n-B_n, D_n^*-B_n^*})(I)}$ добијамо

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n} \right)(I)} \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n]\Delta_{A_n,B_n} - \mathcal{L}[\mu_n]\Delta_{C_n,D_n}) \right) X \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n-B_n, D_n^*-B_n^*} \right)(I)} = \\ & = \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n} \right)(I)} \int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n-A_n, D_n-B_n} \right) \\ & \times X e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \prod_{n=1}^N t_n ds_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n-B_n, D_n^*-B_n^*} \right)(I)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Приметимо да су фамилије оператора

$$\left\{ \sqrt{t_n} e^{-(1-s_n)t_n A_n^* - s_n t_n C_n^*} \right\}_{0 \leq t_n, 0 \leq s_n \leq 1} \quad \text{и} \quad \left\{ \sqrt{t_n} e^{-(1-s_n)t_n B_n - s_n t_n D_n} \right\}_{0 \leq t_n, 0 \leq s_n \leq 1}$$

јако квадратно интеграбилне на основу претпостављеног ф.ф.м.о.1 својства мера μ_n за свако $n \in \{1, \dots, N\}$. Одавде и из (2.5) следи да је десна страна једнакости (3.48) једнака изразу у задњој линији у (3.34). $\square$

У наредне две секције применићемо изложену теорију на извођење неједнакости које се тичу Q и Q^* идеала компактних оператора, што је и основни циљ овог поглавља дисертације.

3.3 Неједнакости у $\mathfrak{C}_{\Phi(p)^*}(\mathcal{H})$ идеалима

Теорема 3.15. Нека је Ψ с. н. функција, $p \geq 2$ и нека су N -шорке $(A_n)_{n=1}^N, (B_n)_{n=1}^N, (C_n)_{n=1}^N, (D_n)_{n=1}^N$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H})^N$ састављене од акретивних оператора таквих да су $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ фамилије комутирајућих оператора за које су N -шорке $(C_n - A_n)_{n=1}^N$ и $(D_n - B_n)_{n=1}^N$ акретивне. Тада су оператори

$$Y_{N,T} := \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I), \quad Z_{N,T} := \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I)$$

позитивни. Ако за неко $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ важи $(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n}) X \in \mathfrak{C}_{\Psi}(\mathcal{H})$ тада је

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)} \right\|_{\Psi} \leq \\ (3.49) \quad & \leq \left\| \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I) \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I)} \right\|_{\Psi} \end{aligned}$$

иод било којим од следећих услова:

- (а) ако $\Psi := \ell^1$,
- (б) ако $\Psi := \Phi^{(p)^*}, L^2(\mathbb{R}_+, \mu)$ је сепарабилан и барем једна од фамилија $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ је м. к. н. о.
- (в) ако су обе фамилије $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ м. к. н. о.

Доказ. Према дефиницијама уведеним у (3.37) и (3.39) имамо да прво тврђење исказано у овој теорему заправо даје да важе операторне неједнакости $Y_{N,T} \geq 0$ и $Z_{N,T} \geq 0$, што директно добијамо након примене формула (3.30) и (3.31) на низ мера $(\mu_{n,T})_{n=1}^N$ уместо на низ мера $(\mu_n)_{n=1}^N$. Доказ неједнакости (3.49) заснива се на

$$\left\| \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)} \right\|_{\Psi} =$$

$$= \left\| \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \int_{[0,T]^N} \prod_{n=1}^N (e^{-t_n A_n} \otimes e^{-t_n B_n} - e^{-t_n C_n} \otimes e^{-t_n D_n}) X d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N)} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)} \right\|_{\Psi}$$

$$= \left\| \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \int_{[0,T]^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N)} \right\|_{\Psi}$$

$$\prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)} \right\|_{\Psi} \leq$$

$$\leq \left\| \left(\int_{[0,T]^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right)^{1/2} \right\|_{\Psi}$$

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\int_{[0,T]^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right)^{1/2} \right\|_{\Psi} \\ & = \left\| \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I) \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I)} \right\|_{\Psi}. \end{aligned}$$

Сада ћемо оправдати кораке у горњем рачуну.

Једнакости у (3.50) и (3.52) следе из прве и друге једнакости у (3.28).

Неједнакост у (3.54) добијамо у зависности од следећих случајева.

У случају (а) примењујемо неједнакост (2.26) дела (в) Теореме 2.22.

У случају (б) примењујемо неједнакост (2.27) дела (г) Теореме 2.22.

У случају (в) примењујемо Теорему 2.23. □

Теорема 3.16. Нека је Ψ с. н. функција, $p \geq 2$ и нека је $(\mu_n)_{n=1}^N$ N -торка ф.ф.м.о.1 Борелових мера на $\mathbb{R}_+$. Ако су за даће N -торке $(A_n)_{n=1}^N, (B_n)_{n=1}^N, (C_n)_{n=1}^N, (D_n)_{n=1}^N \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})^N$ обе фамилије $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ састављене од међусобно комутирајућих акретивних оператора таквих да су N -торке $(C_n - A_n)_{n=1}^N$ и $(D_n^* - B_n^*)_{n=1}^N$ акретивне, тада су оператори

$$\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I), \quad \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I)$$

позитивни. Ако је $(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n}) X \in \mathfrak{C}_\Psi(\mathcal{H})$ за неко $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ тада важи

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*, A_n^*} \Delta_{C_n - A_n} \right) (I)} \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)} \right\|_\Psi \leq \\ (3.55) & \leq \left\| \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I)} \right\|_\Psi, \end{aligned}$$

под било којим од следећих услова:

(а) ако $\Psi := \ell^1$,

(б) ако $\Psi := \Phi^{(p)^*}, L^2(\mathbb{R}_+, \mu)$ је сејарабилан и барем једна од фамилија $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ је м. к. н. о,

(в) ако су обе фамилије $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ м. к. н. о.

Такође, ако су оператори $A, B, C, D, X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ такви да су A и B акретивни, $C - A$ и $D^* - B^*$ N -хиперакретивни, $AC = CA, BD = DB$ и $(\Delta_{A,B} - \Delta_{C,D})^N X \in \mathfrak{C}_\Psi(\mathcal{H})$ тада

(3.56)

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\Delta_{C^*-A^*, C-A}^N(I)} (\mathcal{L}[\mu] \Delta_{A,B} - \mathcal{L}[\mu] \Delta_{C,D})^N X \sqrt{\Delta_{D-B, D^*-B^*}^N(I)} \right\|_\Psi \leq \\ & \left\| \sqrt{(\mathcal{L}[\mu] \Delta_{A^*, A} - \mathcal{L}[\mu] \Delta_{C^*, C})^N(I)} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (A - C)^{N-n} X (B - D)^n \sqrt{(\mathcal{L}[\mu] \Delta_{B, B^*} - \mathcal{L}[\mu] \Delta_{D, D^*})^N(I)} \right\|_\Psi \end{aligned}$$

важи под било којим од наредних услова:

(г) ако $\Psi := \ell^1$,

(д) ако $\Psi := \Phi^{(p)^*}, L^2(\mathbb{R}_+, \mu)$ је сејарабилан и барем једна од фамилија $\{A, C\}$ и $\{B, D\}$ је м. к. н. о,

(ђ) ако су обе фамилије $\{A, C\}$ и $\{B, D\}$ м. к. н. о.

Доказ. Доказ неједнакости (3.55) базиран је на следећем низу неједнакости и једнакости:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n} \right)(I)} \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n-B_n, D_n^*-B_n^*} \right)(I)} \right\|_{\Psi} \\
 &= \left\| \int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n} \right)(I)} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \right. \\
 & \quad \times \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n-C_n, B_n-D_n} \right) X e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n-B_n, D_n^*-B_n^*} \right)(I)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \left. \right\|_{\Psi}
 \end{aligned}
 \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \left\| \left(\int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n^* + s_n t_n C_n^*)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n} \right)(I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right)^{1/2} \right. \\
 & \quad \left. \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n-C_n, B_n-D_n} \right) X \left(\int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n-B_n, D_n^*-B_n^*} \right)(I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n^* + s_n t_n D_n^*)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right)^{1/2} \right\|_{\Psi}
 \end{aligned}
 \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
 & = \left\| \sqrt{\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n^*, C_n})(I)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n-C_n, B_n-D_n} \right) X \sqrt{\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n, D_n^*})(I)} \right\|_{\Psi}.
 \end{aligned}
 \tag{3.59}$$

Приметимо да једнакост у (3.57) следи на основу формуле (3.34) док је неједнакост у (3.59) базирана на примени одговарајућих Коши-Шварцових норма неједнакости на скуп $\Omega := \mathbb{R}_+^N \times [0,1]^N$ и на ν -јако квадратно интеграбилне фамилије оператора

$$\{A_{\mathbf{t}, \mathbf{s}} : \mathbf{s} \in [0,1]^N, \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^N\} \text{ и } \{B_{\mathbf{t}, \mathbf{s}}^* : \mathbf{s} \in [0,1]^N, \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^N\}$$

које су дефинисане изразима

$$\begin{aligned}
 A_{\mathbf{t}, \mathbf{s}} &:= \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^*-A_n^*, C_n-A_n} \right)(I)} \cdot e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)}, \\
 B_{\mathbf{t}, \mathbf{s}}^* &:= e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \cdot \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n-B_n, D_n^*-B_n^*} \right)(I)},
 \end{aligned}$$

при чему је Борелова мера ν дата на Бореловим подскуповима у $\mathbb{R}_+^N \times [0,1]^N$ изразом

$$d\nu(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N).$$

Такође, уместо на оператор X , поменућу неједнакост примењујемо на оператор

$$\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n-C_n, B_n-D_n} \right) X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

у зависности од следећих случајева.

У случају (а) примењујемо неједнакост (2.26) дела (в) Теореме 2.22.

У случају (б) примењујемо неједнакост (2.27) дела (г) Теореме 2.22.

У случају (в) примењујемо Теорему 2.23.

Једнакост (3.60) је базирана на формулама (3.30) и (3.31).

Неједнакост (3.56) представља специјални случај неједнакости (3.55) уколико узмемо да је $(A_n, B_n, C_n, D_n) := (A, B, C, D)$ за све $n \in \{1, \dots, N\}$, јер су N -торке оператора

$$(C - A, \dots, C - A) \text{ и } (D^* - B^*, \dots, D^* - B^*)$$

акретивне (видети Дефиницију 3.1 и Пример 3.5). $\square$

Неки специјални случајеви

У наредним тврђењима бавићемо се последицама до сада добијених неједнакости које су биле изведене за N -торке оператора. Наредне неједнакости ће представљати специјални случај $N = 1$ изведених неједнакости. Видећемо да у овом случају до сада разматране неједнакости имају доста одређенију форму.

Посебан случај неједнакости (3.55) Теореме 3.16 дат је у наредном тврђењу.

Последица 3.17. *Ако је $A := B := 0$ и $N := 1$ у Теореме 3.16, њада важи*

$$\|\sqrt{C^* + C}(X - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C,D}X)\sqrt{D^* + D}\|_{\Psi} \leq \|\sqrt{I - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C^*,C}(I)}(CX + XD)\sqrt{I - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{D,D^*}(I)}\|_{\Psi},$$

иод било којим од услова (а), (б) или (в) Теореме 3.16.

Такође, имамо и следеће тврђење.

Теорема 3.18. *Нека је Ψ с. н. функција и нека је μ коначна Борелова мера на $\mathbb{R}_+$. Ако су оба пара $(A, C), (B, D) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})^2$ састављена од међусобно комутирајућих акрејивних оператора њаквих да је $D - B$ акрејиван, $C - A$ полуакрејиван и*

$$(C - A)X + X(D - B) \in \mathfrak{C}_{\Psi}(\mathcal{H})$$

за неко $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, њада је оператор $\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A^*,A}(I) - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C^*,C}(I)$ семиакрејиван, $\mathcal{L}[\mu]\Delta_{B,B^*}(I) - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{D,D^*}(I) \geq 0$ и важи неједнакост

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{A^* + A - C^* - C}(\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A,B}X - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C,D}X)\sqrt{D^* + D - B^* - B}\|_{\Psi} \leq \\ (3.61) \quad & \|\sqrt{(\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A^*,A}(I) - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C^*,C}(I))(AX + XB - CX - XD)}\sqrt{(\mathcal{L}[\mu]\Delta_{B,B^*}(I) - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{D,D^*}(I))}\|_{\Psi}, \end{aligned}$$

иод било којим од услова (а), (б) или (в) из Теореме 3.16.

Доказ. Специјални случај $N := 1$ Теореме 3.16 потврђује неједнакост (3.61) уколико је $C - A$ акретиван оператор. Уколико је $A - C$ акретиван оператор тада важи једнакост

$$\begin{aligned} & \sqrt{A^* + A - C^* - C}(\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A,B}X - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{C,D}X)\sqrt{D^* + D - B^* - B} = \\ & \int \int_{\mathbb{R}_+[0,1]} \sqrt{A^* + A - C^* - C} e^{-(1-s)tA - stC} (CX + XD - AX - XB) e^{-(1-s)tB - stD} \sqrt{D^* + D - B^* - B} t ds d\mu(t). \end{aligned}$$

Ова једнакост може се доказати на исти начин као формула (3.16). Користећи идеје из доказа специјалног случаја $N := 1$ Теореме 3.16, овог пута примењујући исту технику на фамилије оператора

$$\{\sqrt{A^* + A - C^* - C} e^{-(1-s)tA - stC}\}_{0 \leq t, 0 \leq s \leq 1} \text{ и } \{\sqrt{D^* + D - B^* - B} e^{-(1-s)tB - stD}\}_{0 \leq t, 0 \leq s \leq 1},$$

добијамо неједнакост (3.61). $\square$

Наведимо специјални случај Теореме 3.18 који се добија уколико у овој теорему одаберемо $B := C := 0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Тада долазимо до следећих пертурбационих неједнакости.

Последица 3.19. Нека је Ψ с. н. функција и нека је μ вероватносна Борелова мера на $\mathbb{R}_+$. Ако су $A, D, X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ такви да су A и D акрејивни оператори и

$$AX - XD \in \mathfrak{C}_{\Psi}(\mathcal{H}),$$

тада важе неједнакости

$$(3.62) \quad \begin{aligned} & \left\| \sqrt{A^* + A} (\mathcal{L}[\mu](A)X - X\mathcal{L}[\mu](D)) \sqrt{D + D^*} \right\|_{\Psi} \leq \\ & \leq \left\| \sqrt{I - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{A^*,A}(I)} (AX - XD) \sqrt{I - \mathcal{L}[\mu]\Delta_{D,D^*}(I)} \right\|_{\Psi} \end{aligned}$$

$$(3.63) \quad \leq \left\| \sqrt{I - |\mathcal{L}[\mu](A)|^2} (AX - XD) \sqrt{I - |\mathcal{L}[\mu](D)^*|^2} \right\|_{\Psi},$$

и од било којим од следећих услова:

(а) ако $\Psi := \ell^1$,

(б) ако $\Psi := \Phi^{(p)*}$ за неко $p \geq 2$, $L^2(\mathbb{R}_+, \mu)$ је сепарабилан и барем један од оператора A или D је нормалан,

(в) ако су оба оператора A и D нормална.

Доказ. Заиста, ако је $B := C := 0 \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ тада имамо

$$\mathcal{L}[\mu]\Delta_{A,B}X = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} X e^{-t0} d\mu(t) = \mathcal{L}[\mu](A)X.$$

Слично, имамо да важи једнакост

$$\mathcal{L}[\mu]\Delta_{C,D}X = X\mathcal{L}[\mu](D),$$

одакле заменом у (3.61) директно следи неједнакост (3.62). Да бисмо доказали и другу неједнакост, тј. неједнакост (3.63), приметимо да из $\mu(\Omega) = 1$ и Коши-Шварцове операторне неједнакости [39, Лема 2.1(a1), (5)] следи

$$|\mathcal{L}[\mu](A)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA} d\mu(t) \right|^2 \leq \left\| \int_{\mathbb{R}_+} I d\mu(t) \right\| \left\| \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA^*} e^{-tA} d\mu(t) \right\| = \mathcal{L}[\mu]\Delta_{A^*,A}(I).$$

На сличан начин добијамо и неједнакост

$$|\mathcal{L}[\mu](D)^*|^2 \leq \mathcal{L}[\mu]\Delta_{D,D^*}(I),$$

тако да коначни закључак следи из својства дупле монотоности (1.26). $\square$

Напоменимо да у Теореме 3.15 и у Теореме 3.16, као и у наведеним последицама сепарабилност простора $L^2(\mathbb{R}_+, \mu)$ игра битну улогу. За детаље који се тичу сепарабилности класичних L^p простора погледати Лему 1.9.

3.4 Неједнакости у $\mathfrak{C}_{\Phi(p)}(\mathcal{H})$ идеалима

Теорема 3.20. Нека је Ψ даћа с. н. функција, $p \geq 2$, и нека је даћа N -шорка Борелових мера $(\mu_n)_{n=1}^N$ на скупу $\mathbb{R}_+$. Такође, нека су за N -шорке $(A_n)_{n=1}^N, (B_n)_{n=1}^N, (C_n)_{n=1}^N, (D_n)_{n=1}^N$ из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})^N$ обе фамилије $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ састављене од међусобно комутирајућих и акрептивних оператора таквих да су N -шорке оператора $(C_n - A_n)_{n=1}^N$ и $(D_n - B_n)_{n=1}^N$ акрептивне. Претпоставимо да за $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ важи

$$\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n}\right) X \in \mathfrak{C}_{\Psi}(\mathcal{H}).$$

Ако је N -шорка $(C_n - A_n)_{n=1}^N$ стриктно акрептивна, тада важи неједнакост

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\ & \leq \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, A_n^*} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, C_n^*}) \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}} \\ (3.64) \quad & \cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \end{aligned}$$

важи под било којим од наредних услова:

- (a1) $\Psi := \Phi^{(p)}$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ је м. к. н. о. фамилија,
 (a2) $\Psi := \ell^2$.

Алитернативно, ако је додатно $(D_n - B_n)_{n=1}^N$ стриктно акрептивна, тада важи

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \right\|_{\Psi} \\ & \leq \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{B_n^*, B_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{D_n^*, D_n}) \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}} \\ (3.65) \quad & \cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n^* - B_n^*, D_n - B_n} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \end{aligned}$$

под било којим од наредних услова:

- (b1) $\Psi := \Phi^{(p)}$ и $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ је м. к. н. о. фамилија,
 (b2) $\Psi := \ell^2$.

Доказ. Доказ неједнакости (3.64) следи из

$$\left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)} \right\|_{\Psi} =$$

(3.66)

$$\left\| \int_{[0,T]^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)} \right\|_{\Psi}$$

$$\leq \left\| \int_{[0,T]^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right\|^{\frac{1}{2}}$$

(3.67)

$$\cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \right\|$$

(3.68)

$$\left(\int_{[0,T]^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) \right) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n^* + s_n t_n D_n^*)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\Psi}$$

$$= \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{A_n, A_n^*} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{C_n, C_n^*}) \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}}$$

(3.69)

$$\cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_{n,T}] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}.$$

Сада ћемо оправдати све кораке у претходном рачуну.

Једнакост у (3.66) је базирана на формули (3.28).

Једнакост у (3.69) следи на основу дупле примене интегралне репрезентације (3.28) на $(A_n, C_n, A_n^*, C_n^*, I)$ и $(B_n, D_n, B_n^*, D_n^*, I)$ уместо на (A_n, B_n, C_n, D_n, X) .

Неједнакост у (3.68) следи на основу неједнакости (2.25) у Теорему 2.22, у случају (a1), која је примењена на скуп $\Omega := [0, T]^N \times [0, 1]^N$ и на јако квадратно интеграбилне фамилије оператора

$$\{A_{\mathbf{t}, \mathbf{s}}^* : (\mathbf{t}, \mathbf{s}) \in [0, T]^N \times [0, 1]^N\} \text{ и } \{B_{\mathbf{t}, \mathbf{s}}^* : (\mathbf{t}, \mathbf{s}) \in [0, T]^N \times [0, 1]^N\}$$

чији су чланови, за свако $(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \in [0, T]^N \times [0, 1]^N$, дати изразима

$$A_{\mathbf{t}, \mathbf{s}} := \sqrt{\prod_{n=1}^N t_n \cdot e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)}} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I)},$$

$$B_{\mathbf{t}, \mathbf{s}} := \sqrt{\prod_{n=1}^N t_n \cdot e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)}} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)}.$$

Такође, ову неједнакост примењујемо на оператор

$$\left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

уместо на оператор X . Случај (a2) се доказује на сличан начин, користећи неједнакост (2.25) из дела (б) Теореме 2.22. Доказ неједнакости (3.65) аналоган доказу неједнакости (3.64), при чему се овај пут користи неједнакост (2.25) дела (a) Теореме 2.22 (односно дела (б) Теореме 2.22) да би се доказао случај (б1) (односно (б2)). $\square$

У наредној теореме претпостављамо ф.ф.м.о.1 својство низа мера $(\mu_n)_{n=1}^N$.

Теорема 3.21. Нека је Ψ с. н. функција и нека је $(\mu_n)_{n=1}^N$ N -торка ф.ф.м.о.1 Борелових мера на $\mathbb{R}_+$ и $p \geq 2$. Такође, за даће N -торке $(A_n)_{n=1}^N, (B_n)_{n=1}^N, (C_n)_{n=1}^N, (D_n)_{n=1}^N \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})^N$ нека су обе фамилије $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ састављене од међусобно комутирајућих акрејивних ојерајора таквих да су N -торке $(C_n - A_n)_{n=1}^N$ и $(D_n - B_n)_{n=1}^N$ акрејивне и нека за $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ важи

$$\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n}\right) X \in \mathfrak{C}_{\Psi}(\mathcal{H}).$$

Ако је $(C_n - A_n)_{n=1}^N$ сјријино акрејивна N -торка тада важи

$$\begin{aligned} (3.70) \quad & \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \leq \\ & \leq \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, A_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, C_n^*}) \right) (I) \right\| \cdot \\ & \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n, D_n^*}) \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \end{aligned}$$

иод било којим од наредних услова:

- (a1) $\Psi := \Phi^{(p)}$ и $\{B_n\}_{n=1}^N \cup \{D_n\}_{n=1}^N$ је м. к. н. о фамилија,
 (a2) $\Psi := \ell^2$.

Ако је $(D_n - B_n)_{n=1}^N$ сјријино акрејивна N -торка тада важи неједнакости

$$\begin{aligned} (3.71) \quad & \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* - A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \right\|_{\Psi} \leq \\ & \leq \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n^*, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n^*, D_n}) \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \\ & \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n^* - B_n^*, D_n - B_n} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \end{aligned}$$

иод било којим од наредних услова:

- (b1) $\Psi := \Phi^{(p)}$ и $\{A_n\}_{n=1}^N \cup \{C_n\}_{n=1}^N$ су м. к. н. о. фамилије,
 (b2) $\Psi := \ell^2$.

Доказ. Доказ неједнакости (3.70) следи на основу

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\
 &= \left\| \int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \right. \\
 & \quad \times e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \left. \right\|_{\Psi} \\
 &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n^* + s_n t_n C_n^*)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \right. \\
 & \quad \times \left(\int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n^* + s_n t_n D_n^*)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right)^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_{\Psi} \\
 &= \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, A_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, C_n^*}) (I) \right) \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n, D_n^*}) (I) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}.
 \end{aligned}
 \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n^* + s_n t_n D_n^*)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right)^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_{\Psi} \\
 &= \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, A_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, C_n^*}) (I) \right) \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n, D_n^*}) (I) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}.
 \end{aligned}
 \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\int_{\mathbb{R}_+^N} \int_{[0,1]^N} e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I) e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n^* + s_n t_n D_n^*)} \prod_{n=1}^N t_n d\mathbf{s}_N d\tilde{\mu}_N(\mathbf{t}_N) \right)^{\frac{1}{2}} \left. \right\|_{\Psi} \\
 &= \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, A_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, C_n^*}) (I) \right) \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n, B_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n, D_n^*}) (I) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}.
 \end{aligned}
 \tag{3.74}$$

Једнакост (3.72) се добија применом формуле (3.26). Неједнакост у (3.73) је базирана на Коши-Шварцовој $\|\cdot\|_{\Phi(p)}$ норма неједнакости (2.25) Теореме 2.22. Ову неједнакост примењујемо на скуп $\Omega := \mathbb{R}_+^N \times [0,1]^N$ и на јако квадратно интеграбилне фамилије

$$\{A_{\mathbf{t}, \mathbf{s}}^* : (\mathbf{t}, \mathbf{s}) \in \Omega\} \text{ и } \{B_{\mathbf{t}, \mathbf{s}}^* : (\mathbf{t}, \mathbf{s}) \in \Omega\},$$

чији су чланови, за свако $(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}_+^N \times [0,1]^N$, дати изразима

$$\begin{aligned}
 A_{\mathbf{t}, \mathbf{s}} &:= \sqrt{\prod_{n=1}^N t_n \cdot e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n A_n + s_n t_n C_n)}} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I)}, \\
 B_{\mathbf{t}, \mathbf{s}} &:= \sqrt{\prod_{n=1}^N t_n \cdot e^{-\sum_{n=1}^N ((1-s_n)t_n B_n + s_n t_n D_n)}} \sqrt{\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n - B_n, D_n^* - B_n^*} \right) (I)}.
 \end{aligned}$$

Такође, ову неједнакост примењујемо на оператор

$$\left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n - A_n, C_n^* - A_n^*} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

уместо на оператор X . Једнакост (3.74) је базирана на формулама (3.30) и (3.31) док доказ неједнакости (3.71) следи из

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \right\|_{\Psi} \\
 &= \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n, D_n}) \right) X \right\|_{\Psi}^* \\
 (3.75) \quad &= \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n^*, A_n^*} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n^*, C_n^*}) \right) X^* \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* A_n^*, C_n - A_n} \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\
 &\leq \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n^*, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n^*, D_n}) \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 (3.76) \quad &\cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n^* - B_n^*, D_n - B_n} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{C_n^* A_n^*, D_n^* - B_n^*} \right) X^* \left(\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi} \\
 &= \left\| \left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{B_n^*, B_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{D_n^*, D_n}) \right) (I) \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 &\cdot \left\| \left(\left(\prod_{n=1}^N (\mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{A_n^*, A_n} - \mathcal{L}[\mu_n] \Delta_{C_n^*, C_n}) \right) (I) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{n=1}^N \Delta_{A_n - C_n, B_n - D_n} \right) X \left(\left(\prod_{n=1}^N \Delta_{D_n^* - B_n^*, D_n - B_n} \right) (I) \right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\Psi}.
 \end{aligned}$$

Напоменимо да све једнакости из горњег рачуна следе на основу својства адјунговања оператора. Неједнакост у (3.76) је добијена применом неједнакости (3.70) на уређену петорку оператора $(B_n^*, A_n^*, D_n^*, C_n^*, X^*)$ уместо на (A_n, B_n, C_n, D_n, X) . $\square$

Глава 4

Интеграција функција

$$\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$$

У овом поглављу дисертација ће се бавити просторима интеграбилних оператор-вредносних функција који делују између два Банахова простора, у сличном духу као што је то рађено у Поглављу 2. Иако је теорија интеграције у векторском простору интензивно изучавана област теорије Банахових простора, оператор-вредносни интегралли су мање разматрани делови ове теорије. Оно што је изучавано до сада је третирано као појединачни објекат, углавном са акцентом на *Рагон-Никодимово својство*, што се може видети у [1, 57].

У овом поглављу дисертације ћемо са X и Y означавати Банахове просторе над пољем $\mathbb{C}$. Да бисмо избегли тривијалне случајеве претпостављамо $X \neq \{0\}$ и $Y \neq \{0\}$. Као помоћни алат у истраживањима везаним за интеграцију фамилија оператора из $\mathcal{B}(X, Y)$ користимо теорију оператор-вредносних мера, што ће нам помоћи да уведемо две еквивалентне норме на простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$. Показаћемо да је овај простор комплетан уколико је мера μ дискретна, али уопштено гледано показујемо да овај простор не мора бити комплетан. Ова тематика ће у једаном делу бити садржај Секције 4.2 овог поглавља, док ће остатак Секције 4.2 бити посвећен изучавању оператора који се природно јављају на простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$. Такође, бавићемо се питањима компактности оператора $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$. Главни део Секције 4.4 је посвећен теоремама конвергенције низова у простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$, при чему су граничне вредности разматране у *слабом*, *јаким* и *униформном* смислу. Добијени резултати представљају варијанте ТДК и Виталијеве теореме (видети Теорему 4.37) за низове функција из нормираног простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$. Ове теореме су добро познати резултати из стандардних курсева интеграције скаларно-вредносних функција. Напоменимо да су резултати из овог поглавља превасходно добијени у раду [8].

Неки резултати који ће бити изведени су специфичност рада са операторима на Хилбертовом простору (нпр. резултати који се тичу апсолутне вредности оператора) и представљаће наставак резултата из Поглавља 2 и Поглавља 3.

Фиксирајмо нотацију коју ћемо користити у овом поглављу.

Са $\mathfrak{M}$ ћемо означавати σ -алгебру на скупу Ω док ће μ бити мера на $\mathfrak{M}$. Да бисмо избегли тривијалне случајеве, претпостављамо да постоји $E \in \mathfrak{M}$ такав да је $0 < \mu(E) < +\infty$. Простор класа еквиваленције μ -скоро свуда једнаких $\mathfrak{M}$ -мерљивих подскупова скупа Ω је означен са $[\mathfrak{M}]$. Функција $d_\mu : [\mathfrak{M}] \times [\mathfrak{M}] \rightarrow [0, +\infty]$ дефинисана формулом $d_\mu([E], [F]) = \mu(E \Delta F)$ је комплетна метрика на $[\mathfrak{M}]$ уколико је $\mu(\Omega) < +\infty$ (видети [5, Вежбање 4, стр. 108]).

У овом поглављу често ћемо користити *билинеарна пресликавања*, па наведимо неке основне резултате из ове теорије. Векторски простор свих ограничених билинеарних пресликавања из $X \times Y$ у Z је означен са $\mathcal{B}(X, Y; Z)$. Норма на векторском простору $\mathcal{B}(X, Y; Z)$ је дата изразом

$$\|\Psi\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \|\Psi(x, y)\| \text{ за свако } \Psi \in \mathcal{B}(X, Y; Z).$$

Такође, простор $\mathcal{B}(X, Y; Z)$ је комплетан уколико је Z Банахов простор (видети [53, Теорема 6.1, (б)]). Уколико су X, Y и Z нормирани простори тада је простор $\mathcal{B}(X, Y; Z)$ изометрички изоморфан са $\mathcal{B}(X, \mathcal{B}(Y, Z))$ (видети [53, Теорема 6.3]). Издвојимо следеће значајно тврђење.

Тврђење 4.1. [53, Теорема 6.2] *Нека је барем један од нормираних простора X и Y Банахов. Ако је пресликавање $\Psi : X \times Y \rightarrow Z$ непрекидно у односу на сваку променљиву појединачно, њиј. ако су оператори*

$$X \ni x \mapsto \Psi(x, y) \in Z \text{ и } Y \ni y \mapsto \Psi(x, y) \in Z$$

ограничени за свако $y \in Y$ и свако $x \in X$ редом, њада $\Psi \in \mathcal{B}(X, Y; Z)$.

Доказ. Нека је, рецимо, простор X Банахов и претпоставимо супротно. Тада постоји низ уређених парова $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ у $X \times Y$ тако да је $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и $\|\Psi(x_n, y_n)\| \geq n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$\|\Psi_{y_n}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Psi_{y_n}(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Psi(x, y_n)\| \geq \|\Psi(x_n, y_n)\| \geq n$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Одавде следи $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Psi_{y_n}\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Psi(x_n, y_n)\| = +\infty$. Оператори Ψ_{y_n} пресликавају Банахов простор X у нормиран простор Z . Како је $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Psi_{y_n}\| = +\infty$ и како је X комплетан простор имамо да постоји вектор $x_0 \in X$ где се ова неограниченост и види, тј. постоји вектор $x_0 \in X$ за који важи $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Psi_{y_n}(x_0)\| = +\infty$ (видети [5, Последица 7.7]). Са друге стране, имамо да је

$$+\infty > \|\Psi_{x_0}\| = \sup_{\|y\|=1} \|\Psi_{x_0}(y)\| \geq \|\Psi(x_0, y_n)\| = \|\Psi_{y_n}(x_0)\|$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Следи $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Psi_{y_n}(x_0)\| \leq \|\Psi_{x_0}\| < +\infty$, што је контрадикција. $\square$

4.1 Банахов простор $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ оператор-вредносних мера

Следећа дефиниција се јавља у [1]. Такође, погледати и [57].

Дефиниција 4.2. *Функција $\nu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ је оператор-вредносна мера ако важи*

$$\langle \nu(E)x, y^* \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \nu(E_n)x, y^* \rangle,$$

кад год је $x \in X, y^* \in Y^*, E = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n, E_n \in \mathfrak{M}, E_n \cap E_m = \emptyset, n \neq m$.

оператор-вредносне мере скраћено означавамо са ОВМ.

Подсетимо, на исти начин као и у Поглављу 2, закључујемо да је за свако $x \in X$ пресликавање $\nu_x : \mathfrak{M} \rightarrow Y$ задато изразом $\nu_x(E) = \nu(E)x$ за свако $E \in \mathfrak{M}$ једна слабо пребројиво адитивна мера на σ -алгебри $\mathfrak{M}$. Поновном применом теореме Орлич-Петиса (видети [25, Последица 4, Поглавље 1]) закључујемо да је функција ν_x пребројиво адитивна у норми простора Y , т.ј. функција ν_x је једна Y -вредносна мера на $\mathfrak{M}$. Зато, свака ОВМ је јако пребројиво адитивна мера и векторски простор таквих ОВМ ћемо означавати¹ са $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$. Ако је $v \in \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$, тада за фиксирани векторе $x \in X$ и $y^* \in Y^*$ задајемо комплексну меру $v_{x,y^*} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}$ изразом $v_{x,y^*}(E) = \langle v(E)x, y^* \rangle$ за свако $E \in \mathfrak{M}$. На овај начин долазимо до билинеарног пресликавања $\Psi^v : X \times Y^* \rightarrow ca(\Omega, \mathfrak{M})$ одређеног изразом

$$(4.1) \quad \Psi^v(x, y^*) = v_{x,y^*} \text{ за свако } (x, y^*) \in X \times Y^*.$$

Наредно тврђење се може наћи у [57].

Тврђење 4.3. Билинеарно пресликавање $\Psi^v : X \times Y^* \rightarrow ca(\Omega, \mathfrak{M})$ дефинисано у (4.1) је ограничено за сваки фиксиран елемент $v \in \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$.

Доказ. Дефинишимо пресликавања $P_x : Y^* \rightarrow ca(\Omega, \mathfrak{M})$ и $Q_{y^*} : X \rightarrow ca(\Omega, \mathfrak{M})$ са $P_x(y^*) = v_{x,y^*}$ за свако $y^* \in Y^*$ и $Q_{y^*}(x) = v_{x,y^*}$ за свако $x \in X$. Овако дефинисана пресликавања P_x и Q_{y^*} су линеарна. Докажимо да пресликавање P_x има затворен график за свако $x \in X$. Нека је $(y_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ низ у Y^* , $y^* \in Y^*$ као и $\lambda \in ca(\Omega, \mathfrak{M})$ за које је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n^* - y^*\| = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_x(y_n^*) - \lambda\| = 0.$$

За фиксиран скуп $E \in \mathfrak{M}$ имамо следеће граничне вредности:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_x(y_n^*)(E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v(E)x, y_n^* \rangle = \langle v(E)x, y^* \rangle, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |P_x(y_n^*)(E) - \lambda(E)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_x(y_n^*) - \lambda\| = 0. \end{aligned}$$

Зато важи $\langle v(E)x, y^* \rangle = \lambda(E)$ а одатле закључујемо да је $v_{x,y^*} = \lambda$ т.ј. $P_x(y^*) = \lambda$. На основу Теореме о затвореном графику следи $P_x \in \mathcal{B}(Y^*, ca(Y, \mathfrak{M}))$. Слично добијамо $Q_{y^*} \in \mathcal{B}(X, ca(Y, \mathfrak{M}))$. Зато је билинеарно пресликавање $\Psi^v : X \times Y^* \rightarrow ca(Y, \mathfrak{M})$ непрекидно по свакој променљивој понаособ. На основу Теореме 4.1 закључујемо да је пресликавање Ψ^v ограничено т.ј. важи $\sup\{\|v_{x,y^*}\| : \|x\| = 1, \|y^*\| = 1\} < +\infty$. $\square$

Тврђење 4.3 даје линеарно пресликавање

$$(4.2) \quad \Psi = \Psi_{X,Y} : \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y)) \rightarrow \mathcal{B}(X, Y^*; ca(\Omega, \mathfrak{M}))$$

које пресликава v у Ψ^v т.ј. $\Psi(v) = \Psi^v$. У наредном тврђењу ћемо формулисати и доказати основна својства пресликавања Ψ , која ће бити значајна у проблемима нормирања векторског простора $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$.

Тврђење 4.4. Линеарно пресликавање

$$\Psi : \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y)) \rightarrow \mathcal{B}(X, Y^*; ca(\Omega, \mathfrak{M}))$$

је инјективно. Ако је Y рефлексиван простор тада је пресликавање Ψ бијекција.

¹Индекс *cas* у ознаци уведеног простора мера потиче од *strongly countable additive*.

Доказ. Докажимо да је пресликавање Ψ инјективно. Уколико важи једнакост $\Psi(v) = 0 \in \mathcal{B}(X, Y^*; ca(\Omega, \mathfrak{M}))$ тј. $\Psi^v = 0$ за неко $v \in \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ тада из (4.1) следи $v_{x, y^*} = 0 \in ca(\Omega, \mathfrak{M})$ за свако $x \in X$ и $y^* \in Y^*$. Одавде следи да за произвољно $E \in \mathfrak{M}$ важи $\langle v(E)x, y^* \rangle = 0$. Како је $y^* \in Y^*$ произвољно, најпре закључујемо $v(E)x = 0$ па како је и $x \in X$ било произвољно добијамо $v(E) = 0 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Из произвољности скупа $E \in \mathfrak{M}$ следи $v = 0 \in \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ тј. Ψ је инјективно пресликавање.

Нека је Y рефлексиван простор и одаберимо $V \in \mathcal{B}(X, Y^*; ca(\Omega, \mathfrak{M}))$ произвољно. За фиксиран скуп $E \in \mathfrak{M}$ дефинишимо пресликавање $\delta_E : ca(\Omega, \mathfrak{M}) \rightarrow \mathbb{C}$ изразом $\delta_E(\nu) = \nu(E)$ за свако $\nu \in ca(\Omega, \mathfrak{M})$. Тада важи $\delta_E \in \mathcal{B}(ca(\Omega, \mathfrak{M}), \mathbb{C})$ и $\|\delta_E\| \leq 1$. Због тога је $\delta_E \circ V \in \mathcal{B}(X, Y^*; \mathbb{C})$. Стога, постоји јединствен елемент $v'(E) \in \mathcal{B}(X, Y^{**})$ такав да је $\langle y^*, v'(E)x \rangle = \delta_E(V(x, y^*))$ за свако $(x, y^*) \in X \times Y^*$. На основу рефлексивности простора Y долазимо до елемента $v(E) \in \mathcal{B}(X, Y)$ таквог да важи једнакост $\langle v(E)x, y^* \rangle = \delta_E(V(x, y^*))$ за свако $(x, y^*) \in X \times Y^*$. Приметимо да смо на овај начин конструисали пресликавање $v : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ такво да за сваки скуп $E \in \mathfrak{M}$ облика $E = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, где је $E_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$, $E_n \cap E_m = \emptyset$, $n \neq m$, важи

$$\begin{aligned} \langle v(E)x, y^* \rangle &= \delta_{\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n}(V(x, y^*)) = V(x, y^*) \left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} V(x, y^*)(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{E_n}(V(x, y^*)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle v(E_n)x, y^* \rangle \end{aligned}$$

за свако $x \in X$ и $y^* \in Y^*$. Следи да је пресликавање v заправо једна ОВМ. Сада ћемо доказати да је $\Psi(v) = V$. Имамо следећи низ еквиваленција:

$$\begin{aligned} \Psi(v) = V &\iff \Psi(v)(x, y^*) = V(x, y^*) \text{ за свако } (x, y^*) \in X \times Y^* \\ &\iff \Psi^v(x, y^*) = V(x, y^*) \text{ за свако } (x, y^*) \in X \times Y^* \\ &\iff v_{x, y^*} = V(x, y^*) \text{ за свако } (x, y^*) \in X \times Y^* \\ &\iff v_{x, y^*}(E) = V(x, y^*)(E) \text{ за свако } (x, y^*) \in X \times Y^*, E \in \mathfrak{M} \\ &\iff \langle v(E)x, y^* \rangle = \delta_E(V(x, y^*)) \text{ за свако } (x, y^*) \in X \times Y^*, E \in \mathfrak{M}, \end{aligned}$$

што смо установили да важи. Овиме је тврђење доказано. $\square$

У Тврђењу 4.3 смо доказали да је $\sup\{\|v_{x, y^*}\| : \|x\| = 1, \|y^*\| = 1\} < +\infty$ за сваки елемент $v \in \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$. Инјективност пресликавања Ψ из првог дела Тврђења 4.4 омогућава² да дефинишемо *билинеарну* норму $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ на векторском простору $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ на следећи начин:

$$(4.3) \quad \|v\|_{\mathcal{B}} = \|\Psi^v\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \|v_{x, y^*}\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} |v_{x, y^*}|(\Omega).$$

Такође, нека је за свако $v \in \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ дефинисано

$$(4.4) \quad \|v\| = \sup_{E \in \mathfrak{M}} \|v(E)\|.$$

²Уколико је X векторски простор и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормиран простор над истим пољем скалара као X и ако је $T : X \rightarrow Y$ инјективно и линеарно пресликавање тада је изразом $\|x\|_X := \|Tx\|_Y$ за свако $x \in X$ коректно задата норма на векторском простору X . Уколико је још и $\mathcal{R}(T) = Y$ тј. уколико је T линеарна изометрија између X и Y тада из комплетности простора $(Y, \|\cdot\|_Y)$ следи комплетност простора $(X, \|\cdot\|_X)$.

Тврђење 4.5. Израз (4.4) задаје норму на векторском простору $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ еквивалентну са $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Прецизније, за свако $v \in \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ важе неједнакости

$$(4.5) \quad \frac{1}{\pi} \|v\|_{\mathcal{B}} \leq \|v\| \leq \|v\|_{\mathcal{B}}.$$

Доказ. Нека је $v \in \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ и $E \in \mathfrak{M}$. Коначност супремума у изразу (4.4) и друга неједнакост у (4.5) следи из

$$\|v(E)\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} |\langle v(E)x, y^* \rangle| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} |v_{x,y^*}(E)| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \|v_{x,y^*}\| = \|v\|_{\mathcal{B}}.$$

Да докажемо и другу неједнакост у (4.5) фиксирајмо јединичне векторе $x \in X$ и $y^* \in Y^*$. Постоји скуп $E = E_{x,y^*}$ у $\mathfrak{M}$ такав да важи $|\langle v(E)x, y^* \rangle| \geq \frac{1}{\pi} |v_{x,y^*}|(\Omega)$, што следи на основу Леме 1.1, јер је v_{x,y^*} једна комплексна мера на $\mathfrak{M}$. Одавде добијамо $\|v\| \geq \|v(E)\| \geq |\langle v(E)x, y^* \rangle| \geq \frac{1}{\pi} |v_{x,y^*}|(\Omega)$. Узимајући супремум по свим јединичним векторима $x \in X$ и $y^* \in Y^*$ у неједнакости $\|v\| \geq \frac{1}{\pi} |v_{x,y^*}|(\Omega)$ добијамо $\|v\| \geq \frac{1}{\pi} \|v\|_{\mathcal{B}}$. $\square$

Нека је за фиксирани скуп $E \in \mathfrak{M}$ линеарно пресликавање

$$\Delta_E : \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y)) \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$$

задато изразом

$$(4.6) \quad \Delta_E(\nu) = \nu(E) \text{ за свако } \nu \in \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y)).$$

Овако дефинисано пресликавање је непрекидно и важи $\|\Delta_E\| \leq 1$.

На основу другог дела Тврђења 4.4 имамо да је векторски простор $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ са билинеарном нормом $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ дефинисаном у (4.3) Банахов уколико је Y рефлексиван простор, јер у том случају постоји линеарна бијекција између $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ и $\mathcal{B}(X, Y^*; sa(\Omega, \mathfrak{M}))$ која је још и изометрија а знамо да последњи простор јесте Банахов (простор Y^* је Банахов без обзира да ли је нормиран простор Y комплетан). Наредна теорема говори да и у општем случају имамо исти закључак.

Теорема 4.6. Векторски простор $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ са нормом $\|\cdot\|$ из (4.4) је Банахов.

Доказ. Нека је $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ у $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ такав да је $\sum_{n=1}^{+\infty} \|v^n\| = M < +\infty$. Тада је ред $v(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} v^n(E)$ конвергентан у норми простора $\mathcal{B}(X, Y)$ за свако фиксирано $E \in \mathfrak{M}$. На основу (4.5) имамо да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} v_{x,y^*}^n$ конвергира апсолутно у Банаховом простору $sa(\Omega, \mathfrak{M})$, за свако $x \in X$ и $y^* \in Y^*$. Означимо суму овог реда са $\lambda_{x,y^*} \in sa(\Omega, \mathfrak{M})$. Нека је $E = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k$, $E_k \in \mathfrak{M}$ за свако $k \in \mathbb{N}$ и $E_k \cap E_l = \emptyset$ за свако $k \neq l$. Тада, за фиксирани векторе $x \in X$ и $y^* \in Y^*$ имамо

$$\begin{aligned} \langle v(E)x, y^* \rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} \langle v^n(E)x, y^* \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{x,y^*}^n(E) \\ &= \lambda_{x,y^*}(E) = \lambda_{x,y^*}\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{x,y^*}(E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle v(E_k)x, y^* \rangle, \end{aligned}$$

па закључујемо да је функција $v : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ ОВМ. За свако $N \in \mathbb{N}$ важи

$$\left\| \sum_{k=1}^N v^k - v \right\| = \sup_{A \in \mathfrak{M}} \left\| \sum_{k=N+1}^{+\infty} v^k(A) \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sup_{A \in \mathfrak{M}} \|v^k(A)\| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \|v^k\|.$$

Одавде следи да важи једнакост $\sum_{n=1}^{+\infty} v^n = v$, при чему последњи ред конвергира у норми (4.4) векторског простора $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$. Овиме је тврђење доказано. $\square$

За ОВМ $v : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ кажемо да је *ајсолутилно непрекидна* у односу на μ (или μ -АС) уколико из $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) = 0$ следи $v(E) = 0 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Векторски простор таквих ОВМ означаваћемо са $\mathcal{M}_{cas}^\mu(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$.

Тврђење 4.7. Векторски простор $\mathcal{M}_{cas}^\mu(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ са нормом $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ дефинисаном у (4.3) је Банахов простор.

Доказ. Доказаћемо да је векторски простор $\mathcal{M}_{cas}^\mu(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$ затворен потпростор Банаховог простора $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$, у односу на норму $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Да бисмо ово доказали користићемо горе дефинисано пресликавање $\Delta_E : \mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y)) \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$. Наиме, користећи (4.6) имамо да важи једнакост

$$\mathcal{M}_{cas}^\mu(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y)) = \bigcap \{ \text{Ker}(\Delta_E) : E \in \mathfrak{M}, \mu(E) = 0 \}.$$

Како је за свако $E \in \mathfrak{M}$ пресликавање Δ_E непрекидно имамо да је $\text{Ker}(\Delta_E)$ затворен скуп у $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y))$. Тврђење следи јер је познато да је пресек произвољне фамилије затворених скупова такође затворен скуп. $\square$

4.2 Нормиран простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$

У овој секцији радимо са нормираним простором $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ који се састоји од *тачка по тачка* тј. *вектор по вектор* Данфорд интеграбилних оператор-вредносних функција (фамилија). Ознака pD потиче од термина *pointwise Dunford*. Поменути нормиран простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ као и разматрања која су везана за његова својства представљаће продубљење теорије коју смо изложили у Поглављу 2.

Тачкасти Данфорд интеграл оператор-вредносне функције

Дефиниција 4.8. За функцију $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ иј. фамилију оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ у $\mathcal{B}(X, Y)$ кажемо да је **слабо мерљива** (**слабо μ -интеграбилна** или **тачкастио Данфорд интеграбилна**) ако је скаларна функција $\varphi_{x,y^*}^{\mathcal{A}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана изразом

$$(4.7) \quad \varphi_{x,y^*}^{\mathcal{A}}(t) = \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \text{ за свако } t \in \Omega$$

$\mathfrak{M}$ -мерљива (μ -интеграбилна) за свако $x \in X$ и свако $y^* \in Y^*$. Две такве слабо мерљиве фамилије $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ кажемо да су **слабо μ -еквивалентне** ако за свако $x \in X$ и свако $y^* \in Y^*$ важи $\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle = \langle \mathcal{B}_t x, y^* \rangle$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$.

Напоменимо да је фамилија $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ тачка по тачка Данфорд интеграбилна (слабо мерљива) ако и само ако је функција $\varphi_x^{\mathcal{A}} : \Omega \rightarrow Y$ дата изразом $\varphi_x^{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A}_t x$ за свако $t \in \Omega$ Данфорд интеграбилна (слабо мерљива) за свако фиксирано $x \in X$.

Наредно тврђење нам омогућава да дефинишемо интеграл функције које узима вредности у Банаховом простору $\mathcal{B}(X, Y)$.

Тврђење 4.9. Нека је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ слабо μ -интеграбилна фамилија у $\mathfrak{B}(X, Y)$ и нека је пресликавање $A : X \rightarrow Y^{**}$ дефинисано изразом

$$(4.8) \quad A(x) = \int_{\Omega}^D \mathcal{A}_t(x) d\mu(t) \text{ за свако } x \in X.$$

Тада је $A : X \rightarrow Y^{**}$ линеаран и ограничен оператор и важи процена

$$(4.9) \quad \|A\| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) < +\infty.$$

Доказ. Дефинишимо билинеарно пресликавање $\Phi^{\mathcal{A}} : X \times Y^* \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$ изразом

$$(4.10) \quad \Phi^{\mathcal{A}}(x, y^*) = \varphi_{x, y^*}^{\mathcal{A}} \text{ за свако } (x, y^*) \in X \times Y^*.$$

За фиксиран вектор $x \in X$ функција $\Omega \ni t \mapsto \mathcal{A}_t x \in Y$ је Данфорд μ -интеграбилна на Ω . Дефинишимо пресликавања $F_{y^*} : X \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$ и $G_x : Y^* \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$ изразима $F_{y^*}(x)(t) = \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle$ и $G_x(y^*)(t) = \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle$ за свако $x \in X$, $y^* \in Y^*$ и за свако $t \in \Omega$.

Најпре, доказаћемо да је $F_{y^*} \in \mathfrak{B}(X, L^1(\Omega, \mu))$ за сваки фиксиран вектор $y^* \in Y^*$, применом Теореме о затвореном графику. Зато, нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ елемената простора X који конвергира ка $x \in X$ и нека је елемент $h \in L^1(\Omega, \mu)$ такав да важи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_{y^*}(x_n) - h\|_{L^1(\mu)} = 0$. Тада постоји подниз $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ такав да је $h(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_t x_{n_k}, y^* \rangle$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Како је $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x\| = 0$ и $\mathcal{A}_t \in \mathfrak{B}(X, Y)$ добијамо $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_t x_{n_k} - \mathcal{A}_t x\| = 0$. Одавде имамо $h(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_t x_{n_k}, y^* \rangle = \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle = F_{y^*}(x)(t)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ тј. $F_{y^*}(x) = h$ у $L^1(\Omega, \mu)$. На основу Теореме о затвореном графику добијамо $F_{y^*} \in \mathfrak{B}(X, L^1(\Omega, \mu))$.

Аналогно се доказује да важи $G_x \in \mathfrak{B}(Y^*, L^1(\Omega, \mu))$ за свако фиксирано $x \in X$. Зато је билинеарно пресликавање $\Phi^{\mathcal{A}} : X \times Y^* \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$ непрекидно по свакој променљивој понаособ. Стога, на основу Тврђења 4.1 имамо да $\Phi^{\mathcal{A}}$ припада Банаховом простору $\mathfrak{B}(X, Y^*; L^1(\Omega, \mu))$. Одваде следи да је

$$(4.11) \quad \|\Phi^{\mathcal{A}}\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \|\Phi^{\mathcal{A}}(x, y^*)\|_{L^1(\mu)} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) < \infty.$$

Сада ћемо доказати да је оператор A елемент простора $\mathfrak{B}(X, Y^{**})$ и да важе неједнакости (4.9). На основу (1.20) и (4.11) имамо

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y^*\|=1} |\langle y^*, Ax \rangle| = \\ &= \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \left| \int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle d\mu(t) \right| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) = \|\Phi^{\mathcal{A}}\| < +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

Горе наведена теорема представља уопштење Теореме 2.1 јер се не ограничавамо само на фамилије оператора који делују на Хилбертовом простору. Приметимо да у горњем тврђењу сепарабилност простора X и Y не игра улогу. Такође, Тврђење 4.9 потврђује постојећу Гелфандову дефиницију у случају сепарабилних Хилбертових простора (видети и једнакости (1) и (2) у [42, Секција 2]). У суштини, Гелфанд је увео

слаби* интеграл функције $f : [a, b] \rightarrow X^*$ (видети [25, 29]). Како је дуални простор од $X = \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ једнак $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ онда Гелфандова дефиниција омогућава интеграцију $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција. Са тим у вези, погледати и Напомену 4.17.

На даље ћемо вршити разматрања у општијој ситуацији.

Дефиниција 4.10. *Претпоставимо да је фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathfrak{B}(X, Y)$ слабо μ -интеграбилна. Оператор $A \in \mathfrak{B}(X, Y^{**})$ који је дефинисан изразом (4.8) се назива **слаби интеграл** или **шачкасти Данфордов интеграл** функције $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(X, Y)$ и означаваћемо га са $\int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t)$. Одговарајући векторски простор таквих фамилија ћемо означавати са $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$, где две фамилије овог простора идентификујемо уколико су слабо μ -еквивалентне.*

Како је рестрикција интеграбилне функције $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ на мерљив подскуп E у Ω интеграбилна и на E имамо следеће тврђење.

Тврђење 4.11. *За свако $E \in \mathfrak{M}$ имамо природно рестрикционо пресликавање:*

$$R_E : L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)) \rightarrow L_{pD}^1(E, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)).$$

Другачије речено, за сваку фамилију оператора $\mathcal{A}$ у $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и за сваки скуп $E \in \mathfrak{M}$, имамо да постоји оператор $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ из $\mathfrak{B}(X, Y^{**})$, чија је дефинициона једнакост дата са

$$(4.12) \quad \left\langle y^*, \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\rangle = \int_E \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle d\mu(t) \text{ за свако } (x, y^*) \in X \times Y^*.$$

У случају да оператор $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ пресликава простор X у Y , што је увек тачно уколико је Y рефлексиван, елементи дуалног спаривања на левој страни једнакости (4.12) могу бити писани у обрнутом редоследу. Да бисмо били мало прецизнији, уколико $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ пресликава X у Y тада $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x \in \mathcal{R}(J_Y)$ за свако $x \in X$, при чему је $J_Y : Y \rightarrow Y^{**}$ канонско утапање. Нека је оператор $R : Y \rightarrow \mathcal{R}(J_Y)$ дефинисан са $Ry = J_Y(y)$ за свако $y \in Y$. Одавде следи да за свако $x \in X$ постоји јединствено $y \in Y$ за које је $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x = J_Y(y)$ тј. $y = R^{-1}(\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x)$ па оператору $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \in \mathfrak{B}(X, Y^{**})$ одговара оператор $R^{-1} \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \in \mathfrak{B}(X, Y)$. На основу изведене дискусије и из дефиниционе једнакости (4.12) добијамо да оператор $R^{-1} \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) : X \rightarrow Y$ задовољава

$$\left\langle R^{-1} \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x, y^* \right\rangle = y^*(y) = \langle y^*, J_Y(y) \rangle = \left\langle y^*, \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\rangle = \int_E \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle d\mu(t)$$

за свако $x \in X$ и $y^* \in Y^*$, што смо и желели да покажемо.

Норма оператора $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \in \mathfrak{B}(X, Y^{**})$ може бити процењена нормом одговарајућег билинеарног пресликавања. Наиме, за свако $\mathcal{A} \in L^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и за сваки скуп $E \in \mathfrak{M}$ имамо да важе неједнакости

$$(4.13) \quad \left\| \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_E |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) \leq \|\mathcal{A}\|_{pD} < +\infty.$$

На основу неједнакости (4.13) закључујемо да је за сваки фиксиран скуп $E \in \mathfrak{M}$ линеарно пресликавање $\text{Int} : L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)) \rightarrow \mathfrak{B}(X, Y^{**})$ задато изразом $\text{Int}(\mathcal{A}) = \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ за свако $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ непрекидно.

У наставку наводимо нека једноставна својства простора $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$. Напоменимо најпре да простор $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ садржи Банахов простор $L_B^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ Бохнер интеграбилних $\mathfrak{B}(X, Y)$ -вредносних функција. Такође, треба истаћи да је векторски простор $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ типично бесконачне димензије. Наиме, ово је случај кад год је Банахов простор $\mathfrak{B}(X, Y)$ бесконачне димензије³. За свако $E \in \mathfrak{M}$ пресликавање $\int_E : L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)) \rightarrow \mathfrak{B}(X, Y^{**})$ је линеарно, док на основу неједнакости (4.13) имамо да је пресликавање $\int_E$ непрекидно и да важи процена $\|\int_E\| \leq 1$. Такође, важи очекивана једнакост

$$(4.14) \quad \int_{E \cup F} \mathcal{A}_t d\mu(t) = \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) + \int_F \mathcal{A}_t d\mu(t)$$

за свако $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и све $E, F \in \mathfrak{M}$ за које је $E \cap F = \emptyset$. Ово се лако може видети на основу дефиниционе једнакости (4.12). Јачи закључак је дат у Тврђењу 4.18. Нека је $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$. Ако за $x \in X$ имамо једнакост $\mathcal{A}_t x = 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$, тада важи $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x = 0 \in Y^{**}$ за сваки фиксиран скуп $E \in \mathfrak{M}$. Заиста, имамо да је $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x = \int_E \mathcal{A}_t x d\mu(t) = 0 \in Y^{**}$ за свако $E \in \mathfrak{M}$.

Уколико је дата фамилија оператора $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ можемо посматрати фамилије $(B\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$, $(\mathcal{A}_t C)_{t \in \Omega}$, при чему су оператори B и C такви да написане композиције $B\mathcal{A}_t$ и $\mathcal{A}_t C$ имају смисла. У наредној теорему се бавимо питањем мерљивости и интеграбилности овако формираних фамилија оператора од дате фамилије $\mathcal{A}$.

Тврђење 4.12. Нека је $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathfrak{B}(X, Y)$ слабо мерљива фамилија и нека су W и Z Банахови простори. Нека је и $B \in \mathfrak{B}(Y, Z)$ и $C \in \mathfrak{B}(W, X)$.

(а) Фамилије $(B\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ и $(\mathcal{A}_t C)_{t \in \Omega}$ су такође слабо мерљиве.

(б) Ако је $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ тада $(\mathcal{A}_t C)_{t \in \Omega} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(W, Y))$ и важи

$$\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)C = \int_E \mathcal{A}_t C d\mu(t) \text{ за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

(в) Ако је $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ тада $(B\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Z))$ и важи

$$B^{**} \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) = \int_E B\mathcal{A}_t d\mu(t) \text{ за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

Доказ. Део (а) следи на основу једнакости

$$\langle B\mathcal{A}_t x, z^* \rangle = \langle \mathcal{A}_t x, B^* z^* \rangle \text{ и } \langle \mathcal{A}_t C w, y^* \rangle = \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle$$

где је $x = Cw$. Део (б) директно следи јер за свако $w \in W$ важи

$$\left(\int_E \mathcal{A}_t C d\mu(t) \right) (w) = \int_E (\mathcal{A}_t C) w d\mu(t) = \int_E \mathcal{A}_t (Cw) d\mu(t) = \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) C(w).$$

Доказаћемо (в) тако што ћемо проверити дефинициону једнакост (4.12):

$$\begin{aligned} \left\langle z^*, B^{**} \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\rangle &= \left\langle B^* z^*, \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\rangle \\ &= \int_E \langle \mathcal{A}_t x, B^* z^* \rangle d\mu(t) = \int_E \langle B\mathcal{A}_t x, z^* \rangle d\mu(t) = \left\langle z^*, \int_E B\mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\rangle, \end{aligned}$$

за свако $x \in X$, $z^* \in Z^*$ и $E \in \mathfrak{M}$. □

³Напоменимо да важи $\dim \mathfrak{B}(X, Y) = +\infty$ ако и само ако је $\dim X = +\infty$ или $\dim Y = +\infty$.

Нека је дата фамилија оператора $\mathcal{A}$ из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$. У наредном тврђењу проучавамо конјуговани оператор $(\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t))^*$. Формално посматрано, конјуговани оператор $(\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t))^*$ је елемент простора $\mathcal{B}(Y^{***}, X^*)$ јер је оператор $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ елемент простора $\mathcal{B}(X, Y^{**})$. Уколико претпоставимо да је Y рефлексиван простор, можемо сматрати да је оператор $(\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t))^*$ елемент простора $\mathcal{B}(Y^*, X^*)$. Такође, (ако постоји) оператор $\int_E \mathcal{A}_t^* d\mu(t)$ је елемент простора $\mathcal{B}(Y^*, X^{***})$. Уколико претпоставимо да је и X рефлексиван простор тада можемо сматрати да је оператор $\int_E \mathcal{A}_t^* d\mu(t)$ елемент простора $\mathcal{B}(Y^*, X^*)$. У овом једноставном случају долазимо до наредног тврђења.

Тврђење 4.13. *Нека су X и Y рефлексивни простори и нека је фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$ слабо мерљива. Тада је фамилија оператора $(\mathcal{A}_t^*)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(Y^*, X^*)$ слабо мерљива. Такође, ако је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ тада фамилија $(\mathcal{A}_t^*)_{t \in \Omega}$ припада простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(Y^*, X^*))$ и важи једнакост*

$$(4.15) \quad \left(\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right)^* = \int_E \mathcal{A}_t^* d\mu(t) \text{ за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

Доказ. За свако $t \in \Omega$ важи $\mathcal{A}_t : X \rightarrow Y$ одакле је $\mathcal{A}_t^* : Y^* \rightarrow X^*$ а самим тим и $\mathcal{A}_t^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**}$. Нека је $y^* \in Y^*$ и $x^{**} \in X^{**}$ произвољно. На основу рефлексивности простора имамо да постоји јединствен елемент $x \in X$ за који је $J_X(x) = x^{**}$. На основу дефиниције конјугованог оператора имамо да за свако $t \in \Omega$ важи⁴:

$$\langle \mathcal{A}_t^* y^*, x^{**} \rangle = \langle \mathcal{A}_t^* y^*, J_X(x) \rangle = (\mathcal{A}_t^* y^*)(x) = y^*(\mathcal{A}_t x) = \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle.$$

Из горњег рачуна⁵ видимо из слабе мерљивости фамилије оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ следи слаба мерљивост фамилије $(\mathcal{A}_t^*)_{t \in \Omega}$. Имајући у виду коментар дате пре формулације овог тврђења, докажимо да важи (4.15) користећи (4.12) и дефиницију конјугованог оператора. Заиста, довољно је приметити да за свако $x \in X$ и $y^* \in Y^*$ важе једнакости

$$\begin{aligned} \left\langle x, \int_E \mathcal{A}_t^* d\mu(t) y^* \right\rangle &= \int_E \langle x, \mathcal{A}_t^* y^* \rangle d\mu(t) = \\ &= \int_E \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle d\mu(t) = \left\langle \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) x, y^* \right\rangle = \left\langle x, \left(\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right)^* y^* \right\rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Ову секцију завршавамо примерима. Први пример даје функцију која је тачка по тачка тј. вектор по вектор Данфорд интеграбилна и која није јако мерљива као пресликавање из Ω у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Такође, биће илустровано како је могуће израчунати тачкасти Данфорд интеграл уз помоћ дефиниционе релације (4.12).

Пример 4.14. *Нека је $\mathcal{A}_t$ оператор множења⁶ карактеристичном функцијом скупа $(t, 1)$ који делује на Хилбертовом простору $\mathcal{H} = L^2((0, 1), m)$. Тада је*

$$\|\mathcal{A}_t - \mathcal{A}_s\| = \|\chi_{(s, t)}\|_\infty = 1 \text{ за све } 0 < s < t < 1.$$

Одавде следи да је слика функције $\mathcal{A} : (0, 1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ несепарабилна, чак и након избацивања неког скупа мере нула из домена. На основу Пејсисове теореме закључујемо да фамилија $\mathcal{A}$ не може бити јако мерљива. Докажимо да важи $\int_{(0, 1)} \mathcal{A}_t dm(t) = M_f$,

⁴Овде је $x^{**} = J_X(x)$ за свако $x \in X$.

⁵Приметимо да је у горњем рачуну употребљена само рефлексивност простора X .

⁶За основна својства оператора множења погледати нпр. [5, Пример 12.2].

где је $M_f : L^2((0, 1), m) \rightarrow L^2((0, 1), m)$ оператор множења са $f(s) = s$ за свако $s \in (0, 1)$. Применом Тонелијеве теореме имамо да за свако $g \in L^2((0, 1), m)$ важи

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{(0,1)} \mathcal{A}_t dm(t) g, g \right\rangle &= \int_{(0,1)} \langle \mathcal{A}_t g, g \rangle dm(t) = \int_{(0,1)} \int_{(t,1)} |g(s)|^2 dm(s) dm(t) \\ &= \int_{(0,1)} \int_{(0,s)} |g(s)|^2 dm(t) dm(s) = \int_{(0,1)} s |g(s)|^2 dm(s) = \langle M_f g, g \rangle. \end{aligned}$$

Одавде следи $\mathcal{A} \in L^1_{pD}((0, 1), m, \mathcal{H})$ и $\int_{(0,1)} \mathcal{A}_t dm(t) = M_f$. $\triangle$

Пре него што наведемо још један пример, подсетимо да је простор $\ell^2([0, 1])$ једнак (по дефиницији) Хилбертовом простору $L^2([0, 1], \mathcal{P}([0, 1]), \mu)$, при чему је μ бројачка мера на $[0, 1]$. Важи $\|x\|_2^2 = \sum_{t \in [0,1]} |x(t)|^2$ и $\langle x, y \rangle = \sum_{t \in [0,1]} x(t)y(t)$ за $x, y \in \ell^2([0, 1])$. Више о сумањима по непребројивом скупу индекса као и о сумањим фамилијама вектора погледати у [67]. Хилбертов простор $\ell^2([0, 1])$ је детаљно описан у [2, Пример 4.40] и састоји се од функција $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ код којих важи $x(t) \neq 0$ за највише пребројиво много вредности $t \in [0, 1]$. Напоменимо да овај простор није сепарабилан је важи $\|\chi_{\{t\}} - \chi_{\{s\}}\|_2 = \sqrt{2}$ за свако $t, s \in [0, 1]$, $t \neq s$. Такође, у вези са овим примером погледати и [15, Пример 5.4.14].

Уколико применимо разматрани облик интеграције на фамилије пројектора на Хилбертовом простору $\ell^2([0, 1])$ добијамо занимљиве закључке.

Пример 4.15. Нека је $\mathcal{A}_t$ пројекција на простор $\mathcal{H}_t$ димензије 1 који је раздвојен вектором $e_t = \chi_{\{t\}}$ у Хилбертовом простору $\mathcal{H} = \ell^2([0, 1])$, где је $0 \leq t \leq 1$. За свако $x \in \mathcal{H}$ имамо $x(t) = 0$ осим за пребројиво много вредности $t \in [0, 1]$. Стога, ако је $y \in \mathcal{H}$ тада важи $\langle \mathcal{A}_t x, y \rangle = 0$ осим за пребројиво много вредности $t \in [0, 1]$. Ово показује да је фамилија $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ слабо m -еквивалентна нула фамилији. Користећи (1.20) имамо да важи једнакост $\int_E \mathcal{A}_t x dm(t) = 0$ за свако $E \in \mathcal{B}_{[0,1]}$. $\triangle$

Последњи пример даје фамилију оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ за коју важи једнакост $\|\mathcal{A}_t\| = 1$ за свако $t \in \Omega$ као и $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) = 0$ за сваки Борелов скуп $E \subseteq [0, 1]$. Несепарабилност Хилбертовог простора $\ell^2([0, 1])$ је била кључна у горњем примеру. Напоменимо да је Лема 4.22 уско повезана са овим примером.

Норме на векторском простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$

На основу Тврђења 4.9 тј. на основу (4.10) можемо конструисати пресликавање

$$(4.16) \quad \Phi : L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y)) \rightarrow \mathcal{B}(X, Y^*; L^1(\Omega, \mu))$$

које фамилији оператора $\mathcal{A}$ из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ додељује елемент $\Phi^{\mathcal{A}}$ у Банаховом простору $\mathcal{B}(X, Y^*; L^1(\Omega, \mu))$. Линеарно пресликавање Φ је инјективно. Заиста, имајући у виду Дефиниције 4.8 и 4.10 закључујемо да важи⁷ импликација

$$\|\Phi^{\mathcal{A}}\| = 0 \implies \mathcal{A} = 0 \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y)).$$

⁷Напоменимо да ова импликација не мора бити тачна уколико се идентификација врши на стандардни начин (тачка по тачка), што се може видети из Примера 4.15. Однос између уведеног начина идентификације и стандардног је дат у виду Леме 4.22.

Користећи инјективност пресликавања Φ можемо дефинисати норму $\|\cdot\|_{pD}$ на векторском простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ изразом

$$(4.17) \quad \|\mathcal{A}\|_{pD} = \|\Phi^{\mathcal{A}}\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) \text{ за свако } \mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)).$$

Норму $\|\mathcal{A}\|_{pD}$ елемента $\mathcal{A}$ из $L_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ можемо рачунати користећи супремум по затвореним куглама у Банаховим просторима X и Y^* тј. важи једнакост

$$(4.18) \quad \|\mathcal{A}\|_{pD} = \sup \left\{ \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) : x \in X, \|x\| \leq 1, y^* \in Y^*, \|y^*\| \leq 1 \right\}.$$

У наставку наводимо један једноставан пример у ком ћемо израчунати $\|\cdot\|_{pD}$ норму фамилије оператора $(f(t)A)_{t \in \Omega}$ и на који ћемо се позивати у рачунима који следе у каснијем тексту ове дисертације.

Пример 4.16. Нека је $f \in L^1(\Omega, \mu)$ и $A \in \mathfrak{B}(X, Y)$. Фамилија $(f(t)A)_{t \in \Omega}$ је елементи простора $L^1_B(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)) \subset L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и важе једнакости

$$(4.19) \quad \int_E f(t)A d\mu(t) = \int_E f(t) d\mu(t)A \text{ за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

Оператор $\int_E f(t) d\mu(t)J_Y A$ упривага простору $\mathfrak{B}(X, Y^{**})$. Овај оператор задовољава дефинициону једнакост (4.12) јер је $\langle y^*, J_Y A x \rangle = J_Y(Ax)(y^*) = y^*(Ax) = \langle Ax, y^* \rangle$ за све $x \in X$, $y^* \in Y^*$ и $E \in \mathfrak{M}$. Такође важи $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) = \int_E f(t) d\mu(t)J_Y A$ за свако $E \in \mathfrak{M}$. Ради једноставности, писаћемо $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) = \int_E f(t) d\mu(t)A$, као што је и наведено у једнакостима (4.19).

Такође, важи једнакост $\|(f(t)A)_{t \in \Omega}\|_B = \|f\|_{L^1(\mu)} \cdot \|A\|$ као и

$$\|(f(t)A)_{t \in \Omega}\|_{pD} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} |\langle Ax, y^* \rangle| \int_{\Omega} |f(t)| d\mu(t) = \|f\|_{L^1(\mu)} \cdot \|A\|. \quad \triangle$$

Следећа напомена повезује горе уведени простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ са нормираним простором $L^1_G(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ који је разматран у Поглављу 2 и који се добија у специјалном случају када је $X = Y = \mathcal{H}$, при чему је $\mathcal{H}$ неки сепарабилан Хилбертов простор.

Напомена 4.17. Нека је $X = Y = \mathcal{H}$, где је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор $\mathcal{H}$. Тада

$$L^1_G(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H})) = L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H})).$$

Сваки елемент $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ генерише пресликавање $v^{\mathcal{A}} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{B}(X, Y^{**})$ задато изразом $v^{\mathcal{A}}(E) = \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ за свако $E \in \mathfrak{M}$. Због тога можемо конструисати линеарно пресликавање T из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ у простор свих $\mathfrak{B}(X, Y^{**})$ -вредносних функција на $\mathfrak{M}$ изразом $T(\mathcal{A}) = v^{\mathcal{A}}$.

Такође, за сваки елемент $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ дефинишимо

$$(4.20) \quad \|\mathcal{A}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{E \in \mathfrak{M}} \left\| \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\|.$$

Тврђење 4.18. За горе дефинисано линеарно пресликавање T важи

$$\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{M}_{cas}^\mu(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y^{**})).$$

Такође, за свако $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ важе једнакости

$$(4.21) \quad \|T(\mathcal{A})\| = \|\mathcal{A}\|_{\mathfrak{M}} \text{ и } \|T(\mathcal{A})\|_{\mathcal{B}} = \|\mathcal{A}\|_{pD}.$$

Доказ. Потребно је само доказати $v^{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_{cas}^\mu(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y^{**}))$ за сваки елемент $\mathcal{A}$ у $L^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$, једнакости (4.21) следе на основу дефиниција одговарајућих норми и на основу дефиниције елемента $v^{\mathcal{A}}$. Заиста, за $E \in \mathfrak{M}$, $E = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, $E_n \in \mathfrak{M}$ имамо

$$\langle y^*, v^{\mathcal{A}}(E)x \rangle = \int_E \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle d\mu(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle d\mu(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle y^*, v^{\mathcal{A}}(E_n)x \rangle$$

за свако $x \in X$ и свако $y^* \in Y^*$. Друга једнакост у последњем рачуну следи из тога што је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \in \mathbb{C}$ елемент простора $L^1(\Omega, \mu)$. Имамо да важи $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) = 0 \in \mathcal{B}(X, Y^{**})$ кад год је $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) = 0$. Одавде закључујемо да је $v^{\mathcal{A}}$ елемент простора $\mathcal{M}_{cas}^\mu(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y^{**}))$. $\square$

Тврђења 4.7 и 4.18 дају следећи резултат о утапању.

Тврђење 4.19. Нормиран простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ се изометрички утапа у Банахов простор $\mathcal{M}_{cas}^\mu(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y^{**}))$ пресликавањем T .

Горе дефинисано пресликавање T је изометрија у односу на парове норми $(\|\cdot\|_{pD}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ и $(\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}, \|\cdot\|)$. На основу Тврђења 4.5, норми $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ су еквивалентне на Банаховом простору $\mathcal{M}_{cas}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}(X, Y^{**}))$, одакле одмах добијамо следеће тврђење.

Теорема 4.20. Израз $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$ даје у (4.20) дефинише норму на векторском простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$. Норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$ је еквивалентна са нормом $\|\cdot\|_{pD}$ дефинисаном у (4.17). Прецизније, за свако $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ важе неједнакости

$$(4.22) \quad \frac{1}{\pi} \|\mathcal{A}\|_{pD} \leq \sup_{E \in \mathfrak{M}} \left\| \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| \leq \|\mathcal{A}\|_{pD}.$$

Тврђења која захтевају сепарабилност простора X или Y

У наредној леми сепарабилност простора Банахових простора X или Y долази до изражаја. Треба напоменути да нека од ових тврђења важе и без претпоставки о комплетности простора X или Y .

Лема 4.21. Нека је даћа фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$ која је слабо мерљива и нека је Y сепарабилан простор.

- (а) Нека је $x \in X$ произвољан вектор. Скаларна функција $f_x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана изразом $f_x(t) = \|\mathcal{A}_t x\|$ за свако $t \in \Omega$ је $\mathfrak{M}$ -мерљива.
- (б) Нека је гогатно и X сепарабилан простор. Скаларна функција $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана изразом $f(t) = \|\mathcal{A}_t\|$ за свако $t \in \Omega$ је $\mathfrak{M}$ -мерљива.

- (в) Нека је C пребројив подскуп у X и нека је скупи $E \in \mathfrak{M}$ такав да важи $\mu(E) > 0$ и за свако $t \in E$ постоји вектор $x \in C$ за који је $\mathcal{A}_t x \neq 0$. Тада постоји $x \in C$ и $\mathfrak{M} \ni E_0 \subset E$ тако да је $\mu(E_0) > 0$ и $\mathcal{A}_t x \in Y \setminus \{0\}$ за свако $t \in E_0$.
- (г) Нека је $x \in X$ и нека је D пребројив и густ скуп у затвореној јединичној лопти простора Y^* у слабо* топологији на Y^* . Претпоставимо да скупи $E \in \mathfrak{M}$ поседује следеће својство: $\mu(E) > 0$ и за свако $t \in E$ такав постоји $y^* \in D$ такав да је $\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \neq 0$. Тада, постоји вектор $y^* \in D$ и скупи $\mathfrak{M} \ni E_0 \subseteq E$ тако да важи $\mu(E_0) > 0$ и $\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \neq 0$ за свако $t \in E_0$.

Доказ. Део (а) следи директно из Петисове теореме о мерљивости. За део (б) изаберимо пребројив и густ скуп B у јединичној лопти простора X и нека је $f(t) = \sup_{x \in B} f_x(t)$ за $t \in \Omega$. Што се тиче дела (в), нека је $E_x = \{t \in E : \mathcal{A}_t x \neq 0\}$ за свако $x \in C$. На основу дела (а) имамо да важи $E_x \in \mathfrak{M}$ за свако $x \in C$. Нека је $E = \bigcup_{x \in C} E_x$. Бар један од скупова E_x има строго позитивну меру јер би у противном имали $\mu(E) = 0$ на основу субадитивности мере и пребројивости скупа C . Да докажемо део (г) овог тврђења, дефинишимо $E_{y^*} = \{t \in E : \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \neq 0\}$ за свако $y^* \in D$. Ови подскупови скупа E су елементи σ -алгебре $\mathfrak{M}$ на основу слабе мерљивости фамилије $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ тј. на основу $\mathfrak{M}$ -мерљивости функције $\Omega \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \in \mathbb{C}$. Доказ се завршава када приметимо да важи једнакост $E = \bigcup_{y^* \in D} E_{y^*}$, што је довољно, јер је D пребројив скуп. $\square$

У наредном тврђењу сепарабилност простора X и Y игра кључну улогу. Видећемо да су у том случају две слабо мерљиве фамилије оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ и $(\mathcal{B}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$ једнаке за μ -скоро свако $t \in \Omega$ ако и само ако су те фамилије слабо μ -еквивалентне у смислу Дефиниције 4.8.

Лема 4.22. Нека су простори X и Y сепарабилни и нека су даће фамилије оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ и $(\mathcal{B}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$. Тада имамо $\mathcal{A}_t = \mathcal{B}_t$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ ако и само ако су $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ и $(\mathcal{B}_t)_{t \in \Omega}$ слабо μ -еквивалентне фамилије оператора.

Доказ. Нека је $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Одаберимо пребројив густ подскуп C у X као и пребројив густ подскуп D у затвореној јединичној лопти Y^* у односу на слабо* топологију на Y^* (видети Напомену 2.19). Тада су функције $\varphi_{x, y^*}^{\mathcal{C}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ из (4.7) заправо нула вектори у простору $L^1(\Omega, \mu)$ за свако $x \in C$ и свако $y^* \in D$. Зато, $\langle \mathcal{C}_t x, y^* \rangle = \varphi_{x, y^*}^{\mathcal{C}}(t) = 0$ за свако t у комплементу неког скупа $N_{x, y^*} \in \mathfrak{M}$ који је μ -мере нула. Тада, имамо да је $\mu(N) = 0$, где је N пребројива унија $\bigcup_{x \in C, y^* \in D} N_{x, y^*}$. За фиксирано $t \in \Omega \setminus N$ и $x \in C$ видимо да је вектор $\mathcal{C}_t x \in Y$ анихилиран са D па је због тога $\mathcal{C}_t x = 0 \in Y$. Како је $\mathcal{C}_t$ непрекидан оператор који је једнак нули на C следи да је $\mathcal{C}_t = 0 \in \mathcal{B}(X, Y)$ за свако $t \in \Omega \setminus N$. Овиме смо доказали једнакост $\mathcal{A}_t = \mathcal{B}_t$ за свако $t \in \Omega \setminus N$. $\square$

Следеће тврђење се бави потпросторима нормираног простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$.

Лема 4.23. Нека је $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ и нека су M и N потпростори у X шј. Y .

- (а) Нека су X и Y сепарабилни. Векторски простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y); M)$ који се састоји од елемената $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ таквих да је $M \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}_t$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ је затворен у нормираном простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$.
- (б) Норма на векторском простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, N))$, уз очигледну идентификацију са простором $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y); N)$ који се састоји од свих $\mathcal{A}$ у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ за које важи $\mathcal{R}(\mathcal{A}_t) \subset N$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$ једнака је норми наслеђеној од простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$.

Доказ. Нека је $C \subset M$ пребројив и густ скуп⁸ у векторском потпростору M и нека је (као у Леме 4.21) D пребројив и густ подскуп у затвореној јединичној лопти простора Y^* у односу на слабу* топологију на Y^* .

- (а) Нека је $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ у $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ и нека $\text{Ker } \mathcal{A}_t$ не садржи M за свако $t \in \Omega_0$, при чему је $\Omega_0 \in \mathfrak{M}$ и $\mu(\Omega_0) > 0$. Јасно је да за свако $t \in \Omega_0$ постоји $x \in C$ такав да је $\mathcal{A}_t x \in Y \setminus \{0\}$. Зато, на основу дела (в) Леме 4.21 постоји $x \in C$ такав да је $\mathcal{A}_t x \in Y \setminus \{0\}$ за свако $t \in \Omega_1 \subseteq \Omega_0$ за које је $\Omega_1 \in \mathfrak{M}$ и $\mu(\Omega_1) > 0$. Приметимо да је тада $x \in X \setminus \{0\}$. За свако $t \in \Omega_1$ постоји функционал $y^* \in D$ такав да је $\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \neq 0$. Стога, на основу дела (г) Леме 4.21 постоји елемент $y^* \in D$ такав да је $\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \neq 0$ за свако $t \in \Omega_2 \subseteq \Omega_1$, где је $\Omega_2 \in \mathfrak{M}$ и $\mu(\Omega_2) > 0$. Сада, за све фамилије $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_t)_{t \in \Omega}$ оператора из потпростора $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y); M)$, имајући у виду инклузију $C \subset M$, закључујемо да важи

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|_{pD} &\geq \int_{\Omega_2} \left| \left\langle (\mathcal{A}_t - \mathcal{B}_t) \left(\frac{x}{\|x\|} \right), \frac{y^*}{\|y^*\|} \right\rangle \right| d\mu(t) \\ &= \frac{1}{\|x\|\|y^*\|} \int_{\Omega_2} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) = \delta > 0. \end{aligned}$$

Одавде следи $\text{dist}(\mathcal{A}, L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y); M)) \geq \delta > 0$. Овиме смо доказали да постоји отворена кугла полупречника $\frac{\delta}{2}$ око произвољно бираног елемента $\mathcal{A}$ из комплемента од $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y); M)$ која не сече $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y); M)$. Одавде следи да је $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y); M)$ затворен потпростор у $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$.

- (б) Означимо са $\|\cdot\|_{pD, N}$ норму на векторском простору $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, N))$. Тада за $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, N))$ и произвољно $n^* \in N^*$, $\|n^*\|_{N^*} = 1$ имамо да постоји $y^* \in Y^*$ такво да важи $\|y^*\|_{Y^*} = 1$ и $y^*(n) = n^*(n)$ за свако $n \in N$. Одавде и из инклузије $\mathcal{R}(\mathcal{A}_t) \subset N$ која важи за μ -скоро свако $t \in \Omega$ следи $\int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, n^* \rangle| d\mu(t) = \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) \leq \|\mathcal{A}\|_{pD}$, па узимањем супремума по свим векторима $x \in X$, $\|x\| = 1$ и $n^* \in N^*$, $\|n^*\|_{N^*} = 1$ добијамо неједнакост $\|\mathcal{A}\|_{pD, N} \leq \|\mathcal{A}\|_{pD}$. Нека је са друге стране $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, $y^* \in Y^*$, $\|y^*\|_{Y^*} \leq 1$ и посматрајмо рестрикцију $y^*|_N$ функционала y^* на потпростор $N \subset Y$. Тада је норма ове рестрикције $y^*|_N$ мања или једнака од 1. Инклузија $\mathcal{R}(\mathcal{A}_t) \subset N$ важи за μ -скоро свако $t \in \Omega$ одакле добијамо $\int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) = \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^*|_N \rangle| d\mu(t) \leq \|\mathcal{A}\|_{pD, N}$. Узимањем супремума по свим векторима $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, $y^* \in Y^*$, $\|y^*\|_{Y^*} \leq 1$ добијамо $\|\mathcal{A}\|_{pD} \leq \|\mathcal{A}\|_{pD, N}$ (приметимо да овде користимо формулу (4.18)). $\square$

Приметимо да у делу (а) горње теореме нисмо користили затвореност потпростора M у Банаховом простору X . Такође, у делу (б) ове теореме смо доказали да је уведени потпростор $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y); N)$ изометрички изоморфан са нормираним простором $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, N))$. Затвореност потпростора N у Y није коришћена.

Теорема о компактности оператора $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \in \mathcal{B}(X, Y^{**})$

Нека је $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ произвољан елемент, при чему су X и Y сепарабилни простори. Тада је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \|\mathcal{A}_t\| \in \mathbb{R}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива на основу дела (б)

⁸Подскуп сепарабилног скупа у сваком метричком простору је сепарабилан скуп.

Леме 4.21. Користећи (4.13) добијамо неједнакост

$$(4.23) \quad \left\| \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| \leq \int_E \|\mathcal{A}_t\| d\mu(t) \text{ за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

Уведимо следећу дефиницију која проширује Дефиницију 2.13.

Дефиниција 4.24. *Фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ задовољава услов $\mathcal{AC}_\mu$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да важи импликација*

$$E \in \mathfrak{M}, \mu(E) < \delta \implies \left\| \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| < \varepsilon.$$

Уколико је $\mu(\Omega) < +\infty$ тада је $\mathcal{AC}_\mu$ услов из горње дефиниције еквивалентан са тим да је пресликавање $[E] \mapsto \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ из комплетног метричког простора $([\mathfrak{M}], d_\mu)$ у Банахов простор $\mathfrak{B}(X, Y^{**})$ непрекидно. Напоменимо да свака Бохнер интегрална фамилија $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ задовољава услов $\mathcal{AC}_\mu$.

Као што смо већ рекли у ранијем тексту, наредна теорема генерализује значајну теорему из [51, Теорема 2.3, (а)] и базирана је на чињеници да је сваки ограничен низ у рефлексивном простору такав да се из њега може издвојити слабо конвергентан подниз.

Теорема 4.25. *Нека је X рефлексиван а Y сејарабилан и нека $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ задовољава $\mathcal{AC}_\mu$ услов. Такође, нека је $\mathcal{A}_t \in \mathfrak{C}_\infty(X, Y)$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. Тада је оператор $\int_F \mathcal{A}_t d\mu(t)$ комутабилан за свако $F \in \mathfrak{M}$ за које је $\mu(F) < +\infty$.*

Доказ. Нека је $F \in \mathfrak{M}$ са својством $\mu(F) < +\infty$. Претпоставимо да за низ вектора $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \in X$. Како је X рефлексиван, довољно је доказати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_F \mathcal{A}_t d\mu(t) x_n \right\| = 0$. Нека је $M := \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. За дато $\varepsilon > 0$ одаберимо $\delta > 0$ из претпоставке теореме. Скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \|\mathcal{A}_t x_n\| \in \mathbb{R}$ је $\mathfrak{M}$ -мерљива за свако $n \in \mathbb{N}$ на основу дела (а) Леме 4.21. Како је $\mathcal{A}_t \in \mathfrak{C}_\infty(X, Y)$ имамо да важи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_t x_n\| = 0$ за μ -скоро свако $t \in \Omega$. На основу Теореме Јегорова можемо наћи скуп $E \in \mathfrak{M}$ такав да је

$$E \subseteq F, \mu(E) < \delta \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in F \setminus E} \|\mathcal{A}_t x_n\| = 0.$$

Користећи (1.21), за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned} \left\| \int_F \mathcal{A}_t d\mu(t) x_n \right\| &= \left\| \int_{F \setminus E}^D \mathcal{A}_t x_n d\mu(t) + \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) x_n \right\| \\ &\leq \int_{F \setminus E} \|\mathcal{A}_t x_n\| d\mu(t) + \left\| \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| \cdot \|x_n\| \\ &\leq \mu(F) \sup_{t \in F \setminus E} \|\mathcal{A}_t x_n\| + \varepsilon \cdot M. \end{aligned}$$

Зато, имамо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\| \int_F \mathcal{A}_t d\mu(t) x_n \right\| \leq \varepsilon \cdot M$ за свако $\varepsilon > 0$. Тврђење следи. $\square$

Некомплетност простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$

У овој секцији показаћемо да су нормирани простори $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ типично некомплетни.

Нормирани простори X и Y (над истим пољем скалара) су *изоморфни* (изоморфизам нормираних простора) уколико постоји линеарна бијекција $A : X \rightarrow Y$ таква да важи $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ и $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. У наредном разматрању се под појмом изоморфизма нормираних простора подразумева овако уведена дефиниција.

Посматрајмо сада специјални случај у коме је $\dim X = 1$ и одаберимо неки вектор $a \in X \setminus \{0\}$. Како је скуп $\{a\}$ база у X следи да је пресликавање $\mathcal{B}(X, Y) \ni A \mapsto Aa \in Y$ једна бијекција између простора $\mathcal{B}(X, Y)$ и Y тј. у питању је изоморфизам између ова два простора. Ова чињеница нам омогућава идентификацију фамилије оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$ са фамилијом вектора $(y_t)_{t \in \Omega}$ из Y , при чему је $y_t = \mathcal{A}_t a \in Y$ за свако $t \in \Omega$. Овако уведено идентификацију користимо у наредној лемми.

Лема 4.26. *Нека је $\dim X = 1$ и $a \in X \setminus \{0\}$. Тада је фамилија $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$ слабо мерљива (односно μ -интеграбилна) ако и само ако је фамилија вектора $(\mathcal{A}_t a)_{t \in \Omega}$ из Y слабо мерљива (односно Данфорд интеграбилна). У случају интеграбилности оператора $\int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)$ одговара $\int_E \mathcal{A}_t a d\mu(t)$. Такође, нормирани простори $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ и $L^1_D(\Omega, \mu, Y)$ су изоморфни.*

Потпростори X_1 и X_2 нормираног простора X су *комплементарни* у X ако су затворени у X и ако важи разлагање $X = X_1 \oplus X_2$. Претпоставимо да су у даљем тексту потпростори X_1 и X_2 комплементарни у Банаховом простору X и нека су, за $i \in \{1, 2\}$, $P_i : X \rightarrow X_i$ одговарајуће непрекидне пројекције⁹. Уобичајно, писаћемо, $P_1 x = x_1$ и $P_2 x = x_2$ за $x \in X$. Тада, за произвољан вектор $x \in X$ важи

$$\|x\| = \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| = \|P_1 x\| + \|P_2 x\| \leq C \|x\|,$$

при чему смо означили $C := \|P_1\| + \|P_2\| < +\infty$. Додатно, Банахов простор $\mathcal{B}(X, Y)$ је изоморфан са директним збиром $\mathcal{B}(X_1, Y) \oplus \mathcal{B}(X_2, Y)$ и тај изоморфизам се остварује пресликавањем $\mathcal{B}(X, Y) \ni A \mapsto (A I_1, A I_2) \in \mathcal{B}(X_1, Y) \oplus \mathcal{B}(X_2, Y)$, где су $I_i : X_i \rightarrow X$ канонске инклузије, $i \in \{1, 2\}$. Напоменимо да уређеном пару $(A^1, A^2) \in \mathcal{B}(X_1, Y) \oplus \mathcal{B}(X_2, Y)$ одговара оператор $A^1 P_1 + A^2 P_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Изведена дискусија се проширује на фамилије оператора, тј. свакој фамилији $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$ придружујемо фамилије $\mathcal{A}^1 = (\mathcal{A}_t I_1)_{t \in \Omega}$ и $\mathcal{A}^2 = (\mathcal{A}_t I_2)_{t \in \Omega}$. Одавде и из Тврђења 4.12 следи да слаба мерљивост (односно вектор по вектор Данфорд интеграбилност) фамилије $\mathcal{A}$ имплицира исто својство за фамилије $\mathcal{A}^1$ и $\mathcal{A}^2$.

Обрнуто, ако су фамилије оператора $\mathcal{A}^1 = (\mathcal{A}_t^1)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X_1, Y)$ и $\mathcal{A}^2 = (\mathcal{A}_t^2)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X_2, Y)$ слабо мерљиве (односно вектор по вектор Данфорд интеграбилне) тада поновном употребом Тврђења 4.12 добијамо да фамилија $(\mathcal{A}_t^1 P_1 + \mathcal{A}_t^2 P_2)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$ поседује исто својство. У постављеној ситуацији долазимо до следећег тврђења.

Тврђење 4.27. *Простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ је изоморфан, као нормиран простор, са*

$$L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X_1, Y)) \oplus L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X_2, Y)).$$

⁹Пројекције P_1 и P_2 су непрекидне и то следи применом Теореме о затвореном графику. За детаље погледати нпр. [67, Теорема 4.3.3]

Доказ. Да бисмо доказали тврђење, конструисаћемо пресликавање које делује између простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X_1, Y)) \oplus L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X_2, Y))$ и $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ и показаћемо да је тако конструисано пресликавање линеарно, бијективно, непрекидно и да поседује непрекидно инверзно пресликавање. Најпре, дефинишимо пресликавање

$$\mathcal{S} : L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X_1, Y)) \oplus L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X_2, Y)) \rightarrow L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$$

следећом формулом:

$$\mathcal{S}((\mathcal{A}_t^1)_{t \in \Omega}, (\mathcal{A}_t^2)_{t \in \Omega}) = (\mathcal{A}_t^1 P_1 + \mathcal{A}_t^2 P_2)_{t \in \Omega},$$

Такође, за $j \in \{1, 2\}$, дефинишимо и пројекционо пресликавање

$$\mathcal{P}_j : L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y)) \rightarrow L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X_j, Y))$$

изразом $\mathcal{P}_j(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega} = (\mathcal{A}_t I_j)_{t \in \Omega}$. Пресликавања $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ су линеарна. Доказаћемо најпре да је $\mathcal{S}$ бијекција. Зато, дефинишимо линеарно пресликавање

$$\mathcal{T} : L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y)) \rightarrow L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X_1, Y)) \oplus L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X_2, Y))$$

изразом $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = (\mathcal{P}_1(\mathcal{A}), \mathcal{P}_2(\mathcal{A}))$ за свако $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$. Пресликавање $\mathcal{T}$ је инверзно пресликавање за $\mathcal{S}$. Заиста, то следи директном провером. Имамо

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2) &= \mathcal{T}(\mathcal{S}(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)) = \mathcal{T}((\mathcal{A}_t^1 P_1 + \mathcal{A}_t^2 P_2)_{t \in \Omega}) \\ &= (\mathcal{P}_1((\mathcal{A}_t^1 P_1 + \mathcal{A}_t^2 P_2)_{t \in \Omega}), \mathcal{P}_2((\mathcal{A}_t^1 P_1 + \mathcal{A}_t^2 P_2)_{t \in \Omega})) \\ &= ((\mathcal{A}_t^1 P_1 I_1 + \mathcal{A}_t^2 P_2 I_1)_{t \in \Omega}, (\mathcal{A}_t^1 P_1 I_2 + \mathcal{A}_t^2 P_2 I_2)_{t \in \Omega}) \\ &= (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2), \end{aligned}$$

јер је $P_2 I_1$ нула оператор на X_1 и $P_1 I_2$ нула оператор на X_2 . Сличан рачун даје

$$\begin{aligned} (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})(\mathcal{A}) &= \mathcal{S}(\mathcal{T}(\mathcal{A})) = \mathcal{S}((\mathcal{P}_1(\mathcal{A}), \mathcal{P}_2(\mathcal{A}))) \\ &= \mathcal{S}((\mathcal{A}_t I_1)_{t \in \Omega}, (\mathcal{A}_t I_2)_{t \in \Omega}) \\ &= (\mathcal{A}_t I_1 P_1 + \mathcal{A}_t I_2 P_2)_{t \in \Omega} \\ &= (\mathcal{A}_t (I_1 P_1 + I_2 P_2))_{t \in \Omega} = (\mathcal{A}_t I_X)_{t \in \Omega} = \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Даље, на основу дефиниције норме $\|\cdot\|_{pD}$ имамо да су пресликавања $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ непрекидна, одакле закључујемо да је $\mathcal{T}$ непрекидно пресликавање. Заиста, на основу непрекидности за $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ имамо да за свако $\mathcal{A}$ из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ важи

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\mathcal{A})\|_{pD} &= \|(\mathcal{P}_1(\mathcal{A}), \mathcal{P}_2(\mathcal{A}))\| \\ &= \|\mathcal{P}_1(\mathcal{A})\|_{pD} + \|\mathcal{P}_2(\mathcal{A})\|_{pD} \\ &\leq \|\mathcal{P}_1\| \cdot \|\mathcal{A}\|_{pD} + \|\mathcal{P}_2\| \cdot \|\mathcal{A}\|_{pD} = (\|\mathcal{P}_1\| + \|\mathcal{P}_2\|) \cdot \|\mathcal{A}\|_{pD}. \end{aligned}$$

Остаје да докажемо да је пресликавање $\mathcal{S}$ непрекидно. Фиксирајмо јединичне векторе $x \in X$ и $y^* \in Y^*$. Нека је $x_1 = P_1 x$, $x_2 = P_2 x$ и $C := \|P_1\| + \|P_2\| < +\infty$. Имамо $x = x_1 + x_2$ а из разматрања које је извршено пре формулације ове теореме следи да важи и неједнакост $\|x_1\| + \|x_2\| \leq C$. Сада имамо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{S}(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)x, y^* \rangle| d\mu(t) &= \int_{\Omega} |\langle (\mathcal{A}_t^1 P_1 + \mathcal{A}_t^2 P_2)x, y^* \rangle| d\mu(t) \\ &\leq \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t^1 x_1, y^* \rangle| d\mu(t) + \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t^2 x_2, y^* \rangle| d\mu(t) \\ &\leq \|\mathcal{A}^1\|_{pD} \cdot \|x_1\| + \|\mathcal{A}^2\|_{pD} \cdot \|x_2\| \\ &\leq C(\|\mathcal{A}^1\|_{pD} + \|\mathcal{A}^2\|_{pD}). \end{aligned}$$

Узимајући супремум по векторима $x \in X$, $\|x\| = 1$ и $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| = 1$ добијамо

$$\|\mathcal{S}(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)\|_{pD} \leq C(\|\mathcal{A}^1\|_{pD} + \|\mathcal{A}^2\|_{pD}).$$

Овиме је тврђење доказано. $\square$

Користећи идентификацију простора $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X_1, Y)) \oplus L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X_2, Y))$ са простором $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ видимо да је потпростор свих $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ за које је $\mathcal{A}_t = 0$ на X_2 за μ -скоро свако $t \in \Omega$ изоморфан, као нормиран простор, са простором $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X_1, Y))$.

Последица 4.28. *Нормиран простор $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ садржи затворен потпростор изоморфан са нормираним простором $L_D^1(\Omega, \mu, Y)$.*

Доказ. Одаберимо $a \in X \setminus \{0\}$ и нека је X_1 потпростор димензије 1 у X који је генерисан вектором $a \in X$ и нека је X_2 комплементарни потпростор простора X_1 у X (овакав потпростор X_1 постоји на основу [67, Лема 4.1.9]). На основу горе изведене дискусије имамо да $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ садржи затворен потпростор изоморфан са простором $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X_1, Y))$, који је на основу Леме 4.26 изоморфан са $L_D^1(\Omega, \mu, Y)$. $\square$

Како је нормиран простор $L_D^1(\Omega, \mu, Y)$ једнак простору $L_P^1(\Omega, \mu, Y)$ уколико је Y рефлексиван, можемо користити Теорему 1.29 да бисмо добили следећи резултат.

Тврђење 4.29. *Нека је $X \neq \{0\}$ Банахов простор, Y рефлексиван нормиран простор и $\dim Y = +\infty$. Тада нормиран простор $L_{pD}^1([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, t, \mathfrak{B}(X, Y))$ није Банахов.*

Напоменимо да се специјални случај горњег тврђења у контексту сепарабилних Хилбертових простора јавља у [52, Теорема 1.4], што је у овој дисертацији формулисано и доказано у Поглављу 2 у оквиру Теореме 2.9. Треба напоменути да је горе изведена конструкција мотивисана поменути резултатом о некомплетности нормираног простора $L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, при чему се овај резултат у контексту Хилбертових простора доказује директно, као што је презентовано у Леми 2.8 и Теорему 2.9.

За крај ове секције дајемо и један позитиван резултат. Наиме, нормиран простор $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ је Банахов у неким специјалним случајевима.

Теорема 4.30. *Нека је Y рефлексиван, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\Omega)$ и $\mu(\{t\}) \in (0, +\infty)$ за свако $t \in \Omega$. Тада је простор $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ са нормом $\|\cdot\|_{pD}$ дефинисаном у (4.17) Банахов.*

Доказ. Нека је $(\mathcal{A}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ у $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ такав да је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{A}^n\|_{pD} < +\infty.$$

За свако $s \in \Omega$ и $x \in X$, $\|x\| = 1$ и $y^* \in Y^*$ за које је $\|y^*\| = 1$ имамо

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{A}^n\|_{pD} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t^n x, y^* \rangle| d\mu(t) \\
 &\geq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \mathcal{A}_t^n x, y^* \rangle| d\mu(t) \\
 &\geq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\{s\}} \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \mathcal{A}_t^n x, y^* \rangle| d\mu(t) \\
 &\geq \mu(\{s\}) \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \mathcal{A}_s^n x, y^* \rangle| \geq \mu(\{s\}) \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \mathcal{A}_s^n x, y^* \rangle \right|.
 \end{aligned}$$

Зато, пресликавање $\mathcal{B}_s : X \times Y^* \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисано изразом

$$\mathcal{B}_s(x, y^*) = \mu(\{s\}) \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \mathcal{A}_s^n x, y^* \rangle \quad \text{за све } (x, y^*) \in X \times Y^*$$

припада Банаховом простору $\mathcal{B}(X, Y^*; \mathbb{C})$. Користећи рефлексивност простора Y имамо да је $\mathcal{B}(X, Y^*; \mathbb{C})$ изометрички изоморфан са $\mathcal{B}(X, Y^{**})$ тј. са простором $\mathcal{B}(X, Y)$ одакле закључујемо да постоји оператор $\mathcal{A}_s \in \mathcal{B}(X, Y)$ такав да важи једнакост $\langle \mathcal{A}_s x, y^* \rangle = \mathcal{B}_s(x, y^*)$ за све уређене парове $(x, y^*) \in X \times Y^*$. Како је $\mu(\{t\}) \in (0, +\infty)$ за свако $t \in \Omega$ можемо дефинисати фамилију оператора $\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\mu(\{t\})} \mathcal{A}_t \right)_{t \in \Omega}$ из $\mathcal{B}(X, Y)$. Функција $\Omega \ni t \mapsto \mu(\{t\}) \in (0, +\infty)$ је $\mathfrak{M}$ -мерљива (јер је $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\Omega)$) па је зато фамилија оператора $(\mathcal{C}_t)_{t \in \Omega}$ слабо мерљива. Сада, за свако $N \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned}
 \left\| \mathcal{C} - \sum_{n=1}^N \mathcal{A}^n \right\|_{pD} &= \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} \left| \left\langle \left(\mathcal{C} - \sum_{n=1}^N \mathcal{A}_t^n \right) x, y^* \right\rangle \right| d\mu(t) \\
 &= \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \langle \mathcal{A}_t^k x, y^* \rangle \right| d\mu(t) \\
 &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y^*\|=1}} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t^n x, y^* \rangle| d\mu(t) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|\mathcal{A}^n\|_{pD}
 \end{aligned}$$

Одавде следи да је фамилија $\mathcal{C}$ елемент простора $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ као и то да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{A}^n$ конвергира у $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ ка $\mathcal{C}$. Овиме смо доказали да је простор $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ Банахов. $\square$

Последица 4.31. Нека је Y рефлексиван и нека је $\Omega = \mathbb{N}$. Ако је $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ низ позитивних реалних бројева и уколико је мера $\mu : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ даћа изразом

$$\mu(A) = \sum_{k \in A} p_k \quad \text{за свако } A \subseteq \mathbb{N},$$

тада је простор $L_{pD}^1(\mathbb{N}, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ са нормом $\|\cdot\|_{pD}$ дефинисаном у (4.17) Банахов.

4.3 Оператори на $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$

У овој секцији проучавамо својства (процена норме и компактност) неких оператора који се природно јављају при раду са нормираним простором $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$. Најпре, у наредној теорему посматрамо оператор који пресликава простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ у $L^1(\Omega, \mu)$. Користимо нотацију из Дефиниције 4.8.

Теорема 4.32. Нека су даћи вектори $x \in X$ и $y^* \in Y^*$ и нека је пресликавање

$$F_{x,y^*} : L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)) \rightarrow L^1(\Omega, \mu)$$

дефинисано изразом $F_{x,y^*}(\mathcal{A}) = \varphi_{x,y^*}^{\mathcal{A}}$ за свако $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$.

- (а) Пресликавање F_{x,y^*} је ограничен линеаран оператор и важи $\|F_{x,y^*}\| = \|x\| \cdot \|y^*\|$.
- (б) Ако је $x \in X \setminus \{0\}$, $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ и $\dim L^1(\Omega, \mu) = +\infty$ тада оператор F_{x,y^*} није компактан.

Доказ. Подсетимо се, пресликавање $\varphi_{x,y^*}^{\mathcal{A}} \in L^1(\Omega, \mu)$ је дефинисано у (4.7) изразом $\varphi_{x,y^*}^{\mathcal{A}}(t) = \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle$ за свако $t \in \Omega$.

- (а) Билинеарност пресликавања $(x, y^*) \mapsto F_{x,y^*}$ нам дозвољава да претпоставимо да важи $\|x\| = 1$ и $\|y^*\| = 1$. Неједнакост $\|F_{x,y^*}\| \leq 1$ следи из дефиниције (4.17) норме $\|\cdot\|_{pD}$ јер за свако $\mathcal{A}$ у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ важи

$$\|F_{x,y^*}(\mathcal{A})\|_{L^1(\Omega, \mu)} = \|\varphi_{x,y^*}^{\mathcal{A}}\|_{L^1(\Omega, \mu)} = \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle| d\mu(t) \leq \|\mathcal{A}\|_{pD}.$$

Да докажемо обрнуту неједнакост, фиксирајмо елемент $f \in L^1(\Omega, \mu)$ за који важи $\int_{\Omega} |f(t)| d\mu(t) = 1$ и одаберимо $x^* \in X^*$ тако да је $\|x^*\| = 1$ и $\langle x, x^* \rangle = 1$. За фиксиран вектор $y \in Y$ дефинишемо линеарни оператор $A^y : X \rightarrow Y$ изразом $A^y(a) = \langle a, x^* \rangle y$ за свако $a \in X$. Тада важе једнакости

$$\|A^y\| = \sup_{\|a\|=1} \|A^y(a)\| = \sup_{\|a\|=1} |\langle a, x^* \rangle| \cdot \|y\| = \|x^*\| \cdot \|y\| = \|y\|.$$

Нека је $\mathcal{A}_t^y = f(t)A^y$ за свако $t \in \Omega$. Добијамо да је

$$\begin{aligned} \|F_{x,y^*}((\mathcal{A}_t^y)_{t \in \Omega})\|_{L^1(\mu)} &= \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t^y x, y^* \rangle| d\mu(t) = \int_{\Omega} |f(t)| \cdot |\langle A^y x, y^* \rangle| d\mu(t) \\ &= \int_{\Omega} |f(t)| \cdot |\langle \langle x, x^* \rangle y, y^* \rangle| d\mu(t) = |\langle y, y^* \rangle| \int_{\Omega} |f(t)| d\mu(t) = |\langle y, y^* \rangle|. \end{aligned}$$

Користећи Пример 4.16 имамо да важи и $\|(\mathcal{A}_t^y)_{t \in \Omega}\|_{pD} = \|f\|_{L^1(\Omega, \mu)} \cdot \|A^y\| = \|y\|$. Зато, за $y \in Y$, $\|y\| = 1$ следи $\|F_{x,y^*}\| \geq |\langle y, y^* \rangle|$. Доказ овог дела тврђења се завршава преласком на супремум по свим векторима $y \in Y$ за које је $\|y\| = 1$.

- (б) Користећи оператор A^y из првог дела доказа добијамо

$$F_{x,y^*}((f(t)A^y)_{t \in \Omega})(t) = \langle f(t)A^y(x), y^* \rangle = f(t) \langle x, x^* \rangle \langle y, y^* \rangle.$$

за свако $t \in \Omega$, $f \in L^1(\Omega, \mu)$, $x^* \in X^*$ и $y \in Y$. Одавде следи да важи једнакост

$$F_{x,y^*}((f(t)A^y)_{t \in \Omega}) = \langle x, x^* \rangle \cdot \langle y, y^* \rangle f$$

Нека је сада $f \in L^1(\Omega, \mu)$, $\|f\|_{L^1(\mu)} \leq 1$ произвољно, $\|y\| \leq 1$ и одаберимо $x^* \in X^*$ тако да је $\langle x, x^* \rangle = \|x\|$ (што је могуће јер је $x \neq 0$). Тада се горња једнакост своди на $F_{x,y^*}((f(t)A^y)_{t \in \Omega}) = \|x\| \langle y, y^* \rangle f$. Знамо да је $\|(f(t)A^y)_{t \in \Omega}\|_{pD} \leq 1$ па при пресликавању F_{x,y^*} слика затворене јединичне лопте простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ садржи¹⁰ отворену лопту у $L^1(\Omega, \mu)$ полупречника $\|x\| \cdot \|y^*\|$ и садржана је у затвореној лопти из $L^1(\Omega, \mu)$ полупречника $\|F_{x,y^*}\| = \|x\| \cdot \|y^*\|$. Одавде следи да је затворење слике затворене јединичне лопте простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ при пресликавању F_{x,y^*} једнако затвореној лопти полупречника $\|x\| \cdot \|y^*\|$ у $L^1(\Omega, \mu)$. Добијени скуп не може бити компактан у $L^1(\Omega, \mu)$ јер је $\dim L^1(\Omega, \mu) = +\infty$. $\square$

Нека су дати Банахови простори оператори Z и W и оператори $L \in \mathfrak{B}(Y, Z)$ и $R \in \mathfrak{B}(W, X)$. Дефинишимо линеарни оператор $T_L^R : L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)) \rightarrow L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(W, Z))$ изразом $T_L^R(\mathcal{A}) = (L\mathcal{A}_t R)_{t \in \Omega}$ за сваки елемент $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ (са тим у вези видети делове (а) и (б) Тврђења 4.12). Својства овако дефинисаног оператора $T = T_L^R$ садржана су у следећој теорему.

Теорема 4.33. *Горе дефинисан оператор*

$$T : L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)) \rightarrow L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(W, Z))$$

поседује следећа својства:

- (а) *Важи $T \in \mathfrak{B}(L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y)), L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(W, Z)))$ и $\|T\| \leq \|L\| \cdot \|R\|$.*
- (б) *Ако је $X = Y$ важи неједнакост $\|LR\| \leq \|T\|$.*
- (в) *Ако је $\dim Y = +\infty$, $Y = Z$, $R \neq 0$ и $L = I_Y$ оператор T није компактан.*
- (г) *Ако је $\dim X = +\infty$, $W = X$, $L \neq 0$ и $R = I_X$ оператор T није компактан.*

Доказ. Оператор T је добро дефинисан и линеаран (напоменимо да слаба мерљивост фамилије оператора $T(\mathcal{A})$ следи на основу слабе мерљивост фамилије $\mathcal{A}$ и на основу првог дела Тврђења 4.12).

- (а) Уколико је $L = 0$ или $R = 0$ тврђење тривијално важи. Нека је зато $L \neq 0$ и $R \neq 0$ и одаберимо $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ произвољно. Сада имамо

$$\begin{aligned} \|T(\mathcal{A})\|_{pD} &= \sup_{\substack{\|w\|=1 \\ \|z^*\|=1}} \int_{\Omega} |\langle L\mathcal{A}_t R w, z^* \rangle| d\mu(t) \\ &= \sup_{\substack{\|w\|=\|z^*\|=1 \\ R w \in X \setminus \{0\}, L^* z^* \in Y^* \setminus \{0\}}} \int_{\Omega} \left| \left\langle \mathcal{A}_t \left(\frac{R w}{\|R w\|} \right), \frac{L^* z^*}{\|L^* z^*\|} \right\rangle \right| d\mu(t) \cdot \|R w\| \cdot \|L^* z^*\| \\ &\leq \|\mathcal{A}\|_{pD} \sup_{\substack{\|w\|=1 \\ \|z^*\|=1}} \|R w\| \cdot \|L^* z^*\| = \|\mathcal{A}\|_{pD} \cdot \|L^*\| \|R\| = \|\mathcal{A}\|_{pD} \cdot \|L\| \|R\|. \end{aligned}$$

¹⁰Ако је $y^* \in Y^*$ и $y^* \neq 0$ тада је $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \|y^*\|\} \subseteq \{\langle y, y^* \rangle : \|y\| \leq 1\}$. Заиста, нека је $r = \|y^*\| > 0$ и нека је $z \in \mathbb{C}$ са својством $|z| < r$. По дефиницији норме функционала постоји низ јединичних вектора $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из Y такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle y_n, y^* \rangle| = r$. Одавде следи да постоји $k \in \mathbb{N}$ за које је $|\langle y_k, y^* \rangle| > |z|$. Дефинишемо сада вектор $y = \frac{z}{\langle y_k, y^* \rangle} y_k \in Y$. Тада важи $\langle y, y^* \rangle = z$ а имамо и да је $\|y\| = \frac{|z|}{|\langle y_k, y^* \rangle|} < 1$, што доказује тражену једнакост.

Напоменимо да примењена једнакост $\|L^*\| = \|L\|$ у горењем рачуну следи применом [5, Став 8.28]. Дакле, доказали смо да је оператор T ограничен као и то да важи процена $\|T\| \leq \|L\| \cdot \|R\|$.

- (б) Како је $X = Y$ можемо посматрати идентички оператор I_X . Одаберимо елемент $f \in L^1(\Omega, \mu)$ за који важи $\int_{\Omega} |f(t)| d\mu(t) = 1$. На основу Примера 4.16 следи $(f(t)I_X)_{t \in \Omega} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X))$ као и $\|(f(t)I_X)_{t \in \Omega}\|_{pD} = 1$. Зато, имамо

$$\|T\| \geq \|T((f(t)I_X)_{t \in \Omega})\|_{pD} = \sup_{\substack{\|w\|=1 \\ \|z^*\|=1}} |\langle LRw, z^* \rangle| \cdot \|f\|_{L^1(\mu)} = \|LR\|.$$

- (в) Функција $\text{Int} : L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(W, Y)) \rightarrow \mathcal{B}(W, Y^{**})$ која пресликава $\mathcal{A}$ у $\int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t)$ је непрекидна (видети неједнакост (4.13)). Одаберимо $w_0 \in W$ тако да је $Rw_0 = x_0 \neq 0$ и $\|x_0\| = 1$ (што је могуће јер смо претпоставили да R није нула оператор). Пресликавање $e_{w_0} : \mathcal{B}(W, Y^{**}) \rightarrow Y^{**}$ дефинисано изразом $e_{w_0}(C) = Cw_0$ је такође непрекидно. Претпоставимо да је оператор $T_{I_Y}^R$ компактан. Тада је оператор $K = e_{w_0} \circ \text{Int} \circ T_{I_Y}^R$ компактан и пресликава простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ у Банахов простор Y^{**} . Одаберимо сада елемент $x_0^* \in X^*$ такав да је $\|x_0^*\| = 1$ и $\langle x_0, x_0^* \rangle = \|x_0\| = 1$. За свако $y \in Y$ оператор $A^y \in \mathcal{B}(X, Y)$ дефинисан изразом $A^y x = \langle x, x_0^* \rangle y$, $x \in X$, задовољава $A^y x_0 = y$ и $\|A^y\| = \|y\|$. За $y \in Y$ дефинишемо $\mathcal{A}_t^y = \chi_E(t) A^y$, где је $E \in \mathfrak{M}$ такав да важи $0 < \mu(E) < +\infty$. Тада је скуп $\mathcal{F} := \{\mathcal{A}^y : \|y\| \leq 1\}$ ограничен у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ јер је $\|\mathcal{A}^y\|_{pD} = \|y\| \cdot \mu(E)$ за свако $y \in Y$, на основу Примера 4.16. Са друге стране, имамо да важи

$$(4.24) \quad K(\mathcal{F}) = \{y \in Y : \|y\| \leq \mu(E)\},$$

што ће дати контрадикцију јер је $\mathcal{F}$ ограничен скуп у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ (садржан у кугли са центром у нули полупречника $\mu(E)$) а по претпоставци имамо $\dim Y = +\infty$. Заиста, уколико је $y \in Y$, тада дејство оператора K на елемент $\mathcal{A}^y$ рачунамо:

$$\begin{aligned} K(\mathcal{A}^y) &= e_{w_0}(\text{Int}(T_{I_Y}^R(\mathcal{A}^y))) = e_{w_0}(\text{Int}(\mathcal{A}^y R)) = e_{w_0}\left(\int_{\Omega} \mathcal{A}_t^y R d\mu(t)\right) \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^y R d\mu(t) w_0 = \int_{\Omega} \chi_E(t) A^y R d\mu(t) w_0 = \mu(E) A^y R w_0 \\ &= \mu(E) A^y x_0 = \mu(E) \langle x_0, x_0^* \rangle y = \mu(E) \cdot y, \end{aligned}$$

чиме је доказана једнакост (4.24), јер посматрамо оне $y \in Y$ за које је $\|y\| \leq 1$.

- (г) Одабермо $y_0 \in Y$ тако да је $Ly_0 = z_0 \neq 0$ и нека је $Y_0 = \text{lin}\{y_0\} \subset Y$, $Z_0 = \text{lin}\{z_0\} \subset Z$. Нека је Λ_Y (односно Λ_Z) природно изометричко утапање простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y_0))$ у простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ (односно у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Z_0))$ у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Z))$), што је већ помињано у Лему 4.23. Оператор $K = T_L^{I_X} \circ \Lambda_Y$ пресликава елементе простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y_0))$ у

$$\Lambda_Z(L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Z_0))) \subset L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Z)).$$

Рестрикција оператора L на потпростор Y_0 димензије 1 је изоморфизам простора Y_0 са Z_0 , стога пресликавање K прави изоморфизам простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y_0))$ и $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Z_0))$. Дакле, уколико је оператор $T_L^{I_X}$ компактан тада је такође и оператор K компактан па је због тога нормиран простор $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Z_0))$ коначне димензије, што је контрадикција са претпоставком $\dim X = +\infty$. $\square$

У делу (б) претходне теореме, ако је $Y = Z$ и $L = I_Y$ или $W = X$ и $R = I_X$, имамо да важи једнакост $\|T\| = \|R\|$ тј. $\|T\| = \|L\|$, редом. Такође, уколико је $X = Y$, делови (а) и (б) дају обострану процену норме оператора T^R_L :

$$\|LR\| \leq \|T^R_L\| \leq \|L\| \cdot \|R\|, \quad L \in \mathcal{B}(X, Z), \quad R \in \mathcal{B}(W, X).$$

4.4 Теореме конвергенције за низове из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$

Теореме конвергенције за низове Петис интеграбилних функција до сада су разматране у литеартури, што се може видети у [71, 17, 64, 63]. Теореме конвергенције за низове из нормираног простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ су предмет разматрања у овој секцији. Тврђења као што је ТДК су разматрана за низове чији су чланови у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, где је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор. Виталијева теорема је посматрана за низове чији су елементи из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$, при чему је $\mu(\Omega) < +\infty$. Обе теореме су разматране у *слабом, јаком и униформном* смислу.

На основу Тврђења 4.11, довољно је посматрати конвергенцију $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)$ на скупу Ω и сви закључци ће бити тачни уколико уместо целог простора Ω посматрамо неки подскуп $E \in \mathfrak{M}$. Такође, у овом делу дисертације биће изведен и обрат Виталијеве теореме.

Слаба, јака и униформна ТДК за низове из $L^1_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$

У овој секцији сепарабилност Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ није претпостављена, уколико то не нагласимо. Такође, користећемо неједнакост (1.9) која је специфичност Хилбертових простора. У овој секцији доказујемо *слабу, јаку и униформну верзију* ТДК за низове из $L^1_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, при чему у тим теоремама немамо претпоставку $\mu(\Omega) < +\infty$.

Прва теорема са којом започињемо разматрања представља *слабу верзију* ТДК за низове $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција.

Теорема 4.34. *Нека је $\mathcal{A}^{(n)}$ слабо мерљива фамилија у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и нека је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ фамилија у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ таква да важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t^{(n)} = \mathcal{A}_t$ за свако $t \in \Omega$. Претпоставимо да постоји фамилија оператора $\mathcal{B} \in L^1_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ за коју важи*

$$\left| \mathcal{A}_t^{(n)} \right| + \left| \mathcal{A}_t^{(n)*} \right| \leq \mathcal{B}_t$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $t \in \Omega$. Тада $\mathcal{A} \in L^1_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и важи једнакост

$$(4.25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) = \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t).$$

Доказ. Користећи (1.9) имамо да за свако $n \in \mathbb{N}$, $t \in \Omega$ и $f \in \mathcal{H}$ важи:

$$\left| \langle \mathcal{A}_t^{(n)} f, f \rangle \right| \leq \sqrt{\langle \left| \mathcal{A}_t^{(n)} \right| f, f \rangle \cdot \langle \left| \mathcal{A}_t^{(n)*} \right| f, f \rangle} \leq \sqrt{\langle \mathcal{B}_t f, f \rangle^2} = \langle \mathcal{B}_t f, f \rangle.$$

Одавде следи $\mathcal{A}^{(n)} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ за свако $n \in \mathbb{N}$. На основу скаларне верзије ТДК и $\langle \mathcal{A}_t f, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_t^{(n)} f, f \rangle$ имамо да за свако $t \in \Omega$ и свако $f \in \mathcal{H}$ фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ припада простору $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и да важе једнакости

$$\left\langle \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) f, f \right\rangle = \int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t f, f \rangle d\mu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle \mathcal{A}_t^{(n)} f, f \rangle d\mu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) f, f \right\rangle.$$

На основу поларизационог идентитета закључујемо да важи једнакост $\langle \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) f, g \rangle$ за све векторе $f, g \in \mathcal{H}$, одакле (4.25) следи. $\square$

Следећа теорема представља јаку верзију ТДК за низове $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -вредносних функција.

Теорема 4.35. Нека је $\mathcal{A}^{(n)}$ слабо мерљива фамилија оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и нека је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ фамилија оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за коју је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{A}_t^{(n)} f - \mathcal{A}_t f \right\| = 0$ за свако $t \in \Omega$ и за свако $f \in \mathcal{H}$. Ако постоји функција $a \in L^1(\Omega, \mu)$ таква да је

$$|\mathcal{A}_t| + |\mathcal{A}_t^*| + \left| \mathcal{A}_t^{(n)} \right| + \left| \mathcal{A}_t^{(n)*} \right| \leq a(t)I$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $t \in \Omega$ тада $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и имамо једнакост

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) f - \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) f \right\| = 0 \text{ за свако } f \in \mathcal{H}.$$

Доказ. За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\mathcal{A}^{(n)} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Заиста, на основу (1.9) следи

$$\left| \langle \mathcal{A}_t^{(n)} f, f \rangle \right| \leq \sqrt{\langle \left| \mathcal{A}_t^{(n)} \right| f, f \rangle \cdot \langle \left| \mathcal{A}_t^{(n)*} \right| f, f \rangle} \leq a(t) \cdot \|f\|^2$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, $t \in \Omega$ и $f \in \mathcal{H}$. Одавде је

$$\int_{\Omega} \left| \langle \mathcal{A}_t^{(n)} f, f \rangle \right| d\mu(t) \leq \|f\|^2 \int_{\Omega} a(t) d\mu(t) < +\infty \text{ за свако } f \in \mathcal{H}.$$

Стога, слично као у Теорему 4.34 закључујемо да је фамилија оператора $\mathcal{A}$ елемент простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Претпоставимо сада да за неки вектор $f \in \mathcal{H}$ тврђење теореме није тачно. Следи да постоји $\delta > 0$ и подниз $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такав да за свако $k \in \mathbb{N}$ важи

$$\sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \int_{\Omega} \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) d\mu(t) f, g \right\rangle \right| = \left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n_k)} d\mu(t) f - \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) f \right\| \geq \delta.$$

Додатно, за свако $k \in \mathbb{N}$ постоји $g_k \in \mathcal{H}$, $\|g_k\| = 1$ такво да је

$$\int_{\Omega} \left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f, g_k \right\rangle \right| d\mu(t) \geq \left| \left\langle \int_{\Omega} \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) d\mu(t) f, g_k \right\rangle \right| \geq \delta.$$

Низ вектора $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ је ограничен у $\mathcal{H}$ и за свако фиксирано $t \in \Omega$ важи

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f, g_k \right\rangle \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{A}_t^{(n_k)} f - \mathcal{A}_t f \right\| \|g_k\| = 0.$$

Доказаћемо да низ скаларних функција $\Omega \ni t \mapsto \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f, g_k \right\rangle \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, поседује интеграбилну доминанту на скупу Ω . Заиста, на основу неједнакости (1.9) као и из неједнакости $|\mathcal{A}_t|, |\mathcal{A}_t^*|, \left| \mathcal{A}_t^{(n_k)} \right|, \left| \mathcal{A}_t^{(n_k)*} \right| \leq a(t)I$ које важе за свако $k \in \mathbb{N}$ и свако $t \in \Omega$ закључујемо

$$\begin{aligned}
 (4.26) \quad & \left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f, g_k \right\rangle \right| \leq \left| \left\langle \mathcal{A}_t^{(n_k)} f, g_k \right\rangle \right| + \left| \left\langle \mathcal{A}_t f, g_k \right\rangle \right| \\
 & \leq \sqrt{\left\langle \left| \mathcal{A}_t^{(n_k)} \right| f, f \right\rangle \left\langle \left| \mathcal{A}_t^{(n_k)*} \right| g_k, g_k \right\rangle} \\
 & + \sqrt{\left\langle |\mathcal{A}_t| f, f \right\rangle \left\langle |\mathcal{A}_t^*| g_k, g_k \right\rangle} \\
 & \leq 2\sqrt{\langle a(t)I f, f \rangle \cdot \langle a(t)I g_k, g_k \rangle} \\
 & = 2\sqrt{a(t)\|f\|^2 \cdot a(t)\|g_k\|^2} = 2\|f\|a(t).
 \end{aligned}$$

Одавде, на основу скаларне варијанте ТДК добијамо

$$0 = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f, g_k \right\rangle \right| d\mu(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f, g_k \right\rangle \right| d\mu(t) \geq \delta.$$

Ово је контрадикција а тиме је теорема доказана. $\square$

Наредна теорема представља *униформну верзију* ТДК за низове из $L_G^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$.

Теорема 4.36. Нека је $\mathcal{A}^{(n)}$ слабо мерљива фамилија у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и нека је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ фамилија из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ за коју је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t \right\| = 0$ за свако $t \in \Omega$. Ако постоји функција $a \in L^1(\Omega, \mu)$ таква да је

$$\left| \mathcal{A}_t^{(n)} \right| + \left| \mathcal{A}_t^{(n)*} \right| \leq a(t)I$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $t \in \Omega$ тада $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ и важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) - \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| = 0.$$

Доказ. Функција $A \mapsto \sqrt{A}$ је непрекидна на скупу позитивних оператора одакле следи непрекидност функције $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto |A| = \sqrt{A^*A} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ у односу на норму простора $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t \right\| = 0$ и $\left| \mathcal{A}_t^{(n)} \right| + \left| \mathcal{A}_t^{(n)*} \right| \leq a(t)I$ за свако $t \in \Omega$ и свако $n \in \mathbb{N}$ закључујемо да важи неједнакост $|\mathcal{A}_t| + |\mathcal{A}_t^*| \leq a(t)I$ за свако $t \in \Omega$. Претпоставимо да постоји $\delta > 0$ и подниз $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такав да је

$$\sup_{\substack{\|f\|=1 \\ \|g\|=1}} \left| \left\langle \int_{\Omega} \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) d\mu(t) f, g \right\rangle \right| = \left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n_k)} d\mu(t) - \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| \geq 2\delta > 0$$

за свако $k \in \mathbb{N}$. Одавде, за свако $k \in \mathbb{N}$ постоје јединични вектори $f_k, g_k \in \mathcal{H}$ тако да је

$$\int_{\Omega} \left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f_k, g_k \right\rangle \right| d\mu(t) \geq \left| \left\langle \int_{\Omega} \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) d\mu(t) f_k, g_k \right\rangle \right| \geq \delta > 0.$$

За свако $t \in \Omega$ имамо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f_k, g_k \right\rangle \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right\| = 0.$$

Низ скаларних функција $\Omega \ni t \mapsto \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f_k, g_k \right\rangle \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ има интеграбилну доминанту на Ω . Заиста, као и у (4.26), за свако $k \in \mathbb{N}$ и $t \in \Omega$ имамо

$$\left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f_k, g_k \right\rangle \right| \leq \left| \left\langle \mathcal{A}_t^{(n_k)} f_k, g_k \right\rangle \right| + |\langle \mathcal{A}_t f_k, g_k \rangle| \leq 2a(t).$$

Зато, на основу скаларне верзије ТДК следи

$$0 = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f_k, g_k \right\rangle \right| d\mu(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \left\langle \left(\mathcal{A}_t^{(n_k)} - \mathcal{A}_t \right) f_k, g_k \right\rangle \right| d\mu(t) \geq \delta > 0.$$

Ово је контрадикција па је тиме теорема доказана. $\square$

Слаба, јака и униформна варијанта Виталијеве теореме за низове из $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$

У овој секцији претпостављамо сепарабилност простора X или Y уколико нам је потребна мерљивост функција $\Omega \ni t \mapsto \|\mathcal{A}_t x\| \in \mathbb{R}$, $x \in X$ или $\Omega \ni t \mapsto \|\mathcal{A}_t\| \in \mathbb{R}$ за дату фамилију оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathfrak{B}(X, Y)$ (видети Лему 4.21). Услов $\mu(\Omega) < +\infty$ ће нам бити потребан у доказивању теорема Виталијеве теореме за низове $\mathfrak{B}(X, Y)$ -вредносних функција, као што је случај и код скаларне верзије Виталијеве теореме. Ради прегледности, формулишемо Виталијеву теорему за скаларне функције (видети нпр. [68, Поглавље 6, Вежбање 10, део (б)]).

Теорема 4.37. (Витали) Нека је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са коначном мером μ . Уколико је $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива функција за свако $n \in \mathbb{N}$ и $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ за свако $x \in X$ тада из униформне интеграбилности скупа $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ у $L^1(\Omega, \mu)$ следи $f \in L^1(\Omega, \mu)$ и важи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$.

Дефиницију 2.24 коју смо имали у Поглављу 2 проширујемо на следећи начин.

Дефиниција 4.38. Скуп $\{\mathcal{A}^{(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\} \subset L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ задовољава **униформно** $\mathcal{A}_{\mu}$ **својство** ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за свако $\lambda \in \Lambda$ важи

$$E \in \mathfrak{M}, \mu(E) < \delta \implies \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(\lambda)} d\mu(t) \right\| < \varepsilon.$$

На кратко, ограничимо наша разматрања на случај $X = Y = \mathcal{H}$, при чему је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор.

Теорема 4.39. Нека је фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ слабо мерљива и нека фамилије оператора $(|\mathcal{A}_t|)_{t \in \Omega}$ и $(|\mathcal{A}_t^*|)_{t \in \Omega}$ задовољавају услов $\mathcal{A}_{\mu}$. Тада је фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ елемент простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ и задовољава услов $\mathcal{A}_{\mu}$.

Доказ. На основу неједнакости (1.9), за све векторе $x, y \in \mathcal{H}$ важи

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\langle \mathcal{A}_t x, y \rangle| d\mu(t) &\leq \int_{\Omega} \sqrt{\langle |\mathcal{A}_t| x, x \rangle \cdot \langle |\mathcal{A}_t^*| y, y \rangle} d\mu(t) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle |\mathcal{A}_t| x, x \rangle d\mu(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle |\mathcal{A}_t^*| y, y \rangle d\mu(t) < +\infty. \end{aligned}$$

Зато је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ елемент простора $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathbf{B}(\mathcal{H}))$. Користећи (4.13) и (1.9) имамо

$$\begin{aligned} \left\| \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| &\leq \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \int_E \sqrt{\langle |\mathcal{A}_t| x, x \rangle \cdot \langle |\mathcal{A}_t^*| y, y \rangle} d\mu(t) \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} \int_E \langle |\mathcal{A}_t| x, x \rangle d\mu(t) + \frac{1}{2} \sup_{\|y\|=1} \int_E \langle |\mathcal{A}_t^*| y, y \rangle d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2} \left\| \int_E |\mathcal{A}_t| d\mu(t) \right\| + \frac{1}{2} \left\| \int_E |\mathcal{A}_t^*| d\mu(t) \right\|. \quad \square \end{aligned}$$

Наредно тврђење даје довољне услове да слабо мерљива фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ из $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ задовољава услов $\mathcal{A}_\mu$.

Тврђење 4.40. Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ слабо мерљива фамилија таква да је $\mathcal{A}_t \in \mathbf{C}_\infty(\mathcal{H})$ за свако $t \in \Omega$. Претпоставимо да оператори $\int_{\Omega} |\mathcal{A}_t| d\mu(t)$ и $\int_{\Omega} |\mathcal{A}_t^*| d\mu(t)$ постоје и да припадају простору $\mathbf{C}_\infty(\mathcal{H})$. Тада фамилија $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ задовољава услов $\mathcal{A}_\mu$.

Доказ. За свако $t \in \Omega$ имамо $|\mathcal{A}_t|, |\mathcal{A}_t^*| \in \mathbf{C}_\infty(\mathcal{H})$. Како је $\mu(\Omega) < +\infty$ можемо применити Теорему 2.15 и закључити да фамилије оператора $(|\mathcal{A}_t|)_{t \in \Omega}$ и $(|\mathcal{A}_t^*|)_{t \in \Omega}$ задовољавају услов $\mathcal{A}_\mu$. Фамилија $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ је слабо мерљива па на основу Теореме 4.39 имамо да задовољава $\mathcal{A}_\mu$ услов. $\square$

Ако постоји фамилија оператора $\mathcal{B} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathbf{B}(\mathcal{H}))$ за коју је $|\mathcal{A}_t^{(n)}| + |\mathcal{A}_t^{(n)*}| \leq \mathcal{B}_t$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \Omega$ и ако фамилија оператора $\mathcal{B}$ задовољава услов $\mathcal{A}_\mu$, тада на основу доказа Теореме 4.39 следи да скуп $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ има униформно $\mathcal{A}_\mu$ својство. Ако је $\mu(\Omega) < +\infty$ тада добијамо из Теореме 4.42 исти закључак као у Теорему 4.34.

Теорема 4.41. Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ из $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathbf{B}(X, Y))$ има униформно $\mathcal{A}_\mu$ својство. Уколико је $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t^{(n)} = \mathcal{A}_t$ за свако $t \in \Omega$, тада важи $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathbf{B}(X, Y))$ и фамилија $\mathcal{A}$ задовољава $\mathcal{A}_\mu$ услов.

Доказ. За фиксирани векторе $x \in X$ и $y^* \in Y^*$ скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle \in \mathbb{C}$ припада простору $L^1(\Omega, \mu)$ на основу скаларне варијанте Виталијеве теореме јер је скуп функција $\Omega \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}_t^{(n)} x, y^* \rangle \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, униформно интеграбилан. У суштини, за свако $n \in \mathbb{N}$ и $E \in \mathfrak{M}$ имамо

$$\left| \int_E \langle \mathcal{A}_t^{(n)} x, y^* \rangle d\mu(t) \right| = \left| \left\langle \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) x, y^* \right\rangle \right| \leq \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \|x\| \|y^*\|.$$

На основу скаларне варијанте Виталијеве теореме следи $\mathcal{A} \in L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathbf{B}(X, Y))$. Сада ћемо доказати да фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ задовољава услов $\mathcal{A}_\mu$. Заиста, за свако

$E \in \mathfrak{M}$, $x \in X$ и $y^* \in Y^*$ имамо

$$\begin{aligned} \left| \left\langle y^*, \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\rangle \right| &= \left| \int_E \langle \mathcal{A}_t x, y^* \rangle d\mu(t) \right| = \left| \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_t^{(n)} x, y^* \rangle d\mu(t) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_E \langle \mathcal{A}_t^{(n)} x, y^* \rangle d\mu(t) \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \cdot \|x\| \|y^*\|. \end{aligned}$$

Одавде добијамо да важи неједнакост

$$\left\| \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \quad \text{за свако } E \in \mathfrak{M}.$$

Из последње неједнакости следи да фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ испуњава услов $\mathcal{AC}_\mu$. $\square$

У наредном тврђењу представљамо *слабу верзију* Виталијеве теореме која се бави конвергенцијом низа оператора $\left(\int_\Omega \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathfrak{B}(X, Y)$ ка оператору $\int_\Omega \mathcal{A}_t d\mu(t) \in \mathfrak{B}(X, Y)$, при чему претпостављамо рефлексивност простора Y .

Теорема 4.42. Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека је Y рефлексиван простор. Ако је скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ униформно $\mathcal{AC}_\mu$ интеграбилан у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и ако $(\mathcal{A}_t^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ конвертира слабо ка $\mathcal{A}_t \in \mathfrak{B}(X, Y)$ за свако $t \in \Omega$ тада $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и важи

$$(4.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) = \int_\Omega \mathcal{A}_t d\mu(t).$$

Доказ. Теорема 4.41 даје $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ као и то да фамилија $\mathcal{A}$ задовољава услов $\mathcal{AC}_\mu$. На основу рефлексивности простора Y интеграл $\int_\Omega \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)$ и $\int_\Omega \mathcal{A}_t d\mu(t)$ пресликавају простор X у Y . Нека је $x \in X$ и $y^* \in Y^*$. Тада, за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо

$$(4.28) \quad \left\langle \left(\int_\Omega \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) - \int_\Omega \mathcal{A}_t d\mu(t) \right) x, y^* \right\rangle = \int_\Omega \langle (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) x, y^* \rangle d\mu(t).$$

Такође, за свако $E \in \mathfrak{M}$ важи

$$(4.29) \quad \begin{aligned} \left| \int_E \langle (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) x, y^* \rangle d\mu(t) \right| &= \left| \left\langle \int_E (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) d\mu(t)x, y^* \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \cdot \|x\| \|y^*\| + \left\| \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| \cdot \|x\| \|y^*\|. \end{aligned}$$

Како је $(\mathcal{A}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ униформно $\mathcal{AC}_\mu$ интеграбилан низ и како фамилија $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ задовољава услов $\mathcal{AC}_\mu$, (4.29) даје да је скуп скаларних функција $\Omega \ni t \mapsto \langle (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) x, y^* \rangle \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ униформно интеграбилан. Сада, можемо применити скаларну верзију Виталијеве теореме и добити једнакост (4.27) ако пређемо на $n \rightarrow \infty$ у (4.28). $\square$

Наредна теорема даје довољне услове за јаку конвергенцију низа $\left(\int_\Omega \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)x \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ка $\int_\Omega \mathcal{A}_t d\mu(t)x$ за фиксирано $x \in X$, тј. наредна теорема представља *јаку верзију* Виталијеве теореме.

Теорема 4.43. Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и претпоставимо да је Y сепарабилан и да је скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ униформно $\mathcal{AC}_\mu$ интеграбилан у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$. Уколико је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ фамилија у $\mathfrak{B}(X, Y)$ таква да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t^{(n)} = \mathcal{A}_t$ за свако $t \in \Omega$ тада $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и важи једнакост

$$(4.30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) = \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t).$$

Доказ. На основу Теореме 4.41 знамо да важи $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$. Нека је $x \in X$ произвољно. За фиксирано $n \in \mathbb{N}$ и $E \in \mathfrak{M}$ имамо

$$(4.31) \quad \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)x - \int_E \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\| = \sup_{\|y^*\|=1} \left| \int_E \langle (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t)x, y^* \rangle d\mu(t) \right|.$$

Поновном применом Теореме 4.41 добијамо да фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ задовољава услов $\mathcal{AC}_\mu$. Низ $\Omega \ni t \mapsto \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t \in \mathfrak{B}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, је униформно $\mathcal{AC}_\mu$ интеграбилан. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Постоји $\delta > 0$ такво да услови $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) < \delta$ дају неједнакост $\left\| \int_E (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) d\mu(t) \right\| < \varepsilon$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је Y сепарабилан простор, скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \left\| \mathcal{A}_t^{(n)}x - \mathcal{A}_tx \right\| \in \mathbb{R}$ је $\mathfrak{M}$ -мерљива за свако $n \in \mathbb{N}$, на основу дела (а) Леме 4.21. На основу Теореме Јегорова, постоји скуп $E_0 \in \mathfrak{M}$ такав да је

$$\mu(E_0) < \delta \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Omega \setminus E_0} \left\| \mathcal{A}_t^{(n)}x - \mathcal{A}_tx \right\| = 0.$$

Једнакост (4.31) примењена на $\Omega \setminus E_0 \in \mathfrak{M}$ даје да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$(4.32) \quad \begin{aligned} & \left\| \int_{\Omega \setminus E_0} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)x - \int_{\Omega \setminus E_0} \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\| = \\ & = \sup_{\|y^*\|=1} \left| \int_{\Omega \setminus E_0} \langle (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t)x, y^* \rangle d\mu(t) \right| \\ & \leq \sup_{t \in \Omega \setminus E_0} \left\| \mathcal{A}_t^{(n)}x - \mathcal{A}_tx \right\| \cdot \mu(\Omega \setminus E_0) \leq \sup_{t \in \Omega \setminus E_0} \left\| \mathcal{A}_t^{(n)}x - \mathcal{A}_tx \right\| \cdot \mu(\Omega). \end{aligned}$$

Са друге стране, како је $\mu(E_0) < \delta$, имамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$(4.33) \quad \left\| \int_{E_0} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)x - \int_{E_0} \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\| \leq \left\| \int_{E_0} (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) d\mu(t) \right\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\|.$$

Из (4.31), (4.32) и (4.33) добијамо да за произвољно $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$\left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)x - \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\| \leq \sup_{t \in \Omega \setminus E_0} \left\| \mathcal{A}_t^{(n)}x - \mathcal{A}_tx \right\| \cdot \mu(\Omega) + \varepsilon \cdot \|x\|.$$

Због тога, закључујемо да је

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)x - \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t)x \right\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$$

за свако $\varepsilon > 0$. Одавде следи (4.30). □

Наредна теорема даје довољне услове за конвергенцију низа $\left(\int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ка оператору $\int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t)$ у норми простора $\mathfrak{B}(X, Y^{**})$. Ова теорема представља *униформну верзију* Виталијеве теореме.

Теорема 4.44. *Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека су X и Y сепарабилни простори. Ако је скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ униформно $\mathcal{AC}_{\mu}$ интеграбилан у $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и ако је $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ фамилија оператора из $\mathfrak{B}(X, Y)$ таква да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t\| = 0$ за свако $t \in \Omega$ тада је $\mathcal{A} \in L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и важи једнакост*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\Omega} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) - \int_{\Omega} \mathcal{A}_t d\mu(t) \right\| = 0.$$

Доказ. Фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$ је елемент простора $L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ и задовољава услов $\mathcal{AC}_{\mu}$ на основу Теореме 4.41. Зато је скуп функција $\Omega \ni t \mapsto \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t \in \mathfrak{B}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, униформно $\mathcal{AC}_{\mu}$ интеграбилан. Поступимо слично као у претходном тврђењу, Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Постоји $\delta > 0$ такво да из $E \in \mathfrak{M}$ и $\mu(E) < \delta$ следи

$$\left\| \int_E (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) d\mu(t) \right\| < \varepsilon \text{ за свако } n \in \mathbb{N}.$$

На основу сепарабилности простора X и Y имамо да је скаларна функција $\Omega \ni t \mapsto \|\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t\| \in \mathbb{R}$ $\mathfrak{M}$ -мерљива за свако $n \in \mathbb{N}$ (видети део (б) Леме 4.21). Како је $\mu(\Omega) < +\infty$ можемо применити Теорему Јегорова. Дакле, постоји $E_0 \in \mathfrak{M}$ за које је

$$\mu(E_0) < \delta \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Omega \setminus E_0} \|\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t\| = 0.$$

Користећи (4.23) добијамо

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) d\mu(t) \right\| &\leq \left\| \int_{E_0} (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) d\mu(t) \right\| + \left\| \int_{\Omega \setminus E_0} (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) d\mu(t) \right\| \\ &\leq \varepsilon + \int_{\Omega \setminus E_0} \|\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t\| d\mu(t) \\ &\leq \varepsilon + \sup_{t \in \Omega \setminus E_0} \|\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t\| \cdot \mu(\Omega) \text{ за свако } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Зато, имамо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\| \int_{\Omega} (\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t) d\mu(t) \right\| \leq \varepsilon$ за свако $\varepsilon > 0$. Теорема је доказана. $\square$

Следећа теорема представља обрат (Виталијеве) Теореме 4.44. Напоменимо да је доказ који ћемо изложити базиран на сличним идејама као одговарајући доказ ове теореме за скаларне функције (видети [68, Вежбање 10, део (г), Поглавље 6], где је дато и упутство за решење у скаларном случају).

Теорема 4.45. *Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека је скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^1_{pD}(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ такав да фамилија оператора $\mathcal{A}^{(n)}$ задовољава услов $\mathcal{AC}_{\mu}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Ако за свако $E \in \mathfrak{M}$ постоји гранична вредност*

$$(4.34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \in \mathfrak{B}(X, Y^{**})$$

*у $\mathfrak{B}(X, Y^{**})$ -норми, тада је скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ униформно $\mathcal{AC}_{\mu}$ интеграбилан.*

Доказ. За свако $n \in \mathbb{N}$ посматрајмо пресликавање $[E] \mapsto \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t)$ из комплетног метричког простора $([\mathfrak{M}], d_\mu)$ у Банахов простор $\mathcal{B}(X, Y^{**})$. Овако дефинисано пресликавање је непрекидно. Заиста, фамилија $\mathcal{A}^{(n)}$ задовољава $\mathcal{AC}_\mu$ својство и за свако $E, F \in \mathfrak{M}$ имамо да важи неједнакост

$$\left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) - \int_F \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \leq \left\| \int_{E \setminus F} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| + \left\| \int_{F \setminus E} \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\|,$$

што је довољно да изведемо непрекидност разматраног пресликавања. Одаберимо сада $\varepsilon > 0$ произвољно. На основу Леме 1.11 имамо да постоје бројеви $\delta' > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ као и скуп $[E_0] \in [\mathfrak{M}]$ тако да важи

$$\left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t^{(N)} d\mu(t) \right\| = \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) - \int_E \mathcal{A}_t^{(N)} d\mu(t) \right\| < \varepsilon$$

за сваки природан број $n \geq N$ и свако $[E] \in [\mathfrak{M}]$ за које је $d_\mu([E_0], [E]) < \delta'$. За $[E] \in [\mathfrak{M}]$, $\mu(E) < \delta'$ имамо да важе неједнакости¹¹ $d_\mu([E \cup E_0], [E_0]) < \delta'$ и $d_\mu([E_0 \setminus E], [E_0]) < \delta'$, што даје следеће процене:

$$\begin{aligned} \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t^{(N)} d\mu(t) \right\| &= \left\| \int_{E \cup E_0} \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t^{(N)} d\mu(t) - \int_{E_0 \setminus E} \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t^{(N)} d\mu(t) \right\| \\ &\leq \left\| \int_{E \cup E_0} \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t^{(N)} d\mu(t) \right\| + \left\| \int_{E_0 \setminus E} \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t^{(N)} d\mu(t) \right\| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Фамилија оператора $\mathcal{A}^{(N)}$ задовољава $\mathcal{AC}_\mu$ услов по претпоставци теореме. Нека је број $\delta'' > 0$ одабран из дефиниције $\mathcal{AC}_\mu$ својства фамилије $\mathcal{A}^{(N)}$ и нека је $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$. Сада, за свако $[E] \in [\mathfrak{M}]$ са својством $\mu(E) < \delta$ имамо да важи

$$\left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \leq \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t^{(N)} d\mu(t) \right\| + \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(N)} d\mu(t) \right\| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

за сваки природан број n за који је $n \geq N$. Овиме је доказ тврђења завршен јер фамилије оператора $\mathcal{A}^{(k)}$ задовољавају услов $\mathcal{AC}_\mu$ за свако $k \in \{1, \dots, N-1\}$. $\square$

Наредни пример показује да у Теорему 4.45 гранична вредност из (4.34), која је посматрана у норми простора $\mathcal{B}(X, Y^{**})$, не може бити замењена граничном вредношћу која би била посматрана у јаком смислу.

Пример 4.46. Слично као у Примеру 2.29, нека је фамилија оператора $\mathcal{A}_t^{(n)}$ задања са $\mathcal{A}_t^{(n)}x = \sum_{k=1}^n k\chi_{[0, \frac{1}{k}]}(t) \langle x, e_n \rangle e_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$ и $x \in \mathcal{H}$. Нека је $E \subseteq [0, 1]$ Лебеџ мерљив скуп и одаберимо $n \in \mathbb{N}$ произвољно. Тада имамо једнакости

$$\int_E \mathcal{A}_t^{(n)} dm(t) = \sum_{k=1}^n \left(\int_E k\chi_{[0, \frac{1}{k}]}(t) dm(t) \right) e_k \otimes e_k^* = \sum_{k=1}^n k \cdot m \left(\left[0, \frac{1}{k}\right] \cap E \right) e_k \otimes e_k^*.$$

Следи да низ оператора $\left(\int_E \mathcal{A}_t^{(n)} dm(t) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ јако тежи ка $\sum_{k=1}^n k \cdot m \left(\left[0, \frac{1}{k}\right] \cap E \right) e_k \otimes e_k^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, који постоји јер је $(k \cdot m \left(\left[0, \frac{1}{k}\right] \cap E \right))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ док парцијалне суме реда

¹¹Лако се види да важи $(E \cup E_0) \triangle E_0 \subseteq E$ као и $(E_0 \setminus E) \triangle E_0 \subseteq E$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot m\left(\left[0, \frac{1}{k}\right] \cap E\right) \langle x, e_k \rangle e_k$ чине Кошијев низ у $\mathcal{H}$, јер за свако $n, r \in \mathbb{N}$, $n < r$ и све векторе $x \in \mathcal{H}$ имамо

$$\left\| \sum_{k=n}^r k m\left(\left[0, \frac{1}{k}\right] \cap E\right) \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^r \left| k m\left(\left[0, \frac{1}{k}\right] \cap E\right) \right|^2 |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=n}^r |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Дакле, имамо да гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} dm(t)$ постоји и да важи једнакост

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} dm(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot m\left(\left[0, \frac{1}{k}\right] \cap E\right) e_k \otimes e_k^* \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

Са друге стране, скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ нема униформно $\mathcal{A}_\mu$ својство. Заиста, уколико би скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ поседовао униформно $\mathcal{A}_\mu$ својство тада на основу Теореме 4.41 и фамилија оператора $(\mathcal{A}_t)_{t \in [0,1]}$, где је $\mathcal{A}_t := \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot m\left(\left[0, \frac{1}{k}\right] \cap E\right) e_k \otimes e_k^*$ за свако $t \in [0, 1]$, има $\mathcal{A}_\mu$ својство, што није тачно на основу Примера 2.29. $\triangle$

Наредна теорема даје довољне услове да скуп $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ буде униформно $\mathcal{A}_\mu$ интеграбилан.

Теорема 4.47. Нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека је скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(X, Y))$ иако да фамилија $\mathcal{A}^{(n)}$ задовољава услов $\mathcal{A}_\mu$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Ако за свако $E \in \mathfrak{M}$ постоји гранична вредност

$$(4.35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \in \mathfrak{B}(X, Y^{**})$$

и ако постоји $K \in \mathfrak{C}_\infty(X)$ иако да за све $n \in \mathbb{N}$ и $E \in \mathfrak{M}$ важи

$$(4.36) \quad \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \leq \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) K \right\|,$$

онда је скупи $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ униформно $\mathcal{A}_\mu$ интеграбилан.

Доказ. Из (4.35) и из дела (б) Тврђења 4.12 следи да гранична вредност

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) K = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} K d\mu(t) \in \mathfrak{B}(X, Y^{**})$$

постоји у норми простора $\mathfrak{B}(X, Y^{**})$ (овде користимо и Тврђење 1.13). Фамилија оператора $\mathcal{A}^{(n)} K$ задовољава услов $\mathcal{A}_\mu$ на основу неједнакости

$$\left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} K d\mu(t) \right\| = \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) K \right\| \leq \left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \cdot \|K\|$$

која важи за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $E \in \mathfrak{M}$. Сада, можемо применити Теорему 4.45 и закључити да је скуп $\Omega \ni t \mapsto \mathcal{A}_t^{(n)} K \in \mathfrak{B}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, униформно $\mathcal{A}_\mu$ интеграбилан. Зато, на основу (4.36) имамо да је скуп $\{\mathcal{A}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ униформно $\mathcal{A}_\mu$ интеграбилан. $\square$

Напомена 4.48. Напоменимо да је услов (4.36) облика $\|A_\lambda\| \leq \|A_\lambda K\|$, при чему је A_λ дата фамилија оператора (у услову (4.36) оператори на левој страни неједнакости зависе од $n \in \mathbb{N}$ и $E \in \mathfrak{M}$, што је генерално нејребројива фамилија оператора). Сада ћемо навести један од довољних услова када постоји компактн оператор K такав да је неједнакости $\|A_\lambda\| \leq \|A_\lambda K\|$ тачна за свако $\lambda \in \Lambda$ (Λ је неки индексни скуп). Нека је $A_\lambda \in \mathbf{B}(X, Y)$ за свако $\lambda \in \Lambda$, нека је $E \subset X$ потпростор коначне димензије и нека сваки оператор A_λ посмиже своју норму у E тј. нека постоји $x_\lambda \in E$, $\|x_\lambda\| = 1$ такво да је $\|A_\lambda\| = \|A_\lambda x_\lambda\|$ за свако $\lambda \in \Lambda$. Одаберимо за K непрекидну пројекцију на E , која постоји на основу [67, Лема 4.1.9] и [67, Теорема 4.3.3]. Из $\dim E < +\infty$ следи да је $K \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$. Тада, за свако $\lambda \in \Lambda$ важи $\|A_\lambda K\| \geq \|A_\lambda K x_\lambda\| = \|A_\lambda x_\lambda\| = \|A_\lambda\|$.

У наредној теореме дајемо примену слабе (Теорема 4.42), јаке (Теорема 4.43) и униформне (Теорема 4.44) варијанте Виталијеве теореме за операторе на Хилбертовом простору тј. у случају када је $X = Y = \mathcal{H}$. Прецизније, даћемо довољне услове за слабу, јаку и униформну конвергенцију низа оператора $\left(\int_\Omega \mathcal{A}_t^{(n)} X \mathcal{B}_t^{(n)} d\mu(t)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ка оператору $\int_\Omega \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t d\mu(t) \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$.

Теорема 4.49. Нека је $\mathcal{H}$ сејарабилан Хилбертов простор, $X \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ и нека су фамилије $\mathcal{A}^{(n)}$ и $\mathcal{B}^{(n)}$ из $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ такве да су $\left\{|\mathcal{A}^{(n)*}|^2 : n \in \mathbb{N}\right\}$ и $\left\{|\mathcal{B}^{(n)}|^2 : n \in \mathbb{N}\right\}$ униформно $\mathcal{A}\mathcal{C}_\mu$ интеграбилни скупови. Тада је и скуп $\{\mathcal{A}^{(n)} X \mathcal{B}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ униформно $\mathcal{A}\mathcal{C}_\mu$ интеграбилан у $L^1_G(\Omega, \mu, \mathbf{B}(\mathcal{H}))$.

Додајно, нека је $\mu(\Omega) < +\infty$ и нека су $(\mathcal{A}_t)_{t \in \Omega}$, $(\mathcal{B}_t)_{t \in \Omega}$ фамилије из $\mathbf{B}(\mathcal{H})$.

(а) Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t^{(n)} = \mathcal{A}_t$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_t^{(n)} = \mathcal{B}_t$ за свако $t \in \Omega$ тада имамо

$$(4.37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \mathcal{A}_t^{(n)} X \mathcal{B}_t^{(n)} d\mu(t) = \int_\Omega \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t d\mu(t).$$

(б) Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t^{(n)} = \mathcal{A}_t$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_t^{(n)} = \mathcal{B}_t$ за свако $t \in \Omega$ тада имамо

$$(4.38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \mathcal{A}_t^{(n)} X \mathcal{B}_t^{(n)} d\mu(t) = \int_\Omega \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t d\mu(t).$$

(в) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t\| = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{B}_t^{(n)} - \mathcal{B}_t\| = 0$ за свако $t \in \Omega$ тада имамо

$$(4.39) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_\Omega \mathcal{A}_t^{(n)} X \mathcal{B}_t^{(n)} d\mu(t) - \int_\Omega \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t d\mu(t) \right\| = 0.$$

Доказ. На основу услова теореме следи да можемо применити Коши-Шварцову неједнакост из дела (а) Теореме 2.21. Добијамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $E \in \mathfrak{M}$ важи

$$\left\| \int_E \mathcal{A}_t^{(n)} X \mathcal{B}_t^{(n)} d\mu(t) \right\| \leq \sqrt{\left\| \int_E |\mathcal{A}_t^{(n)*}|^2 d\mu(t) \right\| \cdot \left\| \int_E |\mathcal{B}_t^{(n)}|^2 d\mu(t) \right\|} \cdot \|X\|.$$

Зато је скуп $\{\mathcal{A}^{(n)} X \mathcal{B}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ униформно $\mathcal{A}\mathcal{C}_\mu$ интеграбилан.

Докажимо остатак тврђења.

У делу **(а)**, на основу [5, Теорема 11.17], имамо да важи $w\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t^{(n)} X \mathcal{B}_t^{(n)} = \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t$ за свако $t \in \Omega$ па на основу Теореме 4.42 добијамо (4.37).

У делу **(б)**, на основу [5, Теорема 11.16], имамо $s\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t^{(n)} X \mathcal{B}_t^{(n)} = \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t$ за свако $t \in \Omega$ па на основу Теореме 4.43 добијамо (4.38).

У делу **(в)** имамо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{A}_t^{(n)} X \mathcal{B}_t^{(n)} - \mathcal{A}_t X \mathcal{B}_t \right\| = 0$ за свако $t \in \Omega$ па на основу Теореме 4.44 добијамо (4.39). $\square$

Глава 5

Интеграција функција

$$\lambda : X \rightarrow ca(Y, \mathcal{A})$$

У досадашњем тексту ове дисертације радили смо са фамилијама оператора док ћемо у овом поглављу досадашње идеје и искуство које смо стекли у раду са фамилијама оператора применити на фамилије мера (реалних или комплексних). Видећемо да многи резултати које смо изложили у Поглављима 2 и 4 имају своју аналогну варијанту и у овом контексту. Напоменимо да резултати који су наведени у овом поглављу представљају у највећој мери садржај радова [6, 7], при чему су на неким местима дата додатна појашњења која се у поменутих радовима не налазе. Такође, поменути радови третирају фамилије реалних мера, што је углавном само питање изражавања јер уколико бисмо желели да разматрамо и фамилије комплексних мера на некој σ -алгебри то радимо онда то лако постижемо растављањем комплексне мере на њен реални и имагинарни део. У овом поглављу смо се определили да радимо са комплексним мерама па су одговарајући резултати модификовани у том смислу. Са друге стране, поменути радови садрже неке резултате које не наводимо у овој дисертацији јер ти резултати излазе из домена Функционалне анализе али верујемо да ти резултати могу бити од интереса колегама који се баве Топологијом и Теоријом вероватноћа.

Најпре, фиксирајмо нотацију која ће се користити у овом поглављу. Нека је $(X, \mathcal{B}, \mu)$ мерљив простор са коначном мером $\mu \geq 0$ и нека је $(Y, \mathcal{A})$ мерљив простор.

У многим проблемима је корисно користити разне просторе интеграбилних функција на X са вредностима у простору $ca(Y, \mathcal{A})$. Класична конструкција је базирана на Бохнеровом интегралу (видети Поглавље 1) одакле добијамо простор $L_B^1(\mu, E)$ Бохнер интеграбилних функција са вредностима у нормираном простору E . Конкретно, у случају који ће бити разматран имамо Банахов простор $L^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ интеграбилних функција које узимају вредности у просторима реалних или комплексних мера. Овај простор је прилично узак због тога што свака Бохнер интеграбилна функција скоро сигурно узима вредности у сепарабилном потпростору простора E (видети Теорему 1.20), што није испуњено у многим интересантним случајевима. На пример, ако је $f(x) = \delta_x$ Диракова мера у тачки x за свако x из сегмента $[0, 1]$ са Лебеговом мером, тада функција f није Бохнер интеграбилна.

У овом поглављу разматрамо неколико шире дефинисаних класа интеграбилних функција са вредностима у простору мера. Први простор $L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ разматран у Секцији 5.1 састоји се од функција (фамилија) $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ таквих да су функције $X \ni x \mapsto \lambda^x(A) \in \mathbb{C}$ μ -мерљиве а функција $X \ni x \mapsto \|\lambda^x\| \in \mathbb{R}$ је μ -интеграбилна. За пребројиво генерисану σ -алгебру $\mathcal{A}$ показано је да је овај простор Банахов и обично

шири од простора Бохнер интеграбилних функција, који је притом затворен подпростор у $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$. У Секцији 5.2 проучавамо простор $\mathcal{L}(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ функција са мерама које су такође скуп по скуп интеграбилне, али немају обавезно интеграбилну функцију тоталне варијације. Овај простор је обично некомплетан, али под неким додатним претпоставкама које се тичу простора Y , подскуп простора $\mathcal{L}(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ који се састоји од функција са вредностима у ненегативним мерама је комплетан у односу на метрику простора $\mathcal{L}(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$. У Секцији 5.3 се бавимо мерљивим фамилијама L^p простора. На крају, у Секцији 5.4 уводимо простор фамилија мера које имају μ -интеграбилну Канторович¹-Рубинштајнову² норму. Овај простор је такође обично некомплетан, али његов потпростор функција са вредностима у скупу ненегативних и коначних мера је комплетан у односу на одговарајућу метрику.

5.1 Простор $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ фамилија мера са интеграбилном варијацијом

Започнимо ову секцију са две битне дефиниције, које одређују тип мерљивости фамилија мера као и нормиране просторе оваквих фамилија мера које ћемо разматрати у наставку. Ради подсећања, за дату меру $\lambda \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{A})$ користимо равноправно ознаке $\|\lambda\|$ и $|\lambda|(Y)$.

Дефиниција 5.1. За фамилију $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ (реалних или комплексних) мера на $\mathcal{A}$ кажемо да је $\mathcal{B}$ -мерљива уколико је функција $X \ni x \mapsto \lambda^x(A) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$ -мерљива за свако фиксирано $A \in \mathcal{A}$.

Дефиниција 5.2. Фамилије (реалних или комплексних) мера $(\lambda_1^x)_{x \in X}$ и $(\lambda_2^x)_{x \in X}$ на σ -алгебри $\mathcal{A}$ су слабо μ -еквивалентне уколико су оне $\mathcal{B}$ -мерљиве и ако за свако $A \in \mathcal{A}$ важи једнакост $\lambda_1^x(A) = \lambda_2^x(A)$ за μ -скоро свако $x \in X$. Скупи класа слабо μ -еквивалентних функција (фамилија) $(\lambda^x)_{x \in X}$ са вредностима у простору $\mathcal{C}(Y, \mathcal{A})$ таквих да је $\int_X \|\lambda^x\| d\mu(x) < +\infty$ ћемо означаваћи са $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$.

Приметимо да је у Дефиницији 5.2 објекат $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ за сада само скуп, тј. још не знамо да је у питању векторски простор са стандардно дефинисаним операцијама.

Овде се природно поставља питање о односу оваког начина идентификације $\mathcal{B}$ -мерљивих фамилија мера који је уведен Дефиницијом 5.2 и стандардног биће једнак скоро свуда. Оваква питања са већ третирана у раду са интеграбилним фамилијама ограничених оператора (видети Лему 4.22). Наиме, имамо следеће тврђење које је базирано на Лему о монотоним класама (Лема 1.8).

Лема 5.3. Нека је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана. Ако је фамилија (реалних или комплексних) мера $(\lambda^x)_{x \in X}$ слабо μ -еквивалентна нула фамилији тада постоји скуп $N \in \mathcal{B}$ за који важи $\mu(N) = 0$ и $\lambda^x = 0 \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{A})$ за свако $x \in X \setminus N$.

Доказ. Постоји пребројива алгебра скупова $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ која генерише σ -алгебру $\mathcal{A}$. За сваки скуп $A \in \mathcal{A}_0$ постоји скуп $N_A \in \mathcal{B}$ такав да је $\mu(N_A) = 0$ и за који важи $\lambda^x(A) = 0$

¹Леонид Виталевич Канторович (1912–1986), совјетски математичар, добитник Нобелове награде за економију

²Геннадий Шлемович Рубинштейн (1923–2004), совјетски математичар

за свако $x \in X \setminus N_A$. Нека је $N = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_0} N_A$. Како је $\mathcal{A}_0$ пребројив скуп имамо $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$ и $\lambda^x(A) = 0$ за свако $x \in X \setminus N$ и свако $A \in \mathcal{A}_0$. Фамилија скупова

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} : \lambda^x(A) = 0 \text{ за свако } x \in X \setminus N\}$$

представља монотону класу и то следи из чињенице да је свака реална или комплексна мера непрекидна и одоздо и одозго (видети [9, Тврђење 9.7, Поглавље 9]). Прецизније, ако је $A_n \in \mathcal{N}$ и $A_n \subseteq A_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ тада имамо

$$\lambda^x\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^x(A_n) = 0 \text{ за свако } x \in X \setminus N.$$

Слично, ако је $A_n \in \mathcal{N}$ и $A_{n+1} \subseteq A_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ тада имамо

$$\lambda^x\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^x(A_n) = 0 \text{ за свако } x \in X \setminus N.$$

Како фамилија скупова $\mathcal{N}$ садржи $\mathcal{A}_0$, на основу Леме о Монотоним класама (видети Лему 1.8) имамо да $\mathcal{N}$ садржи и најмању σ -алгебру генерисану са $\mathcal{A}_0$ а то је $\mathcal{A}$. Дакле, важи $\mathcal{N} = \mathcal{A}$ па закључујемо да је $\lambda^x = 0 \in ca(Y, \mathcal{A})$ за свако $x \in X \setminus N$. $\square$

Ако је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана, покажећемо да скуп $L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ заправо векторски простор као и то да се може нормирати изразом

$$(5.1) \quad \|f\|_1 = \int_X \|f(x)\| d\mu(x).$$

Такође, биће доказана и комплетност уведене норме.

Напоменимо да μ -интеграбилност функције $X \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ укључује њену μ -мерљивост. Напоменимо још да $\mathcal{B}$ -мерљивост функција $X \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ и $X \ni x \mapsto \|g(x)\| \in \mathbb{R}$ не повлачи $\mathcal{B}$ -мерљивост функције $X \ni x \mapsto \|f(x) + g(x)\| \in \mathbb{R}$. Овај проблем се не јавља код пребројиво генерисаних σ -алгебри на Y , јер ћемо доказати да у таквом случају $\mathcal{B}$ -мерљивост функције $X \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ следи из $\mathcal{B}$ -мерљивости функција $X \ni x \mapsto f(x)(A) \in \mathbb{C}$ за фиксирано $A \in \mathcal{A}$.

Штавише, довољно је имати мерљивост таквих функција за скупове A из пребројиве алгебре која генерише $\mathcal{A}$. Заиста, уколико је функција $X \ni x \mapsto f(x)(A) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$ -мерљива за свако фиксирано $A \in \mathcal{A}_0$ тада можемо посматрати фамилију скупова

$$\{A \in \mathcal{A} : X \ni x \mapsto f(x)(A) \in \mathbb{C} \text{ је } \mathcal{B}\text{-мерљива}\}.$$

Ова фамилија чини монотону класу и садржи $\mathcal{A}_0$ па по Леми о монотоним класама добијамо жељени закључак.

Мерљивост функција задатих преко тоталне варијације мере

На кратко, ограничимо наша разматрања на реалне фамилије мера.

Лема 5.4. [6, 7] Нека је σ -алгебра $\mathcal{A}$ генерисана пребројивом алгебром $\mathcal{A}_0$ и нека је $f(x)$ реална мера на $\mathcal{A}$ за свако $x \in X$. Претпоставимо да је за свако $A \in \mathcal{A}$ скаларна функција $X \ni x \mapsto f(x)(A) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљива. Тада су за свако $E \in \mathcal{A}$ функције

$$X \ni x \mapsto f(x)^+(E) \in \mathbb{R}, \quad X \ni x \mapsto f(x)^-(E) \in \mathbb{R}, \quad X \ni x \mapsto |f(x)|(E) \in \mathbb{R},$$

такође $\mathcal{B}$ -мерљиве.

Доказ. Нека је најпре $E = Y$. За свако фиксирано $x \in X$ важе једнакости

$$(5.2) \quad f(x)^+(Y) = \sup\{f(x)(A) : A \in \mathcal{A}\} = \sup\{f(x)(A) : A \in \mathcal{A}_0\},$$

$$(5.3) \quad f(x)^-(Y) = -\inf\{f(x)(A) : A \in \mathcal{A}\} = -\inf\{f(x)(A) : A \in \mathcal{A}_0\}.$$

Наиме, прве једнакости у (5.2) и (5.3) следе директно на основу Ханове декомпозиције реалне мере (видети [9, Вежбање 8, Глава 9]), док друге једнакости у (5.2) и (5.3) следе на основу Леме 1.6. Дакле, функција $X \ni x \mapsto f(x)^+(Y) \in \mathbb{R}$ је представљена као тачка по тачка супремум пребројивог скупа $\mathcal{B}$ -мерљивих функција, док је функција $X \ni x \mapsto f(x)^-(Y) \in \mathbb{R}$ представљена као инфимум тачка по тачка пребројивог скупа $\mathcal{B}$ -мерљивих функција. Одавде следи $\mathcal{B}$ -мерљивост прве две функције а одатле добијамо и $\mathcal{B}$ -мерљивост функције $X \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ јер за свако $x \in X$ важи једнакост $\|f(x)\| = f(x)^+(Y) + f(x)^-(Y)$.

Размотримо сада произвољан скуп $E \in \mathcal{A}$. Овај случај сводимо на доказан део преласком на *шраи* σ -алгебру $\mathcal{A}|_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$. Наиме, ако пребројива алгебра $\mathcal{A}_0 = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ генерише σ -алгебру $\mathcal{A}$, онда пребројива алгебра скупова $\{A_n \cap E : n \in \mathbb{N}\}$ генерише σ -алгебру $\mathcal{A}|_E$. Заиста, σ -алгебра $\mathcal{A}$ је генерисана функцијом $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ која је задата изразом $\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} \chi_{A_n}$, тј. важи $\mathcal{A} = \{\xi^{-1}(C) : C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$, одакле следи једнакост $\mathcal{A}|_E = \{\xi^{-1}(C) \cap E : C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$, што значи да је $\mathcal{A}|_E$ генерисана функцијом $\xi|_E$. Остаје само да применимо оно што смо доказали на фамилију мера $(f(x))_{x \in X}$, коју сада посматрамо на σ -алгебри $\mathcal{A}|_E$. $\square$

Следећи једноставан пример показује да за произвољну σ -алгебру $\mathcal{A}$ Лема 5.4 не мора бити тачна.

Пример 5.5. Нека је на скупу $X = [0, 1]$ дата Борелова σ -алгебра $\mathcal{B}$ и Лебејева мера m и нека је $Y = [0, 1]$ са σ -алгебром $\mathcal{A}$ генерисаном свим једноелементним скуповима $\{y\}$, $y \in [0, 1]$. Одаберимо неку функцију $\varphi : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$ која није Лебеј мерљива и дефинишимо реалну меру

$$f(x) = (1 + \varphi(x)) \cdot \delta_x - \varphi(x) \cdot \delta_{\frac{x}{2}} \text{ за свако } x \in X.$$

Тада важи једнакост $f(x)([0, 1]) = 1$ за свако $x \in [0, 1]$.

За било које $a \in [0, 1]$ функција $[0, 1] \ni x \mapsto f(x)(\{a\}) \in \mathbb{R}$ је $\mathcal{B}$ -мерљива, јер је једнака нули за свако $x \in [0, 1] \setminus \{a, 2a\}$. Дакле, функција $[0, 1] \ni x \mapsto f(x)(A) \in \mathbb{R}$ је $\mathcal{B}$ -мерљива за све $A \in \mathcal{A}$, јер се σ -алгебра $\mathcal{A}$ састоји од свих скупова A из $[0, 1]$ који су пребројиви или чији су комплементи $[0, 1] \setminus A$ пребројиви. Међутим, за $x \in (0, 1]$ важи

$$\begin{aligned} |f(x)|([0, 1]) &= |f(x)|(\{x\}) + |f(x)|\left(\left\{\frac{x}{2}\right\}\right) + |f(x)|\left([0, 1] \setminus \left\{\frac{x}{2}, x\right\}\right) \\ &= |1 + \varphi(x)| + |-\varphi(x)| + 0 = 1 + 2\varphi(x) \end{aligned}$$

као и $|f(0)|([0, 1]) = \delta_0([0, 1]) = 1$. Одавде следи да функција

$$[0, 1] \ni x \mapsto \|f(x)\| = |f(x)|([0, 1]) \in \mathbb{R}$$

није Лебеј мерљива. $\triangle$

Напомена 5.6. Напоменимо да из Леме 5.4 и Примера 5.5 следи да σ -алгебра $\mathcal{A} = \sigma(\{\{y\} : y \in [0, 1]\})$ на $[0, 1]$ није пребројиво генерисана.

Пређимо сада на фамилије комплексних мера. Одговарајуће мерљивости не можемо добити директно растављањем сваке од мера λ^x на њен реални и имагинарни део и применом Леме 5.4. Зато, размотримо овај проблем на други начин, користећи Лему 1.3 коју смо доказали у Поглављу 1.

Лема 5.7. *Нека је $\mathcal{A}_0$ пребројива подалебра у $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$ и нека је $(\lambda^x)_{x \in X}$ $\mathcal{B}$ -мерљива фамилија мера на $\mathcal{A}$. Тада је за свако $A \in \mathcal{A}_0$ функција $X \ni x \mapsto |\lambda^x|(A) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљива.*

Доказ. Користећи (1.5), за свако $A \in \mathcal{A}_0$ добијамо да важи једнакост

$$|\lambda^x|(A) = \sup_{P \in \pi(A)} \sum_{C \in P} |\lambda^x(C)| \text{ за све } x \in X.$$

Функција $\phi_P : X \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана изразом $\phi_P(x) = \sum_{C \in P} |\lambda^x(C)|$ за свако $x \in X$ је $\mathcal{B}$ -мерљива за сваку фиксирану партицију $P \in \pi(A)$. Алгебра $\mathcal{A}_0$ је по претпоставци пребројива одакле следи да је скуп $\pi(A)$ пребројив и због тога тражена мерљивост следи директно на основу једнакости $|\lambda^x|(A) = \sup_{P \in \pi(A)} \phi_P(x)$ која важи за свако $x \in X$. $\square$

Лема 5.7 је посебан случај следеће теореме.

Теорема 5.8. *Нека је $\mathcal{A}$ σ -алгебра на Y генерисана пребројивом подалебром $\mathcal{A}_0$ и нека је $(\lambda^x)_{x \in X}$ $\mathcal{B}$ -мерљива фамилија на $\mathcal{A}$. Ако је $A \in \mathcal{A}$ тада је скаларна функција $X \ni x \mapsto |\lambda^x|(A) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљива.*

Доказ. Дефинишимо фамилију скупова

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} : X \ni x \mapsto |\lambda^x|(A) \in \mathbb{C} \text{ је } \mathcal{B}\text{-мерљива функција}\}.$$

На исти начин као и у доказу Леме 5.3 добијамо да је фамилија скупова $\mathcal{M}$ чини монотону класу на скупу Y . На основу Леме 5.7 имамо да $\mathcal{M}$ садржи $\mathcal{A}_0$ па на основу Леме 1.8 следи тврђење. $\square$

Напомена 5.9. *У радовима [6, 7] су разматране реалне фамилије мера па је Лема 5.4 била довољна. Како у овој дисертацији ширењемо фамилије комплексних мера долази до употребе за резултатом из Теореме 5.8.*

Комплетност, потпростори и оператори на $L_w^1(\mu, \sigma(Y, \mathcal{A}))$

На основу тврђења добијених у прошлој секцији имамо могућност да посматрамо интеграл $\int_X \|\lambda^x\| d\mu(x)$ у случају пребројиво генерисане σ -алгебре $\mathcal{A}$ јер је у том случају подинтегрална функција $\mathbb{R} \ni x \mapsto \|\lambda^x\| \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљива.

Тврђење 5.10. [6] *Нека је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана. Тада је $L_w^1(\mu, \sigma(Y, \mathcal{A}))$ векторски простор који постоје Банахов са нормом $\|\cdot\|_1$ датом у (5.1).*

Доказ. За било који елемент $f \in L_w^1(\mu, \sigma(Y, \mathcal{A}))$ постоји представник класе такав да је скаларна функција $X \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљива (видети Теорему 5.8). Дакле, ако је $f, g \in L_w^1(\mu, \sigma(Y, \mathcal{A}))$ тада имамо $\alpha f + \beta g \in L_w^1(\mu, \sigma(Y, \mathcal{A}))$ за све скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Овиме закључујемо да је $L_w^1(\mu, \sigma(Y, \mathcal{A}))$ векторски простор. Јасно је да функција $\|\cdot\|_1$ представља норму на овом простору. Нека је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ у нормираном простору $L_w^1(\mu, \sigma(Y, \mathcal{A}))$. Можемо претпоставити да је $f_1 = 0 \in L_w^1(\mu, \sigma(Y, \mathcal{A}))$ као и то да радимо са конкретним представницима класе еквиваленција простора $L_w^1(\mu, \sigma(Y, \mathcal{A}))$

(видети Дефиницију 5.2). Преласком на подниз, можемо без губитка на општости претпоставити да је $\|f_{n+1} - f_n\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Одавде следи да је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X \|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| d\mu(x) < +\infty \quad \mu\text{-скоро свуда на } X.$$

Дакле, за μ -скоро свако $x \in X$ имамо да конвергира и $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_{n+1}(x) - f_n(x)\|$. Како је $\mathcal{C}(Y, \mathcal{A})$ Банахов простор закључујемо да за свако такво x ред $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{n+1}(x) - f_n(x)$ конвергира у норми која је задата преко тоталне варијације. Одавде следи да је гранична вредност

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{A})$$

дефинисана μ -скоро свуда на X . Такође, функција $X \ni x \mapsto f(x)(A) \in \mathbb{C}$ је μ -мерљива за било који скуп $A \in \mathcal{A}$ јер важи једнакост

$$f(x)(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)(A)$$

μ -скоро свуда на X . Докажимо сада да низ фамилија мера $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира ка елементу f у норми $\|\cdot\|_1$ простора $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$. Одаберимо зато $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ у $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ имамо да постоји број $N \in \mathbb{N}$ такав да из $n, k \in \mathbb{N}$ и $n, k \geq N$ следи

$$\|f_n - f_k\|_1 = \int_X \|f_n(x) - f_k(x)\| d\mu(x) \leq \varepsilon.$$

Ако сада узмемо да $k \rightarrow \infty$, применом Фатуове леме добијамо

$$\|f - f_k\|_1 = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_k(x)\| d\mu(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X \|f_n(x) - f_k(x)\| d\mu(x) \leq \varepsilon.$$

Доказали смо да важи $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$ за свако $n \geq N$ одакле је $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_1 = 0$. $\square$

Напоменимо да простор $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ не мора бити *Бохнеровој шми*³, што следи на основу Примера 5.25. Такође, индекс w (од речи *weak*) у ознаци $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ потиче од тога што је у питању простор који је на сличан али на општији тј. на слабији начин дефинисан него што је простор $L_B^1(X, \mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$. Наиме, у овом случају се не захтева јака мерљивост тј. μ -мерљивост елемената из $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$.

Скуп $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ у општем случају не мора бити ни векторски простор јер се може десити да норма збира два елемента из $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ не мора задавати мерљиву функцију. Претпоставка да је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана је битна у Тврђењу 5.10, што показује следећи пример.

Пример 5.11. [6] Нека је $X = [0, 1]$ са Бореловом σ -алгебром $\mathcal{B}_{[0,1]}$ и Лебејовом мером m и нека је $Y = [0, 1]$ са σ -алгебром $\mathcal{A}$ генерисаном свим једночланим скуновима (ко-пребројива σ -алгебра). Изаберимо било коју функцију $g : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$ која није Лебеј мерљива и дефинишемо пресликавања $f_1, f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ изразима

$$f_1(x) = 2\delta_x, \quad f_2(x) = -g(x) \cdot \delta_{\frac{x}{2}} + g(x) \cdot \delta_x \quad \text{за свако } x \in [0, 1].$$

³Простор који се састоји од јако мерљивих функција чија је норма интеграбилна.

Функција $[0, 1] \ni x \mapsto \|f_1(x)\| \in \mathbb{R}$ је Борел-мерљива, јер важи једнакост $\|\delta_x\| = 1$ за свако $x \in [0, 1]$. Такође, за сваку тачку $a \in [0, 1]$ вредности $f_2(x)(\{a\})$ може се разликовати од нуле евентуално у тачкама $x = a$ и $x = 2a$ јер је $f_2(x)(\{a\}) = g(x) \cdot (\delta_x(\{a\}) - \delta_{x/2}(\{a\}))$ па је функција $[0, 1] \ni x \mapsto f_2(x)(\{a\}) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}_{[0,1]}$ -мерљива. Одавде следи да је функција $[0, 1] \ni x \mapsto f_2(x)(A) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}_{[0,1]}$ -мерљива за сваки пребројив скуп $A \subset [0, 1]$. Сада можемо закључити да је функција $[0, 1] \ni x \mapsto f_2(x)(A) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}_{[0,1]}$ -мерљива за свако $A \in \mathcal{A}$ јер је $f_2(x)([0, 1]) = 0$. Поред тога, $\|f_2(x)\| = 2|g(x)| = 2$ ако је $x \in (0, 1]$. Са групе сирене, за свако $x \in (0, 1]$ имамо једнакост

$$f_1(x) + f_2(x) = (2 + g(x)) \cdot \delta_x - g(x) \cdot \delta_{\frac{x}{2}},$$

па за све такве x важи

$$\|f_1(x) + f_2(x)\| = |2 + g(x)| + |g(x)| = 3 + g(x).$$

Одавде следи да функција $[0, 1] \ni x \mapsto \|f_1(x) + f_2(x)\| \in \mathbb{R}$ није Лебег мерљива. $\triangle$

Сада ћемо посматрати ограничене операторе на простору $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ који се природно јављају. Такође, посматраћемо потпросторе у $L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ који настају из директног разлагања простора $\mathcal{C}(Y, \mathcal{A})$ на затворене потпросторе $\mathcal{C}_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A})$ и $\mathcal{C}_\nu^s(Y, \mathcal{A})$, за фиксирану σ -коначну меру ν на σ -алгебри $\mathcal{A}$.

За дати скуп $A \in \mathcal{A}$ дефинишимо линеарни оператор

$$T_A : L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A})) \rightarrow L^1(X, \mu)$$

изразом $T_A(\Lambda) = (\lambda^x(A))_{x \in X}$ за свако $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$.

Тврђење 5.12. *Линеарни оператор $T_A : L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A})) \rightarrow L^1(X, \mu)$ је ограничен и важи $\|T_A\| \leq 1$ за свако $A \in \mathcal{A}$. Ако је $\emptyset \neq A \in \mathcal{A}$ тада важи $\|T_A\| = 1$. Ако је $L^1(X, \mu)$ бесконачне димензије тада је T_A компактан оператор ако и само ако је $A = \emptyset$.*

Доказ. Нека је $A \in \mathcal{A}$ и $A \neq \emptyset$. За све фамилије $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in L_w^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ имамо

$$\|T_A(\Lambda)\|_{L^1(X, \mu)} = \int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x) \leq \int_X |\lambda_x|(Y) d\mu(x) = \|\Lambda\|_1.$$

Одавде следи да је T_A ограничен и да важи $\|T_A\| \leq 1$.

Претпоставимо сада да је $A \neq \emptyset$ и изаберимо $y \in A$. Нека је $\lambda^x = \chi_A(x)\delta_y$ за свако $x \in X$, где је $B \in \mathcal{B}$ изабран тако да важи $0 < \mu(B) < +\infty$. Тада је $\|\Lambda\|_1 = \mu(A)$ и $T_A\Lambda = \chi_A$, па закључујемо $\|T_A\Lambda\|_{L^1(X, \mu)} = \mu(A)$. Дакле, имамо једнакост $\|T_A\| = 1$.

Нека је сада $L^1(X, \mu)$ простор бесконачне димензије и изаберимо ограничен низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у $L^1(X, \mu)$ који нема конвергентан подниз у норми простора $L^1(X, \mu)$. Даље, претпоставимо да је $A \in \mathcal{A}$ непразан скуп и одаберимо $y \in A$. Уколико дефинишемо $\lambda_n^x = f_n(x)\delta_y$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in X$, користећи $\delta_y(B) = 1$ и $|\delta_y|(Y) = 1$ добијамо $\|\lambda_n\| = \int_X |f_n(x)| \cdot |\delta_y|(Y) d\mu(x) = \|f_n\|_{L^1(X, \mu)}$ и слично

$$\|T_A\Lambda_n - T_A\Lambda_m\|_{L^1(\mu)} = \int_X |f_n(x) - f_m(x)| \cdot |\delta_y(A)| d\mu(x) = \|f_n - f_m\|_{L^1(\mu)}$$

за све $n, m \in \mathbb{N}$. Одавде следи да T_A није компактан оператор. $\square$

Дефиниција 5.13. Нека је ν позитивна мера на $\mathcal{A}$. Векторски простор простора $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ који се састоји од оних $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ за које важи $\lambda^x \ll \nu$ за μ -скоро свако $x \in X$ је означен са $L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))$. Векторски простор у $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ који се састоји од оних $\Lambda \in L^1(X, \mathfrak{M}, \mu; \text{sa}(Y, \mathfrak{N}))$ таквих да је $\lambda^x \perp \nu$ за μ -скоро свако $x \in X$ је означен са $L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^s(Y, \mathcal{A}))$.

Тврђење 5.14. Нека је дапа σ -коначна мера ν на σ -алгебри $\mathcal{A}$. Тада су $L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))$ и $L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^s(Y, \mathcal{A}))$ затворени у Банаховом простору $L^1(X, \mu; \text{sa}(Y, \mathfrak{N}))$. Специјално, имамо да су простори $L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))$ и $L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^s(Y, \mathcal{A}))$ Банахови са нормом (5.1) наслеђеном од $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$.

Доказ. Користећи нотацију из Тврђења 5.12 имамо да важи једнакост

$$L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A})) = \bigcap \{ \text{Ker}(T_A) : A \in \mathcal{A}, \nu(A) = 0 \}.$$

Заиста, по дефиницији оператора $T_A : L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A})) \rightarrow L^1(X, \mu)$ имамо

$$\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in \bigcap \{ \text{Ker}(T_A) : A \in \mathcal{A}, \nu(A) = 0 \}$$

ако и само ако услови $A \in \mathcal{A}$ и $\nu(A) = 0$ повлаче $\lambda^x(B) = 0$ за μ -скоро свако $x \in X$. Последње је еквивалентно са $\lambda^x \ll \nu$ за μ -скоро свако $x \in X$ тј. $(\lambda^x)_{x \in X} \in L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))$. Како је $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ Банахов простор и како је линеарни оператор T_B непрекидан, први део тврђења следи.

Да бисмо доказали други део тврђења одаберимо $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))$ произвољно. Такође, нека елемент $\Lambda_n = (\lambda_x^n)_{x \in X}$ припада простору $L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^s(Y, \mathcal{A}))$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и претпоставимо да важи једнакост $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda_n - \Lambda\|_1 = 0$. Користећи претпоставку $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |\lambda_x^n - \lambda_x|(Y) d\mu(x) = 0$ можемо наћи подниз $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ и скуп $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$ такав да је $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_x^{n_k} - \lambda^x|(Y) = 0$ за свако $k \in \mathbb{N}$ и $x \in X \setminus N$. Простор $\text{sa}_\nu^s(Y, \mathfrak{N})$ је затворен у Банаховом простору $\text{sa}(Y, \mathfrak{N})$. Зато, имамо да је $\lambda^x \in \text{sa}_\nu^s(Y, \mathfrak{N})$ за свако $x \in X \setminus N$. Последње нам даје $\Lambda \in L_w^1(\mu, \text{sa}_\nu^s(Y, \mathcal{A}))$. $\square$

Дезинтеграције мера

У овом кратком одељку ћемо указати на једну значајну теорему Теорије мере и интеграције која се тиче фамилије мера на истој σ -алгебри и која, између осталог, представља мотивацију при истраживањима у овом поглављу дисертације. У питању је тврђење о *дезинтеграцијама мера*. Уведени простор фамилија мера из Секције 5.1 садржи фамилије мера које се јављују у процесу дезинтеграције из поменуе теореме.

Наиме, нека је $F : X \rightarrow Y$ ($\mathcal{B}, \mathcal{A}$)-мерљива функција и нека је σ мера на $(Y, \mathcal{A})$ која је слика мере μ на $(X, \mathcal{B}_X)$ у односу на F , тј. нека је мера σ дефинисана формулом

$$\sigma(A) = (\mu \circ F^{-1})(A) := \mu(F^{-1}(A)) \quad \text{за свако } A \in \mathcal{A}.$$

Познато је (видети [13, Поглавље 10]) да под широким претпоставкама (нпр. када су X и Y Суслинови⁴ простори са својим Бореловим σ -алгебрама $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$ редом и када је F Борелова функција) постоје Борелове вероватносне мере μ^y на X , при чему је $y \in Y$, које се називају *кондиционалне мере*, тако да за σ -скоро свако $y \in Y$ важи

$$(5.4) \quad \mu^y(\{x \in X : F(x) = y\}) = 1,$$

⁴Михаил Яковлевич Суслин (1894–1919), руски математичар

функције $Y \ni y \mapsto \mu^y(B) \in \mathbb{C}$ су $\mathcal{B}_Y$ -мерљиве за све $B \in \mathcal{B}$ и важи једнакост

$$\mu(B) = \int_Y \mu^y(B) d\sigma(y) \text{ за свако } B \in \mathcal{B}.$$

Како је μ^y вероватносна мера на X и како важи једнакост (5.4) закључујемо да је μ^y сконцентрисана на скупу $F^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{B}$ па је фамилија мера $(\mu^y)_{y \in Y}$ састављена од међусобно сингуларних мера (до на скуп који има меру нула у односу на меру σ). Очекивано, функција $Y \ni y \mapsto \mu^y \in \mathcal{C}(X, \mathcal{B})$ није Бохнер σ -интеграбилна на Y јер је

$$\|\mu^{y_1} - \mu^{y_2}\| \geq |\mu^{y_1} - \mu^{y_2}|(F^{-1}(\{y_1\})) + |\mu^{y_1} - \mu^{y_2}|(F^{-1}(\{y_2\})) = 2$$

кад год је $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \neq y_2$, што даље значи да није испуњен први услов Петисове теореме о мерљивости (видети Теорему 1.20). Такође, очигледно функција $Y \ni y \mapsto \mu^y \in \mathcal{C}(X, \mathcal{B})$ припада простору $L_w^1(\sigma, \mathcal{C}(X, \mathcal{B}))$ јер је $\|\mu^y\| = 1$ за свако $y \in Y$ и $\sigma(Y) = \mu(F^{-1}(Y)) = \mu(X) < +\infty$ па је $\int_Y \|\mu^y\| d\sigma(y) = \sigma(Y) < +\infty$.

Уколико μ није коначна мера, а самим тим ни σ , онда фамилија мера $(\mu^y)_{y \in Y}$ не припада простору $L_w^1(\sigma, \mathcal{C}(X, \mathcal{B}))$ али ће припадати ширем простору који ће бити дефинисан у главној секцији овог поглавља дисертације, тј. у Секцији 5.2 која следи одмах у наставку.

5.2 Простор $\mathfrak{L}(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ скуп по скуп интеграбилних фамилија мера

Нека су $(X, \mathcal{B})$ и $(Y, \mathcal{A})$ мерљиви простори и $\lambda \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{A})$. Ако је f нека $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљива функција на $X \times Y$ која је λ -интеграбилна по $y \in Y$ за свако фиксирано $x \in X$, тада је функција $X \ni x \mapsto \int_Y f(x, y) d\lambda(y) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$ -мерљива. Наведени резултат је класичан и може се наћи у [13, Поглавље 3]. Сада ћемо доказати да важи и више, тј. да уместо са једном мером λ у горњем изразу можемо радити и са фамилијом мера $(\lambda^x)_{x \in X}$. Наредно тврђење се јавља у [7]. Дајемо детаљан доказ због тога што ће се ово тврђење користити често у наставку овог поглавља.

Тврђење 5.15. *Нека је даћа $\mathcal{B}$ -мерљива фамилија $(\lambda^x)_{x \in X}$ мера из $\mathcal{C}(Y, \mathcal{A})$ и $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљива функција $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$. Ако је за свако фиксирано $x \in X$ функција*

$$Y \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$$

интеграбилна у односу на меру λ^x , тада је скаларна функција

$$(5.5) \quad X \ni x \mapsto \int_Y f(x, y) d\lambda^x(y) \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{B}$ -мерљива.

Доказ. Приметимо најпре да је довољно доказати тврђење за ограничене $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљиве функције на скупу $X \times Y$, које су још и реално вредносне. Користећи униформну апроксимацију мерљиве функције простим функцијама закључујемо да је довољно доказати ово тврђење уколико је $f = \chi_C$ за $C \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$. Заиста, уколико низ $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ простих, $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљивих функција равномерно конвергира на $X \times Y$ ка f тада важи

$|\int_Y (f(x, y) - s_n(x, y)) d\lambda^x(y)| \leq \sup_{(x, y) \in X \times Y} |f(x, y) - s_n(x, y)| \cdot |\lambda^x|(Y)$ за свако $x \in X$ и свако $n \in \mathbb{N}$. Одавде добијамо да је испуњена једнакост

$$\int_Y f(x, y) d\lambda^x(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y s_n(x, y) d\lambda^x(y) \text{ за свако } x \in X,$$

која је довољна да изведемо жељену мерљивост функције дате у (5.5). Дакле, у случају $f = \chi_C$ стандардна примена Леме о монотоним класама (видети Лему 1.8) даје жељени закључак. Заиста, фамилија $\mathcal{F}$ свих скупова C из σ -алгебре $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ за коју је функција $X \ni x \mapsto \int_Y \chi_C(x, y) d\lambda^x(y) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљива садржи мерљиве правоугаонике из $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, јер уколико је $C = B \times A$ за неке $B \in \mathcal{B}$ и $A \in \mathcal{A}$ тада је

$$\int_Y \chi_{A \times B}(x, y) d\lambda^x(y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \notin B \\ \lambda^x(A), & \text{ако је } x \in B \end{cases} = \chi_B(x) \cdot \lambda^x(B),$$

што дефинише $\mathcal{B}$ -мерљиву функцију јер је фамилија мера $(\lambda^x)_{x \in X}$ по претпоставци $\mathcal{B}$ -мерљива. Одавде следи да фамилија $\mathcal{F}$ садржи и коначне уније таквих мерљивих правоугаоника, тј. садржи алгебру генерисану $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљивим правоугаоницима.

Докажимо да је $\mathcal{F}$ монотона класа. Уколико је $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ елемената из $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, за који је $C_n \subseteq C_{n+1}$, $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ или $C_{n+1} \subseteq C_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, тада је $\chi_C(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{C_n}(x, y)$ за свако $(x, y) \in X \times Y$ па је на основу ТДК испуњено

$$\int_Y \chi_C(x, y) d\lambda^x(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y \chi_{C_n}(x, y) d\lambda^x(y) \text{ за свако } x \in X.$$

На основу горње једнакости следи $C \in \mathcal{F}$ па применом Леме о монотоним класама закључујемо $\mathcal{F} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$. $\square$

Ако је функција f ограничена и уколико је функција $X \ni x \mapsto \|\lambda^x\| \in \mathbb{R}$ μ -интеграбилна, тада је функција задата интегралом из (5.5) заправо μ -интеграбилна на X јер важи $\int_X |\int_Y f(x, y) d\lambda^x(y)| d\mu(x) \leq \sup_{(x, y) \in X \times Y} |f(x, y)| \int_X \|\lambda^x\| d\mu(x) < +\infty$.

Теорема о мерљивом разлагању фамилије мера

Наредно тврђење говори о томе да у процесу разлагања мерљиве фамилије мера на две фамилије, једну која је апсолутно непрекидна, другу која је сингуларна у односу на дату фамилију мера (тачка по точка), добијамо опет мерљиве фамилије мера. Напоменимо да је овај резултат варијанта стандардних чињеница које воде порекло од класичног рада [18]. Видети такође [13, Вежбање 6.10.72]. Претпостављамо да је σ -алгебра на којој су ове фамилије дефинисане пребројиво генерисана.

Теорема 5.16. [7] Нека је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана и нека су дате $\mathcal{B}$ -мерљиве фамилије $(\lambda^x)_{x \in X}$ и $(\nu^x)_{x \in X}$ из $\text{sa}(Y, \mathcal{A})$, при чему је ν^x позитивна коначна мера и

$$\lambda^x = \lambda_{ac}^x + \lambda_s^x, \quad \lambda_{ac}^x \ll \nu^x, \quad \lambda_s^x \perp \nu^x$$

за свако $x \in X$. Тада су обе фамилије $(\lambda_{ac}^x)_{x \in X}$ и $(\lambda_s^x)_{x \in X}$ $\mathcal{B}$ -мерљиве.

Такође, Рагон-Никодимов извод

$$\varrho^x = \frac{d\lambda^x}{d\nu^x} := \frac{d\lambda_{ac}^x}{d\nu^x} \in L^1(\nu^x)$$

може бити изабран тако да функција $X \times Y \ni (x, y) \mapsto \varrho^x(y) \in \mathbb{C}$ буде $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљива.

Доказ. Без умањења општости можемо претпоставити да је $(\lambda^x)_{x \in X}$ састављена од реалних мера. Тада су фамилије мера $(\lambda^{x^+})_{x \in X}$ и $(\lambda^{x^-})_{x \in X}$ $\mathcal{B}$ -мерљиве на основу Леме 5.4. Преласком на ове фамилије можемо претпоставити⁵ још и то да је свака од мера λ^x позитивна и коначна на $\mathcal{A}$. Како је σ -алгебра $\mathcal{A}$ генерисана пребројивом фамилијом скупова $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ она је генерисана функцијом $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ која је задата изразом $\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \chi_{A_n}$ (видети доказ Леме 5.4). Нека је

$$\sigma^x = \lambda^x \circ \xi^{-1} \text{ и } \eta^x = \nu^x \circ \xi^{-1} \text{ за свако } x \in X.$$

Овине смо конструисали фамилије Борелових мера $(\sigma^x)_{x \in X}$ и $(\eta^x)_{x \in X}$ на скупу $\mathbb{R}$ које су $\mathcal{B}$ -мерљиве јер су фамилије мера $(\lambda^x)_{x \in X}$ и $(\nu^x)_{x \in X}$ $\mathcal{B}$ -мерљиве и због тога што је функција ξ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ -мерљива. Такође, за свако $x \in X$ важи $\sigma^x \ll \eta^x$, јер из $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ и $0 = \eta^x(S) = \nu^x(\xi^{-1}(S))$ следи $\lambda^x(\xi^{-1}(S)) = 0$ (због $\lambda^x \ll \nu^x$) одакле је $\sigma^x(S) = \lambda^x(\nu^{-1}(S)) = 0$.

Најпре ћемо доказати други део теореме, тј. да се може одабрати репрезент класе тако да је функција $X \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto \frac{d\sigma^x}{d\eta^x}(y) \in \mathbb{R}$ мерљива у односу на σ -алгебру $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Радон-Никодимов извод $\frac{d\sigma^x}{d\eta^x}$ можемо израчунати формулом

$$r^x(s) = \frac{d\sigma^x}{d\eta^x}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^x\left(\left(s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n}\right)\right)}{\eta^x\left(\left(s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n}\right)\right)},$$

где дефинишемо горњи разломак нулом уколико је

$$\eta^x\left(\left(s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

за неко $x \in X$, $s \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ (видети [13, Теорема 5.8.8]). За свако фиксирано $x \in X$, горња гранична вредност постоји за η^x -скоро свако $s \in \mathbb{R}$. Дефинишемо $r^x(s)$ као горњи лимес када он постоји и када је коначан. Скуп уређених парова $(x, s) \in X \times \mathbb{R}$ за које ово важи је $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -мерљив⁶, јер за било које фиксирано $n \in \mathbb{N}$ имамо количник две $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -мерљиве⁷ функције. За све друге парове $(x, s) \in X \times \mathbb{R}$ дефинишемо $r^x(s) = 0$. Ово даје $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -мерљиву функцију $X \times \mathbb{R} \ni (x, s) \mapsto r^x(s) \in \mathbb{R}$.

Нека је за фиксирано $x \in X$ функција $\varrho^x : Y \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана изразом

$$\varrho^x(y) = r^x(\xi(y)) \text{ за свако } y \in Y,$$

представља Радон-Никодимов извод $\frac{d\lambda^x}{d\nu^x}$, тј. представља једног репрезента одговарајуће класе еквиваленције. Ово можемо доказати на следећи начин. Нека је $A \in \mathcal{A}$. Постоји скуп $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ за који је $A = \xi^{-1}(E)$ јер σ -алгебра на Y генерисана функцијом $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ садржи σ -алгебру $\mathcal{A}$. Примењујући [13, Теорема 3.6.1] имамо следећи рачун:

$$\begin{aligned} \lambda^x(A) &= \lambda^x(\xi^{-1}(E)) = (\lambda^x \circ \xi^{-1})(E) = \sigma^x(E) = \int_E r^x(s) d\eta^x(s) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_E(s) r^x(s) d\eta^x(s) = \int_Y \chi_E(\xi(y)) \varrho^x(y) d\nu^x(y) = \int_A \varrho^x(y) d\nu^x(y). \end{aligned}$$

⁵Овде користимо следеће запажање: Уколико је λ реална мера на $\mathcal{A}$ и ако је ν позитивна коначна мера на $\mathcal{A}$ са својством $\lambda = \lambda_{ac} + \lambda_s$, $\lambda_{ac} \ll \nu$ и $\lambda_s \perp \nu$ тада важи, $\lambda_{ac}^+ \ll \nu$ и $\lambda_s^+ \perp \nu$ као и $\lambda_{ac}^- \ll \nu$ и $\lambda_s^- \perp \nu$. Са тим у вези, видети [9, Вежбања 3, 10 и 11, Секција 9B].

⁶Уколико је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ $\mathfrak{M}$ -мерљивих функција на X тада је скуп оних $x \in X$ где постоји гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ елемент σ -алгебре $\mathfrak{M}$.

⁷Нека је $r > 0$. Функција $X \times \mathbb{R} \ni (x, s) \mapsto \eta^x((s - r, s + r)) \in \mathbb{R}$ је $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -мерљива. Заиста, имамо $\eta^x((s - r, s + r)) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(s-r, s+r)}(t) d\eta^x(t)$. Функција $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (s, t) \mapsto \chi_{(s-r, s+r)}(t) \in \mathbb{R}$ је $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -мерљива. Даљи доказ је сличан доказу Тврђења 5.15 јер се показује да је функција $X \times \mathbb{R} \ni (x, s) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \chi_S(s, t) d\eta^x(t) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -мерљива за сваки фиксиран скуп $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Како је функција $X \times \mathbb{R} \ni (x, s) \mapsto r^x(s) \in \mathbb{R}$ мерљива у односу на $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ и како је $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ једна $\mathcal{A}$ -мерљива функција можемо закључити да је функција

$$X \times Y \ni (x, y) \mapsto \varrho^x(y) = r^x(\xi(y)) \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљива. Одавде следи и први део тврђења јер на основу доказаног имамо да важи једнакост $\lambda_{ac}^x(A) = \int_A \varrho^x(y) d\nu^x(y)$ за свако $A \in \mathcal{A}$ па $\mathcal{B}$ -мерљивост фамилије мера $(\lambda_{ac}^x)_{x \in X}$ добијамо применом Тврђења 5.15. На основу $\mathcal{B}$ -мерљивости фамилија $(\lambda_{ac}^x)_{x \in X}$ и $(\lambda^x)_{x \in X}$ добијамо одмах и $\mathcal{B}$ -мерљивост фамилије $(\lambda_s^x)_{x \in X}$ јер важи разлагање $\lambda^x = \lambda_{ac}^x + \lambda_s^x$ за свако $x \in X$. $\square$

Нека је ν σ -коначна мера на $\mathcal{A}$ и нека је $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ фамилија у $ca(Y, \mathcal{A})$. За свако $x \in X$ имамо Лебегову декомпозицију $\lambda^x = \lambda_{ac}^x + \lambda_s^x$ комплексне мере λ^x , где је $\lambda_{ac}^x \ll \nu$ и $\lambda_s^x \perp \nu$. У наредној теорему користићемо фамилије $(\lambda_{ac}^x)_{x \in X}$ и $(\lambda_s^x)_{x \in X}$ да бисмо одредили растојање фамилије $(\lambda^x)_{x \in X} \in L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ до затвореног потпростора $L_w^1(\mu, ca_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))$ и до затвореног потпростора $L_w^1(\mu, ca_\nu^s(Y, \mathcal{A}))$.

Тврђење 5.17. Нека је $\Lambda \in L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ и нека је ν σ -коначна мера на $\mathcal{A}$. Тада је

$$\text{dist}(\Lambda, L_w^1(\mu, ca_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))) = \int_X |\lambda_s^x|(Y) d\mu(x),$$

$$\text{dist}(\Lambda, L_w^1(\mu, ca_\nu^s(Y, \mathcal{A}))) = \int_X |\lambda_{ac}^x|(Y) d\mu(x).$$

Доказ. На основу Теореме 5.16 следи да су фамилије мера $(\lambda_{ac}^x)_{x \in X}$ и $(\lambda_s^x)_{x \in X}$ заправо $\mathcal{B}$ -мерљиве, што је нетривијални закључак који нам је потребан. Даљи ток доказа је рачунски и базиран је на дефиницији растојања елемента до потпростора. Наиме, за произвољно $\Lambda \in L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ добијамо

$$\begin{aligned} \|(\lambda_{ac}^x)_{x \in X}\|_1 + \|(\lambda_s^x)_{x \in X}\|_1 &= \int_X |\lambda_{ac}^x|(Y) d\mu(x) + \int_X |\lambda_s^x|(Y) d\mu(x) = \\ &= \int_X |\lambda_{ac}^x + \lambda_s^x|(Y) d\mu(x) = \int_X |\lambda^x|(Y) d\mu(x) = \|\Lambda\|_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Стога, имамо $(\lambda_{ac}^x)_{x \in X}, (\lambda_s^x)_{x \in X} \in L_w^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$. Такође, имамо да је

$$\begin{aligned} \|\Lambda - \eta\|_1 &= \|(\lambda_{ac}^x)_{x \in X} + (\lambda_s^x)_{x \in X} - (\eta^x)_{x \in X}\|_1 \\ &= \int_X |(\lambda_{ac}^x - \eta_x) + \lambda_s^x|(Y) d\mu(x) = \int_X |\lambda_{ac}^x - \eta_x|(Y) + |\lambda_s^x|(Y) d\mu(x) \end{aligned}$$

за сваку фамилију $\eta = (\eta^x)_{x \in X} \in L_w^1(\mu, ca_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))$. Последњи израз достиже најмању вредност ако одаберемо $\eta^x = \lambda_{ac}^x$ за μ -скоро свако $x \in X$. Одавде следи

$$\text{dist}(\Lambda, L_w^1(X, \mu; ca_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))) = \min\{\|\Lambda - \eta\| : \eta \in L_w^1(X, \mu; ca_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))\} = \int_X |\lambda_s^x|(Y) d\mu(x).$$

Друга формула се доказује на исти начин. $\square$

Главна теорема и интеграл фамилије мера $\int_X \lambda^x d\mu(x)$

Нека су $B_1(X)$ и $B_1(Y)$ класе функција ограничених са 1 по модулу и које су мерљиве у односу на σ -алгебре $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$, редом. Прецизније, поменути скупови $B_1(X)$ и $B_1(Y)$ су дефинисани једнакостима

$$B_1(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ је } \mathcal{B}\text{-мерљива и } \sup_{x \in X} |f(x)| \leq 1 \right\},$$

$$B_1(Y) = \left\{ g : Y \rightarrow \mathbb{C} \mid g \text{ је } \mathcal{A}\text{-мерљива и } \sup_{y \in Y} |g(y)| \leq 1 \right\}.$$

У даљем раду ћемо често користити ове скупове.

Дефиниција 5.18. Векторски простор свих класа слабо μ -еквивалентних функција (еквивалентно фамилија) $(\lambda^x)_{x \in X}$ са вредностима у простору $sa(Y, \mathcal{A})$ таквих да је скаларна функција $X \ni x \mapsto \lambda^x(A) \in \mathbb{C}$ μ -интеграбилна за сваки фиксиран скуп $A \in \mathcal{A}$ означаваћемо са $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$.

Слободније говорећи, горња дефиниција уводи појам *скупи њо скупи* интеграбилности функције $X \ni x \mapsto \lambda^x \in sa(Y, \mathcal{A})$.

Како је за свако фиксирано $A \in \mathcal{A}$ задат ограничен линеаран функционал $sa(Y, \mathcal{A}) \ni \lambda \mapsto \lambda(A) \in \mathbb{C}$, имамо да је уведени вид интеграбилности шири од класичне Петисове интеграбилности, јер се захтева интеграбилност одговарајуће функције на само једном делу дуалног простора $sa(Y, \mathcal{A})^*$. О овоме ће бити речи касније.

Наредна теорема представља централни резултат у овом поглављу. Главница ове теореме добијена је у раду [6]. У доказу ћемо користити значајне теореме Теорије мере и Функционалне анализе о којима је било речи у Секцији 1.1.

Теорема 5.19. Нека је μ коначна мера на σ -алгебри $\mathcal{B}$ и нека је $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in \mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$. Тада је функција $\nu_\Lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана изразом

$$(5.6) \quad \nu_\Lambda(A) = \int_X \lambda^x(A) d\mu(x) \text{ за свако } A \in \mathcal{A}$$

комплексна мера на σ -алгебри $\mathcal{A}$ и важи

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} := \sup_{A \in \mathcal{A}} \int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x) < +\infty.$$

Поред тога, за свако $f \in B_1(X)$ и $g \in B_1(Y)$, скаларна функција

$$X \ni x \mapsto f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \in \mathbb{C}$$

је μ -интеграбилна и важи једнакост

$$(5.7) \quad \int_Y g(y) d\nu_{f\Lambda}(y) = \int_X f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x).$$

Доказ. Прво ћемо доказати пребројиву адитивност функције ν_Λ на $\mathcal{A}$. Претпоставимо да је $A_n \in \mathcal{A}$ и $A_n \cap A_m = \emptyset$ кад год је $n, m \in \mathbb{N}$ и $n \neq m$. Нека је $\mathcal{A}_0$ под- σ -алгебра генерисана овим скуповима тј. $\mathcal{A}_0 = \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$. Постоји пребројива алгебра $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0$ која генерише σ -алгебру $\mathcal{A}_0$. Можемо одабрати представника класе фамилије $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ тако да су функције $X \ni x \mapsto \lambda^x(A) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$ -мерљиве за све $A \in \mathcal{A}_1$. Нека је $p(x) = |\lambda^x|(Y)$ за свако $x \in X$ (посматрано у односу на σ -алгебру $\mathcal{A}_0$). На основу Теореме 5.8 имамо да је функција $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљива одакле следи

$$X_N := \{x \in X : p(x) \leq N\} \in \mathcal{B} \text{ за свако } N \in \mathbb{N}.$$

Скуповна функција $\nu_{\Lambda, N} : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана изразом

$$\nu_{\Lambda, N}(A) = \int_{X_N} \lambda^x(A) d\mu(x) \text{ за свако } A \in \mathcal{A}_0$$

је пребројиво адитивна мера на $\mathcal{A}_0$. Заиста, за фиксирано $N \in \mathbb{N}$ довољно је доказати

$$(5.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{\Lambda, N} \left(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_N} \lambda^x \left(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right) d\mu(x) = 0.$$

Наравно, можемо сматрати да је $X_N \neq \emptyset$ јер је у противном $\nu_{\Lambda, N}$ нула функција и тада тврђење важи. За свако $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X_N$ важе неједнакости

$$\left| \lambda^x \left(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right) \right| \leq p(x) \leq N.$$

Горња неједнакост даје μ -интеграбилну мајоранту $g_N : X_N \rightarrow \mathbb{R}$, тј. функцију $g_N(x) = N$ дефинисану за свако $x \in X_N$ (можемо користити функцију g_N јер је мера μ коначна па су константне функције μ -интеграбилне на X_N). Због тога, оправдано је применити ТДК и извршити гранични прелаз у (5.8) јер знамо да важи једнакост

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^x \left(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right) = 0$$

за свако фиксирано $x \in X$ (што следи из $\lambda^x \in sa(Y, \mathcal{A})$).

Како је функција $X \ni x \mapsto \lambda^x(A) \in \mathbb{C}$ μ -интеграбилна и $|\chi_{X_N}(x)\lambda^x(A)| \leq |\lambda^x(A)|$ за свако $N \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{A}_0$, поновном применом ТДК имамо да важи

$$(5.9) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \nu_{\Lambda, N}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{X_N} \lambda^x(A) d\mu(x) = \int_X \lambda^x(A) d\mu(x) = \nu_\Lambda(A)$$

за свако $A \in \mathcal{A}_0$. На основу Витали-Хан-Саксове теореме (видети Теорему 1.16) и на основу (5.9) имамо да је ν_Λ комплексна мера на σ -алгебри $\mathcal{A}_0$ као гранична вредност, скуп по скуп, низа комплексних мера $(\nu_{\Lambda, N})_{N \in \mathbb{N}}$.

Вратимо се сада на σ -алгебру $\mathcal{A}$. На основу доказаног, имамо да је за свако $f \in B_1(X)$ функција $\nu_{f\Lambda} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана изразом

$$\nu_{f\Lambda}(A) := \int_X f(x) \lambda^x(A) d\mu(x) \text{ за свако } A \in \mathcal{A}$$

комплексна мера на σ -алгебри $\mathcal{A}$. Фамилија мера $(\nu_{f\Lambda})_{f \in B_1(X)}$ је униформно ограничена на сваком скупу $A \in \mathcal{A}$ изразом $\int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x) < +\infty$. Дакле, према Никодимовој теорему (видети Теорему 1.17), ове мере су униформно ограничене у норми која је задата преко варијације са неким бројем $M > 0$. Одавде имамо да за свако $A \in \mathcal{A}$ и $f \in B_1(X)$ важи

$$(5.10) \quad \left| \int_X f(x) \lambda^x(A) d\mu(x) \right| = |\nu_{f\Lambda}(A)| \leq \|\nu_{f\Lambda}\| \leq M.$$

Сада, за фиксирано $A \in \mathcal{A}$ дефинишимо функцију $f_A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ изразом $f_A(x) := \operatorname{sgn} \lambda^x(A)$ за свако $x \in X$. Имамо да је f_A $\mathcal{B}$ -мерљива функција као и $f_A \in B_1(X)$ па функцију f_A можемо користити у изведеној процени (5.10). Одавде следи да је

$$\int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x) \leq M \text{ за свако } A \in \mathcal{A},$$

тј. $\sup_{A \in \mathcal{A}} \int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x) < +\infty$. Овиме је доказан и други део теореме.

Докажимо сада формулу (5.7). Довољно је разматрати реално вредносну функцију $g \in B_1(Y)$ (чак и ненегативну) јер су обе стране тражене једнакости (5.7) линеарне по g . На основу (1.3) добијамо

$$(5.11) \quad \|\nu_{f\Lambda}\| \leq 4 \sup_{A \in \mathcal{A}} |\nu_{f\Lambda}(A)| \leq 4 \|f\Lambda\|_{\mathfrak{L}} \leq 4 \|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} \text{ за свако } f \in B_1(X).$$

Нека је $\mathcal{A}_0$ под- σ -алгебра од $\mathcal{A}$ генерисана функцијом g . Имамо да је $\mathcal{A}_0$ пребројиво генерисана јер је генерисана фамилијом скупова $\{g^{-1}((-\infty, r)) : r \in \mathbb{Q}\}$. За свако $x \in X$ дефинишемо

$$f(x) := \operatorname{sgn} G(x), \quad G(x) := \int_Y g(y) d\lambda^x(y).$$

Имамо да је функција f $\mathcal{B}$ -мерљива јер је функција из (5.5) $\mathcal{B}$ -мерљива. Зато је $f \in B_1(X)$. Да бисмо доказали μ -интеграбилност функције G , довољно је показати да је низ ненегативних бројева $\left(\int_{X_N} |G(x)| d\mu(x) \right)_{N \in \mathbb{N}}$ ограничен одозго. Приметимо да за свако фиксирано $N \in \mathbb{N}$ важи

$$(5.12) \quad \int_{X_N} |G(x)| d\mu(x) = \int_X \left(\chi_{X_N}(x) f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \right) d\mu(x) = \int_Y g(y) d\nu_{f\chi_{X_N}\Lambda}(y).$$

Прва једнакост у (5.12) следи директно на основу дефиниције функције G . Докажимо сада другу⁸ једнакост. Наиме, ова једнакост је тачна за $g = \chi_A$, кад год је $A \in \mathcal{A}_0$ (функција f зависи од g али ова једнакост важи и уколико су f и g третиране независно једна од друге) јер се у том случају ова једнакост своди на $\int_{X_N} f(x) \lambda^x(A) d\mu(x) = \nu_{f\chi_{X_N}\Lambda}(A)$. Одавде следи да је ова једнакост тачна и за просте функције у односу на σ -алгебру $\mathcal{A}_0$ па самим тим и за њихове униформне лимесе. Заиста, уколико низ $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{A}_0$ -мерљивих функција униформно конвергира ка g на Y (одаберимо га тако да је $0 \leq g_n \leq g$ за свако $n \in \mathbb{N}$) тада важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left(\chi_{X_N}(x) f(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) \right) d\mu(x) = \int_X \left(f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \right) d\mu(x).$$

⁸Приметимо да друга једнакост у (5.12) не представља примену Фубинијеве теореме иако је дошло до замене поретка интеграције.

Употреба ТДК је оправдана⁹ јер за свако $x \in X_N$ важи

$$\left| \chi_{X_N}(x) f(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) \right| \leq \int_Y |g(y)| d|\lambda^x|(y) \leq |\lambda^x|(Y) \leq N.$$

Са друге стране, за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо

$$\left| \int_Y [g_n(y) - g(y)] \nu_{f\chi_{X_N}\Lambda}(y) \right| \leq \sup_{y \in Y} |g_n(y) - g(y)| \cdot |\nu_{f\chi_{X_N}\Lambda}|(Y).$$

Како низ $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно конвергира ка g на Y закључујемо да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y g_n(y) \nu_{f\chi_{X_N}\Lambda}(y) = \int_Y g(y) \nu_{f\chi_{X_N}\Lambda}(y).$$

Овиме је доказана друга једнакост у (5.12). Користећи (5.11) имамо да је

$$\left| \int_Y g(y) d\nu_{f\chi_{X_N}\Lambda}(y) \right| \leq |\nu_{f\chi_{X_N}\Lambda}|(Y) = \|\nu_{f\chi_{X_N}\Lambda}\| \leq 4\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} < +\infty$$

за свако $N \in \mathbb{N}$. Дакле, $\int_X |G(x)| d\mu(x) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \int_{X_N} |G(x)| d\mu(x) < +\infty$ тј. $G \in L^1(X, \mu)$.

Докажимо сада једнакост (5.7). Дефинишимо оператор $S : L_{\mathcal{A}}^{\infty} \rightarrow L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ изразом

$$(5.13) \quad (Sg)(x) = \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \text{ за свако } g \in L_{\mathcal{A}}^{\infty}.$$

На основу доказаног знамо да је оператор S добро дефинисан тј. да слика у Банахов простор $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Прецизније, за свако $g \in B_1(Y)$ на основу горе реченог имамо да је

$$\|Sg\|_1 = \int_X |(Sg)(x)| d\mu(x) = \int_X \left| \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \right| d\mu(x) = \int_X |G(x)| d\mu(x) \leq 4\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}.$$

Одавде закључујемо да је S непрекидан оператор и да је $\|S\| \leq 4\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}$.

Сада можемо кренути са доказом формуле (5.7). Слично као малопре, за $A \in \mathcal{A}$ и $g = \chi_A$ једнакост (5.7) постаје $\nu_{f\Lambda}(B) = \int_X f(x) \lambda^x(A) d\mu(x)$, по дефиницији функције $\nu_{f\Lambda}$. Одавде закључујемо да је формула (5.7) тачна и за све линеарне комбинације карактеристичних функција скупова из $\mathcal{A}$. Нека је $g \in B_1(Y)$ и нека је опет $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ простих $\mathcal{A}$ -мерљивих функција који униформно апроксимира g . На основу доказане непрекидности оператора S закључујемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sg_n - Sg\|_1 = 0$. Одавде следи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|fSg_n - fSg\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(Sg_n - Sg)\|_1 = 0$$

јер важи $|f| \leq 1$ на X . Овиме смо доказали да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи једнакост

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) = \int_X f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y).$$

⁹Напоменимо да се овде користе скупови X_N због граничног прелаза у интегралу на левој страни, за шта нам је потребна коначност мере μ , неједнакост $|\lambda^x|(Y) \leq N$ за свако $x \in X_N$ као и $\mathcal{B}$ -мерљивост функције $X \ni x \mapsto |\lambda^x|(Y) \in \mathbb{R}$, која следи на основу Теореме 5.8 (за свако $x \in X$ варијација $p(x)$ се рачуна у односу на σ -алгебру $\mathcal{A}_0$ па је $X_N \in \mathcal{A}_0$).

Са друге стране, имамо да је линеарни функционал $s : L_{\mathcal{A}}^{\infty} \rightarrow \mathbb{C}$ задат изразом $s(g) = \int_Y g(y) d\nu_{f\Lambda}(y)$ непрекидан на Банаховом простору $L_{\mathcal{A}}^{\infty}$ јер је $|s(g)| \leq \|g\|_{\infty} \cdot |\nu_{f\Lambda}|(Y)$ за сваку функцију $g \in L_{\mathcal{A}}^{\infty}$. Одавде добијамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y g_n(y) \nu_{f\Lambda}(dy) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(g_n) = s(g) = \int_Y g(y) \nu_{f\Lambda}(dy).$$

Како за свако $n \in \mathbb{N}$ важи једнакост

$$\int_X f(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) = \int_Y g_n(y) d\nu_{f\Lambda}(y)$$

остаје само да узмемо у овој једнакости $n \rightarrow \infty$ и добијамо формулу (5.7). $\square$

Напомена 5.20. Формула (5.7) је доказана у раду [7]. Такође, треба имати у виду да горе изложени доказ формуле (5.7) зависи од коначности мере μ .

Напомена 5.21. Напоменимо да први и други гео Теореме 5.19 важе и уколико је мера μ произвољна позитивна. Нека је најпре μ σ -коначна мера на $\mathcal{B}$. Узмимо зашто да је $X = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} X_n$, где је $X_n \in \mathcal{B}$ и $\mu(X_n) < +\infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Функција $\mathcal{B} \ni B \mapsto \int_B \lambda^x(A) d\mu(x) \in \mathbb{C}$ је елементи простора $\text{sa}(X, \mathcal{B})$ за свако фиксирано $A \in \mathcal{A}$. Зашто, за свако $A \in \mathcal{A}$ имамо једнакости

$$(5.14) \quad \nu_{\Lambda}(A) = \int_{\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} X_n} \lambda^x(A) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{X_n} \lambda^x(A) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_{\chi_{X_n}\Lambda}(A).$$

Како важи $\mu(X_n) < +\infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$, на основу доказане Теореме 5.19 имамо да је $\nu_{\chi_{X_n}\Lambda} \in \text{sa}(Y, \mathcal{A})$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Сада из (5.14) и Теореме Витали-Хан-Сакса (видети Теорему 1.16) добијамо да је $\nu_{\chi_{\mathcal{B}}\Lambda}$ комплексна мера на $\mathcal{A}$.

Моли смо посматрати и на следећи начин. Посматрајмо коначну меру μ_0 на $\mathcal{B}$ која је еквивалентна са мером μ , тј. постоји коначна мера μ_0 за коју је $\mu \ll \mu_0$ и $\mu_0 \ll \mu$. Нека је $\varrho = \frac{d\mu}{d\mu_0} \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu_0)$. У том случају је мера μ дата Радон-Никодимовим изводом ϱ у односу на μ_0 . Посматрајмо фамилију мера $(\varrho(x) \lambda^x)_{x \in X}$ уместо фамилије $(\lambda^x)_{x \in X}$ и меру μ_0 уместо мере μ . Тада је фамилија $(\varrho(x) \lambda^x)_{x \in X}$ такође $\mathcal{B}$ -мерљива јер функција ϱ такође $\mathcal{B}$ -мерљива функција. Како је μ_0 коначна мера, на основу доказаног дела у ком радимо са коначном мером, закључујемо да је изразом

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto \int_X \varrho(x) \cdot \lambda^x(A) d\mu_0(x) = \int_X \lambda^x(A) d\mu(x) = \nu_{\Lambda}(A) \in \mathbb{C}$$

задана једна комплексна мера на $\mathcal{A}$.

Докажимо да је шврћење тачно и у генералном случају. Поново, као што смо већ радили, можемо претпоставити да је σ -алгебра $\mathcal{A}$ генерисана пребројивом алгебром скупова $\mathcal{A}_0$. Тада, на основу Леме 5.3, носач фамилије мера $\lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ је садржан у σ -коначном скупу $X_0 \subset X$, у односу на меру μ . Зашто, имамо једнакост $\nu_{\Lambda} = \nu_{\chi_{X_0}\Lambda}$. Последња функција је комплексна мера на основу доказаног σ -коначног случаја примењеног на ресрикцију фамилије $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ на X_0 .

Векторски простор $\mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ уведен Дефиницијом 5.18 може се нормирати са

$$(5.15) \quad \|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} = \sup_{A \in \mathcal{A}} \int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x),$$

Идентификација уведена Дефиницијом 5.18 нам директно даје да је векторски простор $\mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ са функцијом $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$ датом у (5.15) заправо један нормиран простор. Напоменимо да горе дат израз (5.15) представља аналогну форму норме на векторским просторима $L_G^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и $L_{pD}^1(\Omega, \mu, \mathcal{B}(X, Y))$ који су изучавани у Поглављу 2 и у Поглављу 3.

Ако је $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана σ -алгебра имамо да важи једнакост $\lambda_1^x = \lambda_2^x$ за μ -скоро свако $x \in X$, уколико су фамилије Λ_1 и Λ_2 слабо μ -еквивалентне. Ово следи на основу Леме 5.3. У општем случају то не мора бити тачно, што показује наредни пример, који је аналоган Примеру 4.15 у Поглављу 4.

Пример 5.22. Узмимо $\lambda^x = \delta_x - \delta_{\frac{x}{2}}$ за све $x \in X = [0, 1]$ у Примеру 5.11. Фамилија мера $(\lambda^x)_{x \in [0, 1]}$ је $\mathcal{B}_{[0, 1]}$ -мерљива фамилија, која је још и слабо m -еквивалентна нула фамилији. Тада је $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} = 0$ и $\lambda^x \neq 0$ за m -скоро свако $x \in [0, 1]$. Заиста, за свако $x \in (0, 1]$ важи једнакост $\delta_x \neq \delta_{\frac{x}{2}}$ јер је $1 = \delta_x(\{x\}) \neq \delta_{\frac{x}{2}}(\{x\}) = 0$. Ако је $A \subset [0, 1] = Y$ пребројив скупи тада важи

$$\begin{aligned} \int_{[0, 1]} |\delta_x(A) - \delta_{\frac{x}{2}}(A)| dm(x) &= \int_A |\delta_x(A) - \delta_{\frac{x}{2}}(A)| dm(x) + \int_{[0, 1] \setminus A} |\delta_x(A) - \delta_{\frac{x}{2}}(A)| dm(x) \\ &= 0 + \int_{[0, 1] \setminus A} |0 - \delta_{\frac{x}{2}}(A)| dm(x) = 0. \end{aligned}$$

Како је $\delta_x([0, 1]) - \delta_{\frac{x}{2}}([0, 1]) = 0$ за свако $x \in [0, 1]$ закључујемо да важи једнакост $\int_{[0, 1]} |\delta_x(A) - \delta_{\frac{x}{2}}(A)| dm(x) = 0$ за свако $A \subset [0, 1]$ чији је комплемент (у односу на $[0, 1]$) пребројив скупи. Следи да је $\|\Lambda\| = \sup_{A \in \mathcal{A}} \int_{[0, 1]} |\delta_x(A) - \delta_{\frac{x}{2}}(A)| dm(x) = 0$. $\triangle$

Напоменимо да у горњем примеру σ -алгебра $\mathcal{A}$ није пребројиво генерисана.

Простор $\mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ је шири од простора $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ а да та инклузија може бити строга показује Пример 5.23 који је базиран на примени Беселове неједнакости у Хилбертовом простору $L^2((0, 1], m)$. Ради лакшег праћења рачуна који ће се јавити у овом примеру напоменимо да су функције $\varphi_n(y) = \sin(2\pi ny)$ међусобно ортогоналне у $L^2((0, 1], m)$ и да је $\|\varphi_n\|_{L^2((0, 1], m)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Пример 5.23. Нека је $X = Y = (0, 1]$ са Бореловом σ -алгебром $\mathcal{B}_{(0, 1]}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ и за свако $x \in J_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ нека је мера $\lambda^x : \mathcal{B}_{(0, 1]} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$(5.16) \quad \lambda^x(B) = n \int_B \sin(2\pi ny) dm(y) \quad \text{за свако } B \in \mathcal{B}_{(0, 1]}.$$

Ова фамилија је $\mathcal{B}_{(0, 1]}$ -мерљива. За $x \in J_n$ и сваки Борелов скупи $B \subset (0, 1]$ имамо

$$\lambda^x(B) = n \int_B \sin(2\pi ny) dm(y) = n \cdot \langle \chi_B, \varphi_n \rangle_{L^2((0, 1], m)}, \quad \varphi_n(y) = \sin(2\pi ny).$$

Одавде следи да важи

$$\int_{(0, 1]} \lambda^x(B) dm(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{J_n} \lambda^x(B) dm(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \langle \chi_B, \varphi_n \rangle_{L^2((0, 1], m)}.$$

Као што смо најоменули у коментару непосредно испред овог примера, функције $\sqrt{2}\varphi_n$ су међусобно ортонормиране у Хилбертовом простору $L^2((0, 1], m)$ па применом Беселове неједнакости закључујемо да последњи ред конвертира јер је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \chi_B, \varphi_n \rangle_{L^2((0,1],m)}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \langle \chi_B, \sqrt{2}\varphi_n \rangle_{L^2((0,1],m)} \right|^2 \leq \frac{1}{2} \|\chi_B\|_{L^2((0,1],m)}^2 = \frac{(m(B))^2}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Са друге стране, имамо да је

$$\|\lambda^x\| = n \int_0^1 |\sin(2\pi n y)| dy \geq n \int_0^1 |\sin(2\pi n y)|^2 dy = n \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin(4n\pi)}{8\pi n} \right) = \frac{n}{2}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in J_n$. Сада је

$$\int_{(0,1]} \|\lambda^x\| dm(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{J_n} \|\lambda^x\| dm(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = +\infty.$$

Дакле, доказали смо да $(\lambda^x)_{x \in [0,1]}$ припада простору $\mathfrak{L}(m, \text{sa}((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}))$ али да ова фамилија мера није елементи простора $L_w^1(m, \text{sa}((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}))$. $\triangle$

Пресликавање тј. фамилија мера $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in (0,1]}$ коју смо конструисали у Примеру 5.23 не припада простору $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ али се може апроксимирати елементима из $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ у норми $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$ простора $\mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$. За сада ћемо проверити ово док ће значајан резултат о апроксимацији у простору $\mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ биће дат у Теорему 5.37.

Дефинишимо елементе $\Lambda_n = \left(\chi_{(\frac{1}{n+1}, 1]}(x) \cdot \lambda^x \right)_{x \in (0,1]}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Свака од фамилија Λ_n је елемент простора $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ јер је $\int_{(0,1]} \|\Lambda_n^x\| dm(x) = \sum_{k=1}^n \int_{J_k} \|\lambda^x\| dm(x) < +\infty$. Из неједнакости Коши-Шварца имамо да за свако $n \in \mathbb{N}$ и $B \in \mathcal{B}_{(0,1]}$ важи

$$\begin{aligned} \int_{(0, \frac{1}{n+1}]} |\lambda^x(B)| dm(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{J_k} k \left| \int_B \varphi_k(y) dm(y) \right| dm(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k m(J_k) \cdot \left| \langle \chi_B, \sqrt{2}\varphi_k \rangle_{L^2((0,1],m)} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}} \cdot \|\chi_B\|_{L^2((0,1])} \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}}. \end{aligned}$$

На основу изведене процене добијамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda - \Lambda_n\|_{\mathfrak{L}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in \mathcal{B}_{(0,1]}} \int_{(0, \frac{1}{n+1}]} |\lambda^x(B)| dm(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}} = 0.$$

Захваљујући Теорему 5.19 можемо увести наредну дефиницију.

Дефиниција 5.24. [6] За сваку фамилију мера $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in \mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ и за сваки фиксиран скупи $B \in \mathcal{B}$ дефинишемо комплексну меру $\int_B \lambda^x d\mu(x)$ на σ -алгебри $\mathcal{A}$ изразом

$$(5.17) \quad \left(\int_B \lambda^x d\mu(x) \right)(A) = \int_B \lambda^x(A) d\mu(x) \text{ за свако } A \in \mathcal{A}.$$

Имајући у виду нотацију из доказа Теореме 5.19 као и горњу дефиницију, можемо писати $\nu_{\chi_B \cdot \Lambda} = \int_B \lambda^x d\mu(x)$. Такође, директно на основу дефиниционе једнакости (5.17) се проверава да важи једнакост $\alpha \int_B \lambda^x d\mu(x) = \int_B \alpha \lambda^x d\mu(x)$ за $\alpha \in \mathbb{C}$, $B \in \mathcal{B}$ као и $\int_{B_1} \lambda^x d\mu(x) + \int_{B_2} \lambda^x d\mu(x) = \int_{B_1 \sqcup B_2} \lambda^x d\mu(x)$ кад год су $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Да бисмо илустровали уведену дефиницију, дајемо следеће примере.

Пример 5.25. Нека је δ_x Диракова мера и нека m Лебејева мера на Бореловој σ -алгебри $\mathcal{B}_{[0,1]}$. Фамилија мера $(\delta_x)_{x \in [0,1]}$ је $\mathcal{B}_{[0,1]}$ -мерљива. Такође, важи $|\delta_x|(E) = 1$ за свако $x \in [0, 1]$ и све Борел мерљиве скупове $\emptyset \neq E \subseteq [0, 1]$. Зато је функција $[0, 1] \ni x \mapsto \delta_x \in \text{sa}([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ елементи простора $L_w^1(m, \text{sa}([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}))$. За свако $E \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ важи и

$$\int_{[0,1]} \delta_x(E) dm(x) = \int_E \delta_x(E) dm(x) + \int_{[0,1] \setminus E} \delta_x(E) dm(x) = m(E).$$

На основу Дефиниције 5.24 имамо разлагање

$$m = \int_{[0,1]} \delta_x dm(x).$$

Како је $|\delta_x - \delta_y|([0, 1]) = 2$ за свако $x, y \in [0, 1]$ за које је $x \neq y$ имамо да функција $[0, 1] \ni x \mapsto \delta_x \in \text{sa}([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ није Бохнер m -интеграбилна јер нема сејарабилну слику, што следи на основу Пејисове теореме о мерљивости (видети Теорему 1.20) $\triangle$

Следеће тврђење се ослања на Теорему 5.16.

Тврђење 5.26. Нека је μ σ -коначна мера на $(X, \mathcal{B})$ и нека је ν σ -коначна мера на $\mathcal{A}$. Ако је $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in L_w^1(X, \mu; \text{sa}_\nu^{ac}(Y, \mathcal{A}))$ тада важи $\int_A \lambda^x d\mu(x) \ll \nu$ као и

$$(5.18) \quad \frac{d}{d\nu} \int_A \lambda^x d\mu(x) = \int_A \frac{d\lambda^x}{d\nu} d\mu(x) \quad \text{за све } A \in \mathfrak{M}.$$

Доказ. Нека је $B \in \mathcal{B}$, $A_0 \in \mathcal{A}$ и $\nu(A_0) = 0$. На основу једнакости (5.17) имамо

$$\left(\int_B \lambda^x d\mu(x) \right) (A_0) = \int_B \lambda^x(A_0) d\mu(x) = 0,$$

тј. $\int_B \lambda^x d\mu(x) \ll \nu$. На основу Теореме Радона-Никодиме следи да постоје изводи

$$\frac{d}{d\nu} \int_B \lambda^x d\mu(x) = \varphi \in L^1(Y, \mathcal{A}, \nu) \quad \text{и} \quad \frac{d\lambda^x}{d\nu} = \varphi_x \in L^1(Y, \mathcal{A}, \nu)$$

за све $x \in X$. На основу Теореме 5.16 функција $X \times Y \ni (x, y) \mapsto \varphi_x(y) \in \mathbb{C}$ се може одабрати тако да буде мерљива на производ простору $(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \nu)$. Користећи једнакост (1.1) имамо да важи

$$\int_X \int_Y |\varphi_x(y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_X |\lambda^x|(Y) d\mu(x) = \|\Lambda\|_1 < \infty.$$

Одавде закључујемо да је функција $X \times Y \ni (x, y) \mapsto \varphi_x(y) \in \mathbb{C}$ елемент простора $L_w^1(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \nu)$. Дакле, на основу Тонелијеве теореме, за све $A \in \mathcal{A}$ имамо

$$\begin{aligned} \int_A \varphi(y) d\nu(y) &= \left(\int_B \lambda^x d\mu(x) \right) (A) = \int_B \lambda^x(A) d\mu(x) \\ &= \int_B \left(\int_A \varphi_x(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_A \left(\int_B \varphi_x(y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

Како последње једнакости важе за све скупове $A \in \mathcal{A}$, Теорема о анулацији Лебеговог интеграла (видети [5, Лема 4.23]) даје

$$\left(\frac{d}{d\nu} \int_A \lambda^x d\mu(x) \right) (y) = \varphi(y) = \int_A \varphi_x(y) d\mu(x) = \int_A \frac{d\lambda^x}{d\nu}(y) d\mu(x)$$

за ν -скоро свако $y \in Y$, што заправо представља једнакост (5.18). $\square$

Приметимо да Тврђење 5.26 не важи уколико радимо са фамилијом мера које су сингуларне у односу на једну фиксирану меру. Заиста, имамо $\delta_x \perp m$ за свако $x \in [0, 1]$ али на основу Примера 5.25 знамо да важи разлагање $\int_{[0,1]} \delta^x dm(x) = m$, што није сингуларна мера у односу на m .

Наведимо још један конкретан пример.

Пример 5.27. Нека је $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}_{[0,1]}$. За фиксирано $x \in [0, 1]$ дефинишимо меру $\lambda^x(A) = m([0, x] \cap A)$ за свако $A \in \mathcal{B}_{[0,1]}$. Овако долазимо до фамилије мера $(\lambda^x)_{x \in [0,1]}$ на $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$. Применом Тонелијеве теореме имамо

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \lambda^x(A) dm(x) &= \int_{[0,1]} m([0, x] \cap A) dm(x) = \\ &= \int_{[0,1]} \int_{[0,x]} \chi_A(s) dm(s) dm(x) = \int_{[0,1]} \int_{[s,1]} \chi_A(s) dm(x) dm(s) \\ &= \int_{[0,1]} (1-s) \chi_A(s) dm(s) = m(A) - \int_A s dm(s) \text{ за свако } A \in \mathcal{B}_{[0,1]}. \end{aligned}$$

Одавде следи да је фамилија $(\lambda^x)_{x \in X}$ $\mathcal{B}_{[0,1]}$ -интеграбилна и да важи

$$\lambda = \int_{[0,1]} \lambda^x dm(x),$$

при чему је реална мера $\lambda : \mathcal{B}_{[0,1]} \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана изразом

$$\lambda(A) = m(A) - \int_A s dm(s) \text{ за свако } A \in \mathcal{B}_{[0,1]}.$$

Приметимо да је и $\frac{d\lambda}{dm}(s) = 1 - s$. $\triangle$

Као што се операције конјуговања и рачунања Лебеговог интеграла лепо односе једна према другој, имамо да се то преноси и на интеграле фамилија мера.

Пример 5.28. Нека је фамилија $(\lambda^x)_{x \in X}$ елементи простора $\mathfrak{L}^1(X, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$. Тада је и фамилија $(\overline{\lambda^x})_{x \in X}$ елементи простора $\mathfrak{L}^1(X, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ и важи једнакост

$$\overline{\int_A \lambda_x d\mu(x)} = \int_A \overline{\lambda_x} d\mu(x) \text{ за свако } A \in \mathfrak{M}.$$

Заиста, за свако $A \in \mathcal{A}$ и свако $B \in \mathcal{B}$ имамо

$$\overline{\int_B \lambda^x d\mu(x)(A)} = \overline{\int_B \lambda^x(A) d\mu(x)} = \int_B \overline{\lambda^x(A)} d\mu(x) = \left(\int_B \overline{\lambda^x} d\mu(x) \right) (A),$$

што доказује поменућу једнакост $\overline{\int_B \lambda_x d\mu(x)} = \int_B \overline{\lambda_x} d\mu(x)$ за свако $B \in \mathcal{B}$. $\triangle$

У раду са интеграбилним фамилијама мера важе неке од аналогних неједнакости које смо имали у раду са интеграбилним фамилијама оператора (видети неједнакост (4.23) која је показана у Поглављу 4). Претпоставака да је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана ће нам бити потребна због мерљивости функције која се налази на десној страни неједнакости, под знаком интеграла $\int_X \|\lambda^x\| d\mu(x)$ (што је заправо претпоставка сепарабилности у извесном смислу (видети Лему 1.9)). Приметимо да смо и код доказа поменутих неједнакости (4.23) имали претпоставке везане за сепарабилност, тј. била је претпостављена сепарабилност Банахових простора X и Y .

Тврђење 5.29. Нека је σ -алгебра $\mathcal{A}$ генерисана пребројивом алгебром $\mathcal{A}_0$ и нека је $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ елементи простора $\mathfrak{L}(X, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$. Тада, за свако $B \in \mathcal{B}$ важи

$$\left\| \int_B \lambda^x d\mu(x) \right\| \leq \int_B \|\lambda^x\| d\mu(x).$$

Доказ. На основу Теореме 5.8 имамо $\mathcal{B}$ -мерљивост функције $X \ni x \mapsto \|\lambda^x\| = |\lambda^x|(Y) \in \mathbb{R}$. Нека је $B \in \mathcal{B}$ произвољно. Ако је $A = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ и $A_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тада важи

$$\begin{aligned} (5.19) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left(\int_B \lambda^x d\mu(x) \right) (A_n) \right| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_B \lambda^x(A_n) d\mu(x) \right| \leq \int_B \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda^x(A_n)| d\mu(x) \\ &\leq \int_B \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda^x|(A_n) d\mu(x) = \int_B \|\lambda^x\| d\mu(x). \end{aligned}$$

Преласком на супремум у (5.19) по свим $\mathcal{A}$ -мерљивим, пребројивим партицијама скупа $A \in \mathcal{A}$ добијамо тражену неједнакост. $\square$

Напомена 5.30. У тврђењу изнад није претпостављено $\int_B \|\lambda^x\| d\mu(x) < +\infty$, тј. није претпостављено $\Lambda \in L_w^1(X, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$. Уколико бисмо имали и ту претпоставку онда можемо даћи лакши доказ главне Теореме 5.19. Наиме, нека је $A = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, при чему је $A_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада имамо

$$\begin{aligned} (5.20) \quad \left(\int_B \lambda^x d\mu(x) \right) (A) &= \int_B \lambda^x \left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) d\mu(x) = \int_B \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^x(A_n) d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_B \lambda^x(A_n) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_B \lambda^x d\mu(x) \right) (A_n). \end{aligned}$$

Прва једнакост у (5.20) следи директно на основу Дефиниције 5.24, друга једнакост следи на основу тога што је $\lambda^x \in \text{sa}(Y, \mathcal{A})$ за свако фиксирано $x \in X$ док четврта једнакост следи очети на основу Дефиниције 5.24. Покажимо сада другу једнакост у (5.20). На основу Теореме Беџо Левија¹⁰ (видети [5, Теорема 4.18]), имамо да је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_B |\lambda^x(A_n)| d\mu(x) \leq \int_B \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda^x|(A_n) d\mu(x) = \int_B \|\lambda^x\| d\mu(x) < +\infty$$

та је и ова једнакост оправдана.

¹⁰Beppo Levi (1875–1961), италијански математичар

За крај ове секције напомнимо и то да је пресликавање

$$\mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A})) \ni \Lambda \mapsto \int_X \Lambda d\mu \in ca(Y, \mathcal{A})$$

непрекидно јер за $\Lambda = (\lambda_1^x)_{x \in X}, \Lambda_2 = (\lambda_2^x)_{x \in X} \in \mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ важи неједнакост

$$\left\| \int_X \lambda_1^x d\mu(x) - \int_X \lambda_2^x d\mu(x) \right\| \leq 4 \|\Lambda_1 - \Lambda_2\|_{\mathfrak{L}},$$

Заиста, за било који скуп $A \in \mathcal{A}$ имамо

$$\left| \left(\int_X \lambda_1^x d\mu(x) \right) (A) - \left(\int_X \lambda_2^x d\mu(x) \right) (A) \right| \leq \int_X |\lambda_1^x(A) - \lambda_2^x(A)| d\mu(x) \leq \|\Lambda_1 - \Lambda_2\|_{\mathfrak{L}}.$$

Тражена неједнакост следи применом неједнакости (1.3) из Поглавља 1. Уколико су $\int_X \lambda_1^x d\mu(x)$ и $\int_X \lambda_2^x d\mu(x)$ реалне мере, тада добијамо исту неједнакост само са бољом константом 2, на основу (1.2). Одавде закључујемо да је линеарни оператор $\int_X : \mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A})) \rightarrow ca(Y, \mathcal{A})$ непрекидан, тј. да важи $\int_X \in \mathcal{B}(\mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A})), ca(Y, \mathcal{A}))$.

Интеграбилност производа мерљивих фамилија мера

Фамилије мера које зависе од $x \in X$ могу се множити на следећи начин: ако је $\lambda_1^x \in ca(Y_1, \mathcal{A}_1)$ и $\lambda_2^x \in ca(Y_2, \mathcal{A}_2)$, њихов производ $\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x$, за свако $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, дефинисан је формулом

$$(\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x)(E) = \int_{Y_2} \lambda_1^x(E_u) d\lambda_2^x(u), \quad E_u = \{y \in Y_1 : (y, u) \in E\}, \quad u \in Y_2.$$

Лако се показује да је $\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x$ елемент простора $ca(Y_1 \times Y_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ за свако фиксирано $x \in X$. Овиме смо дефинисали фамилију мера $(\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x)_{x \in X}$ на σ -алгебри $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Такође, треба напоменути да величину $(\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x)(E)$ можемо израчунати и формулом

$$(\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x)(E) = \int_{Y_1} \lambda_2^x(E^v) d\lambda_1^x(v), \quad E^v = \{y \in Y_2 : (v, y) \in E\}, \quad v \in Y_1.$$

У наредном тврђењу, добијеном у раду [7], бавимо се питањем припадности фамилије мера $(\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x)_{x \in X}$ простору $L_w^1(\mu, ca(Y_1 \times Y_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2))$.

Тврђење 5.31. Нека су дајти мерљиви простори $(Y_1, \mathcal{A}_1)$ и $(Y_2, \mathcal{A}_2)$ и нека је $\Lambda_1 \in L_w^1(\mu, ca(Y_1, \mathcal{A}_1))$. Ако је фамилија мера $\Lambda_2 = (\lambda_2^x)_{x \in X}$ на $\mathcal{A}_2$ $\mathcal{B}$ -мерљива и ако је функција $X \ni x \mapsto \|\lambda_2^x\| \in \mathbb{R}$ елементи простора $L^\infty(X, \mu)$ тада $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \in L_w^1(\mu, ca(Y_1 \times Y_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2))$.

Доказ. Нека је $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Показаћемо најпре $\mathcal{B}$ -мерљивост функције

$$X \ni x \mapsto (\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x)(E) = \int_{Y_2} \lambda_1^x(E_u) d\lambda_2^x(u) \in \mathbb{C}.$$

На основу Тврђења 5.15 тј. из показане мерљивости функције задате интегралом у (5.5) закључујемо да је довољно показати да је функција $X \times Y_2 \ni (x, u) \mapsto \lambda_1^x(E_u) \in \mathbb{C}$ мерљива у односу на σ -алгебру $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}_2$ за свако фиксирано $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Ово можемо лако добити уколико приметимо да је фамилија скупова

$$\mathcal{F} := \{E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : X \times Y_2 \ni (x, u) \mapsto \lambda_1^x(E_u) \in \mathbb{C} \text{ је } \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}_2\text{-мерљива}\}$$

монотона класа на $Y_1 \times Y_2$. На пример, како је $X \ni x \mapsto \lambda_1^x((A_1 \times A_2)_u) = \lambda_1^x(A_1) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$ -мерљива функција имамо да важи $A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}$ за свако $A \in \mathcal{A}_1$ и $A_2 \in \mathcal{A}_2$, док се остала својства проверавају слично као у доказу Леме 5.3. Дакле, закључујемо $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{F}$ па одатле добијамо $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}_2$ -мерљивост функције $X \times Y_2 \ni (x, u) \mapsto \lambda_1^x(E_u) \in \mathbb{C}$. Поред тога, за свако фиксирано $x \in X$ важи неједнакост $\|\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x\| \leq 4\|\lambda_1^x\| \|\lambda_2^x\|$ јер из (1.3) следи

$$\begin{aligned} \|\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x\| &\leq 4 \sup_{E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2} \left| \int_{Y_2} \lambda_1^x(E_u) d\lambda_2^x(u) \right| \leq \\ &\leq 4 \sup_{E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2} \int_{Y_2} |\lambda_1^x(E_u)| d|\lambda_2^x|(u) \leq 4\|\lambda_1^x\| \int_{Y_2} d|\lambda_2^x|(u) = 4\|\lambda_1^x\| \|\lambda_2^x\|. \end{aligned}$$

Десна страна доказане неједнакости $\|\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x\| \leq 4\|\lambda_1^x\| \|\lambda_2^x\|$ задаје μ -интеграбилну функцију на X јер је $\int_X \|\lambda_1^x\| \|\lambda_2^x\| d\mu(t) \leq \text{ess sup}_{x \in X} \|\lambda_2^x\| \int_X \|\lambda_1^x\| d\mu(t) < +\infty$, одакле добијамо да фамилија мера $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ припада простору $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y_1 \times Y_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2))$. $\square$

Напомена 5.32. Може се показати да за свако $x \in X$ важи неједнакост

$$\|\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x\| \leq \|\lambda_1^x\| \cdot \|\lambda_2^x\|.$$

Заиста, ако је $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ нека $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -мерљива партиципација скупа $Y_1 \times Y_2$, тада важи

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} |(\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x)(E_k)| &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \int_{Y_2} \lambda_1^x((E_k)_u) d\lambda_2^x(u) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{Y_2} |\lambda_1^x((E_k)_u)| d|\lambda_2^x|(u) \\ &\leq \int_{Y_2} \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_1^x((E_k)_u)| d|\lambda_2^x|(u) = \int_{Y_2} |\lambda_1^x|(Y_1) d|\lambda_2^x|(u) = |\lambda_1^x|(Y_1) \cdot |\lambda_2^x|(Y_2) = \|\lambda_1^x\| \cdot \|\lambda_2^x\|. \end{aligned}$$

Преласком на супремум по свим $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -мерљивим партиципацијама скупа $Y_1 \times Y_2$ добијамо жељену неједнакост. $\triangle$

Кроз наредни пример ће бити показано да Тврђење 5.31 не мора бити тачно уколико посматрани простор $L_w^1(\mu, \text{sa}(Y_1, \mathcal{A}_1))$ из формулације овог тврђења буде замењен ширим простором $\mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y_1, \mathcal{A}_1))$.

Пример 5.33. [7] Нека је фамилија мера $\Lambda_1 = (\lambda_1^x)_{x \in (0,1]}$ задаћа на исти начин као у једнакости (5.16) из Примера 5.23. На основу овог примера знамо да је фамилија мера Λ_1 елементи простора $\mathfrak{L}(t, \text{sa}((0,1], \mathcal{B}_{(0,1]}))$ али да није елементи нормираног простора $L_w^1(t, \text{sa}((0,1], \mathcal{B}_{(0,1]}))$. Нека је тусина мере λ_1^x означена са ϱ^x . Тада је функција $(0,1]^2 \ni (x,y) \mapsto \varrho^x(y) \in \mathbb{R}$ Борел мерљива у односу на производ простор, па је скупи

$$E = \{(x,y) \in (0,1]^2 : \varrho^x(y) > 0\}$$

Борелов у $(0,1]^2$. Нека је $\lambda_2^x := \delta_x$ за свако $x \in (0,1]$ и формирајмо фамилију мера $\Lambda_2 = (\lambda_2^x)_{x \in (0,1]}$. Тада је $\sup_{x \in (0,1]} \|\lambda_2^x\| = 1$. Нека је $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Како је тусина мере λ_1^x периодична функција са основним периодом $\frac{1}{n}$ закључујемо $m(E_x) = \frac{1}{2}$ као и

$$\lambda_1^x(E_x) = \int_{E_x} \varrho^x(y) dm(y) = \frac{\|\lambda_1^x\|}{2} \text{ за свако } x \in (0,1].$$

Како је $\lambda_2^x = \delta_x$ за свако $x \in (0,1]$ следи да функција

$$(0,1] \ni x \mapsto (\lambda_1^x \otimes \lambda_2^x)(E) = \int_{(0,1]} \lambda_1^x(E_u) d\lambda_2^x(u) = \lambda_1^x(E_x) = \frac{\|\lambda_1^x\|}{2} \in \mathbb{R}$$

није m -интеграбилна на $(0,1]$ шј. $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 \notin \mathfrak{L}(t, \text{sa}((0,1]^2, \mathcal{B}_{(0,1]^2}))$. $\triangle$

Еквивалентне норме на простору $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$

Наредно тврђење даје израз за еквивалентну норму у односу на норму $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$ простора $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$, коју смо до сада разматрали.

Лема 5.34. *Норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$ даје изразом (5.15) на векторском простору $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ је еквивалентна норми која је задаја изразом*

$$(5.21) \quad \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{\substack{f \in B_1(X) \\ g \in B_1(Y)}} \left| \int_X f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| \quad \text{за свако } \Lambda \in \mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A})).$$

Доказ. Лако закључујемо да важи неједнакост $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} \leq \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1}$. Заиста, довољно је у (5.21) одабрати $f = 1$ и $g_{x,A} = \text{sgn } \lambda^x(A) \cdot \chi_A$, где је $A \in \mathcal{A}$ произвољно, чиме добијамо неједнакост $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} \geq \int_X |\lambda^x(A)| d\mu(x)$. Са друге стране, за било коју фиксiranу функцију $f \in B_1(X)$, у доказу Теореме 5.19 дефинисали смо меру $\nu_{f\Lambda}$ на σ -алгебри $\mathcal{A}$ помоћу једнакости

$$\nu_{f\Lambda}(A) = \int_X f(x) \lambda^x(A) d\mu(x)$$

и доказали смо да важи неједнакост $\|\nu_{f\Lambda}\| \leq 4\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}$. На основу доказане формуле (5.7) имамо да за све функције $g \in B_1(Y)$ важи

$$\begin{aligned} \left| \int_X f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| &= \left| \int_Y g(y) d\nu_{f\Lambda}(y) \right| \\ &\leq \int_Y |g(y)| \cdot \left| \frac{d\nu_{f\Lambda}}{d|\nu_{f\Lambda}|}(y) \right| d|\nu_{f\Lambda}|(y) \leq |\nu_{f\Lambda}|(Y) = \|\nu_{f\Lambda}\| \leq 4\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}, \end{aligned}$$

што даје $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} \leq 4\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}$ након узимања супремума по $f \in B_1(X)$ и $g \in B_1(Y)$. $\square$

Приметимо да се израз из (5.21) може записати као

$$(5.22) \quad \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{g \in B_1(Y)} \int_X \left| \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \right| d\mu(x)$$

јер је функција $f(x) = \text{sgn } \int_Y g(y) d\lambda^x(y)$ елемент скупа $B_1(X)$ и максимизира двоструки супремум из (5.21) по скупу $B_1(X)$.

Нека је у наставку нормиран простор $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ посматран над реалним пољем скалара. Тада се скупови $B_1(X)$ и $B_1(Y)$ састоје од реалних функција са одговарајућим својством. У раду са конкретним просторима погодније је користити мање подскупове у $B_1(X)$ и $B_1(Y)$ који дефинишу исту норму $\|\cdot\|_{\mathfrak{L},1}$.

Тврђење 5.35. [6] *Нека је $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ елемент нормираног простора $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ и нека су даћи скупови функција $\Phi \subset B_1(X)$ и $\Psi \subset B_1(Y)$ са својством да за сваку реалну меру m на $\mathcal{B}$ важи*

$$(5.23) \quad \sup_{f \in B_1(X)} \int_X f dm \leq \sup_{\varphi \in \Phi} \int_X \varphi dm$$

и слично нека за сваку реалну меру η на σ -алгебри $\mathcal{A}$ важи

$$(5.24) \quad \sup_{g \in B_1(Y)} \int_Y g d\eta \leq \sup_{\psi \in \Psi} \int_Y \psi d\eta.$$

Тада важе једнакости

$$(5.25) \quad \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{\substack{\varphi \in \Phi \\ \psi \in \Psi}} \int_X \varphi(x) \int_Y \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x),$$

$$(5.26) \quad \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{\substack{\varphi \in \Phi \\ \psi \in \Psi}} \int_X |\varphi(x)| \cdot \left| \int_Y \psi(y) d\lambda^x(y) \right| d\mu(x).$$

Доказ. Докажимо најпре (5.25). Нека је $f \in B_1(X)$ фиксирана функција. Одаберимо реалну меру $\eta = \nu_{f\Lambda} = \int_X f(x) \lambda^x d\mu(x)$ у неједнакости (5.24). Користећи формулу (5.7) добијамо неједнакост

$$\sup_{g \in B_1(Y)} \int_X \int_Y f(x) g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \leq \sup_{\psi \in \Psi} \int_X \int_Y f(x) \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x).$$

Како је $f \in B_1(X)$ било произвољно имамо неједнакост

$$(5.27) \quad \sup_{f \in B_1(X)} \sup_{g \in B_1(Y)} \int_X \int_Y f(x) g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \leq \sup_{f \in B_1(X)} \sup_{\psi \in \Psi} \int_X \int_Y f(x) \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x).$$

Нека је сада функција $\psi \in \Psi$ фиксирана и дефинишимо меру $m : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ изразом

$$m(B) = \int_B f(x) \int_Y \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \text{ за свако } B \in \mathcal{B}.$$

Тада неједнакост (5.23) постаје

$$\sup_{f \in B_1(X)} \int_X \int_Y f(x) \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \leq \sup_{\varphi \in \Phi} \int_X \int_Y f(x) \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x).$$

Како је $\psi \in \Psi$ било произвољно имамо неједнакост

$$(5.28) \quad \sup_{\psi \in \Psi} \sup_{f \in B_1(X)} \int_X \int_Y f(x) \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \leq \sup_{\psi \in \Psi} \sup_{\varphi \in \Phi} \int_X \int_Y f(x) \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x).$$

Познато је да два супремума увек комутирају па на основу неједнакости (5.27) и (5.28) добијамо једнакост (5.25).

Докажимо сада једнакост (5.26). Десна страна једнакости (5.25) је мајоризована десном страном једнакости (5.26). Са друге стране, нека су $\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi$ произвољне фиксиране функције и $\varepsilon > 0$. На сличан начин, дефинишимо меру $m : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ изразом

$$m(B) = \int_B \int_Y \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \text{ за свако } B \in \mathcal{B}.$$

Приметимо да је

$$\int_X |\varphi(x)| \cdot \operatorname{sgn} \left(\int_Y \psi(y) d\lambda^x(y) \right) dm(x) = \int_X |\varphi(x)| \cdot \left| \int_Y \psi(y) d\lambda^x(y) \right| d\mu(x).$$

Одаберимо функцију $\varphi_1 \in \Phi$ за коју важи неједнакост

$$\int_X |\varphi(x)| \cdot \operatorname{sgn} \left(\int_Y \psi(y) d\lambda^x(y) \right) dm(x) \leq \int_X \varphi_1(x) dm(x) + \varepsilon.$$

Напоменимо да је последњу неједнакост могуће добити на основу неједнакости (5.23) и на основу дефиниције супремума. Стога, десна страна (5.26) је процењена десном страном (5.25) плус ε . Када пређемо на $\varepsilon \rightarrow 0$, имамо наше тврђење. $\square$

За више детаља око одабира оваквих скупова Φ и Ψ у неким конкретним ситуацијама погледати одговарајуће коментаре дате у раду [6].

Петисова интеграбилност функција из $\mathfrak{L}(\mu, \mathfrak{sa}(Y, \mathcal{A}))$

У овој краткој секцији ћемо показати да је уведени тип интеграције фамилије мера (у смислу Дефиниције 5.24) општији него концепт Петисове интеграције. Другим речима, конструисаћемо фамилију мера која је елемент неког конкретног простора $\mathfrak{L}(\mu, \mathfrak{sa}(Y, \mathcal{A}))$ али која није Петис интеграбилна.

Наредни пример је базиран на примени Хан-Банахове теореме.

Пример 5.36. Нека је $Y = [0, 1]$ са Бореловом σ -алгебром $\mathcal{B}_{[0,1]}$ и $X = [0, 1]$ са Лебејевом мером m на $\mathcal{B}_{[0,1]}$. Доказаћемо да постоји непрекидан линеарни функционал L на $\mathfrak{sa}([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ иакав да важе једнакости

$$L(m) = 1 \text{ и } L(\delta^x) = 0 \text{ за свако } x \in [0, 1].$$

Заиста, уколико дефинишемо $L(\delta_x) = 0$ за свако $x \in [0, 1]$ и продужимо L линеарно на линеал скупи $\{\delta_x : x \in [0, 1]\}$ добијемо нула функционал на линеарном омотачу од $\{\delta_x : x \in [0, 1]\}$. Да бисмо употребили Хан-Банахову теорему довољно је показати

$$d = \text{dist}(m, \text{lin}\{\delta_x : x \in [0, 1]\}) > 0.$$

Како је поттална варијација мере иакође мера, имамо да важи

$$\begin{aligned} d &\geq \left\| m - \sum_{k=1}^n c_k \delta_{y_k} \right\| = \left| m - \sum_{k=1}^n c_k \delta_{y_k} \right|([0, 1]) \\ &= \left| m - \sum_{k=1}^n c_k \delta_{y_k} \right|(\{y_1, \dots, y_n\}) + \left| m - \sum_{k=1}^n c_k \delta_{y_k} \right|([0, 1] \setminus \{y_1, \dots, y_n\}) \geq 1 \end{aligned}$$

за све скаларе $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ и све $y_1, \dots, y_n \in [0, 1]$.

Ако би функција $[0, 1] \ni x \mapsto \delta_x \in \mathfrak{sa}([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ била Петис интеграбилна тада мора бити $\int_{[0,1]}^P \delta_x dm(x) = \int_{[0,1]} \delta_x dm(x)$. То следи на основу дефиниције Петисовог интеграла и Дефиниције 5.24. Наиме, нека је $A \subseteq [0, 1]$ произвољан Борелов скуп и нека је $F_A \in \mathfrak{sa}([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})^*$ функционал израчунавања мере на скупу A . Тада је

$$\begin{aligned} \left(\int_{[0,1]}^P \delta_x dm(x) \right)(A) &= F_A \left(\int_{[0,1]}^P \delta_x dm(x) \right) \\ &= \int_{[0,1]} F_A(\delta_x) dm(x) = \int_{[0,1]} \delta_x(A) dm(x) = \left(\int_{[0,1]} \delta_x dm(x) \right)(A). \end{aligned}$$

Из доказано $L \in \mathfrak{sa}([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})^*$ следи да важи једнакости

$$(5.29) \quad L \left(\int_{[0,1]} \delta_x dm(x) \right) = \int_{[0,1]} L(\delta_x) dm(x)$$

Имамо да је $\int_{[0,1]} L(\delta_x) dm(x) = 0$ јер је $L(\delta_x) = 0$ за свако $x \in [0, 1]$. На основу Примера 5.25 знамо да је $\int_{[0,1]} \delta_x dm(x) = m$. Како је $L(m) = 1$ добијемо да се (5.29) своди на $1 = 0$. Контрадикција!

Може се појаснити и више. Функција $[0, 1] \ni x \mapsto L(\delta_x) \in \mathbb{C}$ не мора бити Лебеј мерљива. Довољно је узети ограничену функцију $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ која није Лебеј мерљива.

Дефинишимо пресликавање L на скупу $\{\delta_x : x \in [0, 1]\}$ изразом $L(\delta_x) = \psi(x)$ за свако $x \in [0, 1]$. Овако дефинисана функција L се може линеарно продужити на линеал скупа $\{\delta_x : x \in [0, 1]\}$ (ово продужење ћемо ојет обележити са L). На векторском простору $\text{lin}\{\delta_x : x \in [0, 1]\}$ функционал L је ораничен јер важи

$$\left| L\left(\sum_{k=1}^n c_k \delta_{y_k}\right) \right| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |\psi(x)| \sum_{k=1}^n |c_k| = \sup_{x \in [0, 1]} |\psi(x)| \cdot \left\| \sum_{k=1}^n c_k \delta_{y_k} \right\|$$

за све скаларе $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ и све $y_1, \dots, y_n \in [0, 1]$. Сада овако дефинисано пресликавање L можемо линеарно продужити на цео простор $\text{sa}([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$ (ојет ово продужење означавамо са L) применом Хан-Банахове теореме. Добијени линеарни функционал L је ораничен а функција $[0, 1] \ni x \mapsto L(\delta_x) \in \mathbb{C}$ није Лебеџ мерљива. $\triangle$

Апроксимације у простору $\mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$

У овој секцији наводимо један резултат који представља тврђење о апроксимацији у простору $\mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$. Доказ овог тврђења је базиран на комбинацији теорије која је развијена у овом поглављу као и на примени неких значајних теорема Функционалне анализе. Издвојимо међу тим теоремама познату Теорему Шура¹¹ која тврди да су слаба и јака конвергенција еквивалентне у простору ℓ^1 . За доказ ове теореме погледати нпр. [54, Поглавље 7, Пропозиција 4].

Теорема 5.37. [7] Нека је $\mu(X) < +\infty$ и нека је $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана σ -алгебра. Сваки елемент $\Lambda \in \mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$ је гранична вредност својих рескрипција $\chi_{X_n} \Lambda$, где је $X_n = \{x \in X : \|\lambda^x\| \leq n\}$. Спесијално, скупи ораничених фамилија из $\text{sa}(Y, \mathcal{A})$ је густ у нормираном простору $\mathfrak{L}(\mu, \text{sa}(Y, \mathcal{A}))$.

Доказ. На основу Леме 5.4 следи $X_n \in \mathcal{B}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Уколико претпоставимо супротно тврђењу теореме, можемо заправо да сматрамо да постоји $\varepsilon > 0$ тако да је за свако $n \in \mathbb{N}$ испуњена неједнакост $\|\Lambda - \chi_{X_n} \Lambda\|_{\mathfrak{L}, 1} > \varepsilon$. На основу дефиниције норми $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}, 1}$ следи да постоје функције $f_n \in B_1(X)$ и $g_n \in B_1(Y)$ такве да је

$$\left| \int_{X \setminus X_n} f_n(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| > \varepsilon.$$

Како је за фиксирано $n \in \mathbb{N}$ функција $\mathcal{B} \ni E \mapsto \int_E f_n(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \in \mathbb{C}$ елемент простора $\text{sa}(X, \mathcal{B})$, закључујемо да важи једнакост

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{X_N \setminus X_n} f_n(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) = \int_{X \setminus X_n} f_n(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) d\mu(x)$$

Зато, за свако $n \in \mathbb{N}$ имамо да постоји $N_n \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\left| \int_{X_{N_n} \setminus X_n} f_n(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| > \varepsilon.$$

Преласком на подниз добијамо да постоје међусобно дисјунктни скупови $B_n \in \mathcal{B}$ и функције $f_n \in B_1(X)$ такве да важи једнакост $f_n = 0$ ван скупа B_n , као и функције

¹¹Issai Schur (1875–1941), руско-немачки математичар

$g_n \in B_1(Y)$ за које важи неједнакост

$$(5.30) \quad \left| \int_{B_n} f_n(x) \int_Y g_n(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| > \varepsilon.$$

За сваку функцију $g \in L_{\mathcal{A}}^{\infty}$ дефинишемо

$$Tg = (t_n(g))_{n \geq 1}, \quad t_n(g) = \int_{B_n} f_n(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x).$$

За фиксирани елемент $g \in B_1(Y)$ можемо у (5.22) узети функцију

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n(x) \chi_{B_n}(x) f_n(x), \quad \varepsilon_n(x) = \operatorname{sgn} \left(f_n(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \right),$$

која припада скупу $B_1(X)$. Користећи ову функцију добијамо

$$\begin{aligned} +\infty > \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} &\geq \left| \int_X f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| \\ &\geq \operatorname{Re} \int_X f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \\ &= \int_X \operatorname{Re} \left(f(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{B_n}(x) \operatorname{Re} \left(\varepsilon_n(x) \cdot f_n(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{B_n}(x) \left| f_n(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \right| d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{B_n} \left| f_n(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) \right| d\mu(x) \\ &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_{B_n} f_n(x) \int_Y g(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} |t_n(g)| = \|Tg\|_{\ell^1}. \end{aligned}$$

Дакле, имамо да је $T: L_{\mathcal{A}}^{\infty} \rightarrow \ell^1$ ограничен линеаран оператор. Имамо и више: оператор T је компактан. Заиста, најпре закључујемо да је линеарни оператор $T: L_{\mathcal{A}}^{\infty} \rightarrow \ell^1$ *слабо компактан*¹² на основу [25, Последица 3, стр. 149]. Ово тврђење се може применити јер ℓ^1 не садржи копију простора ℓ^{∞} . На основу Шурове теореме имамо да је $T \in \mathfrak{C}_{\infty}(L_{\mathcal{A}}^{\infty}, \ell^1)$. Доказана компактност оператора T доводи до контрадикције са претходно добијеном проценом (5.30) тј. са тим да за свако $g_n \in B_1(Y)$ важи $|t_n(g_n)| > \varepsilon$ (видети [5, Теорема 1.31] која описује релативну компактност скупова у ℓ^1). $\square$

Сличан резултат важи у случају када је $\mu(X) = +\infty$. Наравно, у том случају нису сва ограничена пресликавања елементи простора $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$.

¹²Оператор $A: X \rightarrow Y$ је *слабо компактан* уколико A преводи ограничене скупе из X у скупе који су *слабо релативно компактни* у Y . Ако је Y Банахов простор онда на основу Теореме Еберлајн-Шмуљана (видети [23, Поглавље 3]) имамо да је ово својство еквивалентно са тим да оператор A преводи ограничене низове из X у низове из којих се може издвојити слабо конвергентан подниз.

Сепарабилност и дуал простора $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$

Најчешће, нормиран простор $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ није сепарабилан, јер садржи потпростор изоморфан Банаховом простору $sa(Y, \mathcal{A})$ на ком је норма задата преко тоталне варијације комплексне мере (о сепарабилности простора мера је било речи у Поглављу 1). Наиме, ако је $\mu(X) < +\infty$ тада свака мера $\sigma \in sa(Y, \mathcal{A})$ дефинише константну фамилију мера $\Lambda = (\sigma)_{x \in X} \in \mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ за коју, на основу (1.3), важе следеће неједнакости:

$$\mu(X) \cdot \frac{\|\sigma\|}{4} \leq \|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} = \sup_{A \in \mathcal{A}} |\sigma(A)| \cdot \mu(X) \leq \mu(X) \cdot \|\sigma\|.$$

На основу горњих неједнакости и из својства да $sa(Y, \mathcal{A})$ није сепарабилан следи да ни простор $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ не може бити сепарабилан уколико је $\mu(X) < +\infty$.

За сваку коначну позитивну меру σ на $(Y, \mathcal{A})$, простор $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ садржи као изоморфну копију простор $L^1(Y, \mathcal{A}, \sigma)$. Дакле, дуал нормираног простора $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ не може бити експлицитно описан.

Напоменимо да је у Секцији 5.4 комплетно описан дуал слично дефинисаног простора који садржи интеграбилне фамилије мера, при чему је норма на $sa(Y, \mathcal{A})$ дефинисана на другачији начин него што је то уобичајно.

За крај ове секције посматраћемо елемент $L_{\varphi, \psi}$ дуала простора $\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A}))$ тј. функционал $L_{\varphi, \psi} : \mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A})) \rightarrow \mathbb{C}$ задат изразом

$$(5.31) \quad L_{\varphi, \psi}(\Lambda) = \int_X \varphi(x) \int_Y \psi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x),$$

где је $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$, док је ψ је ограничена $\mathcal{A}$ -мерљива функција тј. функција која је елемент Банаховог простора $L^\infty_{\mathcal{A}}$ (на X имамо фиксирану меру μ док на Y радимо са фамилијом мера $(\lambda^x)_{x \in X}$). Приметимо да унутрашњи интеграл у (5.31) дефинише једну $\mathcal{B}$ -мерљиву функцију на основу Тврђења 5.15. У наредном тврђењу ћемо израчунати тачну норму функционала $L_{\psi, \phi}$.

Тврђење 5.38. Нека је $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$ и $\psi \in L^\infty_{\mathcal{A}}$. Тада је $L_{\varphi, \psi}$ нејрекидан линеаран функционал на $(\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A})), \|\cdot\|_{\mathfrak{L}, 1})$ и важи једнакост

$$\|L_{\varphi, \psi}\| = \|\varphi\|_{L^\infty(\mu)} \sup_{y \in Y} |\psi(y)|.$$

Доказ. На основу (5.21) имамо да за $\varphi \neq 0$ и $\psi \neq 0$ важи

$$(5.32) \quad \begin{aligned} |L_{\varphi, \psi}(\Lambda)| &= \|\varphi\|_{L^\infty(\mu)} \sup_{y \in Y} |\psi(y)| \cdot \left| \int_X \frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_{L^\infty(\mu)}} \int_Y \frac{\psi(y)}{\sup_{y \in Y} |\psi(y)|} d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mu)} \sup_{y \in Y} |\psi(y)| \cdot \|\Lambda\|_{\mathfrak{L}, 1}. \end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је $L_{\varphi, \psi}$ ограничен функционал на $(\mathfrak{L}(\mu, sa(Y, \mathcal{A})), \|\cdot\|_{\mathfrak{L}, 1})$ и да важи неједнакост $\|L_{\varphi, \psi}\| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mu)} \sup_{y \in Y} |\psi(y)|$. Нека је $b \in Y$ и $g \in L^1(X, \mu)$ произвољна функција. Дефинишимо фамилију мера Λ^b , при чему је сваки елемент λ_b^x

ове фамилије задат изразом $\lambda_b^x = g(x)\delta_b$. Имамо да је

$$\begin{aligned} \|\Lambda^b\|_{\mathfrak{L},1} &= \sup_{\substack{p \in B_1(X) \\ q \in B_1(Y)}} \left| \int_X p(x) \int_Y q(y)g(x) d\delta_b(y) d\mu(x) \right| \\ &= \sup_{\substack{p \in B_1(X) \\ q \in B_1(Y)}} |q(b)| \cdot \left| \int_X p(x)g(x) d\mu(x) \right| = \sup_{p \in B_1(X)} \left| \int_X p(x)g(x) d\mu(x) \right| = \|g\|_{L^1(\mu)}, \\ L(\Lambda^b) &= \int_X \varphi(x) \int_Y \psi(y)g(x) d\delta_b(y) d\mu(x) = \psi(b) \int_X \varphi(x)g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Одавде следи $\|L_{\varphi,\psi}\| \geq \frac{|L(\Lambda^b)|}{\|\Lambda^b\|_{\mathfrak{L},1}} = \frac{|\psi(b)|}{\|g\|_{L^1(\mu)}} \cdot \left| \int_X \varphi(x)g(x) d\mu(x) \right|$. Преласком на супремум по свим $b \in Y$ и $g \in L^1(\mu)$, $\|g\|_{L^1(\mu)} = 1$ добијамо $\|\varphi\|_{L^\infty(\mu)} \sup_{y \in Y} |\psi(y)| \leq \|L_{\varphi,\psi}\|$. $\square$

Општији функционали на простору $\mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ дати су линеарним комбинацијама елементарних функционала $L_{\varphi,\psi}$ који су дефинисани у (5.31).

Некомплетност простора $\mathfrak{L}(X, ca(Y, \mathcal{A}))$

У Поглављима 2 и 4 радили смо са фамилијама оператора и показали смо да одговарајући простори не морају бити комплетни. Слично се дешава и у раду са фамилијама мера.

Наиме, у раду [6] је доказано да нормиран простор $\mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ не мора бити комплетан. У поменутом раду је дат пример једног таквог простора, где је конструисан Кошијев низ који нема граничну вредност у $\mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$. Овде нећемо залазити у детаље доказа. Верујемо да ће пометури доказ бити од интересовања читаоцима којима је специјалност Теорија вероватноће јер доказ садржи знања и технике Стохастичке анализе.

У неким специјалним случајевима нормиран простор $\mathfrak{L}(X, ca(Y, \mathcal{A}))$ је Банахов.

Теорема 5.39. *Уколико је $X = \mathbb{N}$ са бројачком мером μ на $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ њада је нормиран простор $\mathfrak{L}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ комплетан.*

Доказ. Нека је $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ фамилија мера у нормираном простору $\mathfrak{L}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$, тј. нека је $\lambda_n = (\lambda_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ са својством

$$(5.33) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_n^k(A)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \|\lambda_n\|_{\mathfrak{L}} = M < +\infty.$$

На основу субадитивности супремума имамо

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n^k(A)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_n^k(A)| = M < +\infty.$$

Нека је $A \in \mathcal{A}$ произвољан скуп. Последње повлачи да за свако фиксирано $k \in \mathbb{N}$ ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k(A)$ апсолутно конвергира. Зато, за свако $k \in \mathbb{N}$ можемо дефинисати функцију $\lambda^k : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ следећим апсолутно конвергентним редом:

$$(5.34) \quad \lambda^k(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k(A) \text{ за свако } A \in \mathcal{A}.$$

Функција $\lambda^k : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана у (5.34) је комплексна мера на σ -алгебри $\mathcal{A}$, за свако фиксирано $k \in \mathbb{N}$, што следи директно применом Витали-Хан-Саксове теореме (видети Теорему 1.16). Тиме смо дефинисали фамилију $\lambda = (\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \text{ca}(Y, \mathcal{A})$ за коју важи $\lambda \in \mathcal{L}(\mu, \text{ca}(Y, \mathcal{A}))$ јер је

$$\begin{aligned} \|\lambda\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda^k(A)| \leq \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n^k(A)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_n^k(A)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \|\lambda^n\|_{\mathcal{L}} = M < +\infty. \end{aligned}$$

Докажимо сада да важи једнакост $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n = \lambda$, при чему је је конвергенција последњег реда у норми $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. За свако $N \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \lambda_n - \lambda \right\| &= \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^k - \lambda^k \right) (A) \right| \\ &= \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_n^k(A) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_n^k(A)| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|\lambda_n\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Када узмемо да $N \rightarrow \infty$ добијамо коначни закључак. $\square$

Напомена 5.40. Напоменимо да се може показати и на основу дефиниције да функција $\lambda^k : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисана изразом (5.34) представља комплексну меру на σ -алгебри $\mathcal{A}$ за свако фиксирано $k \in \mathbb{N}$. Заста, уколико су $A_j \in \mathcal{A}$ међусобно дисјунктни скупови, тада важе једнакости

$$\lambda^k \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_n^k(A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k(A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^k(A_j).$$

Прва и четврта једнакост у горњем рачуну следи на основу дефиниционе једнакост (5.34) функције λ^k , док друга једнакост у овом низу једнакост следи јер је $\lambda_n^k \in \text{ca}(Y, \mathcal{A})$ за свако фиксирано $k, n \in \mathbb{N}$. Трећа једнакост следи из

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_n^k(A_j)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_n^k| (A_j) = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n^k| \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|\lambda_n^k\| \leq 4M,$$

при чему се последња неједнакост добија применом (5.33) и (1.3) на следећи начин:

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \|\lambda_n^k\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} |\lambda_n^k(A)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_n^k(A)| \leq M.$$

5.3 Мерљиве фамилије L^p простора

У овој секцији разматрамо фамилије $L^p(\lambda^x)$ простора, које су индексирани тачком $x \in X$, при чему је $(X, \mathcal{B}, \mu)$ мерљив простор са коначном позитивном мером μ . Напоменимо да се $\mathcal{B}$ -мерљивост фамилије мера $(\lambda^x)_{x \in X}$ подразумева у истом смислу као и раније, тј. у смислу који је дат у Дефиницији 5.1.

Даклме, током ове секције нека је фиксирана $\mathcal{B}$ -мерљива фамилија $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ позитивних и коначних мера на $(Y, \mathcal{A})$. Такође, кроз целу секцију нека је фиксирана $\mathcal{B}$ -мерљива функција $p : X \rightarrow [1, +\infty)$.

Дефиниција 5.41. Нека је са $\mathfrak{F}^{p(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda)$ означен скуи свих $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљивих функција

$$X \times Y \ni (x, y) \mapsto f^x(y) \in \mathbb{C}$$

шаквих да важи $f^x \in L^{p(x)}(\lambda^x)$ за свако $x \in X$.

Скуп $\mathfrak{F}^{p(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda)$ чини векторски простор над пољем $\mathbb{C}$ са стандардно дефинисаним операцијама. Сваки елемент овог простора може бити разматран и као фамилија функција $f = (f^x)_{x \in X}$ која је $\mathcal{B}$ -мерљива у смислу да је функција

$$(5.35) \quad X \ni x \mapsto \int_A f^x(y) d\lambda^x(y) \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{B}$ -мерљива за свако фиксирано $A \in \mathcal{A}$, што следи директно на основу Тврђења 5.15. Напоменимо да је $\mathcal{B}$ -мерљивост функције (5.35) еквивалентна са тим да је фамилија мера $(f^x d\lambda^x)_{x \in X}$ $\mathcal{B}$ -мерљива.

Ако је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана, онда је и обрнуто тачно: свака $\mathcal{B}$ -мерљива фамилија мера $(\sigma^x)_{x \in X}$ из $sa(Y, \mathcal{A})$ за коју важи једнакост $d\sigma^x = f^x d\lambda^x$, при чему је $f^x \in L^{p(x)}(Y, \mathcal{A}, \lambda^x)$ за свако $x \in X$, генерише одговарајући елемент $X \times Y \ni (x, y) \mapsto f^x(y) \in \mathbb{C}$ векторског простора $\mathfrak{F}^{p(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda)$. Ово следи директно на основу Теореме 5.16.

Треба напоменути да је функција

$$X \ni x \mapsto \int_Y |f^x(y)|^{p(x)} d\lambda^x(y) \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{B}$ -мерљива за сваки елемент $(f^x)_{x \in X} \in \mathfrak{F}^{p(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda)$, што следи на основу Тврђења 5.15, јер је функција $X \times Y \ni (x, y) \mapsto |f^x(y)|^{p(x)} \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљива.

Приметимо да је $\mathfrak{F}^{q(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda) \subset \mathfrak{F}^{p(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda)$ кад год је $q : X \rightarrow [1, +\infty)$ нека $\mathcal{B}$ -мерљива функција за коју важи неједнакост $1 \leq p(x) \leq q(x) < +\infty$ за свако $x \in X$.

Ако је $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана σ -алгебра и ако је $f_n = (f_n^x)_{x \in X}$ низ елемената у $\mathfrak{F}^{p(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda)$ такав да за свако $x \in X$ постоји гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^x = f^x$ као елемент простора $L^{p(x)}(\lambda^x)$, онда се може наћи представник класе $Y \ni y \mapsto f^x(y) \in \mathbb{C}$ такав да фамилија функција $f = (f^x)_{x \in X}$ припада векторском простору $\mathfrak{F}^{p(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda)$. Заиста, за свако $x \in X$ важи једнакост

$$(5.36) \quad \int_A f^x(y) d\lambda^x(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n^x(y) d\lambda^x(y) \text{ за свако } A \in \mathcal{A},$$

Одавде следи да лева страна једнакости (5.36) дефинише $\mathcal{B}$ -мерљиву функцију, па се Теорема 5.16 може применити.

Тврђење 5.42. Нека је $(f^x)_{x \in X} \in \mathfrak{F}^{p(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda)$, где је $1 < p(x) < +\infty$, $(g^x) \in \mathfrak{F}^{q(\cdot)}(\mathcal{B}, \Lambda)$ и $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ за свако $x \in X$. Тада $(f^x g^x)_{x \in X} \in \mathfrak{F}^1(\mathcal{B}, \Lambda)$.

Доказ. Функција $X \times Y \ni (x, y) \mapsto f^x(y)g^x(y) \in \mathbb{C}$ је $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљива и важи

$$|f^x(y)g^x(y)| \leq \frac{|f^x(y)|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|g^x(y)|^{q(x)}}{q(x)} \leq |f^x(y)|^{p(x)} + |g^x(y)|^{q(x)} \text{ за свако } x \in X.$$

Десна страна горње неједнакости дефинише елемент из $\mathfrak{F}^1(\mathcal{B}, \Lambda)$ одакле закључујемо да важи $(f^x g^x)_{x \in X} \in \mathfrak{F}^1(\mathcal{B}, \Lambda)$. $\square$

Нека је дата фамилија $(f^x)_{x \in X}$ са својством да је $f^x \in L^2(\lambda^x)$ за свако $x \in X$. Битно је напоменути да у општем случају из $\mathcal{B}$ -мерљивости функције

$$(5.37) \quad X \ni x \mapsto \int_A f^x(y) d\lambda^x(y) \in \mathbb{C}$$

за свако фиксирано $A \in \mathcal{A}$ не можемо извести закључак о $\mathcal{B}$ -мерљивости функције $X \ni x \mapsto \langle f^x, f^x \rangle_{L^2(\lambda^x)} \in \mathbb{R}$. Самим тим ни функција $X \ni x \mapsto \|f^x\|_{L^2(\lambda^x)} \in \mathbb{R}$ не мора бити $\mathcal{B}$ -мерљива, што показује наредни пример.

Пример 5.43. [7] Нека је $X = [0, 1]$ и нека је $\mathcal{B}$ било која σ -алгебра на X која садржи све једночлане скупове и која је мања од $\mathcal{P}([0, 1])$. Можемо претпоставити да постоји скуп $E \subset [0, 1]$ такав да је $E \notin \mathcal{B}$ и $\frac{1}{2} \notin E$. Даље, нека је на скупу $Y = [0, 1]$ задата σ -алгебра $\mathcal{A}$ свих подскупова који су највише пребројиви или чији су комплементи (у односу на $[0, 1]$) највише пребројиви. Нека је

$$\lambda^x = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_{1-x}) \text{ за све } x \in [0, 1],$$

где је δ_x Диракова мера у тачки $x \in [0, 1]$. Приметимо да је овако дефинисана фамилија мера $(\lambda^x)_{x \in [0, 1]}$ $\mathcal{B}$ -мерљива јер су функције $[0, 1] \ni x \mapsto \delta_x(A) = \chi_A(x) \in \mathbb{R}$ и $[0, 1] \ni x \mapsto \delta_{1-x}(A) = \chi_A(1-x) = \chi_{1-A}(x) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљиве за свако фиксирано $A \in \mathcal{A}$ због тога што је $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Такође, за $x \in E$ дефинишимо

$$f^x(x) = 1, \quad f^x(1-x) = -1, \quad f^x(y) = 0 \text{ ако } y \notin \{x, 1-x\}$$

и $f^x = 0$ ако $x \notin E$. Тада, за било који пребројив скуп $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ имамо

$$\int_A f^x(y) d\lambda^x(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f^x(a_n)}_{=0} \cdot \lambda^x(\{a_n\}) = 0 \text{ за свако } x \in [0, 1] \setminus \{a_n, 1-a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Одавде следи да је функција $[0, 1] \ni x \mapsto \int_A f^x(y) d\lambda^x(y) \in \mathbb{R}$ посматрана у (5.37) $\mathcal{B}$ -мерљива за такве скупове A јер је инверзна слика сваке тачке где ова функција не узима вредност нула подскуп неког пребројивог скупа у $[0, 1]$, што је елемент σ -алгебре $\mathcal{B}$. Како за $x \in E$ важи $x \neq \frac{1}{2}$, имамо следећи рачун:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f^x(y) d\lambda^x(y) &= \int_{\{x, 1-x\}} f^x(y) d\lambda^x(y) = f^x(x) \cdot \lambda^x(\{x\}) + f^x(1-x) \cdot \lambda^x(\{1-x\}) \\ &= 1 \cdot \frac{\delta_x(\{x\}) + \delta_{1-x}(\{x\})}{2} + (-1) \cdot \frac{\delta_x(\{1-x\}) + \delta_{1-x}(\{1-x\})}{2} = \frac{1+0}{2} - \frac{0+1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Такође, за $x \in [0, 1] \setminus E$ важи једнакост $f^x(y) = 0$ за свако $y \in [0, 1]$ па је због тога $\int_{[0,1]} f^x(y) d\lambda^x(y) = 0$. Одавде закључујемо да је функција из (5.37) $\mathcal{B}$ -мерљива и за скупове A који су једнаки комплементима пребројивих скупова из $[0, 1]$. Дакле, разматрана функција је $\mathcal{B}$ -мерљива за свако $A \in \mathcal{A}$.

Са друге стране, ако $x \in E$ тада је $x \neq \frac{1}{2}$ па на основу сличног рачуна имамо:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |f^x(y)|^2 d\lambda^x(y) &= \int_{[0,1]} |f^x(y)| d\lambda^x(y) = \int_{\{x, 1-x\}} |f^x(y)| d\lambda^x(y) \\ &= 1 \cdot \frac{\delta_x(\{x\}) + \delta_{1-x}(\{x\})}{2} + 1 \cdot \frac{\delta_x(\{1-x\}) + \delta_{1-x}(\{1-x\})}{2} = \frac{1+0}{2} + \frac{0+1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Такође, за $x \in [0, 1] \setminus E$ очигледно имамо $\int_{[0,1]} |f^x(y)|^2 d\lambda^x(y) = 0$. Одавде добијамо да функција $[0, 1] \ni x \mapsto \langle f^x, f^x \rangle_{L^2(\lambda^x)} \in \mathbb{R}$ није $\mathcal{B}$ -мерљива јер је $E \notin \mathcal{B}$. Следи да функција $[0, 1] \ni x \mapsto \|f^x\|_{L^2(\lambda^x)} \in \mathbb{R}$ иакође не може бити $\mathcal{B}$ -мерљива. $\triangle$

Конструкција мерљивих ортонормираних база

Ако је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана, онда су све мере на $\mathcal{A}$ сепарабилне, тј. сви простори L^p за које је $p < +\infty$ су сепарабилни (видети Лему 1.9). За мерљиву фамилију мера ово нам омогућава да конструишемо ортонормиране базе на мерљив начин.

Тврђење 5.44. [7] Нека је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана и нека је $(\lambda^x)_{x \in X}$ $\mathcal{B}$ -мерљива фамилија позитивних мера на $\mathcal{A}$. Ако је $\dim L^2(\lambda^x) = +\infty$ за свако $x \in X$, онда се за свако $x \in X$ може одабрати ортонормирана база $\{e_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ у $L^2(\lambda^x)$ таква да су функције $X \times Y \ni (x, y) \mapsto e_n^x(y) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљиве.

Ако постоје простори $L^2(\lambda^x)$ различитих коначних димензија N_j , тада важи

$$X_j = \{x \in X : \dim L^2(\lambda^x) = N_j\} \in \mathcal{B}.$$

За свако N_j могу се одабрати ортонормиране базе $\{e_1^x, \dots, e_{N_j}^x\}$ у просторима $L^2(\lambda^x)$ димензије N_j такве да су функције $X \times Y \ni (x, y) \mapsto e_i^x(y) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљиве и може се одабрати $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљива бесконачна ортонормирана база за преостале тачке x .

Доказ. На основу претпоставке постоји пребројива алгебра $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ која генерише σ -алгебру $\mathcal{A}$. Као што је и напоменуто у пасусу пре формулације Леме 1.9 имамо да је скуп линеарних комбинација карактеристичних функција χ_{A_n} са коефицијентима из $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ густ у сваком простору $L^2(\lambda^x)$. Поређајмо елементе скупа $\{\chi_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$ у низ $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Нека је $n_1(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : \|\varphi_n\|_{L^2(\lambda^x)} > 0\}$ за свако $x \in X$. Овако дефинисана функција $X \ni x \mapsto n_1(x) \in \mathbb{R}$ је $\mathcal{B}$ -мерљива. Заиста, како су све функције $X \ni x \mapsto \|\varphi_n\|_{L^2(\lambda^x)} \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљиве имамо

$$B_n = \{x \in X : \|\varphi_n\|_{L^2(\lambda^x)} = 0\} \in \mathcal{B}.$$

За $k \in \mathbb{N}$ скуп $\{x \in X : n_1(x) = k\}$ има облик $(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \setminus B_k$. Одавде изводимо закључак о $\mathcal{B}$ -мерљивости функције $X \ni x \mapsto n_1(x) \in \mathbb{R}$, јер ова функција узима пребројиво много вредности у скупу $\mathbb{R}$.

Затим, за свако $x \in X$ дефинишимо

$$n_2(x) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : n > n_1(x), \begin{vmatrix} \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_{L^2(\lambda^x)} & \langle \varphi_n, \varphi_{n_1(x)} \rangle_{L^2(\lambda^x)} \\ \langle \varphi_n, \varphi_{n_1(x)} \rangle_{L^2(\lambda^x)} & \langle \varphi_{n_1(x)}, \varphi_{n_1(x)} \rangle_{L^2(\lambda^x)} \end{vmatrix} \neq 0 \right\}.$$

Функција $X \ni x \mapsto n_2(x) \in \mathbb{R}$ је такође $\mathcal{B}$ -мерљива, јер су и функције $X \ni x \mapsto \langle \varphi_n, \varphi_{n_1(x)} \rangle_{L^2(\lambda^x)} \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљиве. Индуктивно, налазимо природне бројеве $n_k(x) \leq \dim L^2(\lambda^x)$ са следећим својствима:

Функције $X \ni x \mapsto n_k(x) \in \mathbb{R}$ су $\mathcal{B}$ -мерљиве и $n_k(x)$ је минимални индекс $n > n_{k-1}(x)$ такав да су функције $\varphi_{n_1(x)}, \dots, \varphi_{n_{k-1}(x)}, \varphi_n$ линеарно независне у $L^2(\lambda^x)$.

Последње је еквивалентно са $\det G(x) \neq 0$, где је $G(x)$ Грамова¹³ матрица¹⁴ која одговара векторима $\varphi_{n_1(x)}, \dots, \varphi_{n_{k-1}(x)}, \varphi_n$ Хилбертовог простора $L^2(\lambda^x)$. Овде треба напоменути да је индуктивни корак могућ, јер је функција $X \ni x \mapsto \det G(x) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$ -мерљива за сваку функцију $\varphi_n \in L^2(\lambda^x)$.

Описаним поступком смо за свако $x \in X$ и свако $k \in \mathbb{N}$ дефинисали елемент $\varphi_{n_k(x)} \in L^2(\lambda^x)$. Приметимо да су функције $X \times Y \ni (x, y) \mapsto \varphi_{n_k(x)}(y) \in \mathbb{C}$ $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљиве. Наиме, за свако $j \in \mathbb{N}$ функција $Y \ni y \mapsto \varphi_j(y) \in \mathbb{C}$ је $\mathcal{A}$ -мерљива и скуп $\{x \in X : n_k(x) = j\}$

¹³Jørgen Pedersen Gram (1850–1916), дански математичар

¹⁴За детаље погледати нпр. [5, стр. 237].

припада $\mathcal{B}$. Такође, приметимо да су скупови $\{x \in X : \dim L^2(\lambda^x) = N\}$ елементи σ -алгебре $\mathcal{B}$, јер такви скупови могу бити описани као скупови у којима је детерминанта Грамове матрице елемената $\varphi_{n_1(x)}, \dots, \varphi_{n_{N-1}(x)}, \varphi_n$ једнака нули за све n . На основу извршене конструкције следи да је за свако $x \in X$ линеарни омотач скупа $\{\varphi_{n_k(x)} : k \in \mathbb{N}\}$ густ у $L^2(\lambda^x)$.

Нека сада $\psi_k^x(y) = \varphi_{n_k(x)}(y)$ за свако $k \in \mathbb{N}$ и $(x, y) \in X \times Y$. Функције ψ_k су $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљиве и за свако $x \in X$ скуп $\{\psi_k^x : k \in \mathbb{N}\}$ је линеарно независан у $L^2(\lambda^x)$ и његов линеарни омотач је густ у $L^2(\lambda^x)$. Сада можемо применити *Грам-Шмиџов њосџуџак орџоџонализације*¹⁵. Најпре дефинишимо вектор $e_1^x := \frac{1}{\|\psi_1^x\|_{L^2(\lambda^x)}} \cdot \psi_1^x$ за свако $x \in X$ а затим настављамо индуктивно:

$$C_{k+1}(x) := \left\| \psi_{k+1}^x - \sum_{j=1}^k \langle \psi_{k+1}^x, e_j^x \rangle_{L^2(\lambda^x)} \cdot e_j^x \right\|_{L^2(\lambda^x)},$$

$$e_{k+1}^x := \frac{1}{C_{k+1}(x)} \left[\psi_{k+1}^x - \sum_{j=1}^k \langle \psi_{k+1}^x, e_j^x \rangle_{L^2(\lambda^x)} \cdot e_j^x \right].$$

Добили смо $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљиве функције $e_k : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ такве да је за свако $x \in X$ скуп

$$\{e_n^x : n \in \mathbb{N}, n \leq \dim L^2(\lambda^x)\}$$

ортонормирана база у Хилбертовом простору $L^2(\lambda^x)$. □

Простори $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ са променљивим експонентом

Као и до сада, нека је кроз овај одељак фиксирана фамилија $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ позитивних и коначних мера на $(Y, \mathcal{A})$, која је још и $\mathcal{B}$ -мерљива. У досадашњем разматрању није била претпостављена интеграбилност функције $X \ni x \mapsto \lambda^x(Y) \in [0, +\infty)$ у односу на коначну меру μ . Претпоставимо сада да је функција $X \ni x \mapsto \lambda^x(Y) \in [0, +\infty)$ μ -интеграбилна. Тада имамо коначну меру ν_Λ тј. $\int_X \lambda^x d\mu(x)$, која је дата изразом

$$(5.38) \quad \nu_\Lambda(A) = \left(\int_X \lambda^x d\mu(x) \right) (A) = \int_X \lambda^x(A) d\mu(x) \text{ за свако } A \in \mathcal{A}.$$

Нека је за свако $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ *засек* E^x скупа E у тачки $x \in X$ дефинисан на стандардни начин са $E^x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \in \mathcal{A}$. Поред тога, можемо задати коначну меру μ_Λ на σ -алгебри $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ изразом

$$(5.39) \quad \mu_\Lambda(E) = \int_X \lambda^x(E^x) d\mu(x) = \int_X \int_Y \chi_E(x, y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \text{ за свако } E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}.$$

Приметимо да је функција $X \ni x \mapsto \lambda^x(E^x) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљива, што следи на основу Тврђења 5.15. Интеграл ограничене $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљиве функције $\varphi : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ у односу на меру μ_Λ може се израчунати употребом формуле

$$\int_{X \times Y} \varphi(x, y) d\mu_\Lambda(x, y) = \int_X \int_Y \varphi(x, y) d\lambda^x(y) d\mu(x),$$

што следи из (5.39) применом ТДК јер су мере μ , λ^x и μ_Λ коначне.

¹⁵Детаљи се могу наћи нпр. у [9].

За фиксиран број $p \in [1, +\infty)$ дефинишемо нормиран простор $\mathfrak{L}^p(\mu, \Lambda)$ свих класа еквиваленција елемената $f = (f^x)_{x \in X}$ из $\mathfrak{F}^p(\mathcal{B}, \Lambda)$ таквих да је

$$\|f\|_{p, \Lambda} := \sqrt[p]{\int_X \|f^x\|_{L^p(\lambda^x)}^p d\mu(x)} = \sqrt[p]{\int_X \int_Y |f^x(y)|^p d\lambda^x(y) d\mu(x)} < +\infty.$$

Идентификација два елемента $f = (f^x)_{x \in X}$ и $g = (g^x)_{x \in X}$ је подразумевана у смислу да је за μ -скоро свако $x \in X$ испуњена једнакост $f^x = g^x$ у $L^p(\lambda^x)$.

Вредност $\|f\|_{p, \Lambda}$ зависи и од μ , што нећемо наводити да би ознаке биле једноставније. Простор $\mathfrak{L}^p(\mu, \Lambda)$ је једнак класичном L^p простору $L^p(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}, \mu_\Lambda)$ простору са мером μ_Λ која је дефинисана у (5.39), али написан у односу на *дезинтеграцију* ове мере помоћу фамилије $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$, што може бити корисно у неким проблемима.

Шира класа простора настаје у случају променљивог експонента $p = p(x)$. Ова класа је посебан пример општих Лебегових L^p -простора са *променљивим експонентом* (погледати референце [16, 20, 22, 49] које су везане за ову област која је у активном развоју). Ради прегледности и прецизности излагања, наведимо неке основне појмове и тврђења ове теорије. Нека је $(X, \mathcal{B}, \lambda)$ мерљив простор са коначном позитивном мером λ и нека је $p: X \rightarrow [1, +\infty)$ $\mathcal{B}$ -мерљива функција. Простор $L^{p(\cdot)}(\lambda)$ састоји се од класа еквиваленција λ -мерљивих функција $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ таквих да је $I_{p(\cdot)}(sf) < +\infty$ за неко $s > 0$, при чему смо увели ознаку

$$I_{p(\cdot)}(f) := \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} d\lambda(x).$$

Овај простор је снабдевен *Луксембурџ*¹⁶ нормом која је задата изразом

$$(5.40) \quad \|f\|_{p(\cdot)} := \inf \left\{ s > 0: I_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{s}\right) \leq 1 \right\}.$$

Горе цитирана литература садржи велики број информација о својствима Лебегових простора са променљивим експонентом. У наставку, ради прегледности, наводимо неке од особина које ће нам бити од значаја у даљем раду.

Рецимо, простор $L^{p(\cdot)}(\lambda)$ са нормом $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ датом у (5.40) је Банахов.

Ако је $p(x) \leq r(x)$ за свако $x \in X$, при чему је $r: X \rightarrow [1, +\infty)$ нека $\mathcal{B}$ -мерљива функција, онда важи инклузија $L^{r(\cdot)}(\lambda) \subset L^{p(\cdot)}(\lambda)$ и природно утапање је непрекидно.

Нека својства ових простора важе под једностраним или двостраним ограничењима која се тичу функције $p: X \rightarrow [1, +\infty)$. Претпоставимо да је функција $p: X \rightarrow [1, +\infty)$ ограничена одозго неким бројем $r \geq 1$. Тада је скуп ограничених функција густ у $L^{p(\cdot)}(\lambda)$, тако да је скуп $L^r(\lambda)$ такође густ. Због тога, неједнакост $p(x) \leq r$ игра битну улогу. Са тим у вези погледати [46] или [22, Последица 3.4.10].

Даље, ако су $r_1, r > 1$ и ако за свако $x \in X$ важи $r_1 \leq p(x) \leq r$, тада је дуал простора $L^{p(\cdot)}(\lambda)$ *линеарно хомеоморфан* простору $L^{q(\cdot)}(\lambda)$, при чему је $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ за свако $x \in X$, тј. непрекидни линеарни функционали $l: L^{p(\cdot)}(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}$ имају облик

$$l(f) = \int_{\Omega} f(t)g(t) d\lambda(t) \text{ за свако } f \in L^{p(\cdot)}(\lambda),$$

при чему је $g \in L^{q(\cdot)}(\lambda)$. Додатно, простор $L^{p(\cdot)}(\lambda)$ је *униформно конвексан* а самим тим и рефлексиван. Неједнакост $r_1 \leq p(x) \leq r$ је битна за рефлексивност простора,

¹⁶Wilhelm A. J. Luxemburg (1929–2018), холандско-амерички математичар

што се може видети у [50] или [22, Напомена 3.4.8]. Подсетимо да је Банахов простор E униформно конвексан ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да из $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$ и $\|u - v\| \geq \varepsilon$, следи $\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq 1 - \delta$. Овакви простори су рефлексивни, што се може видети у [24, стр. 37] или [23, стр. 131]. Такође, познато је да униформно конвексни простори поседују *Банах-Саксово својство* (погледати [24, стр. 78] или [23, стр. 124]) које тврди да сваки ограничен низ у овим просторима садржи подниз чији чије аритметичке средине конвергирају у норми простора.

Ако је p ограничена функција и ако је мера λ сепарабилна, тј. уколико је простор $L^1(\lambda)$ сепарабилан, тада је и $L^{p(\cdot)}(\lambda)$ сепарабилан простор (видети нпр. [22, Лема 3.4.4]).

Сва наведена својства важе за специјални случај простора $L^{p(\cdot)}(\lambda)$ који настају у ситуацији коју разматрамо у овој секцији, када је дата $\mathcal{B}$ -мерљива фамилија мера $(\lambda^x)_{x \in X}$. Ради прегледности, издвојимо следећу дефиницију.

Дефиниција 5.45. Нека је $p: X \rightarrow [1, +\infty)$ $\mathcal{B}$ -мерљива функција. Са $\mathcal{L}(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ ћемо означаваћи простор $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљивих функција $X \times Y \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = f^x(y) \in \mathbb{C}$ таквих да је $I_{p(\cdot)}(sf) < +\infty$ за неко $s > 0$, где смо означили

$$I_{p(\cdot)}(f) := \int_X \int_Y |f^x(y)|^{p(x)} d\lambda^x(y) d\mu(x).$$

Са $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ означавамо одговарајући простор класа еквиваленција. Елементе f и g из $\mathcal{L}(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ идентификујемо ако за μ -скоро свако $x \in X$ важи једнакост $f^x(y) = g^x(y)$ за λ^x -скоро свако $y \in Y$. Норма $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ у овом простору је задата изразом (5.40).

Као прво запажање након уведене дефиниције, можемо приметити да ограничене $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -мерљиве функције $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ припадају сваком од простора $\mathcal{L}(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ код којих је функција $p: X \rightarrow [1, +\infty)$ ограничена, што се лако добија из

$$I_{p(\cdot)}(f) \leq \sup_{(x,y) \in X \times Y} |f^x(y)|^M \int_X \lambda^x(Y) d\mu(x) < +\infty,$$

при чему је $M = \sup\{p(x) : x \in X\} < +\infty$.

Простор $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ је једнак простору $L^{p(\cdot)}(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}, \lambda)$ са мером $\lambda = \mu_\Lambda$ на σ -алгебри $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, која је задата изразом (5.39), и са функцијом $p: X \times Y \rightarrow [1, +\infty)$ која задовољава $p(x, y) = p(x)$ за свако $(x, y) \in X \times Y$. Као и горе, овај простор је опремљен Луксембург нормом која је дефинисана изразом (5.40).

Напоменимо да посебан облик функције експонента p и употреба дезинтеграције мере μ_Λ може бити корисна, на пример, за увођење простора Собољевљевог¹⁷ типа са променљивим експонентом.

Ако је $Y = X$ и $\lambda^x = \delta_x$ за свако $x \in X$ тада добијамо Лебегов простор $L^{p(\cdot)}(\mu)$.

За сваку $\mathcal{B}$ -мерљиву фамилију $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ вероватносних мера на $\mathcal{A}$, простор $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ садржи потпростор изоморфан простору $L^{p(\cdot)}(\mu)$ и одговара елементима f за које вредност $f^x(y) \in \mathbb{C}$ не зависи од $y \in Y$. Општије посматрано, елементи простора $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ су функције које зависе од $x \in X$ и $y \in Y$. За сваку $\mathcal{B}$ -мерљиву фамилију позитивних мера λ^x , потпростор функција које не зависе од $y \in Y$ је изоморфан простору $L^{p(\cdot)}(\mu_0)$ са мером $d\mu_0 = \varrho d\mu$, при чему је функција $\varrho: X \rightarrow [0, +\infty)$ дефинисана изразом $\varrho(x) = \lambda^x(Y)$ за свако $x \in X$. Ако је $\lambda^x = \delta_{\alpha(x)}$ за неку $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -мерљиву функцију $\alpha: X \rightarrow Y$, тада $I_{p(\cdot)}(f) = \int_X |f^x(\alpha(x))|^{p(x)} d\mu(x)$.

¹⁷Сергей Львович Соболев (1908–1989), совјетски математичар

Други специјални случај настаје ако је свака мера λ^x дата као $d\lambda^x = \varrho(x, \cdot) d\lambda$, при чему је $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ дата мера на Y . У том случају имамо

$$I_{p(\cdot)}(f) = \int_X \int_Y |f^x(y)|^{p(x)} \varrho(x, y) d\lambda(y) d\mu(x).$$

Ако се све мере λ^x поклапају са мером λ на $\mathcal{A}$, тада добијамо стандардни простор $L^{p(\cdot)}$ у односу на производ мера $\mu \otimes \lambda$ на $X \times Y$ и са експонентом $p(x, y) = p(x)$ за $(x, y) \in X \times Y$.

Треба напоменути да ако је p неограничена функција, тада простор $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ може бити строго већи од скупа $\mathcal{E}^{p(\cdot)}(\mu, \Lambda)$ који се састоји од класа еквиваленција (у смислу Дефиниције 5.45) мерљивих пресликавања f са својством $I_{p(\cdot)}(f) < +\infty$. Међутим, за било коју ограничену функцију p важи једнакост $L(\mu, \Lambda, p(\cdot)) = \mathcal{E}^{p(\cdot)}(\mu, \Lambda)$ и то директно следи на основу дефиниције за $I_{p(\cdot)}(f)$.

Напоменимо и то да је простор $L(\mu, \Lambda, 2)$ Хилбертов са скаларним производом

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_X \langle f^x, g^x \rangle_{L^2(\lambda^x)} d\mu(x) = \int_X \int_Y f^x(y) \overline{g^x(y)} d\lambda^x(y) d\mu(x).$$

Приметимо да $\mathcal{B}$ -мерљивост функције $X \ni x \mapsto \langle f^x, g^x \rangle_{L^2(\lambda^x)} = \int_Y f^x(y) \overline{g^x(y)} d\lambda^x(y) \in \mathbb{C}$ није спорна јер она следи директно на основу Тврђења 5.15.

Сепарабилност простора $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$

Резултат дат у Лему 1.9 се бави сепарабилношћу класичних L^p простора. У наредном тврђењу се бавимо сепарабилношћу $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ простора.

Тврђење 5.46. [7] Нека је μ сепарабилна мера на $\mathcal{B}$ и нека је σ -алгебра $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана. Ако је p ограничена функција, онда је простор $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ сепарабилан.

Први доказ овог тврђења је у духу класичне Теорије мере и интеграције.

Први доказ Тврђења 5.46. На основу дискусије коју смо имали у прошлом одељку довољно је показати да је мера $\mu_\Lambda : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ задата изразом (5.39) сепарабилна. Како је мера μ сепарабилна на $\mathcal{B}$, на основу Леме 1.9 можемо наћи пребројиво генерисану σ -алгебру $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ такву да важи једнакост $\overline{\mathcal{B}_0}^\mu = \overline{\mathcal{B}}^\mu$. На основу Леме 1.5 имамо да је и σ -алгебра $\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{A}$ пребројиво генерисана. Дакле, да бисмо завршили доказ нашег тврђења, довољно је показати да важи једнакост

$$\overline{\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{A}}^{\mu_\Lambda} = \overline{\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}}^{\mu_\Lambda}.$$

Очигледно важи инклузија

$$\overline{\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{A}}^{\mu_\Lambda} \subseteq \overline{\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}}^{\mu_\Lambda}.$$

За доказ обрнуте инклузије, довољно је проверити да важи $B \times A \in \overline{\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{A}}^{\mu_\Lambda}$ за свако $B \in \mathcal{B}$ и $A \in \mathcal{A}$. Зато, уколико одаберемо такве скупе A и B имамо да постоји скуп $B_1 \in \mathcal{B}_0$ за који је $\mu(B \triangle B_1) = 0$. Следи $B_1 \times A \in \mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{A}$ и

$$\begin{aligned} \mu_\Lambda((B \times A) \triangle (B_1 \times A)) &= \mu_\Lambda((B \triangle B_1) \times A) = \\ &= \int_X \lambda^x(((B \triangle B_1) \times A)^x) d\mu(x) = \int_{B \triangle B_1} \lambda^x(A) d\mu(x) + 0 = 0, \end{aligned}$$

јер важи $\mu(B \triangle B_1) = 0$ као и $((B \triangle B_1) \times A)^x = \emptyset$ за свако $x \in X \setminus (B \triangle B_1)$. Овиме је доказано да је скуп $B \times A$ садржан у комплетирању σ -алгебре $\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{A}$. $\square$

За фамилију мера $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ на σ -алгебри $\mathcal{A}$ и за фиксирано $A \in \mathcal{A}$ дефинишемо функцију $\Lambda_A : X \rightarrow \mathbb{C}$ изразом $\Lambda_A(x) = \lambda^x(A)$ за свако $x \in X$. Ова дефиниција ће олакшати нотацију у даљем раду.

Напомена 5.47. *Следеће заједжање следи из Дефиниције 5.45. Ако је $A \in \mathcal{A}$ и $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ нека $\mathcal{B}$ -мерлива функција тада је пресликавање $X \times Y \ni (x, y) \mapsto \varphi(x)\chi_A(y) \in \mathbb{C}$ елементи простора $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ ако и само ако је $\varphi \in L^{p(\cdot)}(X, \mathcal{B}, \Lambda_A d\mu)$. Уколико је μ сејарабилна мера на $\mathcal{B}$ тада је и мера $\Lambda_A d\mu$ сејарабилна, на основу Леме 1.10.*

Тврђење 5.46 се може доказати и на следећи начин, у духу Теорије оператора.

Други доказ Тврђења 5.46. Нека је $\mathcal{A}$ пребројиво генерисана σ -алгебра. Тада можемо наћи растући низ коначних алгебри $\mathcal{A}_n$ чија унија генерише σ -алгебру $\mathcal{A}$. Свака алгебра $\mathcal{A}_n$ је генерисана неком партицијом скупа Y на коначан број међусобно дисјунктних скупова $A_{n,k}$, при чему је $k \in \{1, \dots, N_n\}$. За свако $x \in X$ дефинишемо пројекторе P_n^x на $L^{p(x)}(Y, \mathcal{A}, \lambda^x)$ изразом

$$(P_n^x f)(y) = \sum_{k=1}^{N_n} \frac{1}{\lambda^x(A_{n,k})} \int_{A_{n,k}} f(t) d\lambda^x(t) \cdot \chi_{A_{n,k}}(y) \text{ за свако } f \in L^{p(x)}(Y, \mathcal{A}, \lambda^x),$$

при чему је, у случају $\lambda^x(A_{n,k}) = 0$, одговарајући сабирак у суми изнад једнак нули. За свако $x \in X$ и $f \in L^{p(x)}(\lambda^x)$ важи једнакост

$$(5.41) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n^x f - f\|_{L^{p(x)}(\lambda^x)} = 0.$$

Заиста, једнакост (5.41) је тачна за сваку функцију f која је линеарна комбинација функција $\chi_{A_{m,j}}$ а важи и једнакост $\|P_n^x\| = 1$ за све $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$ за које је $P_n^x \neq 0$.

До сада смо радили са пројекторима P_n^x на простору $L^{p(x)}(Y, \mathcal{A}, \lambda^x)$. Користећи ову фамилију пројектора можемо дефинисати одговарајуће пројекторе P_n на Банаховом простору $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ изразом

$$(5.42) \quad (P_n f)^x(y) = (P_n^x f^x)(y) = \sum_{k=1}^{N_n} \frac{1}{\lambda^x(A_{n,k})} \int_{A_{n,k}} f^x(t) d\lambda^x(t) \chi_{A_{n,k}}(y)$$

за свако $f = (f^x)_{x \in X} \in L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$. Тада за свако $f \in L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ важи једнакост

$$(5.43) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n f\|_{p(\cdot)} = 0,$$

што следи на основу следећег низа једнакости:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_{p(\cdot)}(f - P_n f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \int_Y |f^x(y) - (P_n f)^x(y)|^{p(x)} d\lambda^x(y) d\mu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \|f^x - (P_n^x f^x)\|_{L^{p(x)}(\lambda^x)}^{p(x)} d\mu(x) = 0. \end{aligned}$$

Напоменимо да је у горњем рачуну била оправдана примена ТДК, јер знамо да важи (5.41). Функција $X \ni x \mapsto 2^{p(x)} \|f^x\|_{L^{p(x)}(\lambda^x)}^{p(x)} \in \mathbb{R}$ припада простору $L^1(X, \mu)$ због тога што је $\sup\{p(x) : x \in X\} < +\infty$. Такође, за μ -скоро свако $x \in X$ важи процена

$$\|f^x - P_n^x f^x\|_{L^{p(x)}(\lambda^x)}^{p(x)} \leq (\|f^x\|_{L^{p(x)}(\lambda^x)} + \|P_n^x\| \cdot \|f^x\|_{L^{p(x)}(\lambda^x)})^{p(x)} \leq 2^{p(x)} \|f^x\|_{L^{p(x)}(\lambda^x)}^{p(x)},$$

одакле видимо да је поменута функција интеграбилна доминанта низа на који смо применили ТДК.

На основу (5.42) и (5.43) закључујемо да је скуп линеарних комбинација функција облика $\Theta_{\varphi,A}(x,y) = \varphi(x)\chi_A(y)$, где је $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$ -мерљива функција, $A \in \{A_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, N_n\}\}$ и $\Theta_{\varphi,A} \in L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$, густ у простору $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$. Одавде следи да је довољно апроксимирати једну такву функцију $\Theta_{\varphi,A} \in L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$. На основу Напомене 5.47 важи $\Theta_{\varphi,A} \in L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$ ако и само ако $\varphi \in L^{p(\cdot)}(X, \Lambda_A d\mu)$. Мера $\Lambda_A d\mu$ је сепарабилна на основу Леме 1.10 и функција $p : X \rightarrow [1, +\infty)$ је ограничена па постоји низ $(\varphi_j^A)_{j \in \mathbb{N}}$ који тежи ка φ у норми простора $L^{p(\cdot)}(X, \Lambda_A d\mu)$. Следи да низ $(\Theta_{\varphi_j^A,A})_{j \in \mathbb{N}}$ конвергира ка $\Theta_{\varphi,A}$ у норми простора $L(\mu, \Lambda, p(\cdot))$. $\square$

5.4 Простори фамилија мера са Канторович-Рубинштајновом нормом

Нека је у овој секцији дат метички простор (Y, d) са својом Бореловом σ -алгебром $\mathcal{A} = \mathcal{B}_Y$. Подсетимо се, простор мера $ca(Y, \mathcal{A})$, реалних или комплексних, је комплетан у односу на норму задату преко тоталне варијације мере. Са друге стране, простор $ca(Y, \mathcal{A})$ најчешће није сепарабилан, као што је напоменуто у Поглављу 1.

Нека је дата Липшицова¹⁸ функција $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{C}$. Тада дефинишемо

$$\text{Lip}(\varphi) = \sup \left\{ \frac{|\varphi(u) - \varphi(v)|}{d(u,v)} : u, v \in Y, d(u,v) > 0 \right\}.$$

Величина $\text{Lip}(\varphi)$ се назива *Липшицова константа* функције φ . Скуп ограничених и Липшицових функција $BL(Y)$ је векторски простор. Имамо и више, $BL(Y)$ постаје Банахов простор са нормом дефинисаном изразом

$$\|\varphi\|_{BL} = \max \left\{ \text{Lip}(\varphi), \sup_{y \in Y} |\varphi(y)| \right\} \text{ за свако } \varphi \in BL(Y).$$

За детаљан увод у теорију Липшицових функција погледати [76].

Од интереса је разматрати векторски простор мера $ca(Y, \mathcal{A})$ који настаје уколико је (Y, d) комплетан и сепарабилан метрички простор са његовом Бореловом σ -алгебром $\mathcal{A} = \mathcal{B}_Y$. На овом векторском простору посматраћемо Канторович-Рубинштајнову норму $\|\cdot\|_{KR,d}$ задату изразом

$$\|\nu\|_{KR,d} = \sup \left\{ \left| \int_Y \varphi(y) d\nu(y) \right| : \varphi \in \text{Lip}_1(Y), \sup_{y \in Y} |\varphi(y)| \leq 1 \right\} = \sup_{\|\varphi\|_{BL} \leq 1} \left| \int_Y \varphi(y) d\nu(y) \right|,$$

при чему смо са $\text{Lip}_1(Y)$ означили скуп 1-Липшицових функција на метричком простору (Y, d) . Приметимо да није одмах јасно да горе дефинисана функција $\|\cdot\|_{KR,d}$ представља норму на векторском простору $ca(Y, \mathcal{A})$.

Одмах на основу горње дефиниције функције $\|\cdot\|_{KR,d}$ имамо да је Канторович-Рубинштајнова норма вероватносне мере на $\mathcal{A}$ једнака 1 и то је очигледно. Такође, уколико је $\lambda \geq 0$ коначна мера на $\mathcal{A}$, тада је $\|\lambda\|_{KR,d} = \lambda(Y)$. Одавде следи да је $\frac{1}{\|\lambda\|_{KR,d}} \cdot \lambda$ вероватносна мера кад год је $\lambda \in ca(Y, \mathcal{A})$ и $\lambda \geq 0$.

¹⁸Rudolf Otto Sigmund Lipschitz (1832–1903), немачки математичар

Функција $\|\cdot\|_{KR,d}$ има многе значајне особине које ће бити наведене у тексту ниже и које ћемо користити у даљем раду.

Пре него што наведемо особине $\|\cdot\|_{KR,d}$ норме, напоменимо да је на произвољном метричком простору (Y, d) свака Борелова мера $\lambda \in ca(Y, \mathcal{B}_Y)$ одређена вредностима на затвореним и отвореним скуповима метричког простора (Y, d) . Прецизније, на основу [14, Пропозиција 2.1.8] имамо да за $\lambda \in ca(Y, \mathcal{B}_Y)$ и $\varepsilon > 0$ постоји затворен скуп $F \subset B$ и отворен скуп $U \supset B$ тако да важи $|\lambda|(U \setminus F) < \varepsilon$. Ово тврђење не претпоставља сепарабилност и комплетност метричког простора (Y, d) . Уколико је додатно метрички простор (Y, d) сепарабилан и комплетан онда за $\lambda \in ca(Y, \mathcal{B}_Y)$, $B \in \mathcal{B}_Y$ и $\varepsilon > 0$ можемо наћи компактан скуп $K \subset B$ такав да је $|\lambda|(B \setminus K) < \varepsilon$. За доказ овог тврђења видети [13, Теорема 7.1.7] или [14, Теорема 2.1.9]. Такође, погледати и [65].

Својства $\|\cdot\|_{KR,d}$ норме на простору мера $ca(Y, \mathcal{B}_Y)$

Наведемо сада нека позната својства $\|\cdot\|_{KR,d}$ норме која ћемо користити у раду са фамилијама мера. Нека својства ћемо доказати ради прегледности излагања.

- (1) Нека је $\lambda \in ca(Y, \mathcal{B}_Y)$, при чему је (Y, d) метрички простор (не претпостављамо комплетност нити сепарабилност) и нека је $\|\lambda\|_{KR,d} = 0$. Довољно је показати да за сваки затворен скуп $F \subset Y$ важи $\lambda(F) = 0$ јер за сваки скуп $B \in \mathcal{B}_Y$ постоји низ затворених скупова $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који су садржани у B и за који важи $\lambda(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(F_n)$. Дефинишемо низ Липшицових функција $g_n : Y \rightarrow [0, 1]$ са $g_n(y) = \max \left\{ 0, 1 - \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot d(y, F) \right\}$, при чему је $\varepsilon_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Важи $0 \leq g_n(y) \leq 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $y \in Y$. По дефиницији $\|\cdot\|_{KR,d}$ норме важи $\int_Y g_n(y) d\lambda(y) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ а имамо и да је $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = \chi_F(y)$ за свако $y \in Y$. Применом ТДК добијамо $\lambda(F) = \int_Y \chi_F(y) d\lambda(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y g_n(y) d\lambda(y) = 0$. Остала својства норме се лако проверавају.
- (2) Важе једнакости $\|\delta_a\|_{KR,d} = 1$ и $\|\delta_a - \delta_b\|_{KR,d} = \min\{d(a, b), 2\}$ за свако $a, b \in Y$. Прва једнакост је очигледна. Докажимо другу једнакост. Ако је $d(a, b) \leq 2$, онда функција f задата са $f(a) = \frac{d(a,b)}{2}$ и $f(b) = -\frac{d(a,b)}{2}$ има 1-Липшицово проширење на цео простор Y такво да је $\sup_{y \in Y} |f(y)| \leq 1$ (пример једног таквох проширења је функција дата изразом $f(y) = \frac{d(y,b)-d(y,a)}{2}$ за свако $y \in Y$). Тада је $\int_Y f(y) d(\delta_a - \delta_b) = d(a, b)$. Ако је $d(a, b) > 2$, онда можемо користити функцију $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ која испуњава $f(a) = 1$ и $f(b) = -1$ (пример једне такве функције је дат изразом $f(y) = \frac{d(y,b)-d(y,a)}{d(a,b)}$ за свако $y \in Y$) да бисмо добили $\int_Y f(y) d(\delta_a - \delta_b) = 2$ али за функције које испуњавају $\sup_{y \in Y} |f(y)| \leq 1$ не може се добити више.
- (3) Нека је метрички простор (Y, d) сепарабилан. Тада је простор $(ca(Y, \mathcal{A}), \|\cdot\|_{KR,d})$ такође сепарабилан. Заиста, нека је $\nu \in ca(Y, \mathcal{A})$ и $\varepsilon > 0$ произвољно. На основу претпостављене сепарабилности простора Y постоји низ међусобно дисјунктних Борелових скупова $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у Y таквих да је $\text{diam}(Y_n) \leq \varepsilon$ за све $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n = Y$. Фиксирајмо елементе $y_n \in Y_n$ и формирајмо меру $\nu_\varepsilon \in ca(Y, \mathcal{A})$ изразом

$$\nu_\varepsilon(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(Y_n) \cdot \delta_{y_n}(A) \text{ за свако } A \in \mathcal{A}.$$

Горњим изразом је задат елемент $\nu_\varepsilon \in ca(Y, \mathcal{A})$ јер је $(\nu(Y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$. Докажимо да је $\|\nu - \nu_\varepsilon\|_{KR,d} \leq \varepsilon \cdot \|\nu\|$. Наиме, имамо да важи

$$\begin{aligned} \|\nu - \nu_\varepsilon\|_{KR,d} &= \sup_{\|\varphi\|_{BL} \leq 1} \left| \int_Y \varphi d(\nu - \nu_\varepsilon) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{\|\varphi\|_{BL} \leq 1} \left| \int_{Y_n} \varphi d\nu - \int_{Y_n} \varphi d\nu_\varepsilon \right| \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{\|\varphi\|_{BL} \leq 1} \left| \int_{Y_n} \varphi d\nu - \nu(Y_n) \cdot \varphi(y_n) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{\|\varphi\|_{BL} \leq 1} \left| \int_{Y_n} [\varphi(y) - \varphi(y_n)] d\nu(y) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{\|\varphi\|_{BL} \leq 1} \int_{Y_n} \underbrace{|\varphi(y) - \varphi(y_n)|}_{\leq 1 \cdot d(y, y_n) \leq \varepsilon} d|\nu|(y) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon \int_{Y_n} d|\nu| = \varepsilon \cdot \|\nu\|. \end{aligned}$$

Напоменимо да у горњем рачуну друга једнакост следи јер је контракција мере ν_ε на скуп Y_n једнака мери $\nu(Y_n) \cdot \delta_{y_n}$. На основу доказане неједнакости можемо закључити да је пребројив скуп $\text{lin}\{c_n \delta_{y_n} : c_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ густ у $ca(Y, \mathcal{A})$ у односу на $\|\cdot\|_{KR,d}$ норму.

- (4) Типично, нормиран простор $(ca(Y, \mathcal{A}), \|\cdot\|_{KR,d})$ није комплетан. Наиме, уколико метрички простор (Y, d) садржи Кошијев низ међусобно различитих елемената доказаћемо да векторски простор $ca(Y, \mathcal{A})$ није комплетан у односу на $\|\cdot\|_{KR,d}$ норму. Заиста, уколико би норма $\|\cdot\|_{KR,d}$ била комплетна на $ca(Y, \mathcal{A})$ онда би према Банаховој теореме о отвореном пресликавању она била еквивалентна норми задатој преко тоталне варијације $\|\cdot\|$ јер важи неједнакост $\|\nu\|_{KR,d} \leq \|\nu\|$ за свако $\nu \in ca(Y, \mathcal{A})$. Међутим, на основу доказаног својства (2), за претходно описани Кошијев низ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у (Y, d) имамо да важе једнакости $d(y_n, y_k) = \min\{d(y_n, y_k), 2\} = \|\delta_{y_n} - \delta_{y_k}\|_{KR,d}$ за довољно велике природне бројеве n и k . Са друге стране, знамо да важи $\|\delta_{y_n} - \delta_{y_k}\| = 2$ јер је $y_n \neq y_k$ за $n \neq k$.
- (5) Метрика индукована $\|\cdot\|_{KR,d}$ нормом је комплетна на скупу ненегативних мера у $ca(Y, \mathcal{A})$, што следи на основу [14, Теорема 3.2.2]. Заиста, уколико је $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ коначних и позитивних Борелових мера на $\mathcal{A}$ тада низ $(\|\lambda_n\|_{KR,d})_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира или ка 0 или ка неком коначном позитивном броју a . У првом случају тврђење одмах следи док у другом случају можемо посматрати низ вероватносних мера $\left(\frac{1}{\|\lambda_n\|_{KR,d}} \cdot \lambda_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Овај низ је Кошијев у d_{KR} метрици па на основу наведене теореме конвергира ка некој вероватносној мери μ , тј. важи једнакост

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{KR} \left(\frac{1}{\|\mu_n\|_{KR,d}} \cdot \mu_n, \mu \right) = 0.$$

Одавде следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{KR}(\mu_n, a \cdot \mu) = 0$.

Нормиран простор $L^1_{KR,d}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$

У наставку излагања ћемо конструисати нормиран простор фамилија мера чија је $\|\cdot\|_{KR,d}$ норма интеграбилна функција. Битно је нагласити да ће добијени простор бити Бохнеровог типа, јер на основу доказаног својства (3) из прошлог одељка знамо да је $ca(Y, \mathcal{A})$ сепарабилан простор са $\|\cdot\|_{KR,d}$ нормом. Оно што није уобичајно је то што ће се добијени Бохнеров простор састојати од функција са вредностима у некомплетном нормираном простору $(ca(Y, \mathcal{A}), \|\cdot\|_{KR,d})$.

У овој секцији претпостављамо да је мера μ коначна на $(X, \mathcal{B})$.

Дефиниција 5.48. *Скупи свих класа еквиваленција μ -мерљивих пресликавања $f: X \rightarrow (ca(Y, \mathcal{A}), \|\cdot\|_{KR,d})$ таквих да је функција $X \ni x \mapsto \|f(x)\|_{KR,d} \in \mathbb{R}$ μ -интеграбилна ћемо означаваћи са $L^1_{KR}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$. Простор $L^1_{KR}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ је снабдевен нормом*

$$\|f\|_{1,KR} = \int_Y \|f(x)\|_{KR,d} d\mu(x).$$

Напоменимо да је простор $L^1_{KR}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ разматран у радовима [6, 7].

Како је простор $(ca(Y, \mathcal{A}), \|\cdot\|_{KR})$ сепарабилан закључујемо да се нормиран простор $L^1_{KR}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ може представити у облику $L^1_B(\mu, E)$, где је $E = (ca(Y, \mathcal{A}), \|\cdot\|_{KR})$ (видети Секцију 1.2 у којој су дефинисани $L^1_B(\mu, E)$ простори). Битно је нагласити да у овој ситуацији простор $E = (ca(Y, \mathcal{A}), \|\cdot\|_{KR})$ најчешће није комплетан (видети својство (4) из прошле секције) па ни простор $L^1_{KR}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ не мора бити такав.

Можда неочекивано, сви елементи из $L^1_{KR,d}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ имају Бохнеров интеграл!

Тврђење 5.49. [7] *Нека је $\mu(X) < +\infty$ и претпоставимо да је метрички простор (Y, d) сепарабилан. Сваки елемент $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ нормираног простора $L^1_{KR,d}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ поседује Бохнеров интеграл и важи једнакост $\int_X \lambda^x d\mu(x) = \int_X \lambda^x d\mu(x)$.*

Доказ. За фамилију Λ можемо наћи репрезента класе, тј. фамилију мера $(\lambda^x)_{x \in X}$ која је $\mathcal{B}$ -мерљива и коју ћемо користити у наставку. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Простор мера $ca(Y, \mathcal{A})$ са $\|\cdot\|_{KR,d}$ нормом је сепарабилан (видети доказано својство (3) норме $\|\cdot\|_{KR,d}$). Одавде следи да можемо наћи његову партицију на дисјунктне Борелове скупове M_n , $n \in \mathbb{N}$, дијаметра највише ε . Скупови $X_n = \Lambda^{-1}(M_n) \in \mathcal{B}$ дају $\mathcal{B}$ -мерљиву партицију скупа X . Можемо претпоставити да је μ вероватносна мера. Зато, постоји $N \in \mathbb{N}$ тако да важи неједнакост

$$\int_{\Omega_N} \|\lambda^x\|_{KR,d} d\mu(x) \leq \varepsilon,$$

при чему је $\Omega_N := \bigsqcup_{n=N+1}^{+\infty} X_n$. Фиксирајмо (произвољно) елементе $m_j \in M_j$ за свако $j \in \mathbb{N}$ и дефинишемо пресликавање $\Lambda_\varepsilon = (\lambda_\varepsilon^x)_{x \in X}$, које узима коначно много вредности, на следећи начин: $\lambda_\varepsilon^x = m_n$ ако је $x \in X_n$, за $n \in \{1, \dots, N\}$ и нека је $\lambda^x = 0 \in ca(Y, \mathcal{A})$ за свако $x \in \Omega_N$. За овако дефинисану фамилију мера Λ_ε имамо

$$\|\Lambda - \Lambda_\varepsilon\|_{1,KR,d} = \sum_{n=1}^N \int_{X_n} \|\lambda^x - m_n\|_{KR,d} d\mu(x) + \varepsilon \leq \varepsilon \sum_{n=1}^N \mu(X_n) + \varepsilon \leq \varepsilon \cdot \mu(X) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Бохнеров интеграл фамилије мера Λ_ε се лако рачуна јер ова фамилија узима само коначно много вредности у $ca(Y, \mathcal{A})$, тј. Бохнеров интеграл ове фамилије је једнак

$$\sigma_\varepsilon = \int_X \Lambda_\varepsilon d\mu = \sum_{n=1}^N \mu(X_n) \cdot m_n \in ca(Y, \mathcal{A}).$$

Досадашње разматрање се може извести за било који сепарабилан нормирани простор E , али сада постају важна нека специфична својства простора $ca(Y, \mathcal{A})$: фамилија мера $(\sigma_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ конвергира ка мери¹⁹ ν_Λ у норми $\|\cdot\|_{KR,d}$. Заиста, нека је $\varphi \in \text{Lip}_1(Y)$ произвољна

¹⁹Видети једнакост (5.6) којом је задата комплексна мера ν_Λ на σ -алгебри $\mathcal{A}$.

функција за коју важи $\sup_{y \in Y} |\varphi(y)| \leq 1$. На основу формуле (5.7) добијамо

$$\begin{aligned} \int_Y \varphi d\sigma_\varepsilon - \int_Y \varphi d\nu_\Lambda &= \sum_{n=1}^N \mu(X_n) \int_Y \varphi dm_n - \int_X \int_Y \varphi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\mu(X_n) \int_Y \varphi dm_n - \int_{X_n} \int_Y \varphi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right) - \int_{\Omega_N} \int_Y \varphi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x). \end{aligned}$$

Последњи интеграл по скупу Ω_N се процењује по апсолутној вредности са ε јер је

$$\left| \int_{\Omega_N} \int_Y \varphi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| \leq \int_{\Omega_N} \left| \int_Y \varphi(y) d\lambda^x(y) \right| d\mu(x) \leq \int_{\Omega_N} \|\lambda^x\|_{KR,d} d\mu(x) \leq \varepsilon.$$

За било које $x \in X_n$ имамо $\|\lambda^x - m_n\|_{KR,d} \leq \varepsilon$, одакле следи да важи неједнакост

$$\left| \int_Y \varphi(y) d\lambda^x(y) - \int_Y \varphi(y) dm_n(y) \right| \leq \varepsilon \text{ за свако } x \in X_n.$$

Интеграцијом горње неједнакости по скупу X_n у односу на меру μ добијамо

$$\left| \int_{X_n} \int_Y \varphi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) - \mu(X_n) \int_Y \varphi(y) dm_n(y) \right| \leq \varepsilon \cdot \mu(X_n) \text{ за свако } n \in \{1, \dots, N\}.$$

Применом неједнакости троугла и сабирањем добијених неједнакости имамо

$$\left| \sum_{n=1}^N \left(\mu(X_n) \int_Y \varphi dm_n - \int_{X_n} \int_Y \varphi(y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right) \right| \leq \varepsilon \sum_{n=1}^N \mu(X_n) \leq \varepsilon,$$

одакле следи да важи неједнакост

$$\left| \int_Y \varphi d\sigma_\varepsilon - \int_Y \varphi d\nu_\Lambda \right| \leq 2\varepsilon$$

за свако $\varphi \in BL(Y)$, $\|\varphi\|_{BL} \leq 1$. Дакле, закључујемо да за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$\|\sigma_\varepsilon - \nu_\Lambda\|_{KR,d} = \sup_{\|\varphi\|_{BL} \leq 1} \left| \int_Y \varphi d\sigma_\varepsilon - \int_Y \varphi d\nu_\Lambda \right| \leq 2\varepsilon.$$

Доказали смо да важе једнакости

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_X \Lambda_\varepsilon d\mu = \nu_\Lambda \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_X \|\Lambda - \Lambda_\varepsilon\|_{KR,d} d\mu = 0,$$

па на основу (1.17) закључујемо да је $\nu_\Lambda = \int_X \Lambda d\mu$. □

Иако нормиран простор $L_{KR}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ типично није комплетан, можемо наћи његов део који постаје комплетан метрички простор са метриком $d_{1,KR}$ која је индукована нормом $\|\cdot\|_{1,KR}$ простора $L_{KR}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$. У доказу овог тврђења користимо својство (5) наведено у списку својстава $\|\cdot\|_{KR,d}$ норме.

Тврђење 5.50. [6] Подскућ простора $L_{KR}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ који се састоји од фамилија ненегајивних мера је комплетан са метриком која је индукована нормом $\|\cdot\|_{1,KR}$.

Доказ. Слично доказу Тврђења 5.10, нека је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ пресликавања из $L_{KR}^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ са вредностима у скупу ненегативних, коначних мера на $\mathcal{A}$ и нека је

$$d_{1,KR}(f_{n+1}, d_n) = \|f_{n+1} - f_n\|_{1,KR} \leq 2^{-n} \text{ за свако } n \in \mathbb{N},$$

при чему је $f_1 = 0$. Истим поступком²⁰ као и у доказу Тврђења 5.10 закључујемо да овај низ конвергира ка пресликавању $f \in L_{KR}^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ таквом да је $f(x) \geq 0$ за μ -скоро свако $x \in X$, јер је скуп ненегативних мера у $\mathcal{C}(Y, \mathcal{A})$ комплетан у односу на метрику d_{KR} , на основу својства (5). $\square$

Теорема о дуалу простора $L_{KR,d}^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$

Ако је (Y, d) сепарабилан метрички простор и ако је функција $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$ -мерљива по првој променљивој и Липшицова по другој променљивој, онда је функција $X \ni x \mapsto \text{Lip} f(x, \cdot) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљива. Заиста, уколико је $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ густ скуп у (Y, d) тада за свако $x \in X$ важи једнакост

$$\text{Lip} f(x, \cdot) = \sup \left\{ \frac{|f(x, y_n) - f(x, y_m)|}{d(y_n, y_m)} : n, m \in \mathbb{N}, d(y_n, y_m) > 0 \right\}.$$

Такође, лако се доказује да важи једнакост $\sup_{y \in X} |f(x, y)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x, y_n)|$ за свако фиксирано $x \in X$. Одавде следи да је и функција $X \ni x \mapsto \sup_{y \in Y} |f(x, y)| \in [0, +\infty]$ $\mathcal{B}$ -мерљива. На основу реченог следи да можемо разматрати следеће величине:

$$\text{ess sup}_{x \in X} \text{Lip} f(x, \cdot) \text{ и } \text{ess sup}_{x \in X} \sup_{y \in Y} |f(x, y)|.$$

Доказ наредне теореме је суштински базиран на идеји доказа одговарајућих резултата Канторовича (видети [47, Теорема 1, §4.5, Поглавље 8] или [14, Вежбање 3.5.29]). Овим тврђењем дајемо комплетан опис дуала нормираног простора $L_{KR,d}^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$.

Теорема 5.51. [7] Нека је $\mu(X) < +\infty$ и нека је (Y, d) сепарабилан метрички простор (Y, d) . Дуални простор нормираног простора $(L_{KR,d}^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A})), \|\cdot\|_{1,KR})$ може се идентификовати са класом ограничених функција $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ које су $\mathcal{B}$ -мерљиве по првој променљивој и униформно Липшицове по другој променљивој, тј. сваки ограничен линеаран функционал на $L_{KR,d}^1(\mu, \mathcal{C}(Y, \mathcal{A}))$ може се представити у облику

$$(5.44) \quad L(\Lambda) = \int_X \int_Y f(x, y) d\lambda^x(y) d\mu(x)$$

са таквом функцијом f . Норма функционала L даја је формулом

$$(5.45) \quad \|L\| = \max \left\{ \text{ess sup}_{x \in X} \sup_{y \in Y} |f(x, y)|, \text{ess sup}_{x \in X} \text{Lip} f(x, \cdot) \right\}.$$

Доказ. Напоменимо најпре да је функција на $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_Y$ -мерљива ако је $\mathcal{B}$ -мерљива по првом аргументу и Липшицова по другом аргументу, што следи на основу [13, Вежбање 6.10.40]. Унутрашњи интеграл $\int_Y f(x, y) d\lambda^x(y)$ из (5.44) дефинише

²⁰Формално говорећи, за μ -скоро свако $x \in X$ добијамо низ $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ позитивних и коначних Борелових мера. Овај низ је ограничене варијације у односу на d_{KR} метрику и због тога можемо да користимо својство (5) и [5, Став 1.11] да бисмо добили поменути елемент $f(x)$.

$\mathcal{B}$ -мерљиву функцију на основу Тврђења 5.15, па је оправдано разматрати двоструки интеграл у (5.44). Интеграли типа (5.44), где је функција f Липшицова по $y \in Y$ дефинишу непрекидне линеарне функционале на $L_{KR}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$. Заиста, за свако фиксирано $x \in X$ имамо $\left| \int_Y \frac{f(x, y)}{\sup_{y \in Y} |f(x, y)|} d\lambda^x(y) \right| \leq \|\lambda^x\|_{KR, d}$ ако је $\text{Lip} \frac{f(x, \cdot)}{\sup_{y \in Y} |f(x, y)|} \leq 1$ и

$$\left| \int_Y \frac{f(x, y)}{\sup_{y \in Y} |f(x, y)|} \left[\text{Lip} \frac{f(x, \cdot)}{\sup_{y \in Y} |f(x, y)|} \right]^{-1} d\lambda^x(y) \right| \text{Lip} \frac{f(x, \cdot)}{\sup_{y \in Y} |f(x, y)|} \leq \frac{\|\lambda^x\|_{KR, d} \text{Lip} f(x, \cdot)}{\sup_{y \in Y} |f(x, y)|}$$

ако је $\text{Lip} \frac{f(x, \cdot)}{\sup_{y \in Y} |f(x, y)|} > 1$. Сада добијамо да за $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X} \in L_{KR}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ важи

$$\begin{aligned} |L(\Lambda)| &\leq \int_X \left| \int_Y f(x, y) d\lambda^x(y) \right| d\mu(x) \\ &= \int_X \sup_{y \in Y} |f(x, y)| \cdot \left| \int_Y \frac{f(x, y)}{\sup_{y \in Y} |f(x, y)|} d\lambda^x(y) \right| d\mu(x) \\ &\leq \int_X \sup_{y \in Y} |f(x, y)| \cdot \max \left\{ \|\lambda^x\|_{KR, d}, \frac{\|\lambda^x\|_{KR, d} \text{Lip} f(x, \cdot)}{\sup_{y \in Y} |f(x, y)|} \right\} d\mu(x) \\ &= \int_X \max \left\{ \sup_{y \in Y} |f(x, y)|, \text{Lip} f(x, \cdot) \right\} \|\lambda^x\|_{KR, d} d\mu(x) \\ &\leq \int_X \max \left\{ \text{ess sup}_{x \in X} \sup_{y \in Y} |f(x, y)|, \text{ess sup}_{x \in X} \text{Lip} f(x, \cdot) \right\} \|\lambda^x\|_{KR, d} d\mu(x) \\ &= \max \left\{ \text{ess sup}_{x \in X} \sup_{y \in Y} |f(x, y)|, \text{ess sup}_{x \in X} \text{Lip} f(x, \cdot) \right\} \|\Lambda\|_{1, KR}. \end{aligned}$$

Следи да је L непрекидан линеаран функционал на $L_{KR}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ и да важи процена

$$\|L\| \leq \max \left\{ \text{ess sup}_{x \in X} \sup_{y \in Y} |f(x, y)|, \text{ess sup}_{x \in X} \text{Lip} f(x, \cdot) \right\}.$$

Са друге стране, нека је $L \in \mathcal{B}(L_{KR, d}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A})), \mathbb{C})$. Можемо претпоставити да је $\|L\| \leq 1$. Нека је током целог доказа ове теореме скуп $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ густ у (Y, d) . За свако y из овог скупа посматрајмо рестрикцију функционала L на векторски потпростор (који зависи од y) елемената у $L_{KR, d}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ који су облика $\lambda^x = g(x)\delta_y$, где је $g \in L^1(\mu)$. Овај потпростор је изометрички изоморфан са $L^1(\mu)$, пошто је $\|\delta_y\|_{KR, d} = 1$. Одавде следи да је рестрикција функционала L на овај потпростор дата интегралом функције g са $\mathcal{B}$ -мерљивом функцијом $X \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$ таквом да је $\text{ess sup}_{x \in X} |f(x, y)| \leq 1$ за свако фиксирано y .

Посматрајмо дејство функционала L на векторски потпростор у $L_{KR, d}^1(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$ који се састоји од фамилија мера чији елементи имају облик

$$\lambda^x = \frac{g(x)}{d(y_n, y_k)} (\delta_{y_n} - \delta_{y_k}),$$

где $y_n \neq y_k$ и $g \in L^1(\mu)$. Ова рестрикција је дата интегралом функције g са функцијом

$$X \ni x \mapsto \frac{f(x, y_n) - f(x, y_k)}{d(y_n, y_k)} \in \mathbb{C}.$$

Ако је $\|g\|_{L^1(\mu)} \leq 1$, на основу неједнакости $\frac{\|\delta_{y_n} - \delta_{y_k}\|_{KR,d}}{d(y_n, y_k)} \leq 1$ следи

$$|L(\Lambda)| \leq \|L\| \cdot \|\Lambda\|_{1,KR} \leq \|g\|_{L^1(\mu)} \frac{\|\delta_{y_n} - \delta_{y_k}\|_{KR,d}}{d(y_n, y_k)} \leq 1.$$

Одавде закључујемо да за свако $g \in L^1(X, \mu)$ за које је $\|g\|_{L^1(\mu)} \leq 1$ важи неједнакост

$$\left| \int_X \frac{f(x, y_n) - f(x, y_k)}{d(y_n, y_k)} \cdot g(x) d\mu(x) \right| \leq 1.$$

Стога је $\left| \frac{f(x, y_n) - f(x, y_k)}{d(y_n, y_k)} \right| \leq 1$ за μ -скоро свако $x \in X$, што следи на основу Теореме о средњој вредности Лебеговог интеграла уколико у горњој неједнакости одаберемо $g = \frac{1}{\mu(E)} \chi_E \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, где је $E \in \mathcal{B}$ и $\mu(E) > 0$ (видети [5, Лема 4.24]).

Одаберимо представнике класа који су $\mathcal{B}$ -мерљиви и дефинисани за свако $x \in X$ и који задовољавају ове услове за све парове различитих елемената y_n . Стога су све функције $Y \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$ 1-Липшицове на пребројивом скупу $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Пошто је овај скуп густ у Y , можемо проширити пресликавање f непрекидно на цео простор Y за свако фиксирано $x \in X$, што даје функцију која је 1-Липшицова по другом аргументу и $\mathcal{B}$ -мерљива по првом аргументу. Наиме, проширење на произвољно $y \in Y$ постиже се кроз граничну вредност одговарајућег подниза низа вредности $(f(x, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Прецизније, постоји подниз $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ такав да је $\lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{n_k}, y) = 0$ и дефинишемо вредност $f(x, y) \in \mathbb{C}$ као $f(x, y) := \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_{n_k})$ за све $x \in X$. Такође, неједнакост $|f| \leq 1$ остаје тачна приликом оваког поступка проширења. Одавде следи да је за свако $x \in X$ функција $Y \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$ 1-Липшицова.

Важно је напоменути да се резултат описаног проширења на сваком елементу $y \in Y$ поклапа са дејством функционала L на потпростор пресликавања које имају разматрани облик $\lambda^x = g(x) \delta_y$. Наиме, претпоставимо да низ $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ конвергира ка y . Тада важи неједнакост $|f(x, y) - f(x, y_{n_k})| \leq d(y, y_{n_k})$ за свако $k \in \mathbb{N}$. Нека је Λ_{n_k} фамилија мера задата са $\lambda^x = g(x) \delta_{y_{n_k}}$. Такође, нека је фамилија мера $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ задата са $\lambda^x = g(x) \delta_y$. Тада важи једнакост $\lim_{k \rightarrow \infty} L(\Lambda_{n_k}) = L(\Lambda)$, јер на основу својства (2) имамо да је

$$\|\Lambda - \Lambda_{n_k}\|_{1,KR} = \int_X |g(x)| \cdot \|\delta_y - \delta_{y_{n_k}}\|_{KR,d} d\mu(x) \leq \|g\|_{L^1(\mu)} \cdot d(y, y_{n_k})$$

за свако $k \in \mathbb{N}$. Са друге стране, применом ТДК имамо да важи

$$L(\Lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} L(\Lambda_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y f(x, y_{n_k}) \cdot g(x) d\mu(x) = \int_Y f(x, y) \cdot g(x) d\mu(x).$$

Напоменимо да је примена ТДК дозвољена јер је $|f(x, y_{n_k})| \cdot |g(x)| \leq |g(x)|$ за свако $k \in \mathbb{N}$ и свако $x \in X$ а знамо да је $g \in L^1(X, \mu)$. Преостало је да искористимо чињеницу да је линеарни омотач пресликавања разматраног облика густ у простору $L^1_{KR}(\mu, ca(Y, \mathcal{A}))$, како и тврди Лема 1.23.

Докажимо сада једнакост (5.45). Нека је десна страна ове једнакости означена са M . Напоменимо да је овај израз добро дефинисана величина. Заиста, основу датог коментара пре формулације ове теореме имамо да су функције $X \ni x \mapsto \text{Lip}(x, \cdot) \in \mathbb{R}$ и $X \ni x \mapsto \sup_{y \in Y} f(x, y) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -мерљиве.

Ако је $M = 0$ тада важи $\text{ess sup}_{x \in X} \sup_{y \in Y} |f(x, y)| = 0$ и $\text{ess sup}_{x \in X} \text{Lip} f(x, \cdot) = 0$. Из последњег услова следи да је $f(x, \cdot)$ константа за μ -скоро свако $x \in X$ а из првог услова

лако следи да је та константа μ -скоро свуда једнака нули. Дакле, у овом случају је L нула функционал, јер је L задат интегралом (5.44), па тврђење важи. Напоменимо и то да је $M < +\infty$ јер је f ограничена функција на f која је уз то и униформно Липшицова по другој променљивој. Нека је на даље $0 < M < +\infty$.

Претпоставимо прво да је

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \sup_{y \in Y} |f(x, y)| \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \operatorname{Lip} f(x, \cdot) = M.$$

Нека је $\varepsilon \in (0, M)$. Постоји skup $B \in \mathcal{B}$ позитивне μ -мере такав да $\operatorname{Lip} f(x, \cdot) > M - \varepsilon$ за све $x \in B$. Тада за свако $x \in X$ важи

$$\operatorname{Lip} f(x, \cdot) = \sup \left\{ \frac{|f(x, y_i) - f(x, y_j)|}{d(y_i, y_j)} : i, j \in \mathbb{N}, d(y_i, y_j) > 0 \right\}.$$

Одавде следи да за свако $x \in X$ важе једнакости

$$\operatorname{Lip} f(x, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} F_n(x),$$

при чему смо за свако $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ увели ознаку

$$F_n(x) = \max \left\{ \frac{|f(x, y_i) - f(x, y_j)|}{d(y_i, y_j)} : i, j \in \{1, \dots, n\}, d(y_i, y_j) > 0 \right\}.$$

Постоји skup $B_1 \in \mathcal{B}$, $\mu(B_1) > 0$ и постоји $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ такав да важи неједнакост $F_n(x) > M - \varepsilon$ за све $x \in B_1$. Заиста, у супротном би за свако $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ била испуњена неједнакост $F_n(x) \leq M - \varepsilon$ за свако μ -скоро свако $x \in X$ одакле би следило да је $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \operatorname{Lip} f(x, \cdot) \leq M - \varepsilon$. На основу Леме 1.7 могуће је изабрати елементе $y_1(x), y_2(x) \in \{y_1, \dots, y_n\}$ који дефинишу $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -мерљиве функције $X \ni x \mapsto y_1(x) \in Y$ и $X \ni x \mapsto y_2(x) \in Y$ такве да важи $d(y_1(x), y_2(x)) > 0$ и за које је испуњено

$$\frac{|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))|}{d(y_1(x), y_2(x))} > M - \varepsilon \text{ за све } x \in B_1.$$

За свако $x \in X$ дефинишимо комплексну меру λ^x на $\mathcal{A}$ изразом

$$\lambda^x = \begin{cases} \frac{\operatorname{sgn}(f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)))}{\mu(B_1)} \frac{\delta_{y_1(x)} - \delta_{y_2(x)}}{d(y_1(x), y_2(x))}, & \text{ако је } x \in B_1, \\ 0, & \text{ако је } x \in X \setminus B_1. \end{cases}$$

Напоменимо да из $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -мерљивости функција $y_1, y_2 : X \rightarrow Y$ следи²¹ $\mathcal{B}$ -мерљивост функције $X \ni x \mapsto d(y_1(x), y_2(x)) \in \mathbb{R}$. За овако дефинисану фамилију мера $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$, на основу својства (2) Канторович-Рубинштајнове норме $\|\cdot\|_{KR,d}$, имамо да важи

$$\|\Lambda\|_{KR,d} = \frac{1}{\mu(B_1)} \int_{B_1} \frac{\|\delta_{y_1(x)} - \delta_{y_2(x)}\|_{KR,d}}{d(y_1(x), y_2(x))} d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(B_1)} \cdot \mu(B_1) = 1.$$

²¹Како је (Y, d) сепарабилан метрички простор важи $\mathcal{B}_Y \otimes \mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_{Y \times Y}$ на основу [2, Теорема 4.44] па како је $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција мерљивост разматране функције $X \ni x \mapsto d(y_1(x), y_2(x)) \in \mathbb{R}$ следи на основу [2, Лема 4.49].

Одавде следи да је $\|\Lambda\|_{1,KR} \leq 1$. Сада имамо

$$\begin{aligned} \|L\| &\geq |L(\Lambda)| = \left| \int_X \int_Y f(x, y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| \\ &= \frac{1}{\mu(B_1)} \int_{B_1} \frac{1}{d(y_1(x), y_2(x))} \cdot |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| d\mu(x) \\ &\geq \frac{1}{\mu(B_1)} \cdot (M - \varepsilon) \cdot \mu(B_1) = M - \varepsilon. \end{aligned}$$

Овине смо показали да је $\|L\| \geq M - \varepsilon$, тј. $\|L\| \geq M$, јер је $\varepsilon > 0$ било произвољно.

Претпоставимо сада да је

$$M = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \sup_{y \in Y} |f(x, y)| \geq \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \operatorname{Lip} f(x, \cdot).$$

Сличним поступком као малопре, применом Леме 1.7, можемо наћи $n \in \mathbb{N}$ и скуп позитивне μ -мере $B \in \mathcal{B}$ за који постоји $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ -мерљиво пресликавање $X \ni x \mapsto y(x) \in \mathcal{A}$ са вредностима у $\{y_1, \dots, y_n\}$ такво да је $|f(x, y(x))| > M - \varepsilon$ за свако $x \in B$. Тада дефинишемо

$$\lambda^x = \begin{cases} \frac{\operatorname{sgn} f(x, y(x))}{\mu(B)} \delta_{y(x)}, & \text{ако је } x \in B, \\ 0, & \text{ако је } x \in X \setminus B. \end{cases}$$

Имамо да је $\lambda^x \in ca(Y, \mathcal{A})$ за свако $x \in X$ и да важи $\|(\lambda^x)_{x \in X}\|_{1,KR} \leq 1$. За овако дефинисану фамилију мера $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ добијамо

$$\begin{aligned} \|L\| &\geq |L((\lambda^x)_{x \in X})| = \left| \int_X \int_Y f(x, y) d\lambda^x(y) d\mu(x) \right| \\ &= \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x, y(x))| d\mu(x) \\ &\geq \frac{1}{\mu(B_1)} \cdot (M - \varepsilon) \cdot \mu(B_1) = M - \varepsilon. \end{aligned}$$

Комбиновањем разматраних случајева добијамо једнакост (5.45). □

Библиографија

- [1] Nasiruddin Ahmed, *A Note on Radon-Nikodym Theorem for Operator Valued Measures and its Applications*, Commun. Korean Math. Soc. 28, (2013), No. 2, pp. 285-295.
<http://dx.doi.org/10.4134/CKMS.2013.28.2.285>
- [2] Charalambos D. Aliprantis, Kim C. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, Springer, Third edition, 2007.
- [3] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, Diego Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, 2000.
- [4] Richard M. Aron, Mohammad Sal Moslehian, Ilya M. Spitkovsky, Hugo J. Woerdeman, *Operator and Norm Inequalities and Related Topics*, Trends in Mathematics, Birkhäuser, (2022).
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-02104-6>
- [5] M. Arsenović, M. Dostanić, D. Jocić, *Teorija mera, funkcionalna analiza, teorija operatora*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.
- [6] M. Arsenović, V. I. Bogachev, M. Krstić, *Spaces of Measure-Valued Mappings Connected with Disintegrations*, Sib. Math. J. 66, 248–261 (2025)
<https://doi.org/10.1134/S0037446625020028>
- [7] M. Arsenović, V. I. Bogachev, M. Krstić, *Integration of functions with values in spaces of measures*, Proc. Steklov Inst. Math. (2025)
Прихваћен за публикавање
- [8] Arsenović, M., Krstić, M. *A Normed Space of Weakly Integrable Operator-Valued Functions and Convergence Theorems*, Bull. Iran. Math. Soc. 51, 30 (2025)
<https://doi.org/10.1007/s41980-024-00965-x>
- [9] Sheldon Axler, *Measure, Integration and Real Analysis*, Graduate Texts in Mathematics series, Springer 2020.
- [10] G. Bellomonte, B. Djordjević, S. Ivković, *On representations and topological aspects of positive maps on non-unital quasi $\ast$ -algebras*, Positivity 28, 66 (2024)
<https://doi.org/10.1007/s11117-024-01079-8>
- [11] G. Bellomonte, S. Ivković, C. Trapani, *GNS Construction for $C^\ast$ -Valued Positive Sesquilinear Maps on a quasi $\ast$ -algebra*, Mediterr. J. Math. 21, 166 (2024)
<https://doi.org/10.1007/s00009-024-02704-2>

- [12] S. Bochner, *Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*, Fundamenta Mathematicae, 20 (1933), 262–276.
<http://eudml.org/doc/212635>
- [13] V.I. Bogachev, *Measure theory, V. 1, 2*, Springer, New York, 2007.
- [14] V.I. Bogachev, *Weak convergence of measures*, Amer. Math. Soc., Rhode Island, Providence, 2018.
- [15] V.I. Bogachev, O.G. Smolyanov, *Real and functional analysis*. Springer, Cham, 2020.
- [16] R. E. Castillo, H. Rafeiro, *An introductory course in Lebesgue spaces*. Springer, Cham, 2016.
- [17] N.D. Chakraborty, Tanusree Choudhury, *Convergence theorems for Pettis integrable functions and regular methods of summability*, J. Math. Anal. Appl. 359 (2009) 95–105.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.05.014>
- [18] K. L. Chung, J. L. Doob, *Fields, optionality and measurability*, Amer. J. Math. 87 (1965), 397–424.
<https://doi.org/10.2307/2373011>
- [19] Constantin Costara, Dumitru Popa, *Exercises in Functional Analysis*, Texts in the Mathematical Sciences, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
- [20] D. V. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue spaces. Foundations and harmonic analysis*, Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013.
- [21] Otkun Çevik and Z.I. Ismailov, *Spectrum of the direct sum of operators*, Electron. J. Differential Equations, 210, 1-8, 2012.
<https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2012/210/otkun.pdf>
- [22] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ružička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lect. Notes Math., V. 2017, Springer, Heidelberg, 2011.
- [23] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer, New York, 1984.
- [24] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces – selected topics*, Lecture Notes in Math. V. 485. Springer-Verlag, Berlin - New York, 1975.
- [25] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., Mat. Surveys and Monographs, Vol.15, (1977).
- [26] Ryszard Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, 1989.
- [27] Takayuki Furuta, *Invitation to Linear Operators; From Matrices to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space*, 1st Edition, London, (2001).
- [28] Gerald Folland, *Modern Techniques and Their Applications*, Second Edition, 1999.
- [29] I. Gelfand, *Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires*, Communications de l'Institut des Sciences Mathématiques et mécaniques de l'Université de Kharkoff et la Société Mathématique de Kharkoff, (4), vol. 13, pp. 35-40. (1936).

- [30] I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Non-selfadjoint Operators*, Transl. Math. Monographs, Vol. 18, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. (1969).
- [31] F. Hiai, H. Kosaki, *Means of Hilbert Space Operators*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2003.
- [32] Omar Hirzallah, Fuad Kittaneh, *Clarkson Inequalities for n -Tuples of Operators*. Integral Equations Operator Theory 60, 369–379, 2008.
<https://doi.org/10.1007/s00020-008-1565-x>
- [33] Tuomas Hytönen, Jan van Neerven, Mark Veraar, Lutz Weis, *Analysis in Banach Spaces, Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory* Edition 1, Springer-Verlag, 2016.
- [34] Liliana Janicka, Nigel J. Kalton, *Vector Measures of Infinite Variation*, *Bulletin de L'Académie Polonaise Des sciences*, Vol. XXV, No 3, (1977).
<https://kaltonmemorial.missouri.edu/assets/docs/baps1977.pdf>
- [35] Danko Jocić, *Multipliers of elementary operators and comparison of row and column space Schatten p norms*, Linear Algebra and its Applications, 431 (2009) 2062–2070.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.06.042>
- [36] Danko Jocić, Djordje Krtinić, Mohammad Sal Moslehian, *Landau and Gruss type inequalities for inner product type integral transformers in norm ideals*, Mathematical Inequalities and Application, Volume 16, Number 1 (2013), 109–125.
<https://files.ele-math.com/articles/mia-16-08.pdf>
- [37] D. R. Jocić, Z. L. Golubović, M. Krstić, S. Milašinović, *Norm inequalities for the iterated perturbations of Laplace transformers generated by accretive N -tuples of operators in Q and Q^* ideals of compact operators*, Ann. Funct. Anal. 15, 69 (2024).
<https://doi.org/10.1007/s43034-024-00364-7>
- [38] D. R. Jocić, M. Lazarević, *Norm inequalities for hyperaccretive quasinormal operators, with extensions of the arithmetic-geometric means inequality*, Linear Multilinear Algebra, 72 (2024), 891-921.
<https://doi.org/10.1080/03081087.2023.2169233>
- [39] Danko R. Jocić, Djordje Krtinić, Milan Lazarević, *Cauchy-Schwarz inequalities for inner product type transformers in Q^* norm ideals of compact operators*, Positivity, 24 (2020), 933-956.
<https://doi.org/10.1007/s11117-019-00710-3>
- [40] Danko R. Jocić, Djordje Krtinić, Milan Lazarević, *Laplace transformers in norm ideals of compact operators*, Banach J. Math. Anal. (2021) 15:67
<https://doi.org/10.1007/s43037-021-00149-3>
- [41] D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, *Extensions of the arithmetic-geometric means and Young's norm inequalities to accretive operators, with applications*, Linear Multilinear algebra 70 (2022), 4835-4875.
<https://doi.org/10.1080/03081087.2021.1900049>

- [42] Danko R. Jocić, *Cauchy-Schwarz norm inequalities for weak*-integrals of operator valued functions*, J. Funct. Anal. 218 (2005), 318-346.
<https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.06.003>
- [43] D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Norm inequalities for a class of elementary operators generated by analytic functions with non-negative Taylor coefficients in ideals of compact operators related to p-modified unitarily invariant norms*, Linear Algebra Appl. (2018), 60-83.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.11.015>
- [44] Danko R. Jocić, Milan Lazarević, Stefan Milošević, *Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators*, Linear Algebra and its Applications, 586, (2020), 43–63.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.10.009>
- [45] Richard Kadison, Gert Pedersen, *Means and convex combinations of unitary operators*, Mathematica Scandinavica Vol. 57, No. 2 (1985), pp. 249-266.
<https://www.jstor.org/stable/24491587>
- [46] G. Kalyabin, *A nondensity criterion for $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$* , Mat. Zametki 82:2 (2007), 315–316 (in Russian); English transl.: Math. Notes 82:1-2 (2007), 277–278.
<https://doi.org/10.1134/S0001434607070334>
- [47] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Translated from the Russian, 2nd edition, Pergamon Press, Oxford-Elmsford, New York, 1982.
- [48] Robert P. Kaufman, Neil W. Rickert, *An inequality concerning measures*, Bull. Amer. Math. Soc. Vol.72, No. 4, 1966.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1966-11551-3>
- [49] V. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, S. Samko, *Integral operators in non-standard function spaces. V. 1. Variable exponent Lebesgue and Amalgam spaces*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.
- [50] O. Kováčik, J. Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$* , Czechoslovak Math. J. 41 (1991), 592–618.
<http://dml.cz/dmlcz/102493>
- [51] Mihailo Krstić, Matija Milović, Stefan Milošević, *Belonging of Gel'fand integral of positive operator valued functions to separable ideals of compact operators on Hilbert space*, Positivity (2023) 27:4.
<https://doi.org/10.1007/s11117-022-00958-2>
- [52] Mihailo Krstić, *Weak* integration of functions with values in the set of Hilbert space operators*, Filomat, Vol 38, No 30, (2024).
<https://doi.org/10.2298/FIL2430567K>
- [53] Carlos S. Kubrusly, *Bilinear Maps and Tensor Products in Operator Theory*, Springer Nature Switzerland, (2023).
- [54] Svetozar Kurepa, *Funkcionalna analiza, Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

- [55] Milan Lazarević, *Nejednakosti Koši-Švarca i Gris-Landaua za elementarne operatore i transformere na Q i Q^* idealima kompaktnih operatora*, Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Beograd, 2020.
<http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/5092>
- [56] Milan Lazarević, *Singularne vrednosti operatora i teorija mažoracije, sa primenom na operatorne nejednakosti*, Master rad, Matematički fakultet, Beograd, 2015.
<http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/4268>
- [57] Fengjie Li, Pengtong Li, *Radon-Nikodym theorems for operator-valued measures and continuous generalized frames*, Banach J. Math. Anal. 11, (2017), no. 2, 363-381.
<https://doi.org/10.1215/17358787-0000008X>
- [58] Daniel Mauldin, *A representation theorem for the second dual of $C[0, 1]$* , Studia Mathematica, Volume 46, Issue 3, page 197-200, 1973.
<http://eudml.org/doc/217766>
- [59] Matija Milović, *Weak integrability of operator valued functions with values in ideals of compact operators on Hilbert space*, 28:30, Positivity, (2024).
<https://doi.org/10.1007/s11117-024-01047-2>
- [60] Matija Milović, *Slaba integracija vektor-vrednosnih funkcija sa vrednostima u idealima operatora i veza sa elementarnim operatorima*, Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Beograd.
Тренутно непубликовано
- [61] Stefan Milošević, *Elementarni operatori i transformacije tipa skalarnog proizvoda na idealima kompaktnih operatora generisanim p -modifikovanim normama i njihovim dualima*, Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Beograd, 2017.
<http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/4656>
- [62] Gerard J. Murphy, *C^* -Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.
- [63] Kazimierz Musiał, *Topics in the theory of Pettis integration*, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste, 1991.
<https://www.researchgate.net/publication/265820002>
- [64] K. Musiał, *Pettis integral, Handbook of Measure Theory*, Elsevier, Amsterdam, 2002.
<https://www.math.uni.wroc.pl/~musial/HandbookPettis.pdf>
- [65] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic press, New York and London, 1967.
- [66] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, 44(2) (1938), 277-304.
<https://doi.org/10.2307/1989973>
- [67] Vladimir Rakočević, *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

- [68] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third edition, 1987, McGraw-Hill Book, Singapore
https://perso.telecom-paristech.fr/decreuse/_downloads/c22155fef582344beb326c1f44f437d2/rudin.pdf
- [69] Walter Rudin, *Functional Analysis*, Second edition, McGraw-Hill Book, 1991.
<https://59clc.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/08/functional-analysis--rudin-2th.pdf>
- [70] Raymond A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, (2002).
- [71] Zamir Selko, *Convergence Theorems for Pettis Integral of Functions Taking Values in Locally Convex Spaces*, Int. Math. Forum 13-16 (2014), 755-768.
<http://dx.doi.org/10.12988/imf.2014.4344>
- [72] Barry Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, Amer. Math. Soc., Mat. Surveys and Monographs, Vol. 120, 2005.
- [73] Hranislav Stanković, Mihailo Krstić, *Spectral radius subadditivity for integrals of operator-valued functions*, Analysis Mathematica, 51, 997-1009 (2025).
<https://doi.org/10.1007/s10476-025-00111-7>
- [74] Hranislav Stanković, Mihailo Krstić, *Numerical and spectral radius of weakly* measurable families of Hilbert space operators*, JMAA (2025).
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.130181>
- [75] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton Lectures in Analysis, First Edition, 2005.
<https://www.cmat.edu.uy/~mordecki/courses/medida2013/book.pdf>
- [76] Nik Weaver, *Lipschitz Algebras*, Department of Mathematics Washington University USA, Published by World Scientific Publishing Co. Pte Ltd. PO Box 128, Farrer Road, Singapore 912805, 1999.
- [77] Kosaku Yosida, *Functional Analysis*, Springer, Sixth Edition, 1980.

Биографија аутора

Михаило Крстић је рођен у Нишу 20. маја 1994.

Специјализовано одељење за ученике обдарене за математiku уписује 2009. године при Гимназији „Светозар Марковић” у Нишу. Ово одељење завршава са одличним успехом и уписује Основне академске студије Математике (обима 180 ЕСПБ поена) на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу 2013. године. Ове студије завршава 2016. године са просечном оценом 9,58 остваривши 143 ЕСПБ поена. Мастер академске студије на смеру за Општу (теоријску) математику (обима 120 ЕСПБ поена) кандидат Михаило Крстић уписује 2016. године. Ове студије завршава 2018. године са просечном оценом 9,58 остваривши 143 ЕСПБ поена.

Михаило Крстић уписује Докторске академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду 2019. године. До сада је положио све испите са просечном оценом 10. Михаило Крстић је до сада објавио следеће научне радове који су везани за тематику ове дисертације и који су на SCI листи:

1. Mihailo Krstić, Matija Milović, Stefan Milošević, *Belonging of Gel'fand integral of positive operator valued functions to separable ideals of compact operators on Hilbert space*, Positivity (2023) 27:4.
<https://doi.org/10.1007/s11117-022-00958-2> [M22, IF 0.8 (2023)]
2. Mihailo Krstić, *Weak* integration of functions with values in the set of Hilbert space operators*, Filomat, Vol 38, No 30, (2024).
<https://doi.org/10.2298/FIL2430567K> [M21, IF 0.9 (2024)]
3. D. R. Jocić, Z. Lj. Golubović, M. Krstić, S. Milašinović, *Norm inequalities for the iterated perturbations of Laplace transformers generated by accretive N -tuples of operators in Q and Q^* ideals of compact operators*, Ann. Funct. Anal. (2024) 15:69
<https://doi.org/10.1007/s43034-024-00364-7> [M21, IF 1.0 (2024)]
4. Miloš Arsenović, V.I. Bogachev, Mihailo Krstić, *Spaces of Measure-Valued Mappings Connected with Disintegrations*, Sib. Math. J. 66, 248–261, (2025).
<https://doi.org/10.1134/S0037446625020028> [M22, IF 0.7 (2024)]
5. Miloš Arsenović, V.I. Bogachev, Mihailo Krstić, *Integration of functions with values in spaces of measures*, Proc. Steklov Inst. Math., (2025).
прихваћен за штампу [M23, IF 0.4 (2024)]
6. Miloš Arsenović, Mihailo Krstić, *A Normed Space of Weakly Integrable Operator-Valued Functions and Convergence Theorems*, Bull. Iran. Math. Soc. 51, 30, (2025).

<https://doi.org/10.1007/s41980-024-00965-x> [M22, IF 0.8 (2025)]

7. Hranislav Stanković, Mihailo Krstić, *Spectral radius subadditivity for integrals of operator-valued functions*, Analysis Mathematica, 51, 997-1009 (2025).

<https://doi.org/10.1007/s10476-025-00111-7> [M22, IF 0.5 (2024)]

8. Hranislav Stanković, Mihailo Krstić, *Numerical and spectral radius of weakly* measurable families of Hilbert space operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 555, Issue 2, (2026).

<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.130181> [M21, IF 1.2 (2024)]

Кандидат Михаило Крстић је објавио следеће научне радове из математике који нису везани за тематику којом се бавимо у овој дисертацији.

- (A) Hranislav Stanković, Mihailo Krstić, Ivan Damnjanović, *Some properties of the q -numerical radius. Linear and Multilinear Algebra*, 73(8), 1736–1757, (2024).

<https://doi.org/10.1080/03081087.2024.2438927> [M21, IF 1.0 (2024)]

- (B) Marko D. Petković, Mihailo Krstić, Kostadin P. Rajković, *Rapid generalized Schultz iterative methods for the computation of outer inverses*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 344, 2018, 572-584, ISSN 0377-0427.

<https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.05.048> [M21, IF 1.883 (2018)]

- (B) Ashim Kumar, Predrag S. Stanimirović, Fazlollah Soleymani, Mihailo Krstić, Kostadin Rajković, *Factorizations of hyperpower family of iterative methods via least squares approach*, Comp. Appl. Math., Volume 37, 3226–3240 (2018).

<https://doi.org/10.1007/s40314-017-0507-0> [M22, IF 1.260 (2018)]

Михаило Крстић је до сада учествовао на следећим научним конференцијама.

1. Конгрес Младих математичара, Нови Сад, Србија, 3. октобар - 5. октобар 2019, учесник.
2. Конгрес Младих математичара, Нови Сад, Србија, 29. септембар - 1. октобар 2022. године, учесник.
3. 8th International Conference on Algebraic Informatics, Ниш, Србија, 30. јун - 4. јул 2019, учесник.
4. XIV Симпозијум математика и примена, учесник и излагач, Београд, 6. и 7. децембар 2024.

Издајање: Integration of functions with values in the space of complex measures

5. Трећи сусрет математичара Србије и Црне Горе, 2. октобар - 5. октобар 2025, Петровац, Црна Гора.

Издајање: Spectral radius subadditivity for integrals of operator-valued functions

Михаило Крстић био је ангажован као истраживач на научном пројекту „Проблеми нелинеарне анализе, теорије оператора, топологије и примене”, број 174025 Министарства просвете, науке и технолошког развоја (руководилац пројекта проф. др Владимир Ракочевић, редовни члан САНУ).

Кандидат је тренутно ангажован као истраживач на научном пројекту „Простори функција и оператори на њима”, број ОИ 174017 које је у организацији Министарства просвете, науке и технолошког развоја (руководилац пројекта је проф. др Данко Јоцић, редовни професор Математичког факултета у Београду).

Михаило Крстић је држао припремне наставе за такмичења из математике ученицима Математичке гимназије у Београду, као и ученицима специјализованог одељења за математику Гимназије „Светозар Марковић” у Нишу.

У току првог полугодишта школске 2018/2019 године Михаило Крстић је држао наставу као професор математике у Гимназији „Бора Станковић” у Нишу.

Од 2018. године Михаило Крстић је у радном односу на Математичком факултету Универзитета у Београду, најпре као сарадник у настави, а након тога од 2019. године као асистент за ужу научну област Математичка анализа на Катедри за реалну и функционалну анализу.

Током школске 2024/2025 и 2025/2026 године Михаило Крстић је ангажован и као професор Анализе са алгебром у Математичкој гимназији у Београду.

Михаило Крстић је држао вежбе из следећих предмета на Математичком факултету: Анализа 1 (вежбе и практикум), Анализа 3А за М, Н и В смер, Анализа 3Б за М, Н и В смер, Функционална анализа.

На Физичком факултету Универзитета у Београду Михаило Крстић је до сада држао вежбе из Математике 1Б и 1Ц, Математике 2Б и 2Ц, као и из Математике 3Б и 3Ц.

Михаило Крстић био је ангажован и на изборном предмету Одабрана поглавља реалне анализе на Математичком факултету.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Михаило Крстић
број уписа 2013 / 2019

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Неки типови интеграције оператор-вредносних функцијаи
комплексних мера са приметима на Лапласове
трансформере у идеалима компактных оператора

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 10. НОВЕМБАР 2025,

Михаило Крстић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Михаило Крстић
Број уписа 2013/2019
Студијски програм МАТЕМАТИКА
Наслов рада НЕКИ ПРОЗИ И ИНТЕГРАЦИЈЕ ОПЕРАТОР-ВРЕДНОСТИХ ФУНКЦИЈА
И КОМПЛЕКСНИХ МЕРА СА ПРИМЕРИМА НА ЛАПЛАСОВЕ ТРАНСФОРМЕРЕ
У ИДЕАЛИМА КОМПАКТНИХ ОПЕРАТОРА
Ментор Проф. др Данило Тошковић и проф. др Милош Арсенијевић

Потписани Михаило Крстић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 10. НОВЕМБАР 2025.

Михаило Крстић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

НЕКИ ТИПОВИ ИНТЕГРАЦИЈЕ ОПЕРАТОР-ВРЕДНОСТИХ ФУНКЦИЈА
И КОМПЛЕКСНИХ МЕРА СА ПРИМЕНАМА НА ЛАПЛАСОВЕ
ТРАНСФОРМЕРЕ У ИДЕАЛНА КОМПЛЕКСНИХ ОПЕРАТОРА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
- ☒ 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 10. НОВЕМБАР 2025.

Михаило Крстић

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.