

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Бр. 247/9
21.7. 20 26. год.
Београд, Студентски трг 16
ТЕЛ. 20 27 801, ФАКС: 26 30 151

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, донетој на 434. седници одржаној 3. јула 2026. године, одређени смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације

Динамика аутономних компетитивних Лотка–Волтериних динамичких система

кандидата Данијеле Бранковић. Ментор ове докторске дисертације је др Марија Микић, доцент Математичког факултета. Комисија је прегледала приложени текст и подноси Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидата

Лични подаци

Име и презиме: Данијела Бранковић
Место и датум рођења: Рума, 25.2.1990.
Звање: мастер математичар
Електронска адреса: danijela@etf.bg.ac.rs

Образовање

Данијела Бранковић је завршила Основну школу „Душан Јерковић“ 2005. године као носилац Вукове дипломе и ђак генерације. Исте године уписала је природно-математички смер Гимназије „Стеван Пузић“ у Руми, коју је завршила 2009. године као носилац Вукове дипломе. На Математички факултет у Београду, модул Теоријска математика и примене уписала се 2009. године и дипломирала је 28. фебруара 2014. године са просечном оценом 8.73. Била је стипендиста Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије од 2010. до 2013. године. Октобра 2014. године уписала је мастер академске студије на Математичком факултету у Београду на модулу Теоријска математика и примене, а 29. септембра 2016. године одбранила је мастер рад под насловом *Диференцијални рачун на тангентним и котангентним раслојењима са интерпретацијом у класичној механици* под менторством проф. др Јелене Катић, чиме је стекла звање мастер математичара. Мастер рад Данијеле Бранковић је био један од пет радова који су прошли у ужи избор за студентску награду Математичког Института САНУ у области математике и механике, 2017. године. Просечна оцена на мастер студијама је 10. Од школске 2016/2017 године је студент докторских студија на Математичком факултету. Положила је све испите предвиђене планом студија са просечном оценом 9.88.

Радно искуство

Данијела Бранковић је запослена на Електротехничком факултету као сарадник у настави на Катедри за примењену математику од 1.10.2015. године, а као асистент од 16.11.2017. године. Држала је вежбе из предмета Математика 1, Математика 2, Практикум из математике 1, Практикум из математике 2 на првој години основних студија на смеровима Електротехника и рачунарство и Софтверско инжењерство, као и вежбе из предмета Једначине математичке физике и Диференцијалне једначине на другој години. Данијела Бранковић је школске 2016/2017, 2017/2018, 2019/2020, 2023/2024, 2024/2025 и 2025/2026 године била учесник пројекта Припремна

настава на Електротехничком факултету. Била је члан тима за састављање пријемног испита из математике 2019, 2020. и 2021. године. Била је секретар Катедре за примењену математику од школске 2018/2019 до 2021/2022 године. У периоду од 2018. до 2024. године је била члан Комисије за попис. Од 2022. године је члан Комисије за распоред испита и колоквијума, а од 2025. је члан Комисије за унапређење квалитета наставе. Била је члан комисије за одбрану једног дипломског рада.

2.1. Списак објављених научних радова, или радова прихваћених за објављивање

- [1] D. Branković, M. Mikić, *Stability of Equilibriums and Bifurcation Analysis of Two-dimensional Autonomous Competitive Lotka-Volterra Dynamical System*, Kragujev. J. Math. 51(7) (2027) 1087–1105 (ISSN: 1450-9628, IF 2025=0.7) (прихваћен за објављивање). [M22]
- [2] Ž. Mijajlović, D. Branković, D. Đurčić, *Smooth extended regularly varying functions*, Filomat 38(30) (2024) 10615–10626 (DOI: 10.2298/FIL2430615M ISSN: 0354-5180, IF 2024=0.9). [M21]
- [3] Ž. Mijajlović, D. Branković, *A nonstandard approach to Karamata uniform convergence theorem*, Filomat 38(1) (2024) 33–44 (DOI: 10.2298/FIL2401033M, ISSN: 0354-5180, IF 2024=0.9). [M21]
- [4] Ž. Mijajlović, D. Branković, *On Algebraic Dependence of Cosmological Parameters*, Gravit. Cosmol. 29(4) (2023) 456–467 (DOI: 10.1134/S0202289323040163, ISSN: 0202-2893, IF 2023=1.2). [M22]
- [5] D. Branković, *Friedmann equations as n -dimensional dynamical system*, An. Sti. U. Ovid. Co. - Mat. 31(2) (2023) 23–37 (DOI: 10.2478/auom-2023-0017, ISSN: 1224-1784, IF 2023=0.8). [M22]
- [6] D. Branković, *Cosmic time for multi-component universe*, Serb. Astron. J. 201 (2020) 15–23 (DOI: 10.2298/SAJ2001015B, ISSN: 1450-698X, IF 2020=0.333). [M23]
- [7] D. Branković, Ž. Mijajlović, M. Mikić, *Dynamics of the Λ CDM model of the universe from the aspect of the dynamical systems theory*, Ann. Acad. Rom. Sci. Math. Appl. 18(2) (2026) 5–29 (DOI: 10.56082/annalsarscimath.2026.2.5, ISSN: 2066-5997). [M24+]
- [8] D. Branković, Ž. Mijajlović, *Ilija Lukačević and his Digitized Works*, Pregled nacionalnog centra za digitalizaciju 41 (2022) 39–47 (ISSN: 0182-0109). [M53]
- [9] Ž. Mijajlović, D. Branković, *Algebraic dependencies and representations of cosmological parameters*, Publ. Astron. Obs. Belgrade 100 (2021) 295–300 (ISSN: 0373-3742). [M34]
- [10] D. Branković, Ž. Mijajlović, *Jovan Karamata and his digitized works*, Pregled nacionalnog centra za digitalizaciju 35 (2019) 28–38 (ISSN: 0182-0109)). [M53]

2.2. Списак научних радова на рецензији

- [11] D. Branković, M. Mikić, *Stability of equilibriums of n -dimensional autonomous competitive Lotka-Volterra dynamical system* (2026).
- [12] D. Branković, Ž. Mijajlović, *Friedmann equations* (2026).

Саопштења на конференцијама

1. **D. Branković**, M. Mikić, *Stability of two-dimensional and three-dimensional autonomous competitive Lotka-Volterra dynamical system*, 15th Serbian Mathematical Congress (15th SMAK), Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Belgrade, June 19-22, 2024. [M34]
2. **D. Branković**, *Dynamics of the Lambda CDM model of the universe from the mathematical point of view*, 4th PU International Conference on Gravitation and Cosmology, Faculty of Science, University of the Punjab, Lahore, November 22-25, 2021. [M34]

3. **Ž. Mijajlović**, D. Branković, Algebraic dependencies and representations of cosmological parameters, XIX Serbian Astronomical Conference, Belgrade, October 13-17, 2020. [M34]
4. **D. Branković**, Asymptotics of the scale factor of the expanding universe, 10th Mathematical and Physics meeting, School and Conference on Modern Mathematical Physics, Belgrade, September 9-14, 2019. [M34]
5. **D. Branković**, M. Mikić, Analysis of the stability of n -dimensional autonomous competitive Lotka-Volterra dynamical system, XIV Symposium „Mathematics and Applications“, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Belgrade, December 6-7, 2024. [M64]
6. **D. Branković**, Analitičko rešenje n -dimenzionalnog Lotka–Volterinog dinamičkog sistema, XII simpozijum „Matematika i primene“, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2-3. Decembar, 2022. [M64]
7. **D. Branković**, Ž. Mijajlović, Fridmanove jednačine kao dinamički sistem, XI simpozijum „Matematika i primene“, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 3-4. Decembar, 2021. [M64]
8. **D. Branković**, Ž. Mijajlović, Smooth ER functions, 10th Symposium „Mathematics and Applications“, Faculty of Mathematics University of Belgrade, Belgrade, December 6-7, 2019. [M64]
9. B. Malešević, B. Banjac, I. Jovović, **D. Branković**, Računarski postupci u zasnivanju diferencijalnih operatora u trodimenzionalnom i četvorodimenzionalnom slučaju, IX Simpozijum "Matematika i primene", Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, Nov. 30. – Dec. 1., 2018. [M64]
10. **D. Branković**, Kosmologija i dinamički sistemi, Kongres mladih matematičara u Novom Sadu, Novi Sad, 29.09. - 01.10., 2022. [M64]
11. **D. Branković**, Ž. Mijajlović, Ilija Lukačević and his digitized works, Conference Digitization of Cultural Heritage, Old Records from the Natural and Social Sciences and Digital Humanities, Faculty of Mathematics University of Belgrade, Belgrade, September 13, 2022. [M64]
12. **D. Branković**, Ž. Mijajlović, Jovan Karamata and his digitized works, Conference Digitization of Cultural Heritage, Old Records from the Natural and Social Sciences and Digital Humanities, Faculty of Mathematics University of Belgrade, Belgrade, September 17, 2019. [M64]
13. B. Malešević, I. Jovović, **D. Branković**, B. Banjac, Prebrojavanje kompozicija nekih diferencijalnih operatora, Konferencija posvećena 70-oj godišnjici od rođenja prof. Žarka Mijajlovića, Matematički institut SANU, Beograd, Novembar 16-17., 2018. [M64]
14. **D. Branković**, Regularno promenljive funkcije i kosmološki parametri, Konferencija posvećena 70-oj godišnjici od rođenja prof. Žarka Mijajlovića, Matematički institut SANU, Beograd, Novembar 16-17., 2018. [M64]

3. Предмет и циљеви докторске дисертације

Циљеви дисертације су одређивање свих еквилибријума n -димензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система на $[0, +\infty)^n$, као и одређивање стабилности свих еквилибријума који се налазе на координатним осама, или у унутрашњости равни тог динамичког система, уз одговарајућу еколошку интерпретацију. Такође, циљ је и спровођење бифуркационе анализе тог динамичког система за $n = 2$. Систем Фридманових једначина, који описује динамику Λ CDM модела универзума, прво је представљен и проучаван као тродимензионални, а затим као n -димензионални аутономни динамички систем класе Лотка–Волтериних динамичких система, са параметрима густине градивних компоненти универзума као зависним променљивим. Представљена је одговарајућа физичка интерпретација, укључујући посматрање еволуције универзума са аспекта теорије линеарне стабилности. Аналитичка решења

тих система представљају нове параметризације параметара густине градивних компоненти универзума фактором ширења универзума.

У првом делу дисертације се, поред стандардних претпоставки које важе за аутономне компетитивне Лотка–Волтерине динамичке системе, надограђују постојећи резултати у литератури уз увођење побољшане нотације и затим се уопштавају на више димензије коришћењем стандардних метода теорије динамичких система. У другом делу дисертације примењени су исти методи уз стандардне претпоставке и методе за разматрани Λ CDM модел универзума.

4. Кратак опис садржаја дисертације

Број страна дисертације је 69 и обухвата пет глава, од којих је прва глава Увод, а на крају је наведена литература од 63 библиографске јединице.

У другој глави су детаљно разматрани сви случајеви који су у вези са стабилношћу еквилибријума дводимензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног модела, што није анализирано у потпуности у постојећој литератури. Претпоставља се да су $x_i \geq 0$, где су $x_i = x_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$, непознате функције у посматраном Лотка–Волтериним динамичком систему. Такође се претпоставља да главна детерминанта тог система може бити једнака нули, као и детерминанте које се добијају од главне детерминанте тако што се i -та колона, $1 \leq i \leq 2$, замени колоном слободних чланова тог система. Те претпоставке проузрокују појављивање нехиперболичких еквилибријума и бифуркација. У овој глави је уведена нова нотација која је погоднија за уопштење на више димензије у односу на нотацију која се налази у постојећој литератури. Дата је и одговарајућа еколошка интерпретација. У другој глави су побољшани резултати у вези са одређивањем потребних и довољних услова да еквилибријуми (без координатног почетка) буду асимптотски стабилни или нестабилни у $[0, +\infty)^2$, као и резултати у вези са одређивањем потребних и довољних услова да посматрани динамички систем нема еквилибријуме у $(0, +\infty)^2$. Такође је представљена бифуркациона анализа тог динамичког система. Показано је да, уколико се посматрани динамички систем анализира на $\mathbb{R}^2$, постоје четири транскритичне бифуркације и одређени су услови под којима се ове бифуркације јављају. Резултати друге главе се базирају на резултатима рада [1].

У трећој глави је посматран n -димензионални аутономни компетитивни Лотка–Волтерин динамички систем, уз претпоставку да је $x_i \geq 0$, за свако $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, као и да су главна детерминанта тог система и њени дијагонални минори различити од нуле и да су минори k -тог реда, $2 \leq k \leq n$, проширене матрице тог система различити од нуле. Прво су одређени еквилибријуми тродимензионалног аутономног Лотка–Волтериног динамичког система и испитана је њихова стабилност. Затим су ови резултати уопштени за одговарајући n -димензионални систем. Конкретно, одређени су сви еквилибријуми n -димензионалног аутономног Лотка–Волтериног динамичког система и доказане су све теореме у којима су одређени услови под којима еквилибријуми тог система који се налазе на координатним осама или у унутрашњости равни јесу асимптотски стабилни или нестабилни. Дата је и одговарајућа еколошка интерпретација. Резултати треће главе се базирају на резултатима рада [11].

У четвртој глави је представљена примена теорије динамичких система ради проучавања динамике стандардног космолошког модела универзума, познатог као Λ CDM модел. Динамика Λ CDM модела је описана системом Фридманових једначина који је еквивалентан тродимензионалном аутономном динамичком систему из класе Лотка–Волтериних динамичких система. Под претпоставком да су компоненте материје нашег универзума баротропски савршени флуиди који немају међусобну интеракцију (сем гравитационе), доказано да је систем Фридманових једначина еквивалентан систему од три нелинеарне диференцијалне једначине првог реда чије су зависне променљиве управо параметри густина градивних компоненти универзума. Одређено је аналитичко решење тог тродимензионалног динамичког система ради добијања нове параметризације параметара густина градивних компоненти универзума у зависности од фактора ширења универзума. Такође, детаљно су разматрани сви дводимензионални и једнодимензионални динамички системи који следе из иницијалног

тродимензионалног динамичког система допуштајући да су неки од параметара $\Omega_i = \Omega_i(t)$ једнаки нули, што у постојећој литератури није разматрано на овакав систематичан начин. Сви наведени резултати су повезани са одговарајућом физичком интерпретацијом. Анализирана је и стабилност еквилибријума посматраног динамичког система и добијени резултати су дискутовани у контексту еволуције универзума. Коначно, разматрана је и анализа стабилности еквилибријума посматраног динамичког система у случају једнакости параметара једначине стања за материју и зрачење, односно када је $\omega_m = \omega_r$, што је нови резултат. Главни резултати четврте главе се базирају на резултатима рада [7], док се нека појашњења ослањају и на радове [4] и [6], при чему се одговарајуће алгебарске зависности из рада [4] такође јављају и у раду [9].

У петој глави је представљена динамика Λ CDM модела универзума под претпоставком да је универзум састављен од n различитих баротропских савршених флуида који, сем гравитационе, немају другу врсту међусобне интеракције, при чему је један од њих управо космолошка константа Λ са једначином стања $\omega_\Lambda = -1$. Прво је изведен динамички систем класе n -димензионалних Лотка–Волтериних динамичких система, који се састоји од n нелинеарних диференцијалних једначина првог реда, чије су зависне променљиве управо параметри густина флуида који изграђују универзум. Аналитичко решење тог система представља нову параметризацију параметара густина флуида који изграђују универзум. Еволуција универзума је посматрана са аспекта теорије линеарне стабилности. Главни резултати пете главе се базирају на резултатима рада [5], док се нека појашњења ослањају и на рад [4], при чему се одговарајуће алгебарске зависности из рада [4] такође јављају и у раду [9].

5. Закључак и предлог Комисије

Резултати кандидата Данијеле Бранковић који су приказани у дисертацији су оригинални и представљају значајан допринос у области Динамички системи. У вези са темом дисертације је шест радова кандидата, од којих је три објављено у часописима на SCI листи (од којих су два самостална), један је прихваћен за објављивање у часопису на SCI листи, један је на рецензији у часопису на SCI листи, а један је објављен у часопису који није на SCI листи. Резултати су представљени кроз излагања на седам научних конференција.

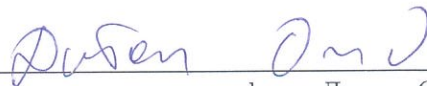
Докторска дисертација је урађена према одобреној пријави и представља оригинално и самостално научно дело, па констатујемо да су се стекли услови за њену јавну одбрану. Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду да прихвати приложени текст као докторску дисертацију кандидата Данијеле Бранковић и да одреди комисију за јавну одбрану.

У Београду, 21. јул 2026.

Чланови Комисије:



проф. др Јелена Катић,
редовни професор Математичког факултета Универзитета у Београду



проф. др Душан Оњић,
ванредни професор Математичког факултета Универзитета у Београду



проф. др Бранко Малешевић,
редовни професор Електротехничког факултета Универзитета у Београду