

Наставно-научном већу Математичког факултета
Универзитета у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, која је одржана 26. 12. 2025., именовани смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације "*U- and V-statistics for incomplete data and their application to model specification testing*" (*U- и V-статистике за некомплетне податке и њихова примена у тестирању сагласности са моделом*) докторанда Данијела Алексића. После прегледа рукописа који је Данијел Алексић предао комисији, подносимо следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија

Данијел Алексић рођен је 25.9.1998. године у Зворнику. Основне студије на Математичком факултету (студијски програм Математика, модул Статистика, актуарска и финансијска математика) је уписао 2017. године и завршио 2021. године са просеком 9.47. Мастер студије на истом модулу завршава 2022. године са просеком 8.75, одбранивши мастер рад „Проблем недостајућих података: утицај на статистичко закључивање” под менторством проф. др Бојане Милошевић. Рад је награђен наградом Математичког института САНУ за најбољи мастер рад. Докторске студије на Математичком факултету (студијски програм Математика) је уписао 2022. године.

У академској 2021/2022. био је запослен на Математичком факултету у звању сарадник у настави за ужу научну област Вероватноћа и статистика. Од 2022. је запослен на Факултету организационих наука, и то у периоду 2022. до 2023. године у звању сарадник у настави, а затим у звању асистент, на Катедри за математику.

2 Научни рад кандидата

Објављени научни радови

1. D. Aleksić, M. Cuparić, B. Milošević. Non-degenerate U-statistics for data missing completely at random with application to testing independence. Stat 12(1), c634, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1002/sta4.634> [M21] IF2021=2.451 Statistics & Probability
2. D. Aleksić. A novel test of missing completely at random: U-statistics-based approach. Statistics, 58(4), p. 1004-1023, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1080/02331888.2024.2386361> [M22] IF2023=1.2 Statistics & Probability
3. D.G. Aleksić, B. Milošević. To impute or not? Testing multivariate normality on incomplete dataset: revisiting the BHEP test. Journal of Applied Statistics, 2024.

Digital Document Certification

You may validate this document by scanning
the QR code or entering the Document ID
at docs.gov.gr/validate



Сопштења на конференцијама штампана у изводу у вези са темом дисертације

- Д. Алексић, Б. Милошевић. Утицај импутационих метода на тестове вишедимензионе нормалности. XI Симпозијум „Математика и примене”, Београд, 2-3. децембар 2021. (презентујући аутор: Д. Алексић)
- Б. Милошевић, Д. Алексић. Testing multivariate normality in the presence of missing data. CMStatistics, London, 17-19 December 2022 (presenting author: Б. Милошевић)
- Д. Алексић, Б. Милошевић. Missing data: the impact on multivariate goodness-of-fit tests. II Susret matematičara Srbije i Crne Gore, 26-28. januar 2023. (presenting author: Д. Алексић)
- Д. Алексић, М. Ћупарић, Б. Милошевић. On the asymptotic properties of non-degenerate U-statistics in the presence of MCAR data. Statistical Modeling with Applications, Bucharest, 29-30 September 2023 (presenting author: Д. Алексић)
- Д. Алексић. U-statistics-based approach for testing the MCAR assumption. XIII Symposium "Mathematics and Applications", Faculty of Mathematics, University of Belgrade. 1-2 December 2023.
- Д. Алексић. A new approach to Little's MCAR test. CMStatistics, Berlin, 13-15 December 2023 (по позиву)
- М. Ћупарић, Д. Алексић, Б. Милошевић. Testing independence in the presence of data missing completely at random. The Spring HiTEc meeting and the Complex Data in Econometrics and Statistics Workshop, Limassol, Cyprus, 23-24 March 2024 (presenting author: М. Ћупарић)
- Д. Алексић, Б. Милошевић. To impute or not to? A multivariate goodness-of-fit testing perspective. 15th Serbian Mathematical Congress, Belgrade, 19-22 June 2024 (presenting author: Д. Алексић)
- Д. Алексић, Б. Милошевић. Addressing missing data challenges: A multivariate goodness-of-fit testing perspective. 6th International Symposium on Nonparametric Statistics, Braga, 25-29 June 2024 (presenting author: Б. Милошевић)
- Д. Алексић. Testing goodness-of-fit, independence and MCAR on incomplete dataset utilising the properties of non-degenerate and weakly-degenerate U- and V-statistics. 24th European Young Statisticians Meeting, Torino, 21-25 July 2025. (по позиву)
- Б. Милошевић, Д. Алексић. Energy-distance-based two-sample testing in the presence of incomplete data. HiTEc& Codes, Limassol, 8-9 July 2025 (presenting author: Б. Милошевић)

Digital Document Certification



You may validate this document by scanning the QR code or entering the Document ID at docs.gov.gr/validate

- D. Aleksić, B. Milošević. Energy-distance-based two-sample testing in the presence of incomplete data. Workshop on Goodness-of-fit, Change-point and Related Problems, Prague, 28-31 August 2025 (presenting author: B. Milošević)
- D. Aleksić, M. Cuparić, B. Milošević. Asymptotic results for some U - and V - statistics for model specification testing under missing data, 3rd Joint Meeting of Mathematicians of Serbia and Montenegro, Petrovac, 2-5 October 2025 (presenting author: D. Aleksić)
- D.G. Aleksić. Flexible MCAR testing for missing data with correlated response indicators. XV Symposium "Mathematics and Applications", Faculty of Mathematics, University of Belgrade, 12-13 December 2025

3 Предмет дисертације

Тема докторске дисертације је развој статистичке методологије за некомплетне типове података. Посебан фокус је на тест статистикама сагласности са моделом које се, у случају комплетних скупова података, могу приказати у форми U - или V -статистика и њима сродним статистикама. Иако за комплетне податке то није случај, за некомплетне, литература је веома оскудна. С друге стране, потреба за развојем методологије је велика, имајући у виду да се овај проблем јавља веома често.

Оригинални резултати аутора се могу поделити у два дела. Први се односе на тестирање хипотезе о потпуно случајном недостајању, док се друга класа резултата односи на U - и V - статистике и примену истих у тестирању независности, сагласности са расподелом и тестирању хомогености. Додатни резултати су добијени за специфичне статистике. Посебно се истиче модификација једне класе тестова хомогености као алтернативе тестирању након брисања или импутације података, која омогућава задржавање свих доступних података и самим тим користи сву расположиву информацију. Предложена методологија је примењена на скупове података из различитих области чиме се приказује њена примена у реалним ситуацијама.

4 Приказ дисертације

Дисертација је написана на $xii + 104$ стране, а структура је следећа:

Preface (Увод)	1
1 U - and V -statistics (U - и V - статистике)	3
1.1 Definitions (Дефиниције)	3
1.2 Asymptotic behavior of non-degenerate U - and V - statistics (Асимптотско понашање недегенерисаних U - и V - статистика)	4
1.3 Asymptotic behavior of weakly degenerate U - and V -statistics (Асимптотско понашање слабо дегенерисаних U - и V - статистика)	5



1.4	Results of Neuhaus (1977) for two-sample U - and V -statistics (Резултати Ноххауса (1977) за двоузорачке U - и V - статистике)	7
1.5	Results of De Wet and Randles for parameter-dependent kernels (Резултати Де Вета и Рандлеса за језгра која зависе од параметара)	8
2	Mathematical framework for missing data (Математички оквир за недостајуће податке)	13
2.1	Origins (Почети)	13
2.2	Missingness mechanisms (Механизам недостајања)	14
2.3	Ambiguity throughout the literature (Нејасноће присутне у литератури)	15
2.4	Historical overview of MCAR tests (Историјски предлог тестирања MCAR недостајања)	17
3	Testing the MCAR assumption utilizing the properties of U-statistics (Тестирање претпоставке о MCAR коришћењем својстава U- статистика)	21
3.1	Main idea and first version of the test (Основна идеја и прва верзија теста)	21
3.2	A note on the special case of univariate nonresponse (О специјалном случају једнодимензионог недостајања)	29
3.3	Generalization (Генерализација)	31
3.4	Empirical study (Емпиријска студија)	35
4	Non-degenerate U-statistics for MCAR data with application to testing independence (Недегенерисане U- статистике за MCAR податке са применом на тестирање независности)	47
4.1	Asymptotic distribution under the complete-case approach (Асимптотска расподела при приступу уклањања некомплетних инстанци)	47
4.2	Testing independence using Kendall's tau (Тестирање независности применом Кендаловог тау)	53
4.3	Empirical study (Емпиријска студија)	57
4.4	Real-data example (Пример на реалним подацима)	59
5	The BHEP test for MCAR data (BHEP тест за MCAR податке)	63
5.1	Prerequisites (Потребна предзнања)	64
5.2	Challenges of incomplete datasets (Изазови некомплетних скупова података)	65
5.3	Empirical study (Емпиријска студија)	70
5.4	Real-data example (Пример на реалним подацима)	73
6	Multivariate two-sample hypothesis testing in the presence of missing data (Вишедимензионо двоузорачко тестирање у присуству недостајућих података)	75
6.1	Revisiting the energy test (Поновни осврт на Е-тест)	76
6.2	Novel procedures (Нове процедуре)	77
6.3	Empirical study (Емпиријска студија)	88

Digital Document Certification



You may validate this document by scanning the QR code or entering the Document ID at docs.gov.gr/validate

Прва два поглавља су уводног карактера. Прво има за циљ увођење U - и V -статистика, са и без оцењених параметара, и приказ њихових својстава које се користе приликом добијања нових резултата приказаних у дисертацији. Друго има за циљ увођење проблема недостајућих података, уз навођење његовог порекла, као и основне класификације механизма недостајања од којих се као најједноставнији, истиче недостајање потпуно случајно (MCAR). Истакнут је значај тестирања MCAR као главна мотивација за даљи рад у овом правцу.

Остатак дисертације садржи оригиналне резултате аутора.

У трећем поглављу приказан је нови тест MCAR претпоставке, као и његово уопштење којим се превазилазе неки од недостатака првопредложеног теста. За њих је показано да је, уз адекватно нормирање, под нултом хипотезом, гранична расподела нормална, чиме се процес тестирања значајно поједностављује. У опсежној емпиријској студији илустрована је јасна предност нових тестова.

Четврто поглавље посвећено је извођењу граничне расподеле U - и V -статистика са недегенерисаним језгром, при приступу уклањања некомплетних инстанци када је недостајање потпуно случајно. Добијени резултати су примењени на случај чувеног Кендаловог теста независности. Овај тест је додатно разматран када се уместо брисања инстанци врши импутација медијаном, у том случају је изведена гранична расподела статистике при претпоставци о потпуно случајном недостајању. Ово је први резултат овог типа за случај тестирања након импутације недостајућих података.

Пето поглавље је посвећено једном од најпознатијих тестова сагласности са нормалном расподелом, заснованим на L^2 тежинском растојању између емпиријске карактеристичне функције и одговарајуће за нормалну расподелу, у случају проблема недостајућих података. Када подаци недостају потпуно случајно и важи нулта хипотеза, изведени су гранични резултати при приступу брисања некомплетних инстанци, као и у случају импутације средњом вредношћу. Предложени су нови бутстреп алгоритми којим је омогућено тестирање у пракси.

Шесто поглавље је посвећено тестирању хомогености коришћењем Е-теста, који се, као и ВНЕР тест, може довести у везу са слабо дегенерисаним V -статистикама. Поред класичних приступа решавању проблема недостајања у контексту тестирања, предложен је нови приступ који, уз употребу одговарајућих тежина, омогућава искоришћавање свих доступних података. За тај приступ, као и у случају брисања некомплетних инстанци, изведена је гранична расподела тест статистике под нултом хипотезом једнаке расподељености два узорка.

Седмо поглавље садржи преглед најважнијих закључака, као и праваца за даље истраживање, што потврђује актуелност разматране теме дисертације.



5 Закључак

Резултати приказани у дисертацији представљају значајан допринос развоју статистичке методологије у присуству проблема недостајућих података. У њој су предложени нови тестови за тестирање хипотезе о потпуно случајном недостајању која је често полазна претпоставка за многе статистичке методе. Поред тога, изведена су гранична својства појединих класа U - и V - статистика у случају потпуно случајног недостајања података, са применом на различите тестове сагласности са моделом за некомплетне податке. Додатно, за разматране тест-статистике добијени су резултати који се односе на њихово гранично понашање након примене конкретних импутационих алгоритама, који се разматрају као алтернатива брисању некомплетних података.

Кандидат је у тези показао одлично познавање области, способност да самостално истражује и изводи сложене математичке закључке, као и да их на одговарајући начин приближи читаоцу.

Данијел Алексић је до сада објавио два коауторска рада и један самостални рад у часописима са SCI листе и имао запажена предавања на више научних конференција, од којих два пута по позиву. Сви његови досадашњи научни резултати су у вези са темом дисертације.

На основу свега тога и пошто су испуњени и сви формални услови, предлагемо да се рукопис "*U- and V-statistics for incomplete data and their application to model specification testing*" (U - и V -статистике за некомплетне податке и њихова примена у тестирању сагласности са моделом) прихвати као докторска дисертација и да се формира комисија за јавну одбрану.

У Београду, 21.1.2026.

др Марија Цупарић, доцент


др Марко Обрадовић, ванредни професор

др Апостолос Бацидис, ванредни професор
Департмана за математику Универзитета у Јањини

Digital Document Certification

You may validate this document by scanning the QR code or entering the Document ID at docs.gov.gr/validate



Επιβεβαιώνεται το γνήσιο. Υπουργείο
Ψηφιακής Διακυβέρνησης / Verified by the Ministry
of Digital Governance, Hellenic Republic
20260120141017+02'00'

Signature:
ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΜΠΑΤΣΙΔΗΣ / APOSTOLOS
BATSIDIS
Father's name: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ / DIMITRIOS
TIN: 103138114
Date of signature: 20/01/2026 14:10:13

By the decision of the Teaching-Scientific Council of the Faculty of Mathematics at the University of Belgrade, adopted at the meeting held on December 26, 2025, we were appointed as members of the jury for the evaluation of the doctoral dissertation "*U- and V-statistics for incomplete data and their application to model specification testing*" by doctoral candidate Danijel Aleksić. After reviewing the submitted manuscript, we hereby present the following:

REPORT

1 Biography

Danijel Aleksić was born on September 25, 1998, in Zvonik. He enrolled in undergraduate studies at the Faculty of Mathematics (study program: Mathematics, module: Statistics, Actuarial and Financial Mathematics) in 2017, graduating in 2021 with an average grade of 9.47. He obtained his Master's degree in 2022 from the same module with an average grade of 8.75, defending the Master's thesis titled "The Problem of Missing Data: Impact on Statistical Inference" under the supervision of Professor Bojana Milošević. The thesis was awarded the prize of the Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts (SASA) for the best Master's thesis. He enrolled in doctoral studies at the Faculty of Mathematics (study program: Mathematics) in 2022.

In the 2021/2022 academic year, he was employed at the Faculty of Mathematics as a Teaching Associate in the narrower scientific field of Probability and Statistics. Since 2022, he has been employed at the Faculty of Organizational Sciences-first as a Teaching Associate (2022-2023), and subsequently as a Teaching Assistant at the Department of Mathematics.

Papers in SCI-indexed journals

1. D. Aleksić, M. Cuparić, B. Milošević. Non-degenerate U-statistics for data missing completely at random with application to testing independence. Stat 12(1), e634, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1002/sta4.634> [M21] IF2021 = 2.451 Statistics & Probability
2. D. Aleksić. A novel test of missing completely at random: U-statistics-based approach. Statistics, 58(4), p. 1004-1023, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1080/02331888.2024.2386361> [M22] IF2023 = 1.2 Statistics & Probability
3. D.G. Aleksić, B. Milošević. To impute or not? Testing multivariate normality on incomplete dataset: revisiting the BHEP test. Journal of Applied Statistics, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1080/02664763.2024.2438798> [M22] IF2023 = 1.2 Statistics & Probability

Conferences

- D. Aleksić, B. Milošević. Impact of imputation methods on tests of multivariate normality. (Uticaj imputacionih metoda na testove višedimenzionalne normalnosti.) The eleventh Symposium "Mathematics and Applications" 2021, 3-4.12.2021., University of Belgrade - Faculty of Mathematics, Belgrade, Serbia. (presenting author: D. Aleksić)

Digital Document Certification



You may validate this document by scanning
the QR code or entering the Document ID
at docs.gov.gr/validate

Document code: BE3jh1xTPWoeL1g0PYsG7Q

Page: 1/5

- B. Milošević, D. Aleksić. Testing multivariate normality in the presence of missing data. CMStatistics, London, 17-19 December 2022 (presenting author: B. Milošević)
- D. Aleksić, B. Milošević. Missing data: the impact on multivariate goodness-of-fit tests. II Susret matematičara Srbije i Crne Gore, 26-28. januar 2023. (presenting author: D. Aleksić)
- D. Aleksić, M. Cuparić, B. Milošević. On the asymptotic properties of non-degenerate U-statistics in the presence of MCAR data. Statistical Modeling with Applications, Bucharest, 29-30 September 2023 (presenting author: D. Aleksić)
- D. Aleksić. U-statistics-based approach for testing the MCAR assumption. XIII Symposium "Mathematics and Applications", Faculty of Mathematics, University of Belgrade, 1-2 December 2023.
- D. Aleksić. A new approach to Little's MCAR test. CMStatistics, Berlin, 13-15 December 2023 (invited talk)
- M. Cuparić, D. Aleksić, B. Milošević. Testing independence in the presence of data missing completely at random. The Spring HiTEc meeting and the Complex Data in Econometrics and Statistics Workshop, Limassol, Cyprus, 23-24 March 2024 (presenting author: M. Cuparić)
- D. Aleksić, B. Milošević. To impute or not to? A multivariate goodness-of-fit testing perspective. 15th Serbian Mathematical Congress, Belgrade, 19-22 June 2024 (presenting author: D. Aleksić)
- D. Aleksić, B. Milošević. Addressing missing data challenges: A multivariate goodness-of-fit testing perspective. 6th International Symposium on Nonparametric Statistics, Braga, 25-29 June 2024 (presenting author: B. Milošević)
- D.G. Aleksić. Testing goodness-of-fit, independence and MCAR on incomplete dataset utilising the properties of non-degenerate and weakly-degenerate U- and V-statistics. 24th European Young Statisticians Meeting, Torino, 21-25 July 2025. (invited talk)
- B. Milošević, D. Aleksić. Energy-distance-based two-sample testing in the presence of incomplete data. HiTEc& Codes, Limassol, 8-9 July 2025 (presenting author: B. Milošević)
- D. Aleksić, B. Milošević. Energy-distance-based two-sample testing in the presence of incomplete data. Workshop on Goodness-of-fit, Change-point and Related Problems, Prague, 28-31 August 2025 (presenting author: B. Milošević)
- D. Aleksić, M. Cuparić, B. Milošević. Asymptotic results for some U- and V- statistics for model specification testing under missing data. 3rd Joint Meeting of Mathematicians of Serbia and Montenegro, Petrovac, 2-5 October 2025 (presenting author: D. Aleksić)
- D.G. Aleksić. Flexible MCAR testing for missing data with correlated response indicators. XV Symposium "Mathematics and Applications", Faculty of Mathematics, University of Belgrade, 12-13 December 2025

2 The Subject of the Dissertation

The topic of the doctoral dissertation is the development of statistical methodology for incomplete data types. Special emphasis is placed on goodness-of-fit test statistics which, in the case of

Digital Document Certification



You may validate this document by scanning the QR code or entering the Document ID at docs.gov.gr/validate

complete datasets, can be represented in the form of U - or V -statistics and related statistics. While this theory is well developed for complete data, the literature for incomplete data is very scarce. On the other hand, the need for methodological development is substantial, given that this problem arises very frequently.

The author's original results can be divided into two parts. The first part concerns testing the hypothesis of missing completely at random, while the second class of results deals with U - and V -statistics and their application to tests of independence, goodness-of-fit, and homogeneity. Additional results are obtained for specific statistics. In particular, a modification of a class of homogeneity tests is proposed as an alternative to testing following data deletion or imputation; this approach allows all available data to be retained and thus makes use of all the information at hand. The proposed methodology is applied to datasets from various fields, demonstrating its applicability in real-world situations.

3 Overview of the Dissertation

The dissertation is written on $xii + 104$ pages, and its structure is as follows:

Preface	1
1 U- and V-statistics	3
1.1 Definitions	3
1.2 Asymptotic behavior of non-degenerate U - and V - statistics	4
1.3 Asymptotic behavior of weakly degenerate U - and V -statistics	5
1.4 Results of Neuhaus (1977) for two-sample U - and V -statistics	7
1.5 Results of De Wet and Randles for parameter-dependent kernels	8
2 Mathematical framework for missing data	13
2.1 Origins	13
2.2 Missingness mechanisms	14
2.3 Ambiguity throughout the literature	15
2.4 Historical overview of MCAR tests (Istorijski predlog testiranja MCAR nedostajanja)	17
3 Testing the MCAR assumption utilizing the properties of U-statistics	21
3.1 Main idea and first version of the test	21
3.2 A note on the special case of univariate nonresponse	29
3.3 Generalization	31
3.4 Empirical study	35
4 Non-degenerate U-statistics for MCAR data with application to testing independence	47
4.1 Asymptotic distribution under the complete-case approach	47
4.2 Testing independence using Kendall's tau	53
4.3 Empirical study	57
4.4 Real-data example	59
5 The BHEP test for MCAR data	63
5.1 Prerequisites	64
5.2 Challenges of incomplete datasets	65
5.3 Empirical study	70
5.4 Real-data example	73

Digital Document Certification



You may validate this document by scanning
the QR code or entering the Document ID
at docs.gov.gr/validate

6	Multivariate two-sample hypothesis testing in the presence of missing data	75
6.1	Revisiting the energy test	76
6.2	Novel procedures	77
6.3	Empirical study	88
7	Conclusions and future work	93
	References (130 bibliographical units)	104

The first two chapters are introductory. The first aims to introduce U - and V -statistics, with and without estimated parameters, and to present their properties that are used in deriving the new results presented in the dissertation. The second aims to introduce the problem of missing data, outlining its origins as well as the basic classification of missingness mechanisms, among which missing completely at random (MCAR) is highlighted as the simplest case. The importance of testing the MCAR assumption is emphasized as the main motivation for further work in this direction.

The remainder of the dissertation contains the author's original results.

The third chapter presents a new test of the MCAR assumption, as well as its generalization that overcomes some of the shortcomings of the originally proposed test. It is shown that, under appropriate normalization and under the null hypothesis, the limiting distribution is normal, which significantly simplifies the testing procedure. A comprehensive empirical study illustrates the clear advantage of the new tests.

The fourth chapter is devoted to deriving the limiting distribution of U - and V -statistics with non-degenerate kernels under the approach of removing incomplete instances when missingness is completely at random. The obtained results are applied to the case of the well-known Kendall's test of independence. This test is further examined when, instead of deleting instances, median imputation is performed; in this case, the limiting distribution of the statistic is derived under the assumption of missing completely at random. This represents the first result of this type for testing imputed missing data.

The fifth chapter is devoted to one of the most well-known tests of goodness of fit for the normal distribution, based on the L^2 -weighted distance between the empirical characteristic function and the corresponding characteristic function of the normal distribution, in the presence of missing data. When data are missing completely at random and the null hypothesis holds, limiting results are derived both for the approach of deleting incomplete instances and for the case of mean imputation. New bootstrap algorithms are proposed, enabling practical implementation of the test.

The sixth chapter addresses homogeneity testing using the energy test, which, like the BHEP test, is related to weakly degenerate V -statistics. In addition to classical approaches to handling missing data in the testing context, a new approach is proposed, that, through the use of appropriate weights, allows all available data to be utilized. For this approach, as well as for the deletion of incomplete instances, the limiting distribution of the test statistic under the null hypothesis of equal distributions of the two samples is derived.

The seventh chapter provides an overview of the most important conclusions, as well as directions for further research, thereby confirming the relevance and timeliness of the dissertation topic.

Digital Document Certification



You may validate this document by scanning
the QR code or entering the Document ID
at docs.gov.gr/validate

4 Conclusion

The results presented in the dissertation represent a significant contribution to the development of statistical methodology in the presence of missing data problems. The dissertation proposes new tests for testing the hypothesis of missing completely at random, which is often a starting assumption for many statistical methods. In addition, the limiting properties of certain classes of U - and V -statistics, under missing completely at random, are derived, with applications to various model specification (goodness-of-fit) tests for incomplete data. Furthermore, for the considered test statistics, results concerning their asymptotic behaviour after the application of specific imputation algorithms are obtained; these are considered as an alternative to the deletion of incomplete data.

In this thesis, the candidate has demonstrated excellent knowledge of the field, the ability to conduct independent research and derive complex mathematical conclusions, as well as the ability to present them to the reader in an appropriate and clear manner.

To date, Danijel Aleksić has published two co-authored papers and one single-authored paper in SCI-indexed journals, and has delivered notable presentations at several scientific conferences, including two invited talks. All of his scientific results to date are related to the topic of the dissertation.

Based on all of the above, and given that all formal requirements have been met, we propose that the manuscript " U - and V -statistics for incomplete data and their application to model specification testing" be accepted as a doctoral dissertation and that a committee for the public defense be appointed.

Belgrade, January 21 2026

Jury:

Marija Cuparić
Assistant Professor
University of Belgrade
Faculty of Mathematics


Marko Obradović
Associate Professor
University of Belgrade
Faculty of Mathematics

Apostolos Batsidis
Associate Professor
Department of Mathematics
University of Ioannina, Greece

Digital Document Certification

You may validate this document by scanning the QR code or entering the Document ID at docs.gov.gr/validate



Επιβεβαιώνεται το γνήσιο. Υπουργείο
Ψηφιακής Διακυβέρνησης / Verified by the Ministry
of Digital Governance, Hellenic Republic
20260120140836+02'00'

Document code: BE3jh1xTPWoeL1g0PYsG7Q

Page: 5/5

Signature:
ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΜΠΑΤΣΙΔΗΣ / APOSTOLOS
BATSIDIS
Father's name: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ / DIMITRIOS
TIN: 103138114
Date of signature: 20/01/2026 14:08:32