

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Данијела Г. Бранковић

ДИНАМИКА АУТОНОМНИХ
КОМПЕТИТИВНИХ
ЛОТКА–ВОЛТЕРИНИХ ДИНАМИЧКИХ
СИСТЕМА

докторска дисертација

Београд, 2026

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Danijela G. Branković

**DYNAMICS OF AUTONOMOUS
COMPETITIVE LOTKA–VOLTERRA
DYNAMICAL SYSTEMS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2026

Ментор:

др Марија Микић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Јелена Катић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Душан Онић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Бранко Малешевић, редовни професор
Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

Датум одбране:

Захвалница

Велику захвалност дугујем својој менторки, др Марији Микић, на преузетим обавезама ментора, на подржавању моје склоности ка интердисциплинарном истраживању, на издвојеном времену, на вредним саветима, на константној подршци и разумевању, на истрајности и посвећености у заједничком раду, на вери у мене на сваком кораку овог пута. Мислим да смо заједно добро истрчале ову адреналинску трку.

Захваљујем се и члановима комисије, проф. др Јелени Катић, проф. др Душану Онићу и проф. др Бранку Малешевићу, на пажљивом читању дисертације, на веома корисним саветима и сугестијама који су значајно допринели њеној финалној верзији и помогли ми да разјасним недоумице за које нисам ни била свесна да постоје.

Посебну захвалност дугујем проф. др Жарку Мијајловићу, на увођењу у научни рад, на инспирацији да упловим у космолошке воде, на конструктивним дискусијама, на непрекидној подршци и на правим саветима како у математици, тако и у осталим животним сферама.

Захваљујем се породици, пријатељима и колегама на искреној подршци која је увек долазила у право време, на стрпљењу и на разумевању, поготово у самој завршници израде ове дисертације. Посебно ми је драго што је у периоду израде овог рада, пресек ова три скупа мени врло драгих људи постао непразан.

Највећу захвалност дугујем мајци Елизабети, оцу Горану и сестри Александри. Ваша безрезервна љубав, подршка и разумевање су ми представљали главни ослонац током целокупног школовања и били су ми звезда водиља до самог краја овог пута. Ову дисертацију посвећујем вама.

Београд, јул 2026.

Данијела Бранковић

Наслов докторске дисертације. Динамика аутономних компетитивних Лотка–Волтериних динамичких система.

Сажетак. У овој дисертацији је представљена анализа стабилности еквилибријума дводимензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система. Одређени су потребни и довољни услови да би еквилибријуми (без координатног почетка) били асимптотски стабилни или нестабилни на $[0, +\infty)^2$, као и потребни и довољни услови да посматрани динамички систем нема еквилибријуме на $(0, +\infty)^2$. Дата је и одговарајућа еколошка интерпретација. Такође је показано да се четири транскритичне бифуркације појављују у посматраном динамичком систему уколико га анализирамо на $\mathbb{R}^2$.

Представљена је и анализа стабилности еквилибријума тродимензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система. Представљена је и анализа стабилности еквилибријума који се налазе на координатним осама, или у унутрашњости равни n -димензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система. Дата је и одговарајућа еколошка интерпретација. Одређени су услови под којима су еквилибријуми који се налазе на координатним осама, или у унутрашњости равни, асимптотски стабилни или нестабилни на $[0, +\infty)^n$.

Систем Фридманових једначина, који описује динамику Λ CDM модела универзума, прво је представљен и проучаван као тродимензионални, а затим као n -димензионални аутономни динамички систем класе Лотка–Волтериних динамичких система, са параметрима густине градивних компоненти универзума као зависним променљивим. Представљена је одговарајућа физичка интерпретација, укључујући посматрање еволуције универзума са аспекта теорије линеарне стабилности. Аналитичка решења тих система представљају нове параметризације параметара густине градивних компоненти универзума фактором ширења универзума.

Кључне речи. Лотка–Волтера, динамички системи, стабилност, еквилибријуми, Фридманове једначине, Λ CDM модел.

Научна област. Математика.

Ужа научна област. Диференцијалне једначине.

Doctoral dissertation title. Dynamics of autonomous competitive Lotka–Volterra dynamical systems.

Abstract. In this dissertation is performed an analysis of the stability of equilibriums of the two-dimensional autonomous competitive Lotka–Volterra dynamical system. Necessary and sufficient conditions are determined for equilibriums (without the origin) to be asymptotically stable or unstable in $[0, +\infty)^2$, as well as necessary and sufficient conditions so that the observed dynamical system has no equilibriums in $(0, +\infty)^2$. The appropriate ecological interpretation is also given. It is also obtained that four transcritical bifurcations occur in the observed dynamical system if it is analyzed on $\mathbb{R}^2$.

It is also investigated an analysis of the stability of a three-dimensional autonomous competitive Lotka–Volterra dynamical system. It is also performed an analysis of the stability of equilibriums lying on the axes or in the interior of the planes of n -dimensional autonomous competitive Lotka–Volterra dynamical system. The appropriate ecological interpretation is also given. Conditions for equilibriums lying on the axes or in the interior of the planes to be asymptotically stable or unstable in $[0, +\infty)^n$ are established.

The system of the Friedmann equations, that describes dynamics of the Λ CDM model of the universe, firstly represented and analyzed as a three-dimensional, and afterwards as an n -dimensional autonomous dynamical system of a class of Lotka–Volterra dynamical systems, with density parameters of the universe's constituents as dependent variables, is investigated. The appropriate physical interpretation, including observing the evolution of the universe in the frame of the linear stability theory, is presented. Analytical solutions of these systems represent new parametrizations of density parameters of the universe's constituents regarding to the scale expansion factor of the universe.

Key words. Lotka–Volterra, dynamical systems, stability, equilibriums, Friedmann equations, Λ CDM model.

Scientific field. Mathematics.

Scientific subfield. Differential equations.

Садржај

1	Увод	1
2	Стабилност еквилибријума и бифуркациона анализа дводимензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система	8
2.1	Дводимензионални аутономни компетитивни Лотка–Волтерин динамички систем	8
2.2	Анализа стабилности еквилибријума	9
2.2.1	Случај $d_{12} \neq 0$	9
2.2.2	Случај $d_{12} = 0$	16
2.3	Потребни и довољни услови за стабилност еквилибријума	18
2.4	Бифуркациона анализа	20
3	Стабилност еквилибријума n-димензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система	23
3.1	Стабилност еквилибријума тродимензионалног динамичког система	23
3.2	Стабилност еквилибријума n -димензионалног динамичког система	29
4	Фридманове једначине као тродимензионални динамички систем	38
4.1	Фридманове једначине као динамички систем	41
4.2	Аналитичко решење динамичког система	43
4.2.1	Тродимензионални динамички систем	44
4.2.2	Дводимензионални динамички систем	46
4.2.3	Једнодимензионални динамички систем	48
4.3	Анализа стабилности динамичког система	51
4.3.1	Универзум без космолошке константе Λ	52
4.3.2	Универзум без зрачења	53
4.4	Анализа стабилности еквилибријума за $\omega_m = \omega_r$	54
5	Фридманове једначине као n-димензионални динамички систем	56
5.1	Аналитичко решење n -димензионалног динамичког система	57
5.1.1	Случај $n=3$	62
5.2	Анализа стабилности n -димензионалног динамичког система	63
	Литература	66

Глава 1

Увод

Аутономни компетитивни Лотка¹–Волтерин² динамички систем димензије $n \in \mathbb{N}$ је

$$\dot{x}_i = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

где су $x_i = x_i(t)$ густине врста i у тренутку t , $b_i \in \mathbb{R}$ је стопа раста карактеристична за врсту i , $a_{ij} \in \mathbb{R}$ је ефекат који врста j има на врсту i , за $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, док за $i = j$ добија се a_{ii} , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, што представља ефекат који чланови врсте i имају на ту исту врсту. Дати динамички систем је компетитиван [29], односно претпостављена је штетност интеракција између различитих врста, што имплицира $a_{ij} > 0$ за све $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. На основу саморегулације сваке врсте следи $a_{ii} > 0$ за све $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Штавише, $b_i > 0$, јер је такође претпостављено да је стопа раста карактеристична за врсту i позитивна у одсуству компетитивности, све док x_i не достигне ниво засићења b_i/a_{ii} , за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ [16].

Дводимензионална верзија аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система је изведена из модела који је 1926. године увео италијански математичар Вито Волтера [60] за предатор–плен интеракцију. Тај модел се поклапа са моделом за хемијске реакције који је неколико година раније независно увео математички физичар Алфред Лотка. Одатле следи име Лотка–Волтера модел [38]. Волтера је проширио овај модел описујући општије дводимензионалне системе [59], прецизније, Волтера је претпоставио самоинтерференцију између популација (опис који узима у обзир логистички раст у свакој популацији) [23]. Ако не постоји интеракција између различитих врста, онда популације имају независан логистички раст. Више информација у вези са компетитивношћу између популација, или предатор–плен интеракцијама, налази се у [36, 44, 55, 58].

Стабилност еквилибријума дводимензионалног аутономног Лотка–Волтериног динамичког система је анализирана у разној литератури (на пример, погледати [4, 25, 30, 42]). У [62] може да се пронађе веза између коефицијената a_{ij} и b_i тако да дводимензионални аутономни компетитивни Лотка–Волтерин динамички систем, који нема еквилибријуме у $(0, +\infty)^2$, има асимптотски стабилан еквилибријум на једној оси, док се на другој оси налази нестабилан еквилибријум. Ти услови су уопштени за n -димензионални аутономни компетитивни Лотка–Волтерин динамички систем у [62] и [4]. У радовима [3] и [5] су разматрани одговарајући услови за дводимензионални и n -димензионални неаутономни компетитивни Лотка–Волтерин модел, респективно. Планарни квадратни системи су анализирани у [17, 50, 51, 61], али најкомплетнија анализа планарних Лотка–Волтериних динамичких система је спроведена у [54]. Анализа

¹Alfred James Lotka (1880-1949), амерички математичар, статистичар, биофизичар и физикохемичар.

²Vito Volterra (1860-1940), италијански математичар и физичар.

спроведена у [54] се заснива на глобалној класификацији планарних Лотка–Волтериних динамичких система према њиховим глобалним геометријским својствима, док је у [13] коришћена теорија стабилности. Такође, у [13] је уведена нова нотација, која је погодна за генерализацију добијених резултата у више димензије.

Постоје модели који представљају проширење Лотка–Волтериног конкуритивног модела. Конкуритиван модел Гилпина и Ајале [22] додаје параметар који контролише степен нелинеарности регулације раста приликом интеракција у оквиру исте врсте.

У [41] је испитана стабилност еквилибријума дводимензионалног аутономног конкуритивног Лотка–Волтериног динамичког система само за $x_i > 0$ и када је главна детерминанта тог система различита од нуле, као и детерминанте које се добијају од главне детерминанте тако што се i -та колона, $1 \leq i \leq 2$, замени колоном слободних чланова датог система. Под истим условима као у дводимензионалном случају, стабилност еквилибријума тродимензионалног аутономног конкуритивног Лотка–Волтериног динамичког система је такође испитана у [41], али само за оне еквилибријуме који се налазе на координатним осама. У [14] је испитана стабилност свих еквилибријума тог динамичког система за $x_i \geq 0$ и ако су главна детерминанта, њени дијагонални минори, као и сви минори проширене матрице система различити од нуле, уз увођење нове нотације, погодније за уопштење на више димензије.

Дводимензионални аутономни конкуритивни Лотка–Волтерин динамички систем је такође анализиран у [15, 16], али под претпоставком да су врсте 1 и 2 скоро идентичне и да полажу право на исту нишу³, односно да је ефекат који врста 2 има на врсту 1 исти као ефекат који чланови врсте 1 имају међусобно, док симетрична претпоставка важи за врсту 1. Те претпоставке су описане као $a_{11} = a_{12}$ и $a_{21} = a_{22}$. Даље, у [15, 16] је претпостављено да микрокосмос у којем живе врсте 1 и 2 подржава више чланова врсте 1 него врсте 2. Користећи $a_{11} = a_{12}$ и $a_{21} = a_{22}$, претходну претпоставку можемо записати као $b_1/a_{11} > b_2/a_{21}$ и $b_1/a_{12} > b_2/a_{22}$. Стога, у [15, 16] је анализиран само један случај са једном еколошком интерпретацијом (изумирање једне врсте), док је у [13] анализирано девет различитих случајева који, у зависности од вредности знака главне детерминанте и знакова детерминанте проширене матрице система, имају пет квалитативно различитих фазних портрета у првом квадранту и имају две еколошке интерпретације - изумирање једне врсте и коегзистенцију.

У [23] је за две конкуритивне врсте доказано да, ако су обе координате еквилибријума позитивне, из његове локалне стабилности следи његова глобална стабилност. Ово се само односи на случај када је главна детерминанта система позитивна, док су у [13] одређени услови за локалну стабилност свих хиперболичких еквилибријума дводимензионалног аутономног конкуритивног Лотка–Волтериног динамичког система за све вредности знака главне детерминанте система, као и услови за глобалну стабилност свих нехиперболичких еквилибријума који се појављују када је бар једна од детерминанте проширене матрице система једнака нули.

Систем Фридманових⁴ једначина са космолошком константом Λ , који је дат са

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{kc^2}{a(t)^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \\ \dot{\rho}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\left(\rho(t) + \frac{p(t)}{c^2}\right) &= 0,\end{aligned}$$

³Под нишом се подразумева простор који одређена врста насељава, коју храну конзумира, које навике има и уопште који начин живота води [16].

⁴Алекса́ндр Алекса́ндрович Фри́дман (1888-1925), руски математичар и физичар.

јесте један од највише проучаваних система диференцијалних једначина у космологији и састоји се од нелинеарних диференцијалних једначина првог и другог реда које описују динамику нашег универзума. Прва једначина у систему Фридманових једначина је Фридманова једначина, друга једначина је једначина убрзања, а трећа једначина је једначина флуида. Космолошки параметри $a = a(t)$, $\rho = \rho(t)$ и $p = p(t)$ који се појављују у систему Фридманових једначина су функције временске променљиве t и представљају фактор ширења универзума, укупну просечну густину компоненти материје у универзуму и укупан притисак компоненти материје у универзуму, редом. Кривина универзума је реалан број са ознаком k , а константе G и c су Њутнова гравитациона константа⁵ и брзина светлости у вакууму⁶, редом. Изводи функција по временској променљивој су означени тачком.

Само две једначине из система Фридманових једначина су независне, јер једначина флуида следи из Фридманове једначине и једначине убрзања, док једначина убрзања директно следи из Фридманове једначине и једначине флуида. Стога се систем Фридманових једначина састоји из две независне једначине које садрже три непознате функције $a = a(t)$, $\rho = \rho(t)$ и $p = p(t)$. Да бисмо имали одређен систем, стандардни приступ у космологији је претпостављање једначине стања за компоненте материје у универзуму, за које је претпостављено да су баротропски савршени флуиди који, сем гравитационе, немају други облик међусобне интеракције. Једначина стања за баротропски савршени i -флуид је линеарна релација између p_i и ρ_i дата са $p_i = \omega_i \rho_i c^2$, где је $\rho_i = \rho_i(t)$ просечна густина, $p_i = p_i(t)$ је притисак и ω_i је параметар једначине стања за i -флуид [7], [28]. У овој дисертацији сматрамо да је ω_i константа из сегмента $[0, 1]$, јер је то у сагласности са макроскопском физиком [7]. Претпоставка да компоненте једног флуида не интерагују са компонентама другог флуида се рефлектује на очување једначине стања за сваки i -флуид [7], [47], односно за сваки i -флуид важи $\dot{\rho}_i + 3(\dot{a}/a) \cdot (\rho_i + p_i/c^2) = 0$.

Космолошки параметри који су централни у делу дисертације који се односи на примене у космологији су параметри густине градивних компоненти универзума, дефинисани са (видети [34])

$$\Omega_i(t) = \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho_i(t), \quad \Omega_k(t) = -\frac{kc^2}{a^2(t)H^2(t)},$$

где је $\Omega_i = \Omega_i(t)$ параметар густине за i -флуид, док је $\Omega_k = \Omega_k(t)$ параметар густине која потиче од кривине простора.

Све дискусије у овој дисертацији се односе на раван универзум ($k = 0$), или на отворен универзум ($k < 0$). У складу са физичким рестрикцијама, претпостављамо да су све функције непрекидно диференцијабилне колико год пута да је потребно.

Кратак преглед садржаја дисертације

Дисертација се састоји од пет глава, од којих је прва глава Увод, а на крају је наведена литература од 63 библиографске јединице.

У другој глави су детаљно разматрани сви случајеви који су у вези са стабилношћу еквилибријума дводимензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног модела, што није анализирано у потпуности у постојећој литератури. Претпоставља се да су $x_i \geq 0$, где су $x_i = x_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$, непознате функције у посматраном Лотка–Волтерином динамичком систему. Такође се претпоставља да главна детерминанта тог система може бити једнака нули, као и детерминанте које се добијају од главне детерминанте тако што

⁵ $G = 6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ [43]

⁶ $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ [43]

се i -та колона, $1 \leq i \leq 2$, замени колоном слободних чланова тог система. Те претпоставке проузрокују појављивање нехиперболичких еквилибријума и бифуркација. У [41] је испитана стабилност еквилибријума дводимензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система само за $x_i > 0$ и када је главна детерминанта датог система, као и одговарајуће детерминанте проширене матрице, различите од нуле. Та анализа је такође представљена у другој глави, али са новом нотацијом која је погоднија за уопштење на више димензије. Дата је и одговарајућа еколошка интерпретација. У другој глави је побољшано неколико дводимензионалних верзија теорема из рада [62], прецизније, побољшани су резултати у вези са одређивањем потребних и довољних услова да еквилибријуми (без координатног почетка) буду асимптотски стабилни или нестабилни у $[0, +\infty)^2$, као и резултати у вези са одређивањем потребних и довољних услова да посматрани динамички систем нема еквилибријуме у $(0, +\infty)^2$. Такође је представљена бифуркациона анализа тог динамичког система. Показано је да, уколико се посматрани динамички систем анализира на $\mathbb{R}^2$, постоје четири транскритичне бифуркације и одређени су услови под којима се ове бифуркације јављају. Резултати друге главе се базирају на резултатима рада [13].

У трећој глави је посматран n -димензионални аутономни компетитивни Лотка–Волтерин динамички систем, уз претпоставку да је $x_i \geq 0$, за свако $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, као и да су главна детерминанта тог система и њени дијагонални минори различити од нуле и да су минори k -тог реда, $2 \leq k \leq n$, проширене матрице тог система различити од нуле. Прво су одређени еквилибријуми тродимензионалног аутономног Лотка–Волтериног динамичког система и испитана је њихова стабилност. Подсећамо да је у [41] испитана стабилност еквилибријума истог система, али само за еквилибријуме који се налазе на координатним осама. Затим су ови резултати уопштени за одговарајући n -димензионални систем. Конкретно, одређени су сви еквилибријуми n -димензионалног аутономног Лотка–Волтериног динамичког система и доказане су све теореме у којима су одређени услови под којима еквилибријуми тог система који се налазе на координатним осама или у унутрашњости равни јесу асимптотски стабилни или нестабилни. Подсећамо да су у [62] одређени само услови под којима се асимптотски стабилан еквилибријум налази на једној од координатних оса, док су нестабилни еквилибријуми на осталим координатним остама и сем тих еквилибријума нема других. Дата је и одговарајућа еколошка интерпретација. Резултати треће главе се базирају на резултатима рада [14].

У четвртој глави је представљена примена теорије динамичких система ради проучавања динамике стандардног космолошког модела универзума, познатог као Λ CDM модел. Динамика Λ CDM модела је описана системом Фридманових једначина који је еквивалентан тродимензионалном аутономном динамичком систему из класе Лотка–Волтериних динамичких система. Под претпоставком да су компоненте материје нашег универзума баротропски савршени флуиди који немају међусобну интеракцију (сем гравитационе), доказано да је систем Фридманових једначина еквивалентан систему од три нелинеарне диференцијалне једначине првог реда чије су зависне променљиве управо параметри густина градивних компоненти универзума. У циљу извођења тог динамичког система из система Фридманових једначина, примењен је метод који је представљен у литератури (на пример погледати [7], [47], [21], [57], [24]). Одређено је аналитичко решење тог тродимензионалног динамичког система ради добијања нове параметризације параметара густина градивних компоненти универзума у зависности од фактора ширења универзума. Такође, детаљно су разматрани сви дводимензионални и једнодимензионални динамички системи који следе из иницијалног тродимензионалног динамичког система допуштајући да су неки од параметара $\Omega_i = \Omega_i(t)$ једнаки нули, што у постојећој литератури није разматрано на овакав систематичан начин. Сви наведени резултати су повезани са одговарајућом физичком интерпретацијом. Анализирана је

и стабилност еквилибријума посматраног динамичког система и добијени резултати су дискутовани у контексту еволуције универзума. Коначно, разматрана је и анализа стабилности еквилибријума посматраног динамичког система у случају једнакости параметара једначине стања за материју и зрачење, односно када је $\omega_m = \omega_r$, што је нови резултат. Главни резултати четврте главе се базирају на резултатима рада [12], док се нека појашњења ослањају и на радове [10, 40], при чему се одговарајуће алгебарске зависности из рада [40] такође јављају и у раду [39].

У петој глави је представљена динамика Λ CDM модела универзума под претпоставком да је универзум састављен од n различитих баротропских савршених флуида који, сем гравитационе, немају другу врсту међусобне интеракције, при чему је један од њих управо космолошка константа Λ са једначином стања $\omega_\Lambda = -1$ [7, 28, 47]. Прво је изведен динамички систем класе n -димензионалних Лотка–Волтериних динамичких система, који се састоји од n нелинеарних диференцијалних једначина првог реда, чије су зависне променљиве управо параметри густина флуида који изграђују универзум. Аналитичко решење тог система представља нову параметризацију параметара густина флуида који изграђују универзум. Еволуција универзума је посматрана са аспекта теорије линеарне стабилности. Главни резултати пете главе се базирају на резултатима рада [11], док се нека појашњења ослањају и на рад [40], при чему се одговарајуће алгебарске зависности из рада [40] такође јављају и у раду [39].

Пре него што кренемо са анализом стабилности еквилибријума, запишимо дефиниције основних појмова, као и основне теореме које користимо.

Дефиниција 1.0.1 [27] *Еквилибријум система $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, је тачка $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}$ у којој је $F(\mathbf{x}_*) = 0$.*

Дефиниција 1.0.2 [35] *Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$ изоловани еквилибријум ако постоји $h > 0$ такво да $B(\mathbf{x}, h) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < h\}$ не садржи друге еквилибријуме различите од $\mathbf{x}_*$, где $\|\cdot\|$ представља било коју еквивалентну векторску норму на $\mathbb{R}^n$.*

Еквилибријуме који нису изоловани, односно неизоловане еквилибријуме, имаћемо само у Глави 2 и то када будемо разматрали случај када су све детерминанте једнаке нули. Сви остали еквилибријуми у раду биће изоловани.

Дефиниција 1.0.3 [33] *Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$*

- (1) **стабилни еквилибријум** ако за сваку околину $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \ni \mathbf{x}_*$, таква да важи

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}_1, \quad t \geq 0,$$

где је ϕ^t решење система

$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \text{Id};$$

- (2) **асимптотски стабилни еквилибријум** ако је стабилни еквилибријум и ако још важи:

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_*;$$

- (3) **нестабилни еквилибријум** ако није стабилни.

Полазећи од једнодимензионалног случаја, у којем се под изолованим полустабилним еквилибријумом подразумева еквилибријум који је асимптотски стабилан са једне стране, а нестабилан са друге стране [56], у овом раду ћемо термин полустабилан еквилибријум користити у дводимензионалном динамичком систему за изоловани еквилибријум чија се стабилност мења у зависности од правца из којег му се приближавамо, односно такав еквилибријум привлачи трајекторије система из једне области равни и истовремено одбија трајекторије из друге области равни.

У табелама у Глави 2 и у Глави 3 је заступљена следећа нотација: Н означава нестабилан еквилибријум, АС представља асимптотски стабилан еквилибријум, ПС означава полустабилан еквилибријум и НИ представља неизоловани еквилибријум. На сликама у Глави 2, нестабилни еквилибријуми су означени жутом бојом, асимптотски стабилни еквилибријуми су означени црвеном бојом, полустабилни еквилибријуми су означени наранџастом бојом и неизоловани еквилибријуми су означени розе бојом.

Већина еквилибријума у овом раду су хиперболички, односно они еквилибријуми за које важи да све сопствене вредности одговарајуће Јакобијеве матрице имају реалне делове различите од нуле [27]. Следећа теорема омогућава тополошку еквиваленцију између нелинеарног динамичког система и његове линеаризације у околини хиперболичког еквилибријума. Та теорема нам омогућава да стабилност хиперболичких еквилибријума дискутујемо у оквиру линеаризације одговарајућег нелинеарног динамичког система, односно њихова стабилност ће зависити искључиво од знака сопствених вредности.

Теорема 1.0.4 (*Хартмен⁷-Гробман⁸*) [33] *Нека је $F(\mathbf{x}_*) = 0$ и нека је $A = dF(\mathbf{x}_*)$ хиперболичка матрица. Тада постоји околина $\mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ на којој су токови система*

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \text{ и } \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

тополошки еквивалентни.

Директна последица Теореме 1.0.4 је одређивање стабилности хиперболичког еквилибријума $\mathbf{x}_*$ на основу знакова реалних делова сопствених вредности матрице $A = dF(\mathbf{x}_*)$, односно важе следеће пропозиције.

Пропозиција 1.0.5 (*Асимптотска стабилност*) [26] *Ако је $\mathbf{x}_*$ хиперболички еквилибријум система $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ и ако све сопствене вредности матрице $A = dF(\mathbf{x}_*)$ имају негативан реални део, онда је еквилибријум $\mathbf{x}_*$ асимптотски стабилан.*

Пропозиција 1.0.6 (*Нестабилност*) [26] *Ако је $\mathbf{x}_*$ хиперболички еквилибријум система $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ и ако бар једна сопствена вредност матрице $A = dF(\mathbf{x}_*)$ има позитиван реални део, онда је еквилибријум $\mathbf{x}_*$ нестабилан.*

С обзиром на то да тополошка еквивалентност чува природу еквилибријума, наведене пропозиције следе директно из Теореме 1.0.4 и чињенице да линеарни систем можемо експлицитно да решимо.

Стабилност нехиперболичких еквилибријума утврдићемо помоћу следеће теореме, при чему је $\dot{V}(\mathbf{x})$ ознака за извод функције V дуж решења система

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(V(\phi^t(\mathbf{x}))), \text{ за } \frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})), \phi^0 = \text{Id}. \quad (1.0.1)$$

На основу тога је

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = dV(\phi^t(\mathbf{x}))(F(\phi^t(\mathbf{x}))) = \langle \nabla V(\phi^t(\mathbf{x})), F(\phi^t(\mathbf{x})) \rangle. \quad (1.0.2)$$

⁷Philip Hartman (1915-2015), амерички математичар.

⁸David Grobman, руски математичар.

Теорема 1.0.7 (Теорема Љапунова⁹) [33] Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп и нека је функција $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана на некој околини $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$, таква да је

- (1) V класе C^1 на $\mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$
- (2) $V(\mathbf{x}) > 0$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.

Тада ако је

- (а) $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ (одакле следи да V опада дуж решења система), тада постоји околина тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је свако решење које почиње у тој околини дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је стабилни еквилибријум;
- (б) $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ (одакле следи да V строго опада дуж решења система), тада постоји околина тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је свако решење које почиње у тој околини дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је асимптотски стабилни еквилибријум;
- (в) $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$, за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ (одакле следи да V строго расте дуж решења система), тада је $\mathbf{x}_*$ нестабилни еквилибријум.

Функција V се зове функција Љапунова.

⁹Алекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в (1857-1918), руски математичар и физичар.

Глава 2

Стабилност еквилибријума и бифуркациона анализа дводимензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система

У овој глави је представљена анализа стабилности еквилибријума дводимензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система за $x_i \geq 0$, $x_i = x_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$ и за све вредности знака главне детерминанте тог система, као и минора другог реда проширене матрице тог система. За тринаест од укупно двадесетседам различитих комбинација знака тих детерминанти је могуће скицирати фазни портрет, а девет од њих има међусобно квалитативно различите фазне портрете уколико посматрамо пуне околине еквилибријума и ти фазни портрети су приказани на Сликама 2.1-2.6. Само пет од тих девет случајева има различите фазне портрете на $[0, +\infty)$. Четири од тих пет фазних портрета се такође налазе у [41], док је последњи нови и специфичан јер приказује бесконачно неизолованих еквилибријума. Сви резултати су представљени на Табелама 2.1-2.5. Такође, побољшано је неколико резултата из [62], углавном у вези са потребним и довољним условима да би еквилибријуми (без координатног почетка) били асимптотски стабилни или нестабилни на $[0, +\infty)^2$. Међу тринаест квалитативно различитих фазних портрета на $\mathbb{R}^2$, могу се уочити четири транскритичне бифуркације.

Резултати ове главе базирају се на резултатима рада [13].

2.1 Дводимензионални аутономни компетитивни Лотка–Волтерин динамички систем

Дводимензионални аутономни компетитивни Лотка–Волтерин динамички систем је

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 (b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2 (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

где су $x_i = x_i(t)$, $x_i \geq 0$, густине врста i у датом времену t , $b_i > 0$ је стопа раста карактеристична за врсту i , $a_{ij} > 0$ је ефекат који врста j има на врсту i , за $i, j \in \{1, 2\}$ и $i \neq j$, док за $i = j$ добијамо $a_{ii} > 0$, $i \in \{1, 2\}$, што представља ефекат који чланови врсте i имају на ту исту врсту. У одсуству компетитивности, посматрани динамички систем (2.1.1)

састоји се од две логистичке једначине (по једна за сваку врсту), са нивоом засићења b_i/a_{ii} , за $i \in \{1, 2\}$.

За детерминанту система (2.1.1), као и детерминанте које се добијају од главне детерминанте тако што се i -та колона, $1 \leq i \leq 2$, замени колоном слободних чланова датог система, уведемо следећу нотацију

$$d_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_{122} = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad d_{112} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \quad (2.1.2)$$

На основу (2.1.2) закључујемо да број различитих индекса детерминанте имплицира ред те детерминанте, као и елементе који се налазе на њеној главној дијагонали. Индекси детерминанте d_{12} матрице система (2.1.1) указују на детерминанту другог реда чији су елементи на главној дијагонали a_{11} и a_{22} . Даље, индекси детерминанте d_{112} указују на детерминанту другог реда чији су елементи на главној дијагонали a_{11} и b_2 , а индекси детерминанте d_{122} указују на детерминанту другог реда чији су елементи на главној дијагонали a_{12} и b_2 . Ова нотација је веома корисна за одређивање координата еквилибријума датог система и одговарајућих сопствених вредности, као и за уопштење на више димензије.

2.2 Анализа стабилности еквилибријума

Разматрана су два случаја, у зависности од тога да ли је d_{12} једнако нули, или није једнако нули. Због еколошке интерпретације, разматрамо стабилност само оних еквилибријума који се налазе у првом квадранту.

2.2.1 Случај $d_{12} \neq 0$

На основу (2.1.2), услов $d_{12} \neq 0$ је еквивалентан са $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$, што са аспекта екологије значи да ефекат произведен компетитивношћу између чланова исте врсте није једнак ефекту произведеном компетитивношћу између чланова различитих врста.

Број еквилибријума и њихова стабилност зависи од знака детерминанти d_{12} , d_{112} и d_{122} . Анализирали су следећи случајеви.

I Случај $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} \neq 0$

На основу (2.1.2), услови $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} \neq 0$ су еквивалентни редом са $b_1/a_{11} \neq b_2/a_{21}$ и $b_2/a_{22} \neq b_1/a_{12}$. У еколошком смислу, то значи да ниво засићења врсте 1 није једнак конкурентском прагу врсте 2 и да ниво засићења врсте 2 није једнак конкурентском прагу врсте 1. У овом раду ћемо термин конкурентски праг врсте i , где $i \in \{1, 2\}$, користити за довољан број чланова врсте j , за $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$, да би се зауставио раст врсте i .

Ако важи $\text{sgn}(d_{112}) = \text{sgn}(d_{12}) = -\text{sgn}(d_{122})$, онда постоје четири различита еквилибријума система (2.1.1), које означавамо са $E_0(0, 0)$, $E_1(b_1/a_{11}, 0)$, $E_2(0, b_2/a_{22})$ и $E_{12}(-d_{122}/d_{12}, d_{112}/d_{12})$. У супротном (ако важи $\text{sgn}(d_{112}) \neq \text{sgn}(d_{12})$ или важи $\text{sgn}(d_{12}) \neq -\text{sgn}(d_{122})$), постојала би три различита еквилибријума система (2.1.1), E_0 , E_1 и E_2 , јер се E_{12} не би налазио у првом квадранту. Наглашавамо да услови $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} \neq 0$ омогућавају да сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_i , $i \in \{1, 2, 12\}$, имају реалне делове различите од нуле, као што ћемо ускоро видети. Следи да су ти еквилибријуми хиперболички, па њихову стабилност можемо да дискутујемо у оквиру линеаризације динамичког система (2.1.1), јер Теорема 1.0.4 омогућава тополошку еквиваленцију између нелинеарног динамичког система и његове линеаризације у околини

хиперболичког еквилибријума. Сада ћемо испитати стабилност свих еквилибријума.

Еквилибријум E_0 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_0 су $\lambda_i = b_i$, $i \in \{1, 2\}$. Из $b_i > 0$ за свако $i \in \{1, 2\}$, следи да је E_0 нестабилан чвор (нестабилан еквилибријум).

Еквилибријум E_1 . За сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_1 добијамо $\lambda_1 = -b_1$, $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 = d_{112}/a_{11}$. Ако је $d_{112} < 0$, онда је E_1 стабилан чвор (асимптотски стабилан еквилибријум). Ако је $d_{112} > 0$, онда је E_1 седло (нестабилан еквилибријум).

Еквилибријум E_2 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_2 управо $\lambda_1 = -d_{122}/a_{22}$ и $\lambda_2 = -b_2$, $\lambda_2 < 0$. Закључујемо да је E_2 стабилан чвор (асимптотски стабилан еквилибријум) ако је $d_{122} > 0$. Ако је $d_{122} < 0$, тада је E_2 седло (нестабилан еквилибријум).

Еквилибријум E_{12} . Координате еквилибријума $E_{12}(-d_{122}/d_{12}, d_{112}/d_{12})$ морају бити позитивне да би се E_{12} налазио у првом квадранту, односно морају бити задовољени услови $\text{sgn}(d_{12}) = \text{sgn}(d_{112}) = -\text{sgn}(d_{122})$. Ако координате еквилибријума E_{12} означимо са $x_1 := -d_{122}/d_{12}$ и $x_2 := d_{112}/d_{12}$, тада је детерминанта Јакобијеве матрице у E_{12} управо

$$\begin{aligned} \det(J(E_{12})) &= \begin{vmatrix} b_1 - 2a_{11}x_1 - a_{12}x_2 & -a_{12}x_1 \\ -a_{21}x_2 & b_2 - a_{21}x_1 - 2a_{22}x_2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 x_1 x_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = x_1 x_2 d_{12}, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

јер је $b_1 - 2a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = -a_{11}x_1$ и $b_2 - a_{21}x_1 - 2a_{22}x_2 = -a_{22}x_2$. На основу

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(J(E_{12})) = x_1 x_2 d_{12} \text{ и } \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(J(E_{12})) = -(a_{11}x_1 + a_{22}x_2) \quad (2.2.2)$$

следи да је карактеристичан полином матрице $J(E_{12})$, у ознаци $P_{12}(\lambda)$, управо полином $P_{12}(\lambda) = \lambda^2 + (x_1 a_{11} + x_2 a_{22})\lambda + x_1 x_2 d_{12}$. Из (2.2.2) следи да је E_{12} стабилан чвор (асимптотски стабилан еквилибријум) ако је $d_{12} > 0$ и $d_{112} > 0$ и $d_{122} < 0$. Ако је $d_{12} < 0$ и $d_{112} < 0$ и $d_{122} > 0$, онда је E_{12} седло (нестабилан еквилибријум). Резултати су дати у Табели 2.1.

Табела 2.1. Анализа стабилности еквилибријума система (2.1.1).

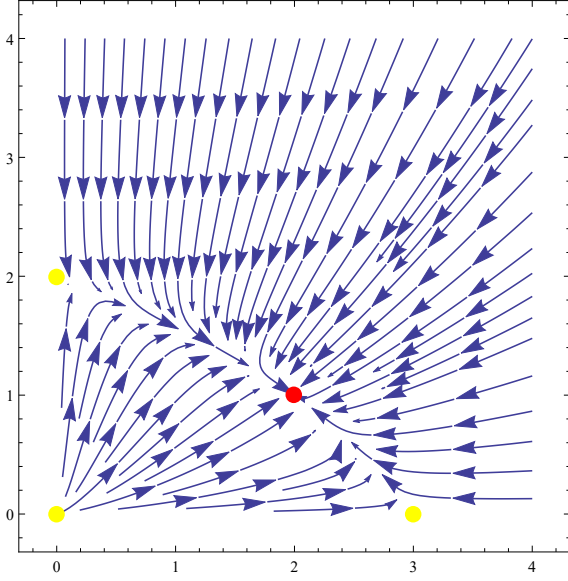
d_{12}	екв.	$d_{112} > 0$ $d_{122} > 0$	$d_{112} > 0$ $d_{122} < 0$	$d_{112} < 0$ $d_{122} > 0$	$d_{112} < 0$ $d_{122} < 0$
$d_{12} > 0$	E_0	Н (н. чвор)	Н (н. чвор)	не могућ случај	Н (н. чвор)
	E_1	Н (седло)	Н (седло)		АС (с. чвор)
	E_2	АС (с. чвор)	Н (седло)		Н (седло)
	E_{12}	не постоји	АС (с. чвор)		не постоји
$d_{12} < 0$	E_0	Н (н. чвор)	не могућ случај	Н (н. чвор)	Н (н. чвор)
	E_1	Н (седло)		АС (с. чвор)	АС (с. чвор)
	E_2	АС (с. чвор)		АС (с. чвор)	Н (седло)
	E_{12}	не постоји		Н (седло)	не постоји

Дакле, E_0 је нестабилан чвор (нестабилан еквилибријум), док стабилност E_1 зависи само од знака од d_{112} , стабилност E_2 зависи само од знака од d_{122} , док егзистенција и стабилност E_{12} зависи само од знака од d_{12} , d_{112} и d_{122} . Случај $d_{12} > 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} > 0$ из Табеле 2.1, није могућ. У супротном бисмо имали

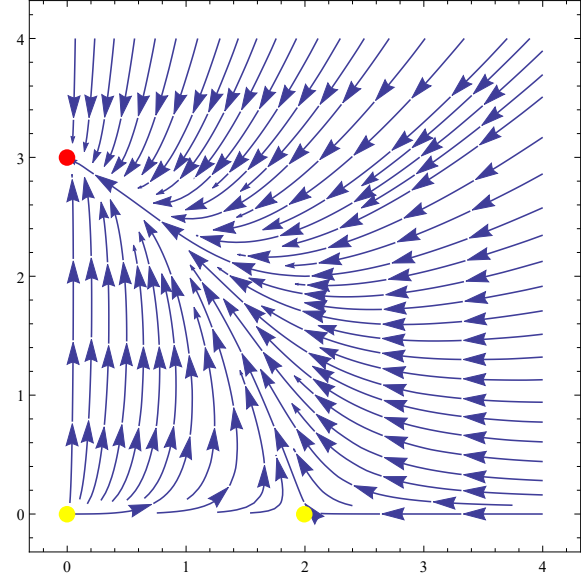
$$a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}, a_{11}b_2 < a_{21}b_1, a_{12}b_2 > a_{22}b_1. \quad (2.2.3)$$

Ако прву неједнакост у (2.2.3) помножимо са b_2/a_{22} и искористимо трећу неједнакост из (2.2.3), добијамо $a_{11}b_2 > a_{12}b_2a_{21}/a_{22} > a_{21}b_1$, што није сагласно са другом неједнакошћу у (2.2.3). Слично се показује да је случај $d_{12} < 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} < 0$ такође немогућ.

Из Табеле 2.1 закључујемо да случајеви $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} > 0$ и $d_{12} < 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} > 0$, имају квалитативно иста динамичка својства, што такође важи за случајеви $d_{12} > 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} < 0$ и $d_{12} < 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} < 0$. Закључујемо да у случају $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} \neq 0$ имамо четири квалитативно различита фазна портрета система (2.1.1), који су приказани на Слици 2.1 и на Слици 2.2.

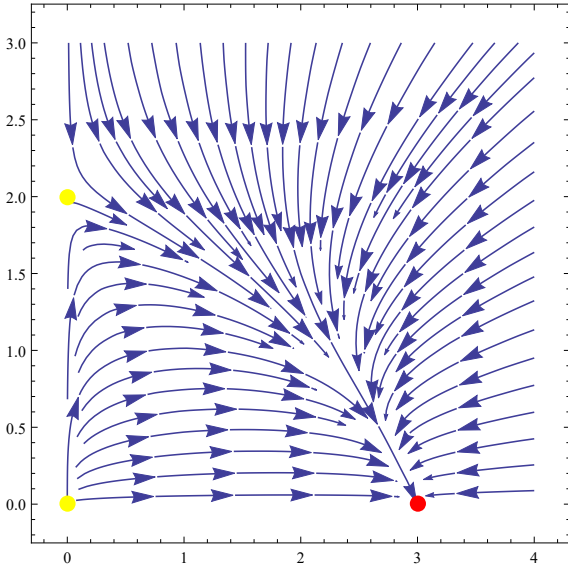


(а) Случај $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} < 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(3 - x_1 - x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(4 - x_1 - 2x_2)$.

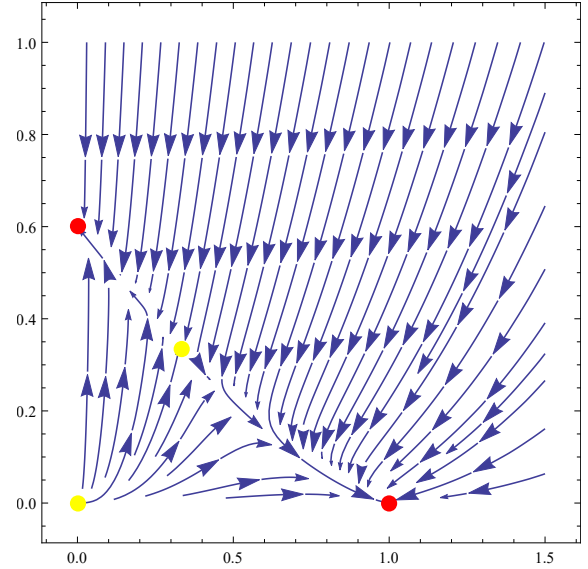


(б) Случај $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} > 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(2 - x_1 - x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(6 - x_1 - 2x_2)$.

Слика 2.1. Фазни портрети за случајеви $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} < 0$ и $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} > 0$.



(а) Случај $d_{12} > 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} < 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(6 - 2x_1 - x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(2 - x_1 - x_2)$.



(б) Случај $d_{12} < 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} > 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - 2x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(3 - 4x_1 - 5x_2)$.

Слика 2.2. Фазни портрети за случајеви $d_{12} > 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} < 0$ и $d_{12} < 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} > 0$.

На Слици 2.1(а) и на Слици 2.1(б), еквилибријум E_0 је нестабилан чвор, док је

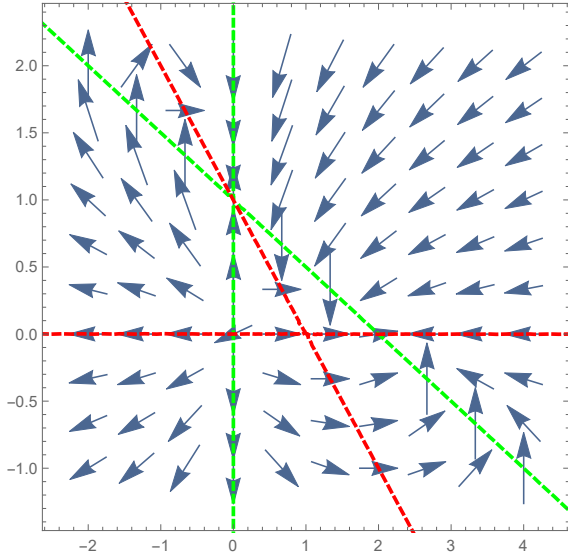
еквилибријум E_1 седло. На Слици 2.1(а) и на Слици 2.2(а), еквилибријум E_2 је седло, док је на Слици 2.1(б) и на Слици 2.2(б) стабилан чвор. Еквилибријум E_{12} је стабилан чвор на Слици 2.1(а), док је седло на Слици 2.2(б).

Из Табеле 2.1, као и Слике 2.1 и Слике 2.2, можемо да приметимо да у свим случајевима (изузев у једном), борба за егзистенцију између две врсте резултује изумирањем једне од врста, што је сагласно са [15, 16]. Ипак, у случају $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$ и $d_{122} < 0$ који је представљен на Слици 2.1(а) имамо коегзистенцију између две врсте, јер све трајекторије конвергирају еквилибријуму у првом квадранту.

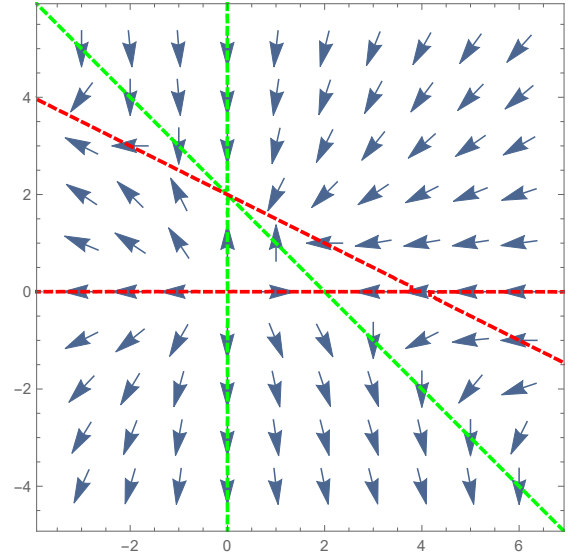
II Случај $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} = 0$

На основу (2.1.2), услови $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} = 0$ су еквивалентни редом са $b_1/a_{11} \neq b_2/a_{21}$ и $b_2/a_{22} = b_1/a_{12}$. У еколошком смислу, то значи да ниво засићења врсте 1 није једнак конкурентском прагу врсте 2 и да ниво засићења врсте 2 јесте једнак конкурентском прагу врсте 1.

На основу $d_{122} = 0$, следи да је прва координата еквилибријума E_{12} једнака нули и да је $a_{12} = a_{22}b_1/b_2$. Заменом $a_{12} = a_{22}b_1/b_2$ у d_{12} , следи $d_{12} = a_{22}d_{112}/b_2$. Даље, друга координата еквилибријума E_{12} је $d_{112}/d_{12} = b_2/a_{22}$, $b_2/a_{22} > 0$, на основу чега следи да се E_{12} поклапа са E_2 и да је $\text{sgn}(d_{112}) = \text{sgn}(d_{12})$. Еквилибријуми E_0 и E_1 су хиперболички и њихова природа је иста као у претходном случају (случај $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} \neq 0$, видети Табелу 2.1), разматрајући само случајеве у којима су задовољени услови $\text{sgn}(d_{112}) = \text{sgn}(d_{12})$. Како E_2 није хиперболички ($\lambda_1 = -d_{122}/a_{22} = 0$), не можемо да одредимо његову природу коришћењем Теореме 1.0.4. Уместо тога, стабилност E_2 одредимо помоћу анализе фазних трајекторија у околини тог еквилибријума. Због тога ћемо прво одредити нулклинације система (2.1.1), што су праве у равни за које важи $x_1(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) = 0$ (x_1 -нулклинације) и $x_2(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) = 0$ (x_2 -нулклинације). Одговарајући фазни портрети, као и нулклинације, представљени су на Слици 2.3.



(а) Случај $d_{12} < 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} = 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(2 - x_1 - 2x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(1 - x_1 - x_2)$.



(б) Случај $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} = 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(2 - x_1 - x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(4 - x_1 - 2x_2)$.

Слика 2.3. Смер векторског поља кроз x_1 -нулклинације (обојене су у зелено) и x_2 -нулклинације (обојене су у црвено) за случајеве $d_{12} < 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} = 0$ и $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} = 0$.

Праве $x_1 = 0$ и $x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$ су x_1 -нулклинације система (2.1.1), док су праве

$x_2 = 0$ и $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$ управо x_2 -нулклинације. Приметимо да су x_1 -нулклинација $x_1 = 0$ и x_2 -нулклинација $x_2 = 0$ инваријантне. Векторско поље кроз x_1 -нулклинацију $x_1 = 0$ је вертикално. Ако уврстимо $x_1 = 0$ у другу једначину у (2.1.1), добијамо да је $\dot{x}_2 = x_2(b_2 - a_{22}x_2)$, одакле закључујемо да је смер векторског поља кроз нулклинацију $x_1 = 0$ вертикално нагоре ($\uparrow$) за $0 < x_2 < b_2/a_{22}$, док је за $x_2 > b_2/a_{22}$ смер векторског поља вертикално надоле ($\downarrow$).

Векторско поље је хоризонтално кроз x_2 -нулклинацију $x_2 = 0$. Ако заменимо $x_2 = 0$ у прву једначину система (2.1.1), добијамо $\dot{x}_1 = x_1(b_1 - a_{11}x_1)$. Последице, векторско поље је усмерено хоризонтално надесно ($\rightarrow$) кроз нулклинацију $x_2 = 0$ за $0 < x_1 < b_1/a_{11}$, док је за $x_1 > b_1/a_{11}$ векторско поље усмерено хоризонтално налево ($\leftarrow$).

Из $d_{122} = 0$ и $x_1 > 0$, следи да се x_1 -нулклинација $x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$ налази изнад x_2 -нулклинације $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$ ако и само ако је $d_{12} < 0$.¹ Пресечна тачка тих нулклинација је управо $E_2(0, b_2/a_{22})$. Прво, одредимо природу еквилибријума E_2 када је $d_{12} < 0$.

Како смо закључили да је $\dot{x}_1 = 0$ за $x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$, следи да је векторско поље вертикално кроз нулклинацију $x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$. Ако заменимо $x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$ у другу једначину у систему (2.1.1) (наведена замена се односи само на x_2 у заградама), добијамо $\dot{x}_2 = x_1x_2d_{12}/a_{12}$. С обзиром на то да је $d_{12} < 0$, векторско поље је усмерено вертикално надоле ($\downarrow$) кроз нулклинацију $x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$ ако и само ако је $x_1x_2 > 0$, што овде и јесте случај јер су x_1 и x_2 позитивни.

Векторско поље кроз нулклинацију $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$ је хоризонтално. Ако заменимо $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$ у прву једначину система (2.1.1), онда добијамо $\dot{x}_1 = -x_1^2d_{12}/a_{22}$, одакле следи да је векторско поље усмерено хоризонтално надесно ($\rightarrow$) кроз нулклинацију $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$.

На основу усмерености векторског поља кроз нулклинације која је представљена на Слици 2.3а, можемо закључити да је еквилибријум E_2 нестабилан, што ћемо и доказати.

Посматрајмо следећи скуп

$$\mathcal{G}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22} < x_2 < (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}, x_2 > 0\}.$$

Приметимо да је скуп $\mathcal{G}_1$ инваријантан, односно да свака трајекторија која почиње у произвољној тачки скупа $\mathcal{G}_1$ остаје у скупу $\mathcal{G}_1$. Нека је $M(x_1, x_2)$ произвољна тачка из скупа $\mathcal{G}_1$. Према томе, $x_1 > 0$ и $b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 > 0$ и на основу прве једначине из система (2.1.1) закључујемо да је $\dot{x}_1 > 0$, односно да је $x_1 = x_1(t)$ строго растућа функција у зависности од времена, за сваку тачку из скупа $\mathcal{G}_1$. Према томе, постоји околина $\mathcal{O}_{E_2}$ еквилибријума E_2 тако да за сваку тачку $M(x_1, x_2) \in \mathcal{O}_{E_2} \cap \mathcal{G}_1$ трајекторија која почиње у $M(x_1, x_2)$ никада се не враћа у $\mathcal{O}_{E_2} \cap \mathcal{G}_1$. Закључујемо да је еквилибријум $E_2(0, b_2/a_{22})$ нестабилан за $d_{12} < 0$.

Доказаћемо да је еквилибријум E_2 полустабилан за $d_{12} > 0$. Прецизније, доказаћемо да је еквилибријум E_2 асимптотски стабилан на $(0, +\infty)^2$ применом Теореме 1.0.7, а анализирањем трајекторија у околини E_2 показаћемо да је тај еквилибријум нестабилан на $(-\infty, 0) \times (0, +\infty)$.

Претпоставимо да је функција Љапунова у облику [62]

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= x_1^{a_{22}} x_2^{-a_{12}}, \\ \dot{V}(x_1, x_2) &= -d_{12} x_1^{a_{22}+1} x_2^{-a_{12}}. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Из (2.2.4) закључујемо да је V диференцијабилна на $(0, +\infty)^2$, $V(E_2) = 0$ и $V(x_1, x_2) > 0$ за свако $(x_1, x_2) \in (0, +\infty)^2$. Како је $d_{12} > 0$, онда је $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ за свако $(x_1, x_2) \in (0, +\infty)^2$.

¹Из $(b_1 - a_{11}x_1)/a_{12} > (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$, након множења са $a_{12} \cdot a_{22} > 0$ добијамо $-d_{12}x_1 > d_{122}$, што је уз претпоставке $d_{122} = 0$ и $x_1 > 0$ еквивалентно са $d_{12} < 0$.

Према томе, функција V из (2.2.4) је функција Љапунова за E_2 и према Теореме 1.0.7, E_2 је асимптотски стабилан еквилибријум на $(0, +\infty)^2$.

Посматрајмо скуп

$$\mathcal{G}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22} < x_2 < (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}\}.$$

С обзиром на то да је $d_{12} > 0$ и $x_1 < 0$, права $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$ се налази испод праве $x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$. Штавише, приметимо да је $x_2 > b_2/a_{22}$, где је $b_2/a_{22} = d_{112}/d_{12}$ управо x_2 -координата еквилибријума E_2 .

Слично као за случај $d_{12} < 0$, одређујемо да је смер векторског поља система (2.1.1) вертикално надолу ($\downarrow$) кроз нулклинацију $x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$ ако и само ако је $x_1x_2 < 0$. Векторско поље кроз нулклинацију $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$ је усмерено хоризонтално налево ($\leftarrow$).

На основу усмерености векторског поља кроз нулклинације која је представљена на Слици 2.3б, можемо закључити да је еквилибријум E_2 нестабилан у $\mathcal{G}_2$, што ћемо и доказати.

Нека је $M(x_1, x_2)$ произвољна тачка из скупа $\mathcal{G}_2$. Следи, $x_1 < 0$ и $x_2 < (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$, па на основу прве једначине из система (2.1.1) закључујемо да је $\dot{x}_1 < 0$, односно да је $x_1 = x_1(t)$ строго опадајућа функција у зависности од времена, за сваку тачку из скупа $\mathcal{G}_2$. Према томе, постоји околина $\mathcal{O}_{E_2}$ еквилибријума E_2 тако да за сваку тачку $M(x_1, x_2) \in \mathcal{O}_{E_2} \cap \mathcal{G}_2$ трајекторија која почиње у $M(x_1, x_2)$ никада се не враћа у $\mathcal{O}_{E_2} \cap \mathcal{G}_2$. Закључујемо да је еквилибријум $E_2(0, b_2/a_{22})$ нестабилан у $(-\infty, 0) \times (0, +\infty)$. Свеукупно, еквилибријум E_2 је полустабилан.

У овој секцији имамо два случаја која нису могућа. Први случај је $d_{12} > 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} = 0$. Ако претпоставимо да је ово могуће, онда

$$a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}, a_{11}b_2 < a_{21}b_1, a_{12}b_2 = a_{22}b_1. \quad (2.2.5)$$

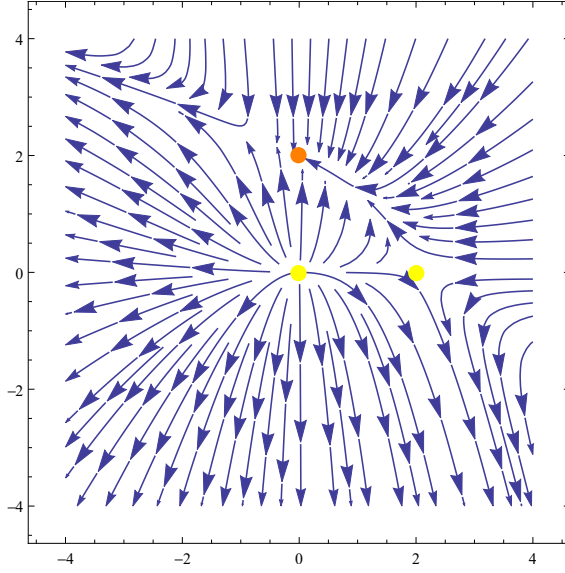
Ако помножимо прву неједнакост у (2.2.5) са b_2/a_{22} и применимо једнакост из (2.2.5), добијамо, као и раније, $a_{11}b_2 > a_{12}b_2a_{21}/a_{22} = a_{21}b_1$, што није сагласно са другом неједнакости у (2.2.5). Слично се показује да случај $d_{12} < 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} = 0$ такође није могућ. Сви резултати су представљени у Табели 2.2.

Табела 2.2. Анализа стабилности еквилибријума система (2.1.1).

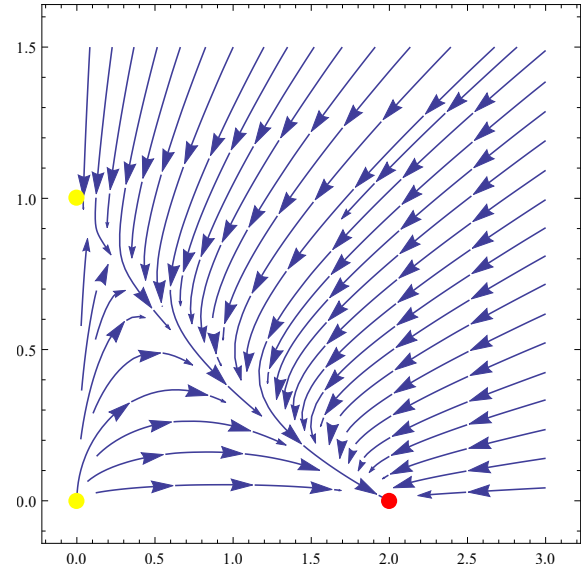
d_{12}	екв.	$d_{112} > 0$ и $d_{122} = 0$	$d_{112} < 0$ и $d_{122} = 0$
$d_{12} > 0$	E_0	Н (н. чвор)	немогућ случај
	E_1	Н (седло)	
	E_2	ПС	
$d_{12} < 0$	E_0	немогућ случај	Н (н. чвор)
	E_1		АС (с. чвор)
	E_2		Н

Постоје два квалитативно различита фазна портрета динамичког система (2.1.1), који су приказани на Слици 2.4. На Слици 2.4(а) и на Слици 2.4(б), еквилибријум E_0 је нестабилан чвор, док је на Слици 2.4(а) еквилибријум E_1 седло и еквилибријум E_2 полустабилан, а на Слици 2.4(б) еквилибријум E_1 је асимптотски стабилан и еквилибријум E_2 је нестабилан.

Из Табеле 2.2, као и Сlike 2.4, уочавамо да све трајекторије конвергирају еквилибријуму који је на једној од координатних оса. Према томе, резултат у оба случаја је изумирање једне од врста, што је сагласно са [15, 16].



(а) Случај $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} = 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(2 - x_1 - x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(4 - x_1 - 2x_2)$.



(б) Случај $d_{12} < 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} = 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(2 - x_1 - 2x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(1 - x_1 - x_2)$.

Слика 2.4. Фазни портрети за случајеве $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} = 0$ и $d_{12} < 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} = 0$.

III Случај $d_{112} = 0$ и $d_{122} \neq 0$

Према (2.1.2), услови $d_{112} = 0$ и $d_{122} \neq 0$ су еквивалентни са $b_1/a_{11} = b_2/a_{21}$ и $b_2/a_{22} \neq b_1/a_{12}$. Са становишта екологије, то значи да је ниво засићења врсте 1 једнак конкурентском прагу врсте 2 и да ниво засићења врсте 2 није једнак конкурентском прагу врсте 1.

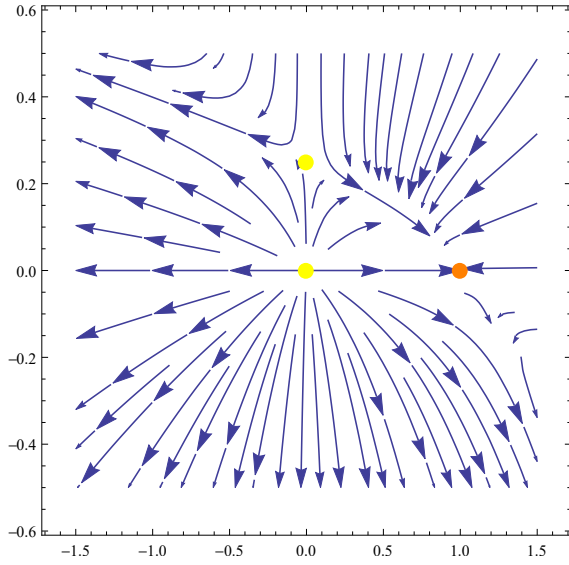
Слично као у претходном случају (случај $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} = 0$), из $d_{112} = 0$ закључујемо да се еквилибријум E_{12} поклапа са E_1 и да је $\text{sgn}(d_{122}) = -\text{sgn}(d_{12})$. Еквилибријуми E_0 и E_2 су хиперболички и њихова природа је иста као у случају $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} \neq 0$ (Табела 2.1), разматрајући само случајеве када је $\text{sgn}(d_{122}) = -\text{sgn}(d_{12})$. Еквилибријум E_1 је нехиперболички ($\lambda_2 = d_{112}/a_{11} = 0$) и његову стабилност ћемо одредити анализирањем фазних трајекторија у његовој околини. Тај поступак је сличан поступку који је представљен у претходном случају, па ћемо овде представити само крајње резултате.

Ако је $d_{12} < 0$, тада је еквилибријум E_1 нестабилан (може да се докаже помоћу нулклинација, слично као у претходном случају). Ако је $d_{12} > 0$, тада је еквилибријум E_1 полустабилан. Еквилибријум E_1 је асимптотски стабилан на $(0, +\infty)^2$. То се може доказати помоћу функције Љапунова $V(x_1, x_2) = x_1^{-a_{21}} x_2^{a_{11}}$. Еквилибријум E_1 је нестабилан на $(0, +\infty) \times (-\infty, 0)$. Да бисмо ово доказали, можемо користити нулклинације, као у претходном случају. Резултати су представљени у Табели 2.3.

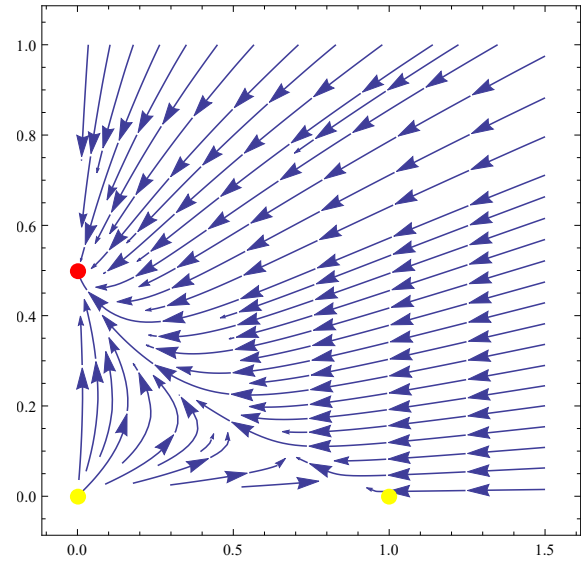
Табела 2.3. Анализа стабилности еквилибријума система (2.1.1).

d_{12}	екв.	$d_{112} = 0$ и $d_{122} > 0$	$d_{112} = 0$ и $d_{122} < 0$
$d_{12} > 0$	E_0	немогућ случај	Н (н. чвор)
	E_1		ПС
	E_2		Н (седло)
$d_{12} < 0$	E_0	Н (н. чвор)	немогућ случај
	E_1	Н	
	E_2	АС	

Према томе, у овом случају имамо два квалитативно различита фазна портрета динамичког система (2.1.1), који су приказани на Слици 2.5.



(а) Случај $d_{12} > 0$, $d_{112} = 0$, $d_{122} < 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - 2x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(1 - x_1 - 4x_2)$.



(б) Случај $d_{12} < 0$, $d_{112} = 0$, $d_{122} > 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - 4x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(1 - x_1 - 2x_2)$.

Слика 2.5. Фазни портрети за случајеве $d_{12} > 0$, $d_{112} = 0$, $d_{122} < 0$ и $d_{12} < 0$, $d_{112} = 0$, $d_{122} > 0$.

На Слици 2.5(а) и на Слици 2.5(б), еквилибријум E_0 је нестабилан чвор, док је на Слици 2.5(а) еквилибријум E_1 полустабилан и еквилибријум E_2 је седло, а на Слици 2.5(б) E_1 је нестабилан еквилибријум и еквилибријум E_2 је стабилан чвор.

Еколошка интерпретација резултата из Табеле 2.3 и са Слике 2.5 је изумирање једне од врста.

IV Случај $d_{122} = 0$ и $d_{112} = 0$

Услови $d_{122} = 0$ и $d_{112} = 0$ су еквивалентни са $b_2/a_{22} = b_1/a_{12}$ и $b_1/a_{11} = b_2/a_{21}$. У еколошком контексту, то значи да је ниво засићења врсте 2 једнак конкурентском прагу врсте 1 и да је ниво засићења врсте 1 једнак конкурентском прагу врсте 2.

Овај случај је немогућ, што може да се докаже на сличан начин као у случају $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} = 0$ (доказ се разликује за $d_{12} > 0$ или $d_{12} < 0$).

2.2.2 Случај $d_{12} = 0$

Услов $d_{12} = 0$ је еквивалентан са $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$, што са еколошког аспекта значи да је ефекат који произилази из конкурентности чланова исте врсте једнак ефекту који произилази из конкурентности чланова различитих врста. Другим речима, чланови исте врсте су у истој мери штетни за своју врсту као за конкурентну врсту.

Разликујемо два случаја, када бар једна од детерминанти d_{112} или d_{122} није једнака нули, као и када су обе детерминанте d_{112} и d_{122} једнаке нули.

I Случај $d_{122} \neq 0$ или $d_{112} \neq 0$

Услови $d_{122} \neq 0$ или $d_{112} \neq 0$ су еквивалентни са $b_2/a_{22} \neq b_1/a_{12}$ или $b_1/a_{11} \neq b_2/a_{21}$. Са еколошке стране, то значи да ниво засићења врсте 2 није једнак конкурентском прагу

врсте 1, или да ниво засићења врсте 1 није једнак конкурентском прагу врсте 2.

У овом случају, еквилибријум E_{12} не постоји, јер систем

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

нема решење. Према томе, систем (2.1.1) има три еквилибријума, E_0 , E_1 и E_2 . Ако су задовољени услови $d_{122} \neq 0$ и $d_{112} \neq 0$, онда су сви еквилибријуми хиперболички и закључци у вези са њиховом стабилношћу су дати у Табели 2.4.

Табела 2.4. Анализа стабилности еквилибријума система (2.1.1).

екв.	$d_{12} = 0$ $d_{112} > 0$ $d_{122} > 0$	$d_{12} = 0$ $d_{112} d_{122} < 0$	$d_{12} = 0$ $d_{112} d_{122} = 0$ $d_{112}^2 + d_{122}^2 \neq 0$	$d_{12} = 0$ $d_{112} < 0$ $d_{122} < 0$
E_0	Н (н. чвор)	немогући случајеви	немогући случајеви	Н (н. чвор)
E_1	Н (седло)			АС (с. чвор)
E_2	АС (с. чвор)			Н (седло)

Случајеви $d_{12} = 0$ и $d_{112} d_{122} < 0$ су немогући, као и случајеви $d_{12} = 0$, $d_{112} d_{122} = 0$ и $d_{112}^2 + d_{122}^2 \neq 0$. Докази су попут оних у случају $d_{112} \neq 0$ и $d_{122} = 0$, па их овде изостављамо.

Приметимо да у овом случају немамо квалитативно нових фазних портрета динамичког система (2.1.1), јер смо раније већ имали ове квалитативно исте фазне портрете. За $d_{12} = 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} > 0$, имамо квалитативно исте фазне портрете као за $d_{12} > 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} > 0$ и $d_{12} < 0$, $d_{112} > 0$, $d_{122} > 0$, који су дати у Табели 2.1. Даље, за $d_{12} = 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} < 0$, имамо квалитативно исте фазне портрете као за $d_{12} > 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} < 0$ и $d_{12} < 0$, $d_{112} < 0$, $d_{122} < 0$, који су такође дати у Табели 2.1.

Као последица тога, еколошка интерпретација резултата из Табеле 2.4 је изумирање једне од врста.

II Случај $d_{122} = 0$ и $d_{112} = 0$

Услови $d_{122} = 0$ и $d_{112} = 0$ су еквивалентни са $b_2/a_{22} = b_1/a_{12}$ и $b_1/a_{11} = b_2/a_{21}$. Са аспекта екологије, то значи да је ниво засићења врсте 2 једнак конкурентском прагу врсте 1 и да је ниво засићења врсте 1 једнак конкурентском прагу врсте 2.

Следи да систем (2.2.6) има бесконачно много решења $(x_1, x_2) = ((b_1 - a_{12}\alpha)/a_{11}, \alpha)$, где је $\alpha \geq 0$ и $b_1 \geq a_{12}\alpha$. На основу тога следи да систем (2.1.1) има бесконачно много еквилибријума, E_0 и $E^\alpha = ((b_1 - a_{12}\alpha)/a_{11}, \alpha)$, где је $0 \leq \alpha \leq b_1/a_{12}$. Приметимо да су еквилибријуми E^α неизоловани и да за $\alpha = 0$ добијамо да је $E^0 = E_1$, док за $\alpha = b_1/a_{12}$ добијамо $E^{b_1/a_{12}} = E^{b_2/a_{22}} = E_2$. Због тога ћемо те вредности за α искључити из даље дискусије.

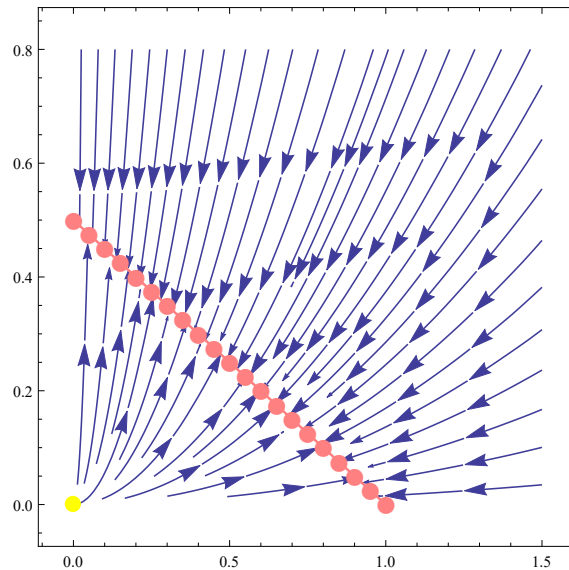
Јакобијева матрица израчуната у E^α је дата са

$$J(E^\alpha) = \begin{bmatrix} -(b_1 - a_{12}\alpha) & -\frac{(b_1 - a_{12}\alpha) a_{12}}{a_{11}} \\ -a_{21}\alpha & \frac{a_{11} (b_2 - 2a_{22}\alpha) - a_{21} (b_1 - a_{12}\alpha)}{a_{11}} \end{bmatrix}. \quad (2.2.7)$$

Из (2.2.7), коришћењем $d_{112} = 0$ и $d_{12} = 0$, добијамо

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \det(J(E^\alpha)) = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \text{tr}(J(E^\alpha)) = a_{12}\alpha - a_{22}\alpha - b_1, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

одакле следи $\lambda_2 = -(b_1 - a_{12}\alpha) - a_{22}\alpha$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 = 0$, јер је $(b_1 - a_{12}\alpha)/a_{11} = x_1$, $x_1 > 0$ и $\alpha = x_2$, $x_2 > 0$. Према томе, E^α је нехиперболички еквилибријум за свако $0 < \alpha < b_1/a_{12}$. Еквилибријум E^α је нехиперболички за свако $0 \leq \alpha \leq b_1/a_{12}$, односно свака тачка са праве $x_2 = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12}$ је еквилибријум. Еквилибријум E_0 је хиперболички и то нестабилан чвор, као у претходним случајевима. Фазни портрет је приказан на Слици 2.6.



Слика 2.6. Случај $d_{12} = d_{112} = d_{122} = 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - 2x_2)$, $\dot{x}_2 = x_2(2 - 2x_1 - 4x_2)$.

Еквилибријум E_0 је нестабилан, док су еквилибријуми E^α , где је $0 \leq \alpha \leq b_1/a_{12}$, неизоловани. Према томе, ово је још један пример са коегзистирајућим врстама.

У [32] се истиче да је систем рачунарске алгебре *Maple* са успехом од 97.5% успео да нађе аналитичка решења диференцијалних једначина из Камкеове књиге [31], која је иницијално садржала колекцију од 1345 линеарних и нелинеарних диференцијалних једначина. Иако у општем случају не постоји аналитичко решење дводимензионалних Лотка–Волтериних конкуритивних динамичких система, за неке вредности параметара је ипак могуће наћи аналитичко решење [1]. Мотивисани успехом *Maple*-а са решавањем диференцијалних једначина из Камкеове књиге, покушали смо да за све примере из Секције 2.2 нађемо аналитичко решење користећи *Maple*. Као што је било очекивано, *Maple* није успео да нађе аналитичко решење у затвореном облику, али је у четири случаја *Maple* пронашао решење у имплицитном облику изражено помоћу функције *RoothOf*, а једно од њих је било изражено и помоћу специјалних функција. Интересантно је приметити да два случаја за која је *Maple* нашао решење нису разматрана у раду [1].

2.3 Потребни и довољни услови за стабилност еквилибријума

У Секцији 2.2 смо показали да има девет квалитативно различитих фазних портрета динамичког система (2.1.1), који су приказани на Сликама 2.1-2.6, када разматрамо стабилност еквилибријума система (2.1.1) на њиховим пуним околима. Знаци детерминанти d_{12} , d_{112} и d_{122} као и еквилибријуми динамичког система (2.1.1) су приказани у Табели 2.5. Након анализе Слика 2.1-2.6 и података из Табеле 2.5, закључујемо да фазни портрети под редним бројевима 2, 3 и 6 који су приказани на Сликама 2.4(а), 2.1(б) и 2.5(б) имају квалитативно иста динамичка својства на $[0, +\infty)^2$, односно да је на

Табела 2.5. Анализа стабилности еквилибријума система (2.1.1).

Редни бр.	d_{12}	d_{112}	d_{122}	E_0	E_1	E_2	E_{12}	E_α
1	$d_{12} > 0$	$d_{112} > 0$	$d_{122} < 0$	Н	Н	Н	АС	/
2	$d_{12} > 0$	$d_{112} > 0$	$d_{122} = 0$	Н	Н	ПС	/	/
3	$d_{12} > 0$	$d_{112} > 0$	$d_{122} > 0$	Н	Н	АС	/	/
4	$d_{12} > 0$	$d_{112} = 0$	$d_{122} < 0$	Н	ПС	Н	/	/
5	$d_{12} > 0$	$d_{112} < 0$	$d_{122} < 0$	Н	АС	Н	/	/
6	$d_{12} < 0$	$d_{112} = 0$	$d_{122} > 0$	Н	Н	АС	/	/
7	$d_{12} < 0$	$d_{112} < 0$	$d_{122} = 0$	Н	АС	Н	/	/
8	$d_{12} < 0$	$d_{112} < 0$	$d_{122} > 0$	Н	АС	АС	Н	/
9	$d_{12} = 0$	$d_{112} = 0$	$d_{122} = 0$	Н	НИ	НИ	/	НИ

$[0, +\infty)^2$ еквилибријум E_1 нестабилан и да је еквилибријум E_2 асимптотски стабилан.

Штавише, фазни портрети под редним бројевима 4, 5 и 7 који су приказани на Сликама 2.5(а), 2.2(а) и 2.4(б) имају квалитативно иста динамичка својства на $[0, +\infty)^2$, односно еквилибријум E_1 је асимптотски стабилан и еквилибријум E_2 је нестабилан.

Свеукупно, имамо девет квалитативно различитих фазних портрета система (2.1.1) када разматрамо стабилност еквилибријума система (2.1.1) на њиховим пуним околинама, док имамо пет квалитативно различитих фазних портрета када анализирамо стабилност еквилибријума на $[0, +\infty)^2$. Истичемо да је анализа стабилности еквилибријума система (2.1.1) на њиховим пуним околинама интересантна са математичког аспекта, иако јој недостаје одговарајућа еколошка интерпретација, јер густина врсте не може бити негативна. На основу резултата из Секције 2.2, важе следеће теореме.

Теорема 2.3.1 [13] *Еквилибријум $E_1(b_1/a_{11}, 0)$ система (2.1.1) је асимптотски стабилан на $[0, +\infty)^2$ ако и само ако је задовољен један од следећих услова:*

- (1) $d_{112} < 0$ и $d_{122} < 0$ (без обзира на $\text{sgn}(d_{12})$);
- (2) $d_{12} < 0$ и $d_{112} < 0$ и $d_{122} = 0$;
- (3) $d_{12} > 0$ и $d_{112} = 0$ и $d_{122} < 0$;
- (4) $d_{12} < 0$ и $d_{112} < 0$ и $d_{122} > 0$.

Теорема 2.3.1 је проширење Теореме 2.1. из [62] за $n = 2$, која тврди (уз другачију нотацију у односу на ону која је коришћена овде) да ако важи $d_{122} < 0$ и $d_{112} < 0$, онда је еквилибријум $E_1(b_1/a_{11}, 0)$ асимптотски стабилан на $(0, +\infty)^2$.

Еколошка интерпретација Теореме 2.3.1 је доминација врсте 1 што резултује изумирањем врсте 2 [42]. Следећа теорема је слична Теореме 2.3.1 и важи за еквилибријум E_2 .

Теорема 2.3.2 [13] *Еквилибријум $E_2(0, b_2/a_{22})$ система (2.1.1) је асимптотски стабилан на $[0, +\infty)^2$ ако и само ако је задовољен један од следећих услова:*

- (1) $d_{112} > 0$ и $d_{122} > 0$ (без обзира на $\text{sgn}(d_{12})$);
- (2) $d_{12} > 0$ и $d_{112} > 0$ и $d_{122} = 0$;
- (3) $d_{12} < 0$ и $d_{112} = 0$ и $d_{122} > 0$;
- (4) $d_{12} < 0$ и $d_{112} < 0$ и $d_{122} > 0$.

Еколошка интерпретација Теореме 2.3.2 је доминација врсте 2 што резултује изумирањем врсте 1 [42]. Као последице Теореме 2.3.1 и Теореме 2.3.2, важе следеће три теореме.

Теорема 2.3.3 [13] *Еквилибријум $E_1(b_1/a_{11}, 0)$ система (2.1.1) је нестабилан ако и само ако је задовољен један од услова (1), (2), (3) из Теореме 2.3.2, или су задовољени услови $d_{12} > 0$ и $d_{112} > 0$ и $d_{122} < 0$.*

Теорема 2.3.4 [13] *Еквилибријум $E_2(0, b_2/a_{22})$ система (2.1.1) је нестабилан ако и само ако је задовољен један од услова (1), (2), (3) из Теореме 2.3.1, или су задовољени услови $d_{12} > 0$ и $d_{112} > 0$ и $d_{122} < 0$.*

Теорема 2.3.5 [13] *Динамички систем (2.1.1) нема еквилибријуме на $(0, +\infty)^2$ ако и само ако је задовољен један од услова (1), (2), (3) из Теореме 2.3.1 или је задовољен један од услова (1), (2), (3) из Теореме 2.3.2.*

Теорема 2.3.5 је проширење Леме 7.2. из [62] за $n = 2$, која тврди (уз другачију нотацију у односу на ону која је коришћена овде) да ако систем (2.1.1) задовољава неједнакости $d_{122} < 0$ и $d_{112} < 0$, онда он нема еквилибријуме на $(0, +\infty)^2$. Следећа теорема разматра стабилност еквилибријума E_{12} .

Теорема 2.3.6 [13] *Еквилибријум $E_{12}(-d_{122}/d_{12}, d_{112}/d_{12})$ система (2.1.1) је:*

- (1) *асимптотски стабилан на $(0, +\infty)^2$, ако и само ако је $d_{12} > 0$ и $d_{112} > 0$ и $d_{122} < 0$;*
- (2) *нестабилан, ако и само ако је $d_{12} < 0$ и $d_{112} < 0$ и $d_{122} > 0$.*

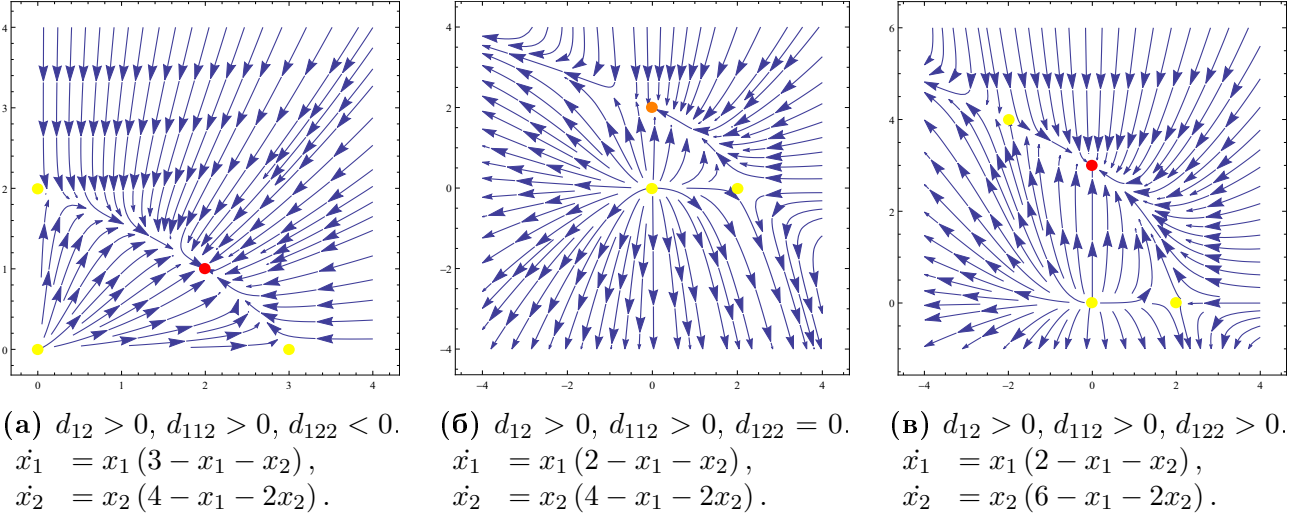
Докази сви наведених теорема могу се наћи у дискусијама у Секцији 2.2 и из тог разлога су овде изостављени. Подсећамо да су у [41] разматрани само они случајеви када су одговарајуће детерминанте различите од нуле, док су овде посматрани и комплементарни случајеви.

Еколошка интерпретација Теореме 2.3.6(1) је коегзистенција између две врсте [42], док је резултат под (2) изумирање једне од врста, јер је овај случај исти као случај (4) у Теорему 2.3.1 и Теорему 2.3.2.

2.4 Бифуркациона анализа

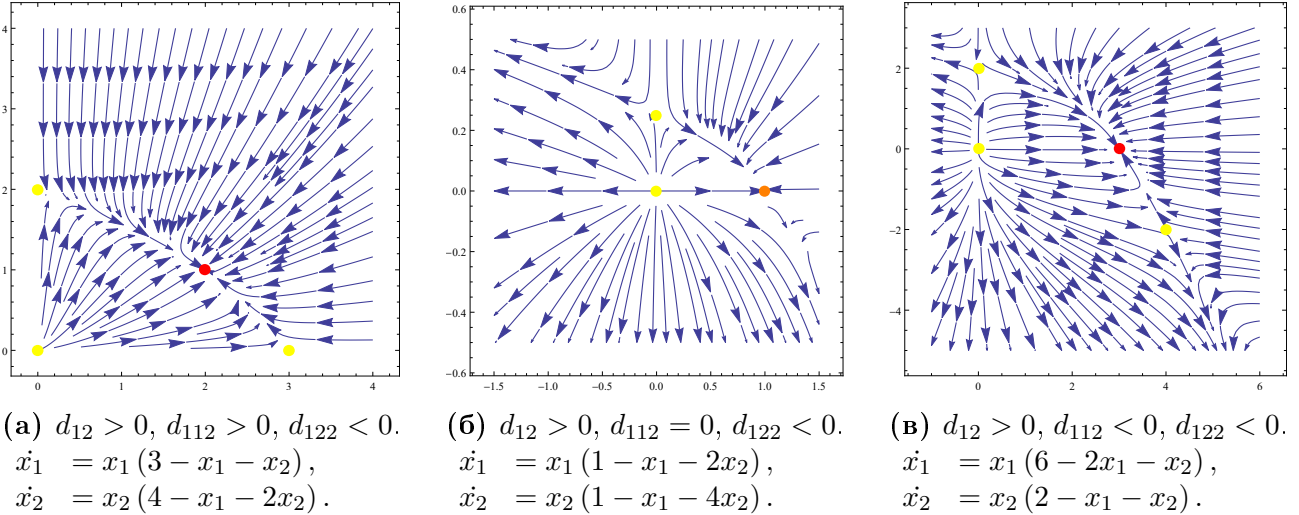
Као последица Секције 2.2, постоји пет квалитативно различитих фазних портрета система (2.1.1) на $[0, +\infty)^2$, који се налазе у Табели 2.5 под редним бројевима 1, 2, 4, 8 и 9. Они су већ приказани на Сликама 2.1(а), 2.4(а), 2.5(а), 2.2(б) и 2.6, редом. Истичемо да је анализа стабилности еквилибријума система (2.1.1) на $\mathbb{R}^2$ интересантна са математичког аспекта, иако јој недостаје одговарајућа еколошка интерпретација. У том случају се могу јавити четири транскритичне бифуркације, које су приказане на Сликама 2.7-2.10.

Поредећи случајеве 1, 2 и 3 из Табеле 2.5 али са стабилношћу еквилибријума анализираном на $\mathbb{R}^2$ и посматрајући Сliku 2.7, приметимо да су за $d_{122} < 0$ (случај 1, Слика 2.7(а)) сви еквилибријуми хиперболички и да су E_0 , E_1 и E_2 нестабилни, док је E_{12} асимптотски стабилан. За $d_{122} = 0$ (случај 2, Слика 2.7(б)), нехиперболички еквилибријум E_2 се спаја са E_{12} и постаје полустабилан, док стабилност E_0 и E_1 остаје непромењена. За $d_{122} > 0$ (случај 3, Слика 2.7(в)), поново се појављује E_{12} , али овог пута као нестабилан еквилибријум у другом квадранту, док је сада E_2 асимптотски стабилан, односно E_2 је разменио стабилност са E_{12} за $d_{122} = 0$, док је стабилност E_0 и E_1 остала непромењена.



Слика 2.7. Транскритична бифуркација услед спајања E_2 са E_{12} за $d_{122} = 0$ и размене њихове стабилности.

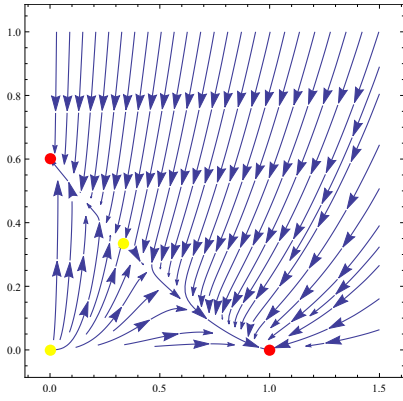
Примећујемо сличну ситуацију када поредимо случајеве 1, 4 и 5 из Табеле 2.5, као и посматрајући Сliku 2.8, опет анализирањем система (2.1.1) на $\mathbb{R}^2$. Прецизније, еквилибријум E_1 је разменио стабилност са E_{12} (који се транслирао из првог квадранта у четврти квадрант) за $d_{112} = 0$.



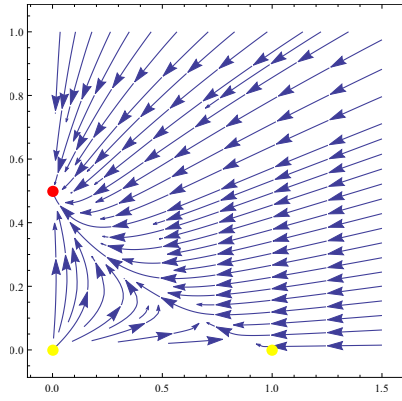
Слика 2.8. Транскритична бифуркација услед спајања E_1 са E_{12} за $d_{112} = 0$ и размене њихове стабилности.

Ако поредимо случајеве 8 и 6 из Табеле 2.5 и случај $d_{12} < 0, d_{112} > 0$ и $d_{122} > 0$ из Табеле 2.1 (опет на $\mathbb{R}^2$), као и посматрајући Сliku 2.9, можемо да уочимо да је еквилибријум E_1 разменио стабилност са еквилибријумом E_{12} (који се транслирао из првог квадранта у четврти квадрант) за $d_{112} = 0$ ако важи услов $a_{11}x_1 + a_{22}x_2 > 0$ ($a_{22}d_{112} < a_{11}d_{122}$).

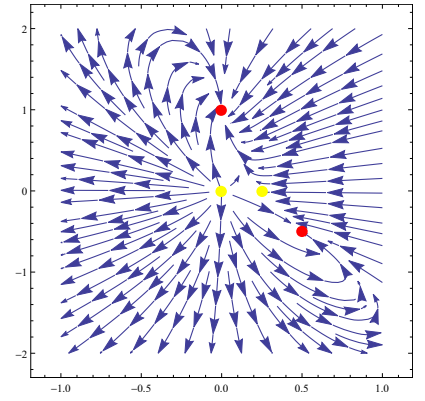
Коначно, када упоредимо случајеве 8 и 7 из Табеле 2.5 и случај $d_{12} < 0, d_{112} < 0, d_{122} < 0$ из Табеле 2.1, као и посматрајући Сliku 2.10, добијамо да је еквилибријум E_2 разменио стабилност са еквилибријумом E_{12} (који се транслирао из првог квадранта у други квадрант) за $d_{122} = 0$, поново под условом $a_{11}x_1 + a_{22}x_2 > 0$.



(а) $d_{12} < 0, d_{112} < 0, d_{122} > 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - 2x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(3 - 4x_1 - 5x_2)$.

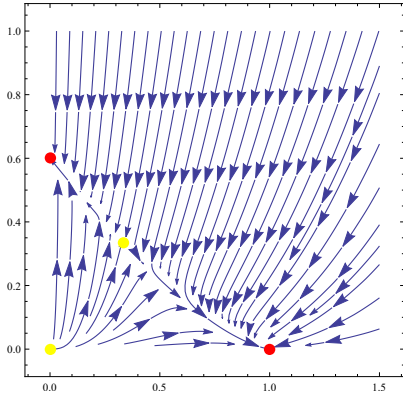


(б) $d_{12} < 0, d_{112} = 0, d_{122} > 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - 4x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(1 - x_1 - 2x_2)$.

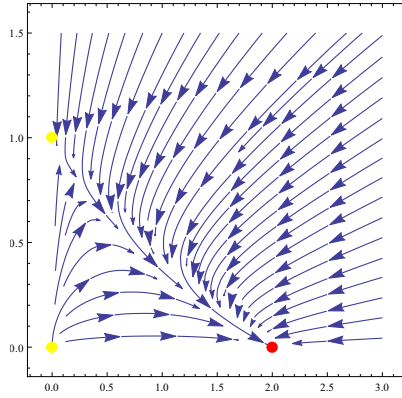


(в) $d_{12} < 0, d_{112} > 0, d_{122} > 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(1 - 4x_1 - 2x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(1 - 3x_1 - x_2)$.

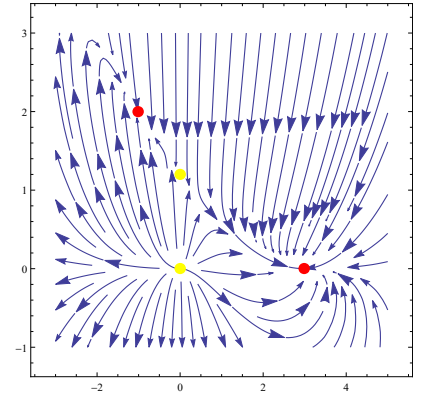
Слика 2.9. Транскритична бифуркација услед спајања E_1 са E_{12} за $(a_{22}d_{112} < a_{11}d_{122})$ и размене њихове стабилности.



(а) $d_{12} < 0, d_{112} < 0, d_{122} > 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - 2x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(3 - 4x_1 - 5x_2)$.



(б) $d_{12} < 0, d_{112} < 0, d_{122} = 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(2 - x_1 - 2x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(1 - x_1 - x_2)$.



(в) $d_{12} < 0, d_{112} < 0, d_{122} < 0$.
 $\dot{x}_1 = x_1(3 - x_1 - 2x_2)$,
 $\dot{x}_2 = x_2(6 - 4x_1 - 5x_2)$.

Слика 2.10. Транскритична бифуркација услед спајања еквилибријума E_2 са еквилибријумом E_{12} за $(a_{22}d_{112} < a_{11}d_{122})$ и размене њихове стабилности.

Глава 3

Стабилност еквилибријума n-димензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система

У овој глави је анализирана стабилност еквилибријума n -димензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система на $[0, +\infty)^n$, под претпоставком да главна детерминанта тог система, њени дијагонални минори и минори k -тог реда проширене матрице тог система, $2 \leq k \leq n$, нису једнаки нули. Те претпоставке омогућавају да се стабилност еквилибријума посматраног n -димензионалног динамичког система у већини случајева испитује применом Теореме 1.0.4. Прво су одређени еквилибријуми одговарајућег тродимензионалног динамичког система и испитана је њихова стабилност. Ти резултати су приказани на Табелама 3.1 и 3.2.

У Глави 2 је испитана стабилност еквилибријума одговарајућег дводимензионалног случаја $x_i \geq 0$, $i \in \{1, 2\}$ и за све могуће знакове (позитивне, нула, негативне) главне детерминанте и детерминанти проширене матрице тог система, користећи нотацију која се разликује од оне у [41] и која је коришћена и уопштена у овој глави. Погодним уопштењем нотације коришћене у дводимензионалном случају у Глави 2, омогућено је једноставније извођење координата еквилибријума и стабилност n -димензионалног аутономног компетитивног Лотка–Волтериног динамичког система, прецизније, испитана је стабилност еквилибријума који се налазе на координатним осама, или у унутрашњостима равни. Ти резултати су приказани у Теоремама 3.2.2, 3.2.3 и 3.2.4. Подсећамо да је нотација у Табелама 3.1 и 3.2 иста као у табелама у Глави 2: Н означава нестабилан еквилибријум (што је у овом поглављу само седло) и АС представља асимптотски стабилан еквилибријум (стабилан чвор).

Резултати ове главе базирају се на резултатима рада [14].

3.1 Стабилност еквилибријума тродимензионалног динамичког система

Тродимензионални аутономни компетитивни Лотка–Волтерин динамички систем је

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 (b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_2 (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3 (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

где су $x_i \geq 0$, $a_{ij} > 0$ за све $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $b_i > 0$ за свако $i \in \{1, 2, 3\}$. Прво ћемо увести следећу нотацију, која је уопштење нотације из Главе 2 у три димензије. Означимо са d_{123} главну детерминанту матрице система (3.1.1), док ћемо за дијагоналне миноре другог реда матрице система (3.1.1) користити следећу нотацију

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \quad (3.1.2)$$

Истичемо да број различитих индекса детерминанте d_{ij} из (3.1.2) представља ред те детерминанте и одређује елементе на њеној главној дијагонали. Индекси детерминанте d_{ij} указују да је у питању детерминанта другог реда чији су елементи на главној дијагонали a_{ii} и a_{jj} , где је $1 \leq i < j \leq 3$. Број свих дијагоналних минора другог реда матрице система (3.1.1) једнак је броју уређених парова чији су елементи у растућем поретку из скупа $\{1, 2, 3\}$, што је једнако три.

Даље, користимо следећу нотацију за миноре другог реда проширене матрице система (3.1.1)

$$d_{ijj} = \begin{vmatrix} a_{ij} & b_i \\ a_{jj} & b_j \end{vmatrix} \text{ и } d_{iij} = \begin{vmatrix} a_{ii} & b_i \\ a_{ji} & b_j \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_i & a_{ii} \\ b_j & a_{ji} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i < j \leq 3. \quad (3.1.3)$$

Број различитих индекса детерминанти из (3.1.3) одређује ред ових детерминанти и елементе на њиховим главним дијагоналама. Конкретно, индекси детерминанте d_{ijj} имплицирају да је у питању детерминанта другог реда и да су a_{ij} и b_j елементи на њеној главној дијагонали, док је детерминанта d_{iij} такође другог реда чији су елементи на главној дијагонали a_{ii} и b_j , где је $1 \leq i < j \leq 3$. Број свих минора другог реда проширене матрице система (3.1.1) једнак је шест и то је управо број уређених тројки елемената у неоппадајућем поретку из скупа $\{1, 2, 3\}$, при чему се тачно један елемент из скупа $\{1, 2, 3\}$ појављује тачно два пута у произвољној уређеној тројци.

Коначно, ако применимо исту правилност као у (3.1.3) за миноре трећег реда проширене матрице система (3.1.1), имамо

$$\begin{aligned} d_{12233} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_{11223} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}, \\ d_{11233} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Из (3.1.4) можемо да приметимо да постоје три минора трећег реда проширене матрице система (3.1.1), што је управо број уређених петорки елемената у неоппадајућем поретку из скупа $\{1, 2, 3\}$, при чему се тачно два елемента из скупа $\{1, 2, 3\}$ појављују тачно два пута у произвољној уређеној петорци.

Претпостављамо да су главна детерминанта d_{123} матрице система (3.1.1) и сви њени дијагонални минори d_{ij} , $1 \leq i < j \leq 3$, различити од нуле. Такође претпостављамо да су сви минори другог и трећег реда проширене матрице система (3.1.1) различити од нуле. Те претпоставке омогућавају да се стабилност еквилибријума система (3.1.1) у већини случајева испитује применом Теореме 1.0.4, која омогућава тополошку еквиваленцију између нелинеарног динамичког система и његове линеаризације у околини хиперболичког еквилибријума. На основу (3.1.2), услов $d_{ij} \neq 0$ је еквивалентан са $a_{ii}a_{jj} \neq a_{ij}a_{ji}$, што са еколошког аспекта значи да ефекти који произилазе из компетитивности између чланова истих врста нису једнаки ефектима који произилазе из компетитивности између чланова различитих врста. Слично, услов $d_{123} \neq 0$ је

еквивалентан са $a_{22}d_{13} + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) \neq 0$, што са еколошког становишта такође значи да ефекти који произилазе из компетитивности између чланова истих врста нису једнаки ефектима који произилазе из компетитивности између чланова различитих врста, али такође и да ефекат између врста 1 и 2, није исти као ефекат између врста 2 и 3, нити је једнак ефекту између врста 1 и 3. Штавише, услови $d_{ii} \neq 0$ и $d_{ij} \neq 0$, за $1 \leq i < j \leq 3$, су еквивалентни са $b_i/a_{ii} \neq b_j/a_{ji}$ и $b_j/a_{jj} \neq b_i/a_{ij}$. Из еколошког угла, то значи да ниво засићења врсте i није једнак конкурентском прагу врсте j и да ниво засићења врсте j није једнак конкурентском прагу врсте i . Подсећамо да ћемо термин конкурентски праг врсте i , где је $i \in \{1, 2, 3\}$, користити за довољан број чланова врсте j , где је $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$, да би се зауставио раст врсте i . Коначно, услов $d_{1223} = a_{12}d_{23} + a_{13}d_{22} + b_1d_{23} \neq 0$, значи да ефекти који произилазе из компетитивности између чланова истих врста нису једнаки ефектима који произилазе из компетитивности између чланова различитих врста, као и да ниво засићења врсте 3 није једнак конкурентском прагу врсте 2 и да ниво засићења врсте 2 није једнак конкурентском прагу врсте 3. Услови $d_{1123} \neq 0$ и $d_{1122} \neq 0$ имају слично еколошко значење.

Уведимо нотацију $d_i := a_{ii}$, за $i \in \{1, 2, 3\}$. Имамо осам еквилибријума система (3.1.1), који су означени са

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, 0), \\ E_i &= \begin{cases} \frac{b_i}{d_i}, & i\text{-та координата,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ E_{ij} &= \begin{cases} -\frac{d_{ijj}}{d_{ij}}, & i\text{-та координата,} \\ \frac{d_{iij}}{d_{ij}}, & j\text{-та координата,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ E_{123} &= \left(\frac{d_{1223}}{d_{123}}, \frac{-d_{11233}}{d_{123}}, \frac{d_{11223}}{d_{123}} \right), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

за $1 \leq i < j \leq 3$. Истичемо да индекси еквилибријума E_i , E_{ij} и E_{123} за $1 \leq i < j \leq 3$ указују на позицију њихових не-нула координата као и на имениоце тих координата: d_i , d_{ij} и d_{123} , редом. Ако су задовољени следећи услови

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(d_{123}) &= \operatorname{sgn}(d_{1223}) = -\operatorname{sgn}(d_{11233}) = \operatorname{sgn}(d_{11223}), \\ \operatorname{sgn}(d_{ij}) &= \operatorname{sgn}(d_{iij}) = -\operatorname{sgn}(d_{ijj}), \quad 1 \leq i < j \leq 3, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

онда су сви еквилибријуми у (3.1.5) различити и налазе се у $[0, +\infty)^3$. Штавише, еквилибријуми E_0 , E_i и E_{ij} , $1 \leq i < j \leq 3$, су хиперболички, јер сопствене вредности Јакобијеве матрице у сваком од ових еквилибријума имају не-нула реалне делове, у шта ћемо се ускоро уверити. С обзиром на то, стабилност тих еквилибријума можемо дискутовати применом Теореме 1.0.4. Надаље претпостављамо да су испуњени услови (3.1.6), јер тада имамо најинтересантнији случај са еколошког аспекта.

Еквилибријум E_0 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_0 су $\lambda_i = b_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, на основу чега закључујемо да је E_0 нестабилан чвор (нестабилан еквилибријум), без обзира на знакове свих детерминанти које се појављују у овом раду.

Еквилибријум E_i . Нека је фиксирано $i \in \{1, 2, 3\}$. Сопствене вредности Јакобијеве

матрице у E_i су

$$\lambda_k = \begin{cases} \frac{-d_{kii}}{d_i}, & k < i, \\ -b_i, & k = i, \\ \frac{d_{iik}}{d_i}, & k > i, \end{cases} \quad (3.1.7)$$

где је $1 \leq k \leq 3$. Из (3.1.6) знамо да је $\operatorname{sgn}(-d_{kii}) = \operatorname{sgn}(d_{ki})$ за $k < i$ и $\operatorname{sgn}(d_{iik}) = \operatorname{sgn}(d_{ik})$ за $i < k$. На основу тога, закључујемо да

E_i је ас. стабилан (с. чвор) ако је $d_{ki} < 0$ за свако $k < i$ и $d_{ik} < 0$ за свако $k > i$,

E_i је нестабилан (седло) ако је $d_{ki} > 0$ за бар једно $k < i$, или $d_{ik} > 0$ за бар једно $k > i$,

где је $1 \leq k \leq 3$. Ови резултати су представљени у Табели 3.1.

Табела 3.1. Анализа стабилности еквилибријума E_i , $1 \leq i \leq 3$, система (3.1.1).

d_{ij}			еквилибријуми		
d_{12}	d_{13}	d_{23}	E_1	E_2	E_3
$d_{12} > 0$	$d_{13} > 0$	$d_{23} > 0$	Н	Н	Н
$d_{12} > 0$	$d_{13} < 0$	$d_{23} > 0$	Н	Н	Н
$d_{12} > 0$	$d_{13} > 0$	$d_{23} < 0$	Н	Н	Н
$d_{12} > 0$	$d_{13} < 0$	$d_{23} < 0$	Н	Н	АС
$d_{12} < 0$	$d_{13} > 0$	$d_{23} > 0$	Н	Н	Н
$d_{12} < 0$	$d_{13} < 0$	$d_{23} > 0$	АС	Н	Н
$d_{12} < 0$	$d_{13} > 0$	$d_{23} < 0$	Н	АС	Н
$d_{12} < 0$	$d_{13} < 0$	$d_{23} < 0$	АС	АС	АС

Еквилибријуми E_{ij} . Нека су фиксирани $1 \leq i < j \leq 3$. Ако не-нула координате еквилибријума E_{ij} означимо са $x_i := -d_{ijj}/d_{ij}$ и $x_j := d_{iij}/d_{ij}$, Јакобијева детерминанта у E_{ij} је, након примене Лапласовог развоја по k -тој врсти, $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$ управо

$$\begin{aligned} \det(J(E_{ij})) &= \lambda_k \begin{vmatrix} b_i - 2a_{ii}x_i - a_{ij}x_j & -a_{ij}x_i \\ -a_{ji}x_j & b_j - a_{ji}x_i - 2a_{jj}x_j \end{vmatrix} \\ &= \lambda_k (-1)^2 x_i x_j \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \lambda_k x_i x_j d_{ij}, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

јер је $b_i - 2a_{ii}x_i - a_{ij}x_j = -a_{ii}x_i$ и $b_j - a_{ji}x_i - 2a_{jj}x_j = -a_{jj}x_j$. У (3.1.8), $\lambda_k = b_k - a_{ki}x_i - a_{kj}x_j$, за $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$, прецизније

$$\lambda_k = \begin{cases} \frac{d_{12233}}{d_{23}}, & k = 1, \\ \frac{-d_{11233}}{d_{13}}, & k = 2, \\ \frac{d_{11223}}{d_{12}}, & k = 3. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Даље

$$\begin{aligned}\lambda_i \lambda_j &= x_i x_j d_{ij} = \frac{-d_{ijj}}{d_{ij}} \cdot \frac{d_{iij}}{d_{ij}} d_{ij}, \\ \lambda_i + \lambda_j &= -(x_i d_i + x_j d_j) = -\left(\frac{-d_{ijj}}{d_{ij}} d_i + \frac{d_{iij}}{d_{ij}} d_j\right), \\ \lambda_{i,j} &= \frac{-(x_i d_i + x_j d_j) \pm \sqrt{(x_i d_i + x_j d_j)^2 - 4x_i x_j d_{ij}}}{2}.\end{aligned}\tag{3.1.10}$$

Наглашавамо да су сопствене вредности λ_i и λ_j у (3.1.10) добијене на исти начин као у дводимензионалном случају представљеном у Глави 2. Из (3.1.6) следи да је $\lambda_i + \lambda_j < 0$, за све $1 \leq i < j \leq 3$. Поново, на основу (3.1.6) и (3.1.9) следи

$$\begin{aligned}E_{ij} \text{ је ас. стабилан (с. чвор) ако је } d_{ij} > 0 \text{ и } d_{123} < 0, \\ E_{ij} \text{ је нестабилан (седло) ако је } d_{ij} < 0 \text{ или } d_{123} > 0.\end{aligned}\tag{3.1.11}$$

Ови резултати су представљени у Табели 3.2.

Табела 3.2. Анализа стабилности еквилибријума E_{ij} , $1 \leq i < j \leq 3$, система (3.1.1).

d_{ij}			E_{12}	E_{13}	E_{23}	E_{12}	E_{13}	E_{23}
d_{12}	d_{13}	d_{23}	$d_{123} > 0$			$d_{123} < 0$		
$d_{12} > 0$	$d_{13} > 0$	$d_{23} > 0$	Н	Н	Н	АС	АС	АС
$d_{12} > 0$	$d_{13} < 0$	$d_{23} > 0$	Н	Н	Н	АС	Н	АС
$d_{12} > 0$	$d_{13} > 0$	$d_{23} < 0$	Н	Н	Н	АС	АС	Н
$d_{12} > 0$	$d_{13} < 0$	$d_{23} < 0$	Н	Н	Н	АС	Н	Н
$d_{12} < 0$	$d_{13} > 0$	$d_{23} > 0$	Н	Н	Н	Н	АС	АС
$d_{12} < 0$	$d_{13} < 0$	$d_{23} > 0$	Н	Н	Н	Н	Н	АС
$d_{12} < 0$	$d_{13} > 0$	$d_{23} < 0$	Н	Н	Н	Н	АС	Н
$d_{12} < 0$	$d_{13} < 0$	$d_{23} < 0$	Н	Н	Н	Н	Н	Н

Еквилибријум E_{123} . Ако су $x_1 := d_{12233}/d_{123}$, $x_2 := -d_{11233}/d_{123}$ и $x_3 := d_{11223}/d_{123}$ координате еквилибријума E_{123} , тада је детерминанта Јакобијеве матрице у E_{123} управо

$$\det(J(E_{123})) = \begin{vmatrix} -a_{11}x_1 & -a_{12}x_1 & -a_{13}x_1 \\ -a_{21}x_2 & -a_{22}x_2 & -a_{23}x_2 \\ -a_{31}x_3 & -a_{32}x_3 & -a_{33}x_3 \end{vmatrix} = (-1)^3 x_1 x_2 x_3 d_{123},\tag{3.1.12}$$

јер су елементи на главној дијагонали детерминанте $\det(J(E_{123}))$

$$\begin{aligned}b_1 - 2a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 &= -a_{11}x_1, \\ b_2 - a_{21}x_1 - 2a_{22}x_2 - a_{23}x_3 &= -a_{22}x_2, \\ b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - 2a_{33}x_3 &= -a_{33}x_3,\end{aligned}\tag{3.1.13}$$

редом. Следи

$$\begin{aligned}\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= \det(J(E_{123})) = -x_1 x_2 x_3 d_{123}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \text{tr}(J(E_{123})) = -(x_1 d_1 + x_2 d_2 + x_3 d_3).\end{aligned}\tag{3.1.14}$$

Веома је тешко у општем случају одредити стабилност еквилибријума E_{123} , па ћемо ми то одредити за неке рестрикције параметара a_{ij} , за $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Под претпоставкама $d_{12} > 0$, $d_{13} > 0$, $d_{23} > 0$ и $d_{123} > 0$, одредимо довољан услов

под којим ће E_{123} бити асимптотски стабилан. У те сврхе, користићемо критеријум Рут¹–Хурвица² [20], у следећој форми.

Теорема 3.1.1 (*Рут–Хурвицов тест [6, 8, 9, 63]*) Сви корени полинома $P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ имају негативне реалне делове ако и само ако је $a > 0$, $c > 0$ и $ab - c > 0$.

Хоћемо да применимо Теорему 3.1.1 на карактеристичан полином $P_{123}(\lambda)$ матрице $J(E_{123})$, односно на следећи полином

$$\begin{aligned} P_{123}(\lambda) &= \lambda^3 + (d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3)\lambda^2 \\ &+ (d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_1x_3 + d_{23}x_2x_3)\lambda + d_{123}x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Како је $d_{12} > 0$, $d_{13} > 0$, $d_{23} > 0$ и $d_{123} > 0$, сви коефицијенти полинома $P_{123}(\lambda)$ су позитивни. Према Теорему 3.1.1, E_{123} је асимптотски стабилан ако и само ако је следећи услов задовољен

$$(d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3) \cdot (d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_1x_3 + d_{23}x_2x_3) > d_{123}x_1x_2x_3. \quad (3.1.16)$$

Из (3.1.16), следи

$$\begin{aligned} &(d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3) \cdot (d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_1x_3 + d_{23}x_2x_3) - d_{123}x_1x_2x_3 \\ &= x_1x_2x_3 (d_1d_{23} + d_2d_{13} + d_3d_{12} - d_{123}) + x_1x_2d_{12}(d_1x_1 + d_2x_2) \\ &+ x_1x_3d_{13}(d_1x_1 + d_3x_3) + x_2x_3d_{23}(d_2x_2 + d_3x_3), \end{aligned}$$

одакле закључујемо да је E_{123} асимптотски стабилан ако је

$$d_1d_{23} + d_2d_{13} + d_3d_{12} - d_{123} > 0. \quad (3.1.17)$$

С обзиром на то да је

$$d_1d_{23} + d_2d_{13} + d_3d_{12} - d_{123} = 2d_1d_2d_3 - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{32}a_{21}, \quad (3.1.18)$$

услов (3.1.17) је задовољен ако важи $d_1d_2d_3 > a_{12}a_{23}a_{31}$ и $d_1d_2d_3 > a_{13}a_{32}a_{21}$.

Свеукупно, ако су следећи услови задовољени

$$\begin{aligned} &d_{12} > 0, \quad d_{13} > 0, \quad d_{23} > 0, \quad d_{123} > 0, \\ &d_1d_2d_3 > a_{12}a_{23}a_{31}, \quad d_1d_2d_3 > a_{13}a_{32}a_{21}, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

тада је, према Теорему 3.1.1, еквилибријум E_{123} асимптотски стабилан. На основу добијеног резултата, важи следећа теорема.

Теорема 3.1.2 *Еквилибријум E_{123} система (3.1.1) је асимптотски стабилан ако су следећи услови задовољени:*

$$(1) \quad d_{12} > 0 \text{ и } d_{13} > 0 \text{ и } d_{23} > 0 \text{ и } d_{123} > 0;$$

$$(2) \quad d_1d_2d_3 > a_{12}a_{23}a_{31} \text{ и } d_1d_2d_3 > a_{13}a_{32}a_{21}.$$

¹Edward John Routh (1831-1907), енглески математичар.

²Adolf Hurwitz (1859-1919), немачки математичар.

3.2 Стабилност еквилибријума n-димензионалног динамичког система

Аутономни компетитивни Лотка–Волтерин динамички систем димензије n је

$$\dot{x}_i = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.2.1)$$

са $x_i \geq 0$, $a_{ij} > 0$ и $b_i > 0$, за све $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. За елементе на главној дијагонали главне детерминанте система (3.2.1) уведемо ознаку $d_i := a_{ii}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Означимо са $d_{12\dots n}$ главну детерминанту матрице система (3.2.1), док за дијагоналне миноре k -тог реда матрице система (3.2.1), $1 \leq k \leq n$, користимо следећу нотацију

$$d_{i_1 i_2 \dots i_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n. \quad (3.2.2)$$

Као у тродимензионалном случају, број различитих индекса детерминанте $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ у (3.2.2) указује на ред те детерминанте и на елементе на њеној главној дијагонали. Индекси детерминанте $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ имплицирају да је то детерминанта k -тог реда чији су елементи на главној дијагонали $a_{i_j i_j}$, где је $1 \leq j \leq k$. Број свих дијагоналних минора k -тог реда матрице система (3.2.1) једнак је броју свих уређених k -торки елемената у растућем поретку из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, што је једнако $\binom{n}{k}$.

Даље, уводимо следећу нотацију за миноре k -тог реда проширене матрице система (3.2.1)

$$\begin{aligned} & d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2) \dots (i_{j-1} i_{j-1})(i_j \widehat{i_j i_{j+1}})(i_{j+1} i_{j+2}) \dots (i_{k-1} i_{k-1}) i_k} = \\ & = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_{j-1}} & a_{i_1 i_{j+1}} & a_{i_1 i_{j+2}} & \dots & a_{i_1 i_k} & b_{i_1} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_{j-1}} & a_{i_2 i_{j+1}} & a_{i_2 i_{j+2}} & \dots & a_{i_2 i_k} & b_{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_{j-1} i_1} & a_{i_{j-1} i_2} & \dots & a_{i_{j-1} i_{j-1}} & a_{i_{j-1} i_{j+1}} & a_{i_{j-1} i_{j+2}} & \dots & a_{i_{j-1} i_k} & b_{i_{j-1}} \\ a_{i_j i_1} & a_{i_j i_2} & \dots & a_{i_j i_{j-1}} & a_{i_j i_{j+1}} & a_{i_j i_{j+2}} & \dots & a_{i_j i_k} & b_{i_j} \\ a_{i_{j+1} i_1} & a_{i_{j+1} i_2} & \dots & a_{i_{j+1} i_{j-1}} & a_{i_{j+1} i_{j+1}} & a_{i_{j+1} i_{j+2}} & \dots & a_{i_{j+1} i_k} & b_{i_{j+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i_{k-1} i_1} & a_{i_{k-1} i_2} & \dots & a_{i_{k-1} i_{j-1}} & a_{i_{k-1} i_{j+1}} & a_{i_{k-1} i_{j+2}} & \dots & a_{i_{k-1} i_k} & b_{i_{k-1}} \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_{j-1}} & a_{i_k i_{j+1}} & a_{i_k i_{j+2}} & \dots & a_{i_k i_k} & b_{i_k} \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{k-j} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_{j-1}} & b_{i_1} & a_{i_1 i_{j+1}} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_{j-1}} & b_{i_2} & a_{i_2 i_{j+1}} & \dots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_{j-1} i_1} & a_{i_{j-1} i_2} & \dots & a_{i_{j-1} i_{j-1}} & b_{i_{j-1}} & a_{i_{j-1} i_{j+1}} & \dots & a_{i_{j-1} i_k} \\ a_{i_j i_1} & a_{i_j i_2} & \dots & a_{i_j i_{j-1}} & b_{i_j} & a_{i_j i_{j+1}} & \dots & a_{i_j i_k} \\ a_{i_{j+1} i_1} & a_{i_{j+1} i_2} & \dots & a_{i_{j+1} i_{j-1}} & b_{i_{j+1}} & a_{i_{j+1} i_{j+1}} & \dots & a_{i_{j+1} i_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i_{k-1} i_1} & a_{i_{k-1} i_2} & \dots & a_{i_{k-1} i_{j-1}} & b_{i_{k-1}} & a_{i_{k-1} i_{j+1}} & \dots & a_{i_{k-1} i_k} \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_{j-1}} & b_{i_k} & a_{i_k i_{j+1}} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где су $1 \leq j \leq k \leq n$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, где $\widehat{i_j}$ сугерише да је елемент i_j искључен из одговарајуће $(2k-1)$ -торке.

Укључили смо заграде у нотацију јер смо хтели да олакшамо уочавање обрасца који одговара формирању одговарајуће детерминанте. Прецизније, поредак елемената у заградама указује на поредак индекса елемената на главној дијагонали. На пример, уређеном пару (i, j) одговара елемент a_{ij} на главној дијагонали. Једини елемент који се не налази ни у једној загради се увек налази на крају одговарајуће $(2k-1)$ -торке и имплицира индекс последњег дијагоналног елемента, што је у овом случају b_{i_k} .

Број свих минора k -тог реда проширене матрице система (3.2.1) једнак је $\binom{n}{k} \binom{k}{1}$, што је управо број свих уређених $(2k-1)$ -торки елемената у неоппадајућем поретку из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, при чему се тачно један елемент од изабраних k елемената из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ појављује тачно једном у произвољној уређеној $(2k-1)$ -торки, док се сваки од преосталих $(k-1)$ елемената појављује тачно два пута у тој $(2k-1)$ -торки.

Претпостављамо да је главна детерминанта матрице система (3.2.1) различита од нуле, као и сви њени дијагонални минори и сви минори проширене матрице тог система. Еколошки смисао ових претпоставки може бити образложен као у тродимензионалном случају, односно да ефекти који произилазе из компетитивности између чланова истих врста нису једнаки ефектима који произилазе из компетитивности између чланова различитих врста, као и да ниво засићења врсте i_l није једнак конкурентском прагу врсте i_s , за $1 \leq l < s \leq n$, као и да ниво засићења врсте i_s није једнак конкурентском прагу врсте i_l .

Сада одредимо еквилибријуме система (3.2.1). Ако је следећи услов задовољен

$$\operatorname{sgn} d_{i_1 i_2 \dots i_k} = \operatorname{sgn} (-1)^{k-j} d_{(i_1 i_1) \dots (i_{j-1} i_{j-1}) (\widehat{i_j i_{j+1}}) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}, \quad (3.2.3)$$

за све $1 \leq j \leq k$, $2 \leq k \leq n$, тада се сви еквилибријуми система (3.2.1) налазе у $[0, +\infty)^n$ и међусобно су различити. Надаље претпостављамо да су испуњени услови (3.2.3), јер тада имамо најинтересантнији случај са еколошког аспекта.

Еквилибријум E_0 . За E_0 , $x_i = 0$ за свако $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Закључујемо да имамо $\binom{n}{0} = 1$ еквилибријум система (3.2.1) са свим нула координатама.

Еквилибријум E_k . Нека је $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ фиксирано. Координата на позицији k еквилибријума E_k је $x_k = b_k/d_k = b_k/a_{kk}$, а остале координате су једнаке нули. Дакле, постоји $\binom{n}{1} = n$ еквилибријума система (3.2.1) са само једном не-нула координатом.

Еквилибријум $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Фиксирајмо $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, при чему је $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, за фиксирано $k \in \{2, 3, \dots, n\}$. Тада $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$ има k координата различитих од нуле, које означавамо са $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, где је

$$\begin{aligned} x_{i_1} &= (-1)^{k-1} \frac{d_{(i_1 \widehat{i_1 i_2}) (i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, \\ x_{i_2} &= (-1)^{k-2} \frac{d_{(i_1 i_1) (\widehat{i_2 i_2 i_3}) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, \\ &\vdots \\ x_{i_k} &= (-1)^{k-k} \frac{d_{(i_1 i_1) (i_2 i_2) \dots (i_{k-1} i_{k-1}) (\widehat{i_k i_k})}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Да бисмо показали да је $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$ еквилибријум система (3.2.1), треба да покажемо

$$b_{i_l} - \sum_{j=1}^k a_{i_l i_j} x_{i_j} = 0, \text{ за свако } l \in \{1, 2, \dots, k\}. \quad (3.2.5)$$

Нека је $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ произвољно. Заменом координата еквилибријума $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$ из (3.2.4) у (3.2.5), добијамо

$$b_{i_l} - \sum_{j=1}^k a_{i_l i_j} x_{i_j} = \frac{b_{i_l} d_{i_1 i_2 \dots i_k} - \sum_{j=1}^k a_{i_l i_j} (-1)^{k-j} d_{(i_1 i_1) \dots (i_j \widehat{i_j} i_{j+1}) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}.$$

Коришћењем дефиниције минора k -тог реда проширене матрице система (3.2.1), добијамо

$$b_{i_l} - \sum_{j=1}^k a_{i_l i_j} x_{i_j} = \frac{\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_l} & \dots & a_{i_1 i_k} & b_{i_1} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_l} & \dots & a_{i_2 i_k} & b_{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_l i_1} & a_{i_l i_2} & \dots & a_{i_l i_l} & \dots & a_{i_l i_k} & b_{i_l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_l} & \dots & a_{i_k i_k} & b_{i_k} \\ a_{i_l i_1} & a_{i_l i_2} & \dots & a_{i_l i_l} & \dots & a_{i_l i_k} & b_{i_l} \end{vmatrix}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}} = 0, \quad (3.2.6)$$

јер су l -та и $(k+1)$ -ва врста једнаке. Како су $i_1, i_2, \dots, i_k$ произвољно изабрани из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, са $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и $2 \leq k \leq n$, закључујемо да $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$ јесу еквилибријуми система (3.2.1) за све $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $2 \leq k \leq n$. Приметимо да постоји $\binom{n}{k}$, $2 \leq k \leq n$, еквилибријума система (3.2.1) који имају k координата различитих од нуле.

Важе следеће теореме.

Теорема 3.2.1 *Под условом (3.2.3) и под претпоставкама да је главна детерминанта матрице система (3.2.1) различита од нуле, као и сви њени дијагонални минори и сви минори проширене матрице система (3.2.1), систем (3.2.1) има тачно 2^n еквилибријума, који су следећег облика*

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, \dots, 0), \\ E_i &= \begin{cases} \frac{b_i}{d_i}, & i\text{-та координата,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ E_{i_1 i_2 \dots i_k} &= \begin{cases} (-1)^{k-1} \frac{d_{(i_1 \widehat{i_1} i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, & i_1\text{-ва координата,} \\ (-1)^{k-2} \frac{d_{(i_1 i_1)(i_2 \widehat{i_2} i_3) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, & i_2\text{-га координата,} \\ \vdots & \vdots \\ (-1)^{k-k} \frac{d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2) \dots (i_{k-1} i_{k-1}) i_k \widehat{i_k}}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, & i_k\text{-та координата,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

за свако $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $2 \leq k \leq n$.

Доказ. Означимо десну страну једнакости у систему (3.2.1) са F_i , односно

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) := x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.2.8)$$

Еквилибријуми система (3.2.1) су решења система једначина $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, за свако $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. С обзиром на то да је једначина $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ еквивалентна са $x_i = 0$ или $b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ за фиксирано $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, систем (3.2.1) има највише 2^n еквилибријума. Изнад смо показали да свака тачка из (3.2.7) задовољава једначину $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ за свако $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. На тај начин смо доказали да систем (3.2.1) има тачно $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ еквилибријума и сви они су наведени у (3.2.7). $\square$

Подсећамо да, ако је испуњен услов (3.2.3) и ако је главна детерминанта матрице система (3.2.1) различита од нуле, као и сви њени дијагонални минори и сви минори проширене матрице система (3.2.1), тада се сви еквилибријуми система (3.2.1) налазе у $[0, +\infty)^n$.

Елементи Јакобијеве матрице $\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_{n \times n}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, су

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \begin{cases} b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - a_{ii}x_i, & i = j, \\ -a_{ij}x_i, & i \neq j, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Еквилибријум E_0 . За сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_0 добијамо $\lambda_j = b_j$, за $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Стога, E_0 је хиперболички и његову стабилност одређујемо помоћу Теореме 1.0.4. Како је $\lambda_j > 0$ за свако $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, закључујемо да је E_0 нестабилан еквилибријум (нестабилан чвор), што је исти резултат као у случајевима $n = 2$ и $n = 3$.

Еквилибријум E_k . Нека је $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ фиксирано. Елементи Јакобијеве матрице израчунате у E_k су

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{E_k} = \begin{cases} b_i - a_{ik}x_k, & i = j \neq k, \\ b_k - 2a_{kk}x_k, & i = j = k, \\ -a_{kj}x_k, & i = k \neq j, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

за $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Применом Лапласовог развоја на k -ту колону, добијамо детерминанту дијагоналне матрице

$$\det(J(E_k)) = (-1)^{k+k} (b_k - 2a_{kk}x_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (b_j - a_{jk}x_k). \quad (3.2.11)$$

Ако заменимо $x_k = b_k/a_{kk} = b_k/d_k$ у (3.2.11), добијамо

$$\prod_{j=1}^n \lambda_j = \det(J(E_k)) = -b_k \prod_{1 \leq j < k} \frac{-d_{jkk}}{d_k} \prod_{k < j \leq n} \frac{d_{kkj}}{d_k} \quad (3.2.12)$$

$$\lambda_j = \begin{cases} \frac{-d_{jkk}}{d_k}, & 1 \leq j < k, \\ -b_k, & j = k, \\ \frac{d_{kkj}}{d_k}, & k < j \leq n, \end{cases} \quad (3.2.13)$$

На основу (3.2.13) закључујемо да је E_k хиперболички, па његову стабилност можемо одредити применом Теореме 1.0.4. На основу (3.2.3) знамо да је $\operatorname{sgn}(-d_{jkk}) = \operatorname{sgn}(d_{jk})$ за $j < k$ и $\operatorname{sgn}(d_{kkj}) = \operatorname{sgn}(d_{kj})$ за $k < j$. Стога закључујемо исто као у (3.1), али са другачијом нотацијом. Резултати су приказани у Теорему 3.2.2.

Теорема 3.2.2 *Еквилибријум E_k , $1 \leq k \leq n$, система (3.2.1) је:*

- (1) *асимптотски стабилан (стабилан чвор) ако је $d_{jk} < 0$ за свако $j < k$, и $d_{kj} < 0$ за свако $j > k$;*
- (2) *нестабилан (седло) ако је $d_{jk} > 0$ за бар једно $j < k$, или $d_{kj} > 0$ за бар једно $j > k$,*

где је $1 \leq j \leq n$.

Еквилибријум $E_{i_1 i_2}$. Нека су $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ фиксирани, $i_1 < i_2$. Елементи Јакобијеве матрице израчунати у $E_{i_1 i_2}$ су

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{E_{i_1 i_2}} = \begin{cases} b_i - a_{ii_1} x_{i_1} - a_{ii_2} x_{i_2}, & i_1 \neq i = j \neq i_2, \\ b_{i_1} - 2a_{i_1 i_1} x_{i_1} - a_{i_1 i_2} x_{i_2}, & i_1 = i = j, \\ b_{i_2} - 2a_{i_2 i_2} x_{i_2} - a_{i_2 i_1} x_{i_1}, & i_2 = i = j, \\ -a_{i_1 j} x_{i_1}, & i_1 = i \neq j, \\ -a_{i_2 j} x_{i_2}, & i_2 = i \neq j, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{d_{(i_1)(i_1 i_2) i_2}}{d_{i_1 i_2}}, & i = j < i_1 < i_2, \\ \frac{-d_{(i_1 i_1)(i_2) i_2}}{d_{i_1 i_2}}, & i_1 < i = j < i_2, \\ \frac{d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2) i}}{d_{i_1 i_2}}, & i_1 < i_2 < i = j, \\ -a_{i_1 j} x_{i_1}, & i = i_1, \\ -a_{i_2 j} x_{i_2}, & i = i_2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

за $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ако применимо Лапласов развој на првих $(i_1 - 1)$ врста, на последњих $(n - i_2)$ врста и на свим врстама између i_1 -ве и i_2 -ге, добијамо

$$\det(J(E_{i_1 i_2})) = x_{i_1} x_{i_2} d_{i_1 i_2} \cdot \prod_{i=1}^{i_1-1} \frac{d_{(i_1)(i_1 i_2) i_2}}{d_{i_1 i_2}} \prod_{i=i_1+1}^{i_2-1} \frac{-d_{(i_1 i_1)(i_2) i_2}}{d_{i_1 i_2}} \prod_{i=i_2+1}^n \frac{d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2) i}}{d_{i_1 i_2}},$$

и

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{d_{(i_1)(i_1 i_2) i_2}}{d_{i_1 i_2}}, & i < i_1 < i_2, \\ \frac{-d_{(i_1 i_1)(i_2) i_2}}{d_{i_1 i_2}}, & i_1 < i < i_2, \\ \frac{d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2) i}}{d_{i_1 i_2}}, & i_1 < i_2 < i, \end{cases} \quad (3.2.14)$$

$$\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} = x_{i_1} x_{i_2} d_{i_1 i_2} = \frac{-d_{i_1 i_2 i_2}}{d_{i_1 i_2}} \frac{d_{i_1 i_1 i_2}}{d_{i_1 i_2}} d_{i_1 i_2},$$

$$\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = -(x_{i_1} d_{i_1} + x_{i_2} d_{i_2}) = - \left(\frac{-d_{i_1 i_2 i_2}}{d_{i_1 i_2}} d_{i_1} + \frac{d_{i_1 i_1 i_2}}{d_{i_1 i_2}} d_{i_2} \right),$$

$$\lambda_{i_1, i_2} = \frac{-(x_{i_1} d_{i_1} + x_{i_2} d_{i_2}) \pm \sqrt{(x_{i_1} d_{i_1} + x_{i_2} d_{i_2})^2 - 4x_{i_1} x_{i_2} d_{i_1 i_2}}}{2},$$

за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Из (3.2.14) можемо да приметимо да је еквилибријум $E_{i_1 i_2}$ хиперболички и да одредимо његову стабилност коришћењем Теореме 1.0.4. Из (3.2.14) следи $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} < 0$, за све $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$. Из (3.2.3) као и из (3.2.14) следе резултати Теореме 3.2.3.

Теорема 3.2.3 *Еквилибријум $E_{i_1 i_2}$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, система (3.2.1) је:*

- (1) *асимптотски стабилан ако је $d_{i_1 i_2} > 0$ и $d_{i_1 i_2} < 0$ за свако i такво да је $i < i_1 < i_2$ и $d_{i_1 i i_2} < 0$ за свако i такво да је $i_1 < i < i_2$ и $d_{i_1 i_2 i} < 0$ за свако i такво да је $i_1 < i_2 < i$;*
- (2) *нестабилан ако је $d_{i_1 i_2} < 0$, или $d_{i_1 i_2} > 0$ за бар једно i такво да је $i < i_1 < i_2$, или $d_{i_1 i i_2} > 0$ за бар једно i такво да је $i_1 < i < i_2$, или $d_{i_1 i_2 i} > 0$ за бар једно i такво да је $i_1 < i_2 < i$.*

Резултати Теореме 3.2.3 су сагласни са одговарајућим резултатима за тродимензионални случај у (3.1.11).

Еквилибријум $E_{i_1 i_2 i_3}$. Нека су $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \dots, n\}$ фиксирани, $i_1 < i_2 < i_3$. Слично као у тродимензионалном случају, одредићемо довољан услов под којим је $E_{i_1 i_2 i_3}$ асимптотски стабилан еквилибријум, полазећи од претпоставки $d_{i_1 i_2} > 0$, $d_{i_1 i_3} > 0$, $d_{i_2 i_3} > 0$ и $d_{i_1 i_2 i_3} > 0$.

Прво ћемо одредити карактеристичан полином $P^n_{i_1 i_2 i_3}(\lambda)$ матрице $J(E_{i_1 i_2 i_3})$. Елементи Јакобијеве матрице израчунати у $E_{i_1 i_2 i_3}$ су

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{E_{i_1 i_2 i_3}} = \begin{cases} b_i - \sum_{s=1}^3 a_{i i_s} x_{i_s}, & i = j \neq i_l, l \in \{1, 2, 3\}, \\ b_{i_l} - \sum_{s=1}^3 a_{i_l i_s} x_{i_s} - a_{i_l i_l} x_{i_l}, & i = j = i_l, l \in \{1, 2, 3\}, \\ -a_{i_l j} x_{i_l}, & i = i_l \neq j, l \in \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-d_{(i_1 i_1)(i_1 i_2)(i_2 i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}}, & i = j < i_1 < i_2 < i_3, \\ \frac{d_{(i_1 i_1)(i_1 i_2)(i_2 i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}}, & i_1 < i = j < i_2 < i_3, \\ \frac{-d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)(i_3 i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}}, & i_1 < i_2 < i = j < i_3, \\ \frac{d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)(i_3 i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}}, & i_1 < i_2 < i_3 < i = j, \\ -a_{i_l j} x_{i_l}, & i = i_l, l \in \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

за $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Полином $P^n_{i_1 i_2 i_3}(\lambda) = \det(J(E_{i_1 i_2 i_3}) - \lambda I)$ је карактеристичан полином матрице $J(E_{i_1 i_2 i_3})$.

Ако применимо Лапласов развој на првих $(i_1 - 1)$ врста, на последњих $(n - i_3)$ врста и на све врсте између i_1 -ве и i_2 -ге, i_2 -ге и i_3 -ће, добијамо

$$P^n_{i_1 i_2 i_3}(\lambda) = \prod_{i=1}^{i_1-1} \left(\frac{-d_{(i_1 i_1)(i_1 i_2)(i_2 i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}} - \lambda \right) \prod_{i=i_3+1}^n \left(\frac{d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)(i_3 i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}} - \lambda \right) \cdot \prod_{i=i_1+1}^{i_2-1} \left(\frac{d_{(i_1 i_1)(i_1 i_2)(i_2 i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}} - \lambda \right) \prod_{i=i_2+1}^{i_3-1} \left(\frac{-d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)(i_3 i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}} - \lambda \right) (-P_{i_1 i_2 i_3}(\lambda)),$$

где је

$$\begin{aligned} P_{i_1 i_2 i_3}(\lambda) &= \lambda^3 + (d_{i_1} x_{i_1} + d_{i_2} x_{i_2} + d_{i_3} x_{i_3}) \lambda^2 \\ &+ (d_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} + d_{i_1 i_3} x_{i_1} x_{i_3} + d_{i_2 i_3} x_{i_2} x_{i_3}) \lambda + d_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}, \end{aligned}$$

што је управо карактеристичан полином матрице $J(E_{i_1 i_2 i_3})$ за $n = 3$. Корени полинома $P_{i_1 i_2 i_3}^n(\lambda)$ задовољавају следеће услове

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{-d_{(i_1)(i_2)(i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}}, & i < i_1 < i_2 < i_3, \\ \frac{d_{(i_1 i_1)(i_2)(i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}}, & i_1 < i < i_2 < i_3, \\ \frac{-d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)(i_3)i_3}}{d_{i_1 i_2 i_3}}, & i_1 < i_2 < i < i_3, \\ \frac{d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)(i_3 i_3)i}}{d_{i_1 i_2 i_3}}, & i_1 < i_2 < i_3 < i, \end{cases} \quad (3.2.15)$$

$$\prod_{s=1}^3 \lambda_{i_s} = (-1)^3 d_{i_1 i_2 i_3} \prod_{s=1}^3 x_{i_s},$$

$$\sum_{s=1}^3 \lambda_{i_s} = - \sum_{s=1}^3 x_{i_s} d_{i_s},$$

за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Да би $E_{i_1 i_2 i_3}$ био асимптотски стабилан, сви корени полинома $P_{i_1 i_2 i_3}^n(\lambda)$ морају да имају негативне реалне делове.

С обзиром на то да је $d_{i_1 i_2 i_3} > 0$, користећи замену $i \rightarrow i_l$, $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, из (3.2.15) следи

$$\begin{aligned} d_{(i_l i_1)(i_1 i_2)(i_2 i_3)i_3} &> 0 \quad \text{за} \quad i_l < i_1 < i_2 < i_3, \\ d_{(i_1 i_1)(i_1 i_2)(i_2 i_3)i_3} &< 0 \quad \text{за} \quad i_1 < i_l < i_2 < i_3, \\ d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)(i_l i_3)i_3} &> 0 \quad \text{за} \quad i_1 < i_2 < i_l < i_3, \\ d_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)(i_3 i_3)i_l} &< 0 \quad \text{за} \quad i_1 < i_2 < i_3 < i_l. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Из (3.2.3) и (3.2.16) добијамо да су услови под којима је $\lambda_{i_l} < 0$, за $l \in \{4, 5, \dots, n\}$, управо

$$\begin{aligned} d_{i_l i_1 i_2 i_3} &< 0 \quad \text{за} \quad i_l < i_1 < i_2 < i_3, \\ d_{i_1 i_l i_2 i_3} &< 0 \quad \text{за} \quad i_1 < i_l < i_2 < i_3, \\ d_{i_1 i_2 i_l i_3} &< 0 \quad \text{за} \quad i_1 < i_2 < i_l < i_3, \\ d_{i_1 i_2 i_3 i_l} &< 0 \quad \text{за} \quad i_1 < i_2 < i_3 < i_l. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Да бисмо добили услове под којима λ_{i_1} , λ_{i_2} и λ_{i_3} имају негативне реалне делове, применимо Теорему 3.1.1 на полином $P_{i_1 i_2 i_3}(\lambda)$, јер су његови корени управо λ_{i_1} , λ_{i_2} и λ_{i_3} .

Из $d_{i_1 i_2} > 0$, $d_{i_1 i_3} > 0$, $d_{i_2 i_3} > 0$ и $d_{i_1 i_2 i_3} > 0$, следи да су сви коефицијенти полинома $P_{i_1 i_2 i_3}(\lambda)$ позитивни. Према Теорему 3.1.1, $E_{i_1 i_2 i_3}$ је асимптотски стабилан ако и само ако је следећи услов задовољен

$$\begin{aligned} (d_{i_1} x_{i_1} + d_{i_2} x_{i_2} + d_{i_3} x_{i_3}) \cdot (d_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} + d_{i_1 i_3} x_{i_1} x_{i_3} + d_{i_2 i_3} x_{i_2} x_{i_3}) \\ > d_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

што је управо услов (3.1.16) са следећом сменом $i_1 \rightarrow 1$, $i_2 \rightarrow 2$ и $i_3 \rightarrow 3$. Стога, на основу (3.1.19), ако су испуњени услови

$$\begin{aligned} d_{i_1 i_2} &> 0, \quad d_{i_1 i_3} > 0, \quad d_{i_2 i_3} > 0, \quad d_{i_1 i_2 i_3} > 0, \\ d_{i_1} d_{i_2} d_{i_3} &> a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} a_{i_3 i_1}, \quad d_{i_1} d_{i_2} d_{i_3} > a_{i_1 i_3} a_{i_3 i_2} a_{i_2 i_1}, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

онда, према Теорему 3.1.1, сви корени полинома $P_{i_1 i_2 i_3}(\lambda)$ имају негативне реалне делове. На основу свега наведеног, важи следећа теорема.

Теорема 3.2.4 *Еквилибријум $E_{i_1 i_2 i_3}$, $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n$, система (3.2.1) је асимптотски стабилан ако су следећи услови задовољени:*

- (1) $d_{i_1 i_2} > 0$ и $d_{i_1 i_3} > 0$ и $d_{i_2 i_3} > 0$ и $d_{i_1 i_2 i_3} > 0$;
- (2) $d_{i_1} d_{i_2} d_{i_3} > a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} a_{i_3 i_1}$ и $d_{i_1} d_{i_2} d_{i_3} > a_{i_1 i_3} a_{i_3 i_2} a_{i_2 i_1}$;
- (3) $d_{i_l i_1 i_2 i_3} < 0$ за $i_l < i_1 < i_2 < i_3$ и $d_{i_1 i_l i_2 i_3} < 0$ за $i_1 < i_l < i_2 < i_3$ и $d_{i_1 i_2 i_l i_3} < 0$ за $i_1 < i_2 < i_l < i_3$ и $d_{i_1 i_2 i_3 i_l} < 0$ за $i_1 < i_2 < i_3 < i_l$.

Резултати Теореме 3.2.4 су сагласни са резултатима Теореме 3.1.2 из тродимензионалног случаја.

Еквилибријум $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$. За фиксирано $k \in \{4, \dots, n\}$ фиксирајмо $i_1, i_2, \dots, i_k$ из скупа $2\{1, 2, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Елементи Јакобијеве матрице израчунати у $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$ су

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{E_{i_1 i_2 \dots i_k}} = \begin{cases} b_i - \sum_{s=1}^k a_{i i_s} x_{i_s}, & i = j \neq i_l, l \in \{1, 2, \dots, k\}, \\ b_{i_l} - \sum_{s=1}^k a_{i_l i_s} x_{i_s} - a_{i_l i_l} x_{i_l}, & i = j = i_l, l \in \{1, 2, \dots, k\}, \\ -a_{i_l j} x_{i_l}, & i = i_l \neq j, l \in \{1, 2, \dots, k\}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(-1)^k d_{(i \hat{i} i_1)(i_1 i_2) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, & i = j < i_1 < i_2 < \dots < i_k, \\ \frac{(-1)^{k+s} d_{(i_1 i_1) \dots (i \hat{i} i_{s+1}) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, & i_1 \leq i_s < i = j < i_{s+1} \leq i_k, 1 \leq s < k, \\ \frac{(-1)^{k+k} d_{(i_1 i_1) \dots (i_k i_k) i \hat{i}}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, & i_1 < i_2 < \dots < i_k < i = j, \\ -a_{i_l j} x_{i_l}, & i = i_l, l \in \{1, 2, \dots, k\}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

за $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ако применимо Лапласов развој на првих $(i_1 - 1)$ врста, на последњих $(n - i_k)$ врста и на све врсте између i_1 -ве и i_2 -ге, ..., i_{k-1} -ве и i_k -те, добијамо

$$\det(J(E_{i_1 i_2 \dots i_k})) = \prod_{i=1}^{i_1-1} \frac{(-1)^k d_{(i \hat{i} i_1)(i_1 i_2) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}} \prod_{i=i_k+1}^n \frac{d_{(i_1 i_1) \dots (i_k i_k) i \hat{i}}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}},$$

$$\cdot \prod_{\substack{i=i_1+1 \\ i \notin \{i_2, i_3, \dots, i_{k-1}\} \\ 1 \leq s < k}}^{i_k-1} \frac{(-1)^{k+s} d_{(i_1 i_1) \dots (i \hat{i} i_{s+1}) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}} (-1)^k d_{i_1 i_2 \dots i_k} \prod_{s=1}^k x_{i_s},$$

и

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{(-1)^k d_{(i \hat{i} i_1)(i_1 i_2) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, & i < i_1 < i_2 < \dots < i_k, \\ \frac{(-1)^{k+s} d_{(i_1 i_1) \dots (i \hat{i} i_{s+1}) \dots (i_{k-1} i_k) i_k}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, & i_1 \leq i_s < i < i_{s+1} \leq i_k, 1 \leq s < k, \\ \frac{d_{(i_1 i_1) \dots (i_k i_k) i \hat{i}}}{d_{i_1 i_2 \dots i_k}}, & i_1 < i_2 < \dots < i_k < i, \end{cases}$$

$$\prod_{s=1}^k \lambda_{i_s} = (-1)^k d_{i_1 i_2 \dots i_k} \prod_{s=1}^k x_{i_s},$$
$$\sum_{s=1}^k \lambda_{i_s} = - \sum_{s=1}^k x_{i_s} d_{i_s},$$

за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Пошто су $k \in \{4, \dots, n\}$ и $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, произвољно изабрани, добијени резултати важе за све еквилибријуме $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

У општем случају, није могуће експлицитно одредити сопствене вредности λ_{i_1} , λ_{i_2} , ..., λ_{i_k} . Веома је тешко одредити стабилност еквилибријума $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$ у општем случају, чак и под претпоставком да је хиперболички. Стога, изостављамо дискусију стабилности еквилибријума $E_{i_1 i_2 \dots i_k}$, за $k \in \{4, \dots, n\}$.

Глава 4

Фридманове једначине као тродимензионални динамички систем

У овој глави је представљена примена теорије динамичких система ради проучавања динамике стандардног космолошког модела универзума, познатог као Λ CDM¹ модел. У те сврхе, успостављена је еквиваленција између система Фридманових једначина и тродимензионалног аутономног динамичког система класе Лотка–Волтериних динамичких система, са параметрима густине градивних компоненти универзума као зависним променљивим, под стандардним претпоставкама у космологији. Одређено је аналитичко решење тог динамичког система, које представља нову параметризацију параметара густине градивних компоненти универзума фактором ширења универзума и представљена је одговарајућа физичка интерпретација. Такође, пронађена је функција Љапунова ради одређивања стабилности еквилибријума посматраног динамичког система у случају када су једнаки параметри једначине стања за материју и зрачење, односно када је $\omega_m = \omega_r$. Главни резултати четврте главе се базирају на резултатима рада [12], док се нека појашњења ослањају и на радове [10, 40], при чему се одговарајуће алгебарске зависности из рада [40] такође јављају и у раду [39].

Потврдом убрзаног ширења универзума 1998. године [48, 52], Λ CDM модел је постао стандардни космолошки модел универзума. Према овом моделу, универзум садржи три главне компоненте: "обичну" материју (барионска материја и зрачење), хладну тамну материју (скраћено CDM) и космолошку константу Λ [53]. Ми, као и сви објекти око нас, састављени смо од протона, неутрона и електрона. Пошто је маса електрона много мања од масе протона или неутрона, под барионском материјом у астрономији се подразумева све што је састављено од бариона (протона и неутрона) [53]. Под зрачењем се подразумевају релативистичке честице (фотони, неутрини). Под хладном тамном материјом се подразумева материја која не емитује, нити апсорбује, нити рефлектује светлост, а њене честице се крећу брзином мањом од брзине светлости. За њену егзистенцију знамо искључиво на основу њене гравитационе интеракције са околном "обичном" материјом. Иако се термин тамна материја јављао и раније, сматра се да је Фриц Цвики² први уочио њен утицај на околну материју. Цвики је посматрао јато галаксија и установио је да су се галаксије у том јату кретале много брже него што би то дозвољавала гравитација која је произилазила из интеракције "обичне" материје у том јату. С обзиром на то, галаксије би требало да су се одвојиле од јата, али уместо тога су остале у оквиру њега. Цвики је 1933. године објавио рад у којем је описао да је непходно да се у том јату галаксија налази велика количина тамне материје која ће те галаксије држати на окупу, јер "обична" материја није могла да произведе довољно

¹Lambda cold dark matter

²Fritz Zwicky (1898–1974), швајцарски астроном.

гравитационог привлачења да би то јато било на окупу. Додатан доказ који иде у прилог постојању тамне материје уследио је 1970-их година, након открића Вере Рубин³, која је приликом посматрања спиралних галаксија приметила сличну аномалију као и Цвики и дошла је до истог закључка као и он [53]. Космолошка константа Λ представља тамну енергију, која има антигравитациони ефекат и сматра се одговорном за убрзано ширење универзума које је установљено 1998. године. Космолошку константу Λ је 1917. године увео Алберт Ајштајн⁴ у своје једначине поља да би добио статични модел универзума. Међутим, идеја о статичном универзуму (самим тим и идеја о Λ) је одбачена након 1929. године због открића Едвина Хабла⁵ да се универзум шири. Космолошка константа је поново враћена у Ајнштајнове једначине поља након 1998. због открића убрзаног ширења универзума [53]. Астрофизичари Сол Перлмутер⁶, Брајан Шмит⁷ и Адам Рис⁸ добили су Нобелову награду за физику 2011. године за откриће убрзаног ширења универзума. "Обична", видљива материја учествује у изградњи 5% универзума, док тамна материја заузима 27% универзума, а тамна енергија учествује са 68% [43]. Упркос доминацији тамне енергије и тамне материје у универзуму, њихова права природа још увек није позната. У овом раду ћемо користити само њихове параметре густине, који су нам сасвим довољни за одређивање утицаја те две градивне компоненте на еволуцију универзума.

Λ CDM модел је сагласан са експериментално утврђеним својствима универзума: постојањем и карактеристикама космичког микроталасног позадинског (СМВ⁹) зрачења, структуром универзума на великој скали и дистрибуцијом галаксија, као и убрзаним ширењем универзума. СМВ зрачење су 1965. године (случајно) открили амерички физичар и радио-астроном Арно Пензијас и амерички астроном Роберт Вилсон и представља најстарије светло у нашем универзуму које је настало пре скоро 14 милијарди година и сматра се потврдом теорије Великог праска [53]. За то откриће су Пензијас и Вилсон добили Нобелову награду за физику 1978. године.

Систем Фридманових једначина [19] са космолошком константом Λ је

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \\ \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) &= 0,\end{aligned}\tag{4.0.1}$$

где је $a = a(t)$ фактор ширења универзума, $\rho = \rho(t)$ је укупна просечна густина компоненти материје у универзуму, $p = p(t)$ је укупан притисак компоненти материје у универзуму, G је гравитациона константа, c је брзина светлости и реалан број k је кривина универзума. У овој глави је дискутован само раван универзум ($k = 0$) и отворен универзум ($k < 0$). Прва једначина у систему је позната као Фридманова једначина, друга једначина је једначина убрзања, а трећа једначина је једначина флуида. Једначине из система (4.0.1) су изведене из Ајнштајнових једначина поља уз претпоставку космолошког принципа¹⁰ за универзум који се састоји од савршених флуида.

³Vera Florence Cooper Rubin (1928–2016), амерички астроном.

⁴Albert Einstein (1879–1955), теоријски физичар.

⁵Edwin Powell Hubble (1889–1953), амерички астроном.

⁶Saul Perlmutter (1959–), амерички астрофизичар.

⁷Brian Paul Schmidt (1967–), амерички астрофизичар.

⁸Adam Guy Ries (1969–) амерички астрофизичар.

⁹Cosmic microwave background

¹⁰На великим скалама, универзум је просторно хомоген (изгледа исто из сваке тачке) и изотропан (изгледа исто у сваком правцу).

Претпостављамо да су компоненте материје у нашем универзуму баротропски савршени флуиди (*материја* и *зрачење*) који не интерагују међусобно, прецизније да компоненте једног флуида (*материје*) не интерагују са компонентама другог флуида (*зрачења*), изузев гравитационе интеракције. Под *материјом* се најчешће подразумева барионска материја и хладна тамна материја, док се *зрачење* односи на релативистичке честице, као што су неутрини и фотони. С обзиром на то да је систем (4.0.1) неодређен (само две једначине у посматраном систему су независне), стандардни приступ у космологији је претпостављање једначине стања за градивне компоненте универзума. Једначина стања за баротропски савршени i -флуид је линеарна релација између p_i и ρ_i

$$p_i = \omega_i \rho_i c^2, \quad (4.0.2)$$

где је $\rho_i = \rho_i(t)$ просечна густина, $p_i = p_i(t)$ је притисак и ω_i је параметар једначине стања за i -флуид [7], [28]. У овој секцији сматрамо да је константа $\omega_i \in [0, 1]$, јер је то у сагласности са макроскопском физиком [7]. Иако у општем случају не постоји аналитичко решење система Фридманових једначина (4.0.1), за неке вредности параметара k и ω_i , $i \in \{m, r, \Lambda\}$ могуће је наћи аналитичко решење [53]. Као што је било очекивано, *Maple* није успео да нађе аналитичко решење система (4.0.1) у затвореном облику, већ је пронашао решење у имплицитном облику изражено помоћу функције *RoothOf*.

Претпоставка да компоненте једног флуида не интерагују са компонентама другог флуида се рефлектује на очување једначине флуида за сваки i -флуид [7], [47], то јест за сваки i -флуид важи

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho_i + \frac{p_i}{c^2} \right) = 0. \quad (4.0.3)$$

Заменом (4.0.2) и Хабловог параметра $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ у (4.0.3), добијамо следећи облик једначине флуида за i -флуид

$$\dot{\rho}_i = -3H\rho_i(1 + \omega_i). \quad (4.0.4)$$

Једначина (4.0.4) изражена преко ρ_m (просечна густина m -флуида (*материја*)) и ρ_r (просечна густина r -флуида (*зрачење*)), је облика

$$\dot{\rho}_m = -3H\rho_m(1 + \omega_m) \text{ и } \dot{\rho}_r = -3H\rho_r(1 + \omega_r). \quad (4.0.5)$$

Јасно је да $\rho_m = \rho_m(t)$ и $\rho_r = \rho_r(t)$ доприносе укупној просечној густини компоненти материје у универзуму, као и да $p_m = p_m(t)$ и $p_r = p_r(t)$ доприносе укупном притиску компоненти материје у универзуму, са

$$\rho = \rho_m + \rho_r \text{ и } p = p_m + p_r. \quad (4.0.6)$$

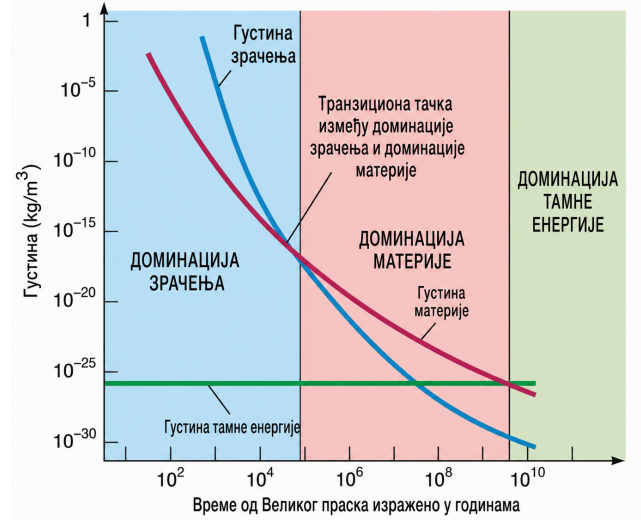
Космолошки параметри који су централни у овој секцији су параметри густине градивних компоненти универзума, дефинисани са (видети [34])

$$\begin{aligned} \Omega_m(t) &= \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho_m(t), & \Omega_k(t) &= -\frac{kc^2}{a^2(t)H^2(t)}, \\ \Omega_r(t) &= \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho_r(t), & \Omega_\Lambda(t) &= \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}, \end{aligned} \quad (4.0.7)$$

где $\Omega_m(t)$, $\Omega_k(t)$, $\Omega_r(t)$ и $\Omega_\Lambda(t)$ означавају редом параметар густине материје, параметар густине која потиче од кривине простора, параметар густине зрачења и параметар густине космолошке константе. Надаље, $\Omega_i = \Omega_i(t)$ означава било који од следећих параметара густине $\Omega_m(t)$, $\Omega_k(t)$, $\Omega_r(t)$, $\Omega_\Lambda(t)$, уколико није другачије речено.

Према Λ CDM моделу, еволуција универзума се састоји од три главне епохе приказане

на Слици 4.1 [46].



Слика 4.1. [46] Кратка историја универзума са фокусом на доминацију различитих компоненти.

Понашање универзума у свакој епохи је одређено једном доминантном компонентом. Доминација зрачења је била прва епоха, која је трајала до око 50 000 година након Великог праска. Наредних 350 000 година, зрачење и материја су скоро подједнако били заступљени у универзуму. Након ере рекомбинације (око 400 000-те године), доминантан флуид у универзуму је била материја. Након тога, око приближно 10^9 -ти година, материја и тамна енергија су биле скоро подједнако заступљене у универзуму. Тамна енергија која је репрезентована космолошким константом, постала је доминантна компонента у универзуму око приближно $7.7 \cdot 10^9$ година након Великог праска.

4.1 Фридманове једначине као динамички систем

Уколико Фридманову једначину у (4.0.1) поделимо са $H^2 \neq 0$ ($H = 0$ имплицира статички универзум) и заменом $\rho = \rho_m + \rho_r$, добијамо

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1. \quad (4.1.1)$$

Према (4.0.7) и (4.1.1), као и претпоставци $k \leq 0$, јасно је да је

$$0 \leq \Omega_i \leq 1. \quad (4.1.2)$$

Из (4.1.1) директно следи

$$\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda. \quad (4.1.3)$$

Да бисмо из Фридманових једначина извели динамички систем чије су зависне променљиве параметри густине Ω_i , $i \in \{m, r, \lambda\}$, применићемо смену променљиве $\xi(t) = \ln(a(t))$, која боље апроксимира линеарност временске променљиве t , него $a(t)$. Комбиновањем израза који се добија диференцирањем параметара густине Ω_i , $i \in \{m, r, \lambda\}$, по променљивој ξ и израза који се добија диференцирањем Фридманове једначине по t , као и заменом $\rho = \rho_m + \rho_r$, $H = \dot{a}/a$, (4.0.4), (4.0.7) и (4.1.3), добија се систем класе Лотка–Волтериних динамичких система. Наведени метод постоји у литератури (на пример погледати [7], [47], [21], [57], [24]), а сада ћемо га детаљно спровести. Означимо изводе по променљивој ξ са $'$. Диференцирањем параметара густине Ω_m , Ω_r и Ω_Λ по

променљивој ξ , добијамо

$$\Omega_i' = \frac{d\Omega_i}{dt} \cdot \frac{dt}{d\xi} = \frac{\dot{\Omega}_i}{H}. \quad (4.1.4)$$

Заменом $\Omega_i = 8\pi G\rho_i/3H^2$ и (4.0.4) у (4.1.4), за $i \in \{m, r\}$ добијамо

$$\Omega_i' = -3\Omega_i(1 + \omega_i) + \Omega_i \cdot \frac{-2\dot{H}}{H^2}. \quad (4.1.5)$$

Ако заменимо $\rho = \rho_m + \rho_r$ и $H = \dot{a}/a$ у Фридманову једначину у (4.0.1) и онда је диференцирамо по времену t , добијамо

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3}(\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_r) + 2kc^2 \cdot \frac{\dot{a}}{a^3}. \quad (4.1.6)$$

Даље, заменом (4.0.5), (4.0.7) и (4.1.3) у (4.1.6), претходна једначина се трансформише у

$$\frac{-2\dot{H}}{H^2} = 2 + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda. \quad (4.1.7)$$

Заменом (4.1.7) у (4.1.5), за $i \in \{m, r\}$ добијамо

$$\Omega_i' = -3\Omega_i(1 + \omega_i) + \Omega_i(2 + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda). \quad (4.1.8)$$

За $\Omega_\Lambda = \Lambda c^2/3H^2$, имамо

$$\Omega_\Lambda' = \Omega_\Lambda \cdot \frac{-2\dot{H}}{H^2}, \quad (4.1.9)$$

одакле, коришћењем (4.1.7), следи

$$\Omega_\Lambda' = \Omega_\Lambda(2 + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda). \quad (4.1.10)$$

Обједињујући (4.1.8) и (4.1.10), добијамо динамички систем

$$\begin{aligned} \Omega_m' &= \Omega_m(-(1 + 3\omega_m) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_r' &= \Omega_r(-(1 + 3\omega_r) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_\Lambda' &= \Omega_\Lambda(2 + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda), \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

што је систем нелинеарних диференцијалних једначина првог реда са параметрима густине градивних компоненти универзума као зависним променљивим. У доказу Теореме 4.1.1 биће доказано да је систем (4.0.1) еквивалентан систему (4.1.11) под

Теорема 4.1.1 *Уколико су задовољени услови $p_m = \omega_m \rho_m c^2$, $p_r = \omega_r \rho_r c^2$ и идентитети из (4.0.6), тада је систем Фридманових једначина (4.0.1) заједно са једначинама (4.0.5) еквивалентан систему*

$$\begin{aligned} \Omega_m' &= \Omega_m(-(1 + 3\omega_m) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_r' &= \Omega_r(-(1 + 3\omega_r) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_\Lambda' &= \Omega_\Lambda(2 + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k &= 1, \\ \Omega_i' &= \frac{\dot{\Omega}_i}{H}, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

где су Ω_i дефинисани у (4.0.7).

Доказ. Већ је доказано да систем (4.1.12) следи из система (4.0.1) и једначина (4.0.5) под претпоставкама из Теореме 4.1.1. Треба још доказати супротан смер.

Из $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$, дефиниције параметара густине у (4.0.7) и првог идентитета у (4.0.6) директно следи Фридманова једначина у (4.0.1). Следећи корак је верификација једначина у (4.0.5).

Из $\Omega_\Lambda' = \dot{\Omega}_\Lambda/H$ и треће једначине у (4.1.12) следи

$$\frac{-2\dot{H}}{H^2} = 2 + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda. \quad (4.1.13)$$

Како је $\Omega_i' = \dot{\Omega}_i/H$, за $i \in \{m, r\}$ имамо

$$\Omega_i' = \frac{8\pi G}{3H^3} \dot{\rho}_i + \frac{8\pi G \rho_i}{3H^2} \cdot \frac{-2\dot{H}}{H^2}, \quad (4.1.14)$$

одакле, заменом (4.1.13) и $\Omega_i = 8\pi G \rho_i / 3H^2$, добијамо

$$\frac{\Omega_i'}{\Omega_i} = \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \cdot \frac{1}{H} + 2 + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda. \quad (4.1.15)$$

Ако претходну једначину за $i \in \{m, r\}$ упоредимо са прве две једначине система (4.1.12), закључујемо

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m} \cdot \frac{1}{H} + 2 &= -(1 + 3\omega_m), \\ \frac{\dot{\rho}_r}{\rho_r} \cdot \frac{1}{H} + 2 &= -(1 + 3\omega_r). \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Множењем прве једначине из (4.1.16) са $\rho_m H$ и множењем друге једначине из (4.1.16) са $\rho_r H$ добијамо (4.0.5). Коришћењем претпоставки $p_m = \omega_m \rho_m c^2$, $p_r = \omega_r \rho_r c^2$, идентитета (4.0.6) и (4.0.5), аутоматски следи једначина флуида у (4.0.1). Како смо већ споменули да једначина убрзања следи из Фридманове једначине и једначине флуида, добили смо еквиваленцију са системом (4.0.1). $\square$

Добијена еквиваленција нам обезбеђује иста динамичка својства система (4.1.12) и (4.0.1), под стандардним претпоставкама у космологији. Истичемо да је у литератури коришћен исти закључак али само за $\omega_m = 0$ и $\omega_r = 1/3$ и изведена је само једна импликација, а не еквиваленција одговарајућих система.

4.2 Аналитичко решење динамичког система

Приметимо да су прве три једначине из система (4.1.12) класе Лотка–Волтериних динамичких система. Ти системи имају велику примену у моделовању разних проблема у космологији, медицини, физици (видети [2, 18, 47]). Није једноставно одредити њихово аналитичко решење у општем случају и због тога су углавном анализирани нумерички.

У овој секцији ћемо одредити аналитичко решење система (4.1.12) у разним случајевима, у зависности од тога да ли су неки од параметара густине Ω_i једнаки нули. Сваки случај који анализирамо овде одговара неком моделу универзума. Прецизније, представља неки стадијум, или међустадијум у еволуцији универзума. Сваком од наведених случајева је дата одговарајућа физичка интерпретација [10]. Сва решења из Секције 4.2 су проверена у софтверу *Wolfram Mathematica*.

4.2.1 Тродимензионални динамички систем

У овој секцији разматрамо $\Omega_m > 0$, $\Omega_r > 0$, $\Omega_\Lambda > 0$ и $\Omega_k > 0$. Стога, овај случај представља отворен универзум у периоду када је материја доминирала универзумом. Штавише, представља отворен универзум у фази транзиције између зрачења и тамне енергије које се десило око $5 \cdot 10^8$ година након Великог праска [40].

Посматрајмо прве три једначине система (4.1.12) у следећем облику

$$\begin{aligned}\Omega_m' &= \Omega_m (-(1 + 3\omega_m) + (1 + 3\omega_r)\Omega_r - 2\Omega_\Lambda) + (1 + 3\omega_m)\Omega_m^2, \\ \Omega_r' &= \Omega_r (-(1 + 3\omega_r) + (1 + 3\omega_m)\Omega_m - 2\Omega_\Lambda) + (1 + 3\omega_r)\Omega_r^2, \\ \Omega_\Lambda' &= \Omega_\Lambda (2 + (1 + 3\omega_m)\Omega_m + (1 + 3\omega_r)\Omega_r) - 2\Omega_\Lambda^2,\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

али имајући у виду да важи $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$ и $\Omega_i' = \frac{\dot{\Omega}_i}{H}$. Како су Ω_m , Ω_r , Ω_Λ и Ω_k позитивни и њихова сума је једнака један, закључујемо да су сви параметри густине мањи од један. Приметимо да параметре густине можемо да посматрамо као функције променљиве $\xi(t) = \ln a(t)$. Да бисмо упростили систем (4.2.1), уведемо нове променљиве са

$$z_m(\xi) = 1/\Omega_m(\xi), \quad z_r(\xi) = 1/\Omega_r(\xi), \quad z_\Lambda(\xi) = 1/\Omega_\Lambda(\xi).\tag{4.2.2}$$

Уколико параметре густине из (4.2.1) заменимо новим променљивим z_m , z_r и z_Λ , добијамо једноставнији систем једначина

$$\begin{aligned}z_m' &= -z_m \left(-(1 + 3\omega_m) + \frac{1 + 3\omega_r}{z_r} - \frac{2}{z_\Lambda} \right) - (1 + 3\omega_m), \\ z_r' &= -z_r \left(-(1 + 3\omega_r) + \frac{1 + 3\omega_m}{z_m} - \frac{2}{z_\Lambda} \right) - (1 + 3\omega_r), \\ z_\Lambda' &= -z_\Lambda \left(2 + \frac{1 + 3\omega_m}{z_m} + \frac{1 + 3\omega_r}{z_r} \right) + 2.\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

Применом метода елиминације [12], добијамо да су решења система (4.2.3)

$$\begin{aligned}z_m(\xi) &= 1 + c_1 e^{3(\omega_m - \omega_r)\xi} + c_2 e^{3(1 + \omega_m)\xi} + c_3 e^{(1 + 3\omega_m)\xi}, \\ z_r(\xi) &= \frac{e^{3(\omega_r - \omega_m)\xi} + c_1 + c_2 e^{3(1 + \omega_r)\xi} + c_3 e^{(1 + 3\omega_r)\xi}}{c_1}, \\ z_\Lambda(\xi) &= \frac{e^{-3(1 + \omega_m)\xi} + c_1 e^{-3(1 + \omega_r)\xi} + c_2 + c_3 e^{-2\xi}}{c_2},\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

где су c_1 , c_2 и c_3 позитивне реалне константе. Заменом (4.2.2) у (4.2.4) добијамо решења система (4.2.1)

$$\begin{aligned}\Omega_m(\xi) &= \frac{1}{1 + c_1 e^{3(\omega_m - \omega_r)\xi} + c_2 e^{3(1 + \omega_m)\xi} + c_3 e^{(1 + 3\omega_m)\xi}}, \\ \Omega_r(\xi) &= \frac{c_1}{e^{3(\omega_r - \omega_m)\xi} + c_1 + c_2 e^{3(1 + \omega_r)\xi} + c_3 e^{(1 + 3\omega_r)\xi}}, \\ \Omega_\Lambda(\xi) &= \frac{c_2}{e^{-3(1 + \omega_m)\xi} + c_1 e^{-3(1 + \omega_r)\xi} + c_2 + c_3 e^{-2\xi}}.\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

Како су c_1 , c_2 и c_3 позитивне реалне константе, следи $\Omega_i > 0$, за свако $i \in \{m, r, \Lambda\}$. Такође, из $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $c_3 > 0$ следи $1 + c_1 e^{3(\omega_m - \omega_r)\xi} + c_2 e^{3(1 + \omega_m)\xi} + c_3 e^{(1 + 3\omega_m)\xi} > 1$, $e^{3(\omega_r - \omega_m)\xi} + c_1 + c_2 e^{3(1 + \omega_r)\xi} + c_3 e^{(1 + 3\omega_r)\xi} > c_1$ и $e^{-3(1 + \omega_m)\xi} + c_1 e^{-3(1 + \omega_r)\xi} + c_2 + c_3 e^{-2\xi} > c_2$, па закључујемо да је $\Omega_i < 1$, за свако $i \in \{m, r, \Lambda\}$. Дакле, $\Omega_i \in (0, 1)$ за свако $i \in \{m, r, \Lambda\}$.

Из (4.2.5) и (4.1.3) добијамо

$$\begin{aligned}\Omega_r(\xi) &= c_1 e^{3(\omega_m - \omega_r)\xi} \Omega_m(\xi), \\ \Omega_\Lambda(\xi) &= c_2 e^{3(1+\omega_m)\xi} \Omega_m(\xi), \\ \Omega_k(\xi) &= 1 - \Omega_m(\xi)(1 + c_1 e^{3(\omega_m - \omega_r)\xi} + c_2 e^{3(1+\omega_m)\xi}).\end{aligned}\tag{4.2.6}$$

Заменом $\xi = \ln a$ у (4.2.5) и (4.2.6), добијамо релације

$$\begin{aligned}\Omega_m(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} + c_2 a^{3(1+\omega_m)} + c_3 a^{1+3\omega_m}}, \\ \Omega_r(a) &= \frac{c_1}{a^{3(\omega_r - \omega_m)} + c_1 + c_2 a^{3(1+\omega_r)} + c_3 a^{1+3\omega_r}}, \\ \Omega_\Lambda(a) &= \frac{c_2}{a^{-3(1+\omega_m)} + c_1 a^{-3(1+\omega_r)} + c_2 + c_3 a^{-2}},\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

и

$$\begin{aligned}\Omega_r(a) &= c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} \Omega_m(a), \\ \Omega_\Lambda(a) &= c_2 a^{3(1+\omega_m)} \Omega_m(a), \\ \Omega_k(a) &= 1 - \Omega_m(a)(1 + c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} + c_2 a^{3(1+\omega_m)}).\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

Вредности константи c_1 , c_2 и c_3 добијамо користећи услов (4.1.1) израчунат у садашњем временском тренутку $t = t_0$, $a(t_0) = 1$.

За средње вредности параметра густине Ω_i измерене у садашњем временском тренутку користимо нотацију Ω_{i0} . Према [43], те вредности су

$$\Omega_{m0} = 0.315, \quad \Omega_{r0} = 0.0000538, \quad \Omega_{k0} = 0.0007, \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0.685,\tag{4.2.9}$$

где је Ω_{m0} једнако суми средњих вредности параметара густина барионске материје и хладне тамне материје у универзуму, док за Ω_{r0} узимамо средњу вредност параметра густине космичког микроталасног позадинског зрачења (CMB radiation density) у универзуму. Наглашавамо да су неке вредности у (4.2.9) израчунате независно, па идентитет (4.1.1) није очуван. Због тога што тај идентитет мора да буде задовољен у Λ CDM моделу, овде користимо нормализоване вредности од Ω_{i0} , означене са Ω_{i0n} , добијене као

$$\Omega_{i0n} = \frac{\Omega_{i0}}{\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{k0} + \Omega_{\Lambda 0}},\tag{4.2.10}$$

где су за вредности Ω_{i0} узете вредности из (4.2.9).

Посматрајући систем (4.2.7) у садашњем временском тренутку $t = t_0$, $a(t_0) = 1$, и заменом нормализованих средњих вредности параметара густине измерених у том (садашњем) временском тренутку, добијамо следеће вредности заокружене на четири децимална места

$$c_1 = 0.0002, \quad c_2 = 2.1746, \quad c_3 = 0.0022.\tag{4.2.11}$$

Заменом вредности c_1 , c_2 и c_3 из (4.2.11) у (4.2.7), добијамо партикуларно решење система (4.2.1).

Истичемо да сваки избор параметара $\omega_m, \omega_r \in [0, 1]$, $\omega_m \neq \omega_r$, одређује нови космолошки модел са космолошким константом Λ .

У космологији се обично претпостављају вредности $\omega_m = 0$ и $\omega_r = 1/3$. У сагласности са тим, заменимо те вредности параметара стања за материју и зрачење у систем (4.1.12)

да бисмо добили

$$\begin{aligned}\Omega_m' &= \Omega_m(-1 + \Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_r' &= \Omega_r(-2 + \Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_\Lambda' &= \Omega_\Lambda(2 + \Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k &= 1, \\ \Omega_i' &= \frac{\dot{\Omega}_i}{H}.\end{aligned}\tag{4.2.12}$$

Заменом $\omega_m = 0$ и $\omega_r = 1/3$ у једначине (4.2.7) и (4.2.8), добијамо решење система (4.2.12)

$$\begin{aligned}\Omega_m(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{-1} + c_2 a^3 + c_3 a}, \\ \Omega_r(a) &= \frac{c_1}{a + c_1 + c_2 a^4 + c_3 a^2}, \\ \Omega_\Lambda(a) &= \frac{c_2}{a^{-3} + c_1 a^{-4} + c_2 + c_3 a^{-2}},\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

као и

$$\begin{aligned}\Omega_r(a) &= c_1 a^{-1} \Omega_m(a), \\ \Omega_\Lambda(a) &= c_2 a^3 \Omega_m(a), \\ \Omega_k(a) &= 1 - \Omega_m(a)(1 + c_1 a^{-1} + c_2 a^3).\end{aligned}\tag{4.2.14}$$

Даље, примењујући исти поступак као у општем случају, добијамо приближно решење система (4.2.12), при чему c_1 , c_2 и c_3 узимају вредности из (4.2.11).

Наглашавамо да су облици алгебарских зависности (4.2.13) и (4.2.14) такође добијени у [39, 40], али на начин који је независан у односу на начин који је представљен у овом поглављу. На тај начин, алгебарска верификација овог резултата је изведена у [39, 40].

Иако смо одредили аналитичко решење система (4.2.1), као и његовог специјалног случаја (4.2.12), *Maple* није успео да нађе аналитичко решење у затвореном облику ни за један од ова два система. Међутим, *Maple* јесте успео да пронађе аналитичко решење система (4.2.3) и то решење је исто као оно које смо добили у (4.2.4).

4.2.2 Дводимензионални динамички систем

У овој секцији су разматрани случајеви када је само један од четири Ω_i једнак нули. Стога разликујемо четири случаја. За сва четири случаја, *Maple* је успео да нађе аналитичка решења која су иста као решења која су овде представљена.

► Случај $\Omega_m = 0$, $\Omega_r > 0$, $\Omega_\Lambda > 0$ и $\Omega_k > 0$

У овом случају је разматран отворен универзум у којем су заступљени зрачење и космолошка константа. Недостатак материје аутоматски указује на рану фазу универзума, јер је члан који одговара својствима тамне енергије могао да проузрокује нагло ширење раног универзума [45], [49]. Међутим, таква теорија није сагласна са стандардним космолошким моделом. Упркос томе, анализираћемо овај случај да бисмо одредили сва решења система (4.1.12).

У овој ситуацији, систем (4.1.12) има следећи облик

$$\begin{aligned}\Omega_r' &= \Omega_r(-(1 + 3\omega_r) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_\Lambda' &= \Omega_\Lambda(2 + \Omega_r(1 + 3\omega_r) - 2\Omega_\Lambda),\end{aligned}\tag{4.2.15}$$

са $\Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$ и $\Omega_i' = \frac{\dot{\Omega}_i}{H}$. На исти начин као у Секцији 4.2.1, добијамо да су решења

система (4.2.15) управо

$$\begin{aligned}\Omega_r(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{3(1+\omega_r)} + c_2 a^{1+3\omega_r}}, \\ \Omega_\Lambda(a) &= \frac{c_1}{a^{-3(1+\omega_r)} + c_1 + c_2 a^{-2}},\end{aligned}\tag{4.2.16}$$

где су c_1 и c_2 позитивне константе. Из (4.2.16) и $\Omega_k = 1 - \Omega_r - \Omega_\Lambda$ следи

$$\begin{aligned}\Omega_\Lambda(a) &= c_1 a^{3(1+\omega_r)} \Omega_r(a), \\ \Omega_k(a) &= 1 - \Omega_r(a)(1 + c_1 a^{3(1+\omega_r)}).\end{aligned}\tag{4.2.17}$$

► **Случај** $\Omega_m > 0$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_\Lambda > 0$ и $\Omega_k > 0$

Узимајући у обзир занемарљивост зрачења, у овом случају је разматран отворен универзум око периода једнакости густина материје и тамне енергије, тачније око 10^9 година након Великог праска.

Из система (4.1.12) добијамо

$$\begin{aligned}\Omega_m' &= \Omega_m(-(1 + 3\omega_m) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_\Lambda' &= \Omega_\Lambda(2 + \Omega_m(1 + 3\omega_m) - 2\Omega_\Lambda),\end{aligned}\tag{4.2.18}$$

са $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$ и $\Omega_i' = \frac{\dot{\Omega}_i}{H}$. Примењујући поступак из Секције 4.2.1, добијамо решење система (4.2.18)

$$\begin{aligned}\Omega_m(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{3(1+\omega_m)} + c_2 a^{1+3\omega_m}}, \\ \Omega_\Lambda(a) &= \frac{c_1}{a^{-3(1+\omega_m)} + c_1 + c_2 a^{-2}},\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

где су c_1 и c_2 позитивне константе. Из (4.2.19) и $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$ следи

$$\begin{aligned}\Omega_\Lambda(a) &= c_1 a^{3(1+\omega_m)} \Omega_m(a), \\ \Omega_k(a) &= 1 - \Omega_m(a)(1 + c_1 a^{3(1+\omega_m)}).\end{aligned}\tag{4.2.20}$$

Приметимо да, уколико заменимо индекс m са индексом r у релацијама (4.2.19) и (4.2.20), добијамо релације (4.2.16) и (4.2.17). То се дешава јер су системи (4.2.15) и (4.2.18) симетрични у односу на индексе m и r . Иста симетрија важи и у систему (4.1.12).

► **Случај** $\Omega_m > 0$, $\Omega_r > 0$, $\Omega_\Lambda = 0$ и $\Omega_k > 0$

У овом случају је разматран отворен универзум око транзиционе фазе зрачења и материје, јер се у то време ефекат тамне енергије могао занемарити.

Посматрајмо систем

$$\begin{aligned}\Omega_m' &= \Omega_m(-(1 + 3\omega_m) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r)), \\ \Omega_r' &= \Omega_r(-(1 + 3\omega_r) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r)),\end{aligned}\tag{4.2.21}$$

са $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k = 1$ и $\Omega_i' = \frac{\dot{\Omega}_i}{H}$. На исти начин као у Секцији 4.2.1, добијамо да су решења система (4.2.21) управо

$$\begin{aligned}\Omega_m(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} + c_2 a^{1+3\omega_m}}, \\ \Omega_r(a) &= \frac{c_1}{a^{3(\omega_r - \omega_m)} + c_1 + c_2 a^{1+3\omega_r}},\end{aligned}\tag{4.2.22}$$

где су c_1 и c_2 позитивне константе. Из (4.2.22) и $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_r$ следи

$$\begin{aligned}\Omega_r(a) &= c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} \Omega_m(a), \\ \Omega_k(a) &= 1 - \Omega_m(a)(1 + c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)}).\end{aligned}\quad (4.2.23)$$

► **Случај $\Omega_m > 0$, $\Omega_r > 0$, $\Omega_\Lambda > 0$ и $\Omega_k = 0$**

Раван универзум у фази доминације материјом разматран је у овом случају. Прецизније, разматран је равн универзум око $5 \cdot 10^8$ година након Великог праска (фаза транзиције између зрачења и тамне енергије).

Заменом $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r$ у (4.1.12), добијамо

$$\begin{aligned}\Omega_m' &= \Omega_m(-3(1 + \omega_m) + 3(1 + \omega_m)\Omega_m + 3(1 + \omega_r)\Omega_r), \\ \Omega_r' &= \Omega_r(-3(1 + \omega_r) + 3(1 + \omega_m)\Omega_m + 3(1 + \omega_r)\Omega_r),\end{aligned}\quad (4.2.24)$$

са $\Omega_i' = \frac{\dot{\Omega}_i}{H}$. Спровођењем поступка из Секције 4.2.1, добијамо решење система (4.2.24)

$$\begin{aligned}\Omega_m(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} + c_2 a^{3(1 + \omega_m)}}, \\ \Omega_r(a) &= \frac{c_1}{a^{3(\omega_r - \omega_m)} + c_1 + c_2 a^{3(1 + \omega_r)}},\end{aligned}\quad (4.2.25)$$

где су c_1 и c_2 позитивне константе. Из (4.2.25) и $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_r$ следи

$$\begin{aligned}\Omega_r(a) &= c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} \Omega_m(a), \\ \Omega_\Lambda(a) &= 1 - \Omega_m(a)(1 + c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)}).\end{aligned}\quad (4.2.26)$$

4.2.3 Једнодимензионални динамички систем

Посматрамо систем (4.1.12) када су тачно два од четири параметра Ω_i једнака нули. Стога разматрамо шест случајева. За свих шест случајева, *Maple* је успео да нађе аналитичка решења која су иста као решења која су овде представљена.

► **Случај $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_\Lambda > 0$ и $\Omega_k > 0$**

Узимајући у обзир занемарљивост материје и зрачења, као и доминацију тамне енергије, овај случај представља будући стадијум отвореног универзума. Заменом $\Omega_m = 0$ и $\Omega_r = 0$ у систем (4.1.12), добијамо

$$\Omega_\Lambda' = \Omega_\Lambda(2 - 2\Omega_\Lambda), \quad (4.2.27)$$

са $\Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$ and $\Omega_\Lambda' = \frac{\dot{\Omega}_\Lambda}{H}$. Решење диференцијалне једначине (4.2.27) је

$$\Omega_\Lambda(a) = \frac{a^2}{a^2 + c_1}, \quad (4.2.28)$$

где је c_1 позитивна константа. Из $\Omega_k = 1 - \Omega_\Lambda$ и (4.2.28), следи $\Omega_k(a) = \frac{c_1}{a^2 + c_1}$.

► **Случај $\Omega_m = 0$, $\Omega_r > 0$, $\Omega_\Lambda = 0$ and $\Omega_k > 0$**

У овом случају је посматран отворен универзум са зрачењем као доминантним флуидом, односно рана фаза отвореног универзума. Заменом $\Omega_m = 0$ и $\Omega_\Lambda = 0$ у систем

(4.1.12), добијамо

$$\Omega_r' = \Omega_r(- (1 + 3\omega_r) + \Omega_r (1 + 3\omega_r)), \quad (4.2.29)$$

са $\Omega_r + \Omega_k = 1$ и $\Omega_r' = \frac{\dot{\Omega}_r}{H}$. Решавањем (4.2.29) и коришћењем $\Omega_k = 1 - \Omega_r$, добијамо

$$\begin{aligned} \Omega_r(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{1+3\omega_r}}, \\ \Omega_k(a) &= 1 - \frac{1}{1 + c_1 a^{1+3\omega_r}}, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

где је c_1 позитивна константа.

► **Случај** $\Omega_m = 0$, $\Omega_r > 0$, $\Omega_\Lambda > 0$ и $\Omega_k = 0$

Раван универзум са зрачењем и тамном енергијом је анализиран у овом случају. Из истог разлога као у случају $\Omega_m = 0$, $\Omega_r > 0$, $\Omega_\Lambda > 0$ и $\Omega_k > 0$ (први случај у Секцији 4.2.2), анализираћемо овај случај само због комплетности овог поглавља, упркос одсуству физичке интерпретације у контексту Λ CDM модела. Посматрајмо

$$\Omega_r' = \Omega_r(-3(1 + \omega_r) + 3(1 + \omega_r)\Omega_r), \quad (4.2.31)$$

са $\Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$ и $\Omega_r' = \frac{\dot{\Omega}_r}{H}$. Решавањем (4.2.31) и заменом решења у $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_r$, добијамо

$$\begin{aligned} \Omega_r(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{3(1+\omega_r)}}, \\ \Omega_\Lambda(a) &= 1 - \frac{1}{1 + c_1 a^{3(1+\omega_r)}}, \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

где је c_1 позитивна константа.

► **Случај** $\Omega_m > 0$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_\Lambda = 0$ и $\Omega_k > 0$

Отворен универзум којим доминира материја је разматран у овом случају. Због симетрије система (4.1.12) у односу на индексе m и r , решење диференцијалне једначине

$$\Omega_m' = \Omega_m(- (1 + 3\omega_m) + \Omega_m (1 + 3\omega_m)), \quad (4.2.33)$$

са $\Omega_m + \Omega_k = 1$ и $\Omega_m' = \frac{\dot{\Omega}_m}{H}$, је исто као решење диференцијалне једначине (4.2.29), након замене индекса r са m , односно

$$\begin{aligned} \Omega_m(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{1+3\omega_m}}, \\ \Omega_k(a) &= 1 - \frac{1}{1 + c_1 a^{1+3\omega_m}}, \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

где је c_1 позитивна константа.

► **Случај** $\Omega_m > 0$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_\Lambda > 0$ и $\Omega_k = 0$

Услед присуства материје и космолошке константе у равном универзуму, као и занемарљивости зрачења, овај случај одговара равном универзуму око периода једнакости густина материје и тамне енергије, око 10^9 година након Великог праска.

Коришћењем симетрије између индекса m и r , решење диференцијалне једначине

$$\Omega_m' = \Omega_m(-3(1 + \omega_m) + 3(1 + \omega_m)\Omega_m), \quad (4.2.35)$$

са $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ и $\Omega_m' = \frac{\dot{\Omega}_m}{H}$, је исто као решење диференцијалне једначине (4.2.31), након замене индекса r са m , односно

$$\begin{aligned}\Omega_m(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{3(1+\omega_m)}}, \\ \Omega_\Lambda(a) &= 1 - \frac{1}{1 + c_1 a^{3(1+\omega_m)}},\end{aligned}\tag{4.2.36}$$

где је c_1 позитиван параметар.

► **Случај** $\Omega_m > 0$, $\Omega_r > 0$, $\Omega_\Lambda = 0$ и $\Omega_k = 0$

У овом случају је разматран раван универзум око периода транзиције између зрачења и материје. Посматрајмо

$$\Omega_m' = \Omega_m(-3(\omega_m - \omega_r) + 3(\omega_m - \omega_r)\Omega_m),\tag{4.2.37}$$

са $\Omega_m + \Omega_r = 1$ и $\Omega_m' = \frac{\dot{\Omega}_m}{H}$. Решавањем претходне диференцијалне једначине и заменом добијеног решења у $\Omega_r = 1 - \Omega_m$, добијамо

$$\begin{aligned}\Omega_m(a) &= \frac{a^{3\omega_r}}{a^{3\omega_r} + c_1 a^{3\omega_m}}, \\ \Omega_r(a) &= 1 - \frac{a^{3\omega_r}}{a^{3\omega_r} + c_1 a^{3\omega_m}},\end{aligned}\tag{4.2.38}$$

где је c_1 позитивна константа.

У Табели 4.1 су представљени сви случајеви из Секције 4.2. Код случајева који су означени *, присуство зрачења и недостатак материје аутоматски указују на рану фазу универзума. Присуство члана који одговара својствима тамне енергије могао би да проузрокује нагло ширење раног универзума [45], [49]. Међутим, таква теорија није сагласна са стандардним космолошким моделом. Упркос томе, ови случајеви су укључени да бисмо одредили сва решења система (4.1.12).

Табела 4.1. Сви случајеви из Секције 4.2 добијени за различите комбинације космолошких параметара густине градивних компоненти универзума.

Комбинација космолошких параметара Ω_i	Доминантан флуид	Тип универзума
$\Omega_m > 0, \Omega_r > 0, \Omega_\Lambda > 0, \Omega_k > 0$	m	отворен (око транзиције $\Omega_r = \Omega_\Lambda$)
$\Omega_m = 0, \Omega_r > 0, \Omega_\Lambda > 0, \Omega_k > 0$	r	отворен (рани универзум)*
$\Omega_m > 0, \Omega_r = 0, \Omega_\Lambda > 0, \Omega_k > 0$	m и Λ	отворен (око транзиције $\Omega_m = \Omega_\Lambda$)
$\Omega_m > 0, \Omega_r > 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_k > 0$	r и m	отворен (око транзиције $\Omega_r = \Omega_m$)
$\Omega_m > 0, \Omega_r > 0, \Omega_\Lambda > 0, \Omega_k = 0$	m	раван (око транзиције $\Omega_r = \Omega_\Lambda$)
$\Omega_m = 0, \Omega_r = 0, \Omega_\Lambda > 0, \Omega_k > 0$	Λ	отворен (будући стадијум)
$\Omega_m = 0, \Omega_r > 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_k > 0$	r	отворен (рани универзум)
$\Omega_m = 0, \Omega_r > 0, \Omega_\Lambda > 0, \Omega_k = 0$	r	раван (рани универзум)*
$\Omega_m > 0, \Omega_r = 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_k > 0$	m	отворен
$\Omega_m > 0, \Omega_r = 0, \Omega_\Lambda > 0, \Omega_k = 0$	m и Λ	раван (око транзиције $\Omega_m = \Omega_\Lambda$)
$\Omega_m > 0, \Omega_r > 0, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_k = 0$	r и m	раван (око транзиције $\Omega_r = \Omega_m$)

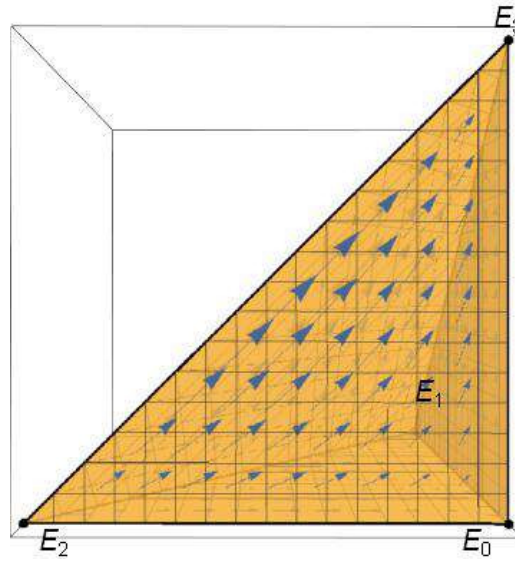
У литератури (на пример, видети [7], [47], [21], [57]) систем (4.2.12) или неки слични

системи су анализирани применом теорије динамичких система. Представимо детаљно тај метод овде ради анализирања система (4.1.12), који је општији од система (4.2.12). Та анализа ће нам омогућити да разумемо еволуцију универзума из нове перспективе. Видећемо како су параметри густине утицали на ширење универзума од његовог настанка и како ће њихово понашање имати директан утицај на будућност универзума.

4.3 Анализа стабилности динамичког система

Из $\Omega_i \in [0, 1]$ и (4.1.1), закључујемо да је фазни простор система (4.1.12) тетраедар са теменима $E_0(0, 0, 0)$, $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$ и $E_3(0, 0, 1)$, која се налазе на осама Ω_m , Ω_r и Ω_Λ , (Слика 4.2 [37]).

С обзиром на то да важи $\omega_m, \omega_r \in [0, 1]$ и $\omega_m \neq \omega_r$, једини еквилибријуми система (4.1.12) су управо темена $E_0(0, 0, 0)$, $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$ and $E_3(0, 0, 1)$.



Слика 4.2. [37] Фазни портрет динамичког система (4.1.12) са вредностима $\omega_m = 0$ и $\omega_r = 1/3$.

Као што ћемо видети, услов $\omega_m \neq \omega_r$ омогућава да сопствене вредности Јакобијеве матрице у еквилибријумима E_i , где је $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, имају реалне делове различите од нуле. Стога, еквилибријуми E_i су хиперболички и можемо да утврдимо њихову стабилност помоћу Теореме 1.0.4. Сада испитајмо стабилност еквилибријума система (4.1.12).

Еквилибријум E_0 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_0 су $\lambda_1 = -(1 + 3\omega_m)$, $\lambda_2 = -(1 + 3\omega_r)$ и $\lambda_3 = 2$. Како је $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 > 0$, закључујемо да је E_0 седло (нестабилан еквилибријум). Имајући у виду да је E_0 координатни почетак, односно да је $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 0$ и $\Omega_\Lambda = 0$, добијамо $\Omega_k = 1$, одакле следи да је $k < 0$. Дакле, у околини еквилибријума E_0 , универзум је празан и отворен без Λ , такође познат као Милнов универзум. Према горњој дискусији, закључујемо да је ово нестабилна фаза у еволуцији универзума.

Еквилибријум E_1 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_1 су управо $\lambda_1 = 1 + 3\omega_m$, $\lambda_2 = 3(\omega_m - \omega_r)$ и $\lambda_3 = 3(1 + \omega_m)$. Како је $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 > 0$, разликујемо два случаја, у зависности од знака израза $(\omega_m - \omega_r)$. Ако је $\omega_m > \omega_r$, тада је $\lambda_2 > 0$, одакле следи да је E_1 нестабилан чвор (нестабилан еквилибријум). Ако је $\omega_m < \omega_r$, онда је E_1 седло (нестабилан еквилибријум). На основу координата еквилибријума E_1 , односно из $\Omega_m = 1$, $\Omega_r = 0$ и $\Omega_\Lambda = 0$, добијамо $\Omega_k = 0$, одакле следи $k = 0$. Стога, у околини еквилибријума E_1 , универзум је раван са материјом као доминантним флуидом и без Λ , такође познат

као Ајнштајн-де Ситеров универзум. Истичемо да је ова фаза универзумове еволуције, без обзира на знак израза $(\omega_m - \omega_r)$, нестабилна.

Еквилибријум E_2 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у еквилибријуму E_2 су симетричне сопственим вредностима у E_1 , у односу на индексе m и r , односно $\lambda_1 = 1 + 3\omega_r$, $\lambda_2 = 3(\omega_r - \omega_m)$ и $\lambda_3 = 3(1 + \omega_r)$. Како је $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 > 0$, закључујемо да природа еквилибријума E_2 зависи од знака израза $(\omega_m - \omega_r)$. Ако је $\omega_m > \omega_r$, тада је $\lambda_2 < 0$, одакле следи да је E_2 седло (нестабилан еквилибријум). Ако је $\omega_m < \omega_r$, онда је E_2 нестабилан чвор (нестабилан еквилибријум). Како је у овом случају задовољено $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 1$ и $\Omega_\Lambda = 0$, добијамо $\Omega_k = 0$, одакле следи $k = 0$. Свеукупно, у околини еквилибријума E_2 , универзум је раван са зрачењем као доминантним флуидом, без космолошке константе. Као у претходном случају, универзум је нестабилан у околини овог еквилибријума.

Еквилибријум E_3 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_3 су $\lambda_1 = -3(1 + \omega_m)$, $\lambda_2 = -3(1 + \omega_r)$ и $\lambda_3 = -2$. Како је $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 < 0$, закључујемо да је E_3 стабилан чвор (асимптотски стабилан еквилибријум). Овде је $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_\Lambda = 1$ и $k = 0$. Дакле, у околини еквилибријума E_3 , универзум је раван и Λ -доминантан, такође познат као де-Ситеров универзум. Дакле, ово је стабилна фаза у еволуцији универзума.

Свеукупно, E_0 је седло (нестабилан еквилибријум), E_3 је стабилан чвор (асимптотски стабилан еквилибријум), док стабилност еквилибријума E_1 и E_2 зависи од знака израза $(\omega_m - \omega_r)$. Без губитка општости, претпоставимо да је $\omega_m < \omega_r$. Стога, E_1 је седло (нестабилан еквилибријум), док је E_2 нестабилан чвор (нестабилан еквилибријум).

Решења система (4.1.12) су орбите које почињу у E_2 када $\xi \rightarrow -\infty$, односно $a(t) \rightarrow 0_+$, и завршавају у E_3 када $\xi \rightarrow +\infty$, односно $a(t) \rightarrow +\infty$. То значи да је рани универзум био раван са зрачењем као доминантним флуидом, док је будућност равног универзума одређена доминацијом Λ , што је сагласно са посматрањима. Изузетак су орбите на границама и у унутрашњостима троуглова $\Delta E_0 E_1 E_2$ и $\Delta E_0 E_1 E_3$, који се налазе у (Ω_m, Ω_r) -равни и $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ -равни, редом. Ови изузеци су очекивани, јер редом одговарају трајекторијама у универзуму без космолошке константе и трајекторијама у универзуму без зрачења. Сада ћемо детаљније да анализирамо ове ситуације.

4.3.1 Универзум без космолошке константе Λ

Заменом $\Omega_\Lambda = 0$ у (4.1.12), добијамо

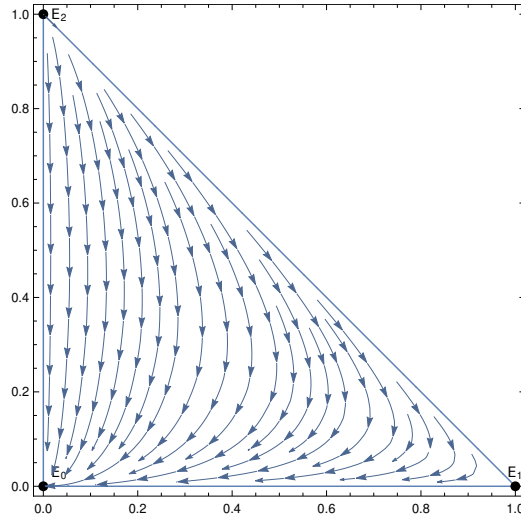
$$\begin{aligned}\Omega_m' &= \Omega_m(-(1 + 3\omega_m) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r)), \\ \Omega_r' &= \Omega_r(-(1 + 3\omega_r) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r)),\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

са $\Omega_i \in [0, 1]$, $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k = 1$ и $\Omega_i' = \frac{\dot{\Omega}_i}{H}$, што је исти систем као у (4.2.21). Решења система (4.3.1) су изведена у Секцијама 4.2.2 и 4.2.3, у зависности од тога да ли су неки параметри $\Omega_i > 0$, или су једнаки нули.

Фазни простор система (4.3.1) је троугао у (Ω_m, Ω_r) -равни чија темена имају координате $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$, што су управо координате тачака E_0 , E_1 и E_2 у равни $\Omega_\Lambda = 0$. Ради једноставности, означимо наш фазни простор са $\Delta E_0 E_1 E_2$ (Слика 4.3 [37]).

С обзиром на то да је $\omega_m, \omega_r \in [0, 1]$ и $\omega_m < \omega_r$, еквилибријуми система (4.3.1) су темена $E_0(0, 0)$, $E_1(1, 0)$ и $E_2(0, 1)$. Применом Теореме 1.0.4, закључујемо следеће.

Еквилибријум E_0 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_0 су $\lambda_1 = -(1 + 3\omega_m)$ и $\lambda_2 = -(1 + 3\omega_r)$. Како је $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, следи да је E_0 стабилан чвор (асимптотски стабилан еквилибријум). Слично тродимензионалном случају, закључујемо да је универзум у околини еквилибријума E_0 управо Милнов универзум (празан и отворен универзум без Λ).



Слика 4.3. [37] Фазни портрет динамичког система (4.3.1) са вредностима $\omega_m = 0$ и $\omega_r = 1/3$.

Еквилибријум E_1 . У овом случају, сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_1 су $\lambda_1 = 1 + 3\omega_m$ и $\lambda_2 = 3(\omega_m - \omega_r)$. Како је $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$, следи да је E_1 седло (нестабилан еквилибријум). Следи, универзум у околини еквилибријума E_1 је Ајнштајн-де Ситеров универзум (раван универзум без космолошке константе са материјом као доминантним флуидом).

Еквилибријум E_2 . Еквилибријум E_2 је нестабилан чвор (нестабилан еквилибријум), с обзиром на то да су сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_2 управо $\lambda_1 = 1 + 3\omega_r$ и $\lambda_2 = 3(\omega_r - \omega_m)$. Како је $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, следи да је универзум у околини еквилибријума E_2 раван универзум без космолошке константе са зрачењем као доминантним флуидом.

Свеукупно, решења система (4.3.1) су трајекторије које теже E_2 када $\xi \rightarrow -\infty$ и теже E_0 када $\xi \rightarrow +\infty$. То је прилично интересно, јер указује на то да, у одсуству Λ , приближно раван универзум са зрачењем као доминантним флуидом ће тежити да еволуира у Милнов универзум, који је отворен и празан. Изузеци су трајекторије које повезују E_2 са E_1 и E_1 са E_0 , односно оне трајекторије на правој $\Omega_r = 1 - \Omega_m$ и оне на Ω_m -оси. Те трајекторије одговарају или равном универзуму без Λ , или универзуму без зрачења и без Λ . У првом случају, описана је тенденција еволуирања равнот универзума са зрачењем као доминантним флуидом и без космолошке константе у Ајнштајн-де Ситеров универзум, или (у другом случају) еволуирање Ајнштајн-де Ситеровог универзума у Милнов универзум.

4.3.2 Универзум без зрачења

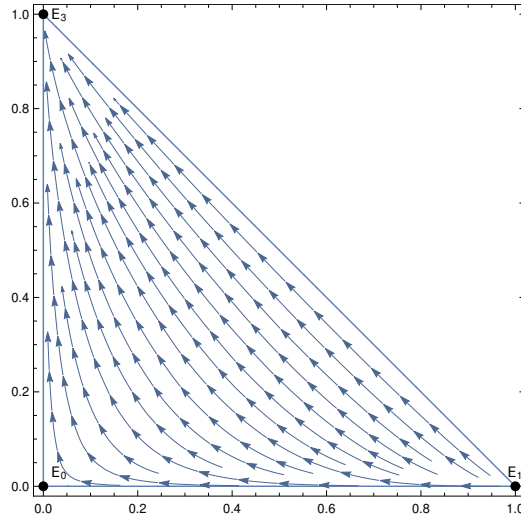
Заменом $\Omega_r = 0$ у (4.1.12), добијамо

$$\begin{aligned}\Omega_m' &= \Omega_m(-(1 + 3\omega_m) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) - 2\Omega_\Lambda), \\ \Omega_\Lambda' &= \Omega_\Lambda(2 + \Omega_m(1 + 3\omega_m) - 2\Omega_\Lambda),\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

са $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$ и $\Omega_i' = \frac{\dot{\Omega}_i}{H}$, што је исти систем као (4.2.18). Решења система (4.3.2) су одређена у Секцијама 4.2.2 и 4.2.3, у зависности од тога да ли су сви $\Omega_i > 0$, или не.

Фазни простор за систем (4.3.2) је троугао у $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ -равни чија темена имају координате $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$, што су управо координате тачака E_0 , E_1 и E_3 у равни $\Omega_r = 0$. Ради једноставности, означимо наш фазни простор са $\Delta E_0 E_1 E_3$ (Слика 4.4 [37]).

Како је $\omega_m \in [0, 1]$, еквилибријуми система (4.3.2) су темена $E_0(0,0)$, $E_1(1,0)$ и $E_3(0,1)$.



Слика 4.4. [37] Фазни портрет динамичког система (4.3.2) за $\omega_m = 0$.

Коришћењем Теореме 1.0.4, добијамо следеће.

Еквилибријум E_0 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_0 су $\lambda_1 = -(1 + 3\omega_m)$ и $\lambda_2 = 2$. Како је $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$, следи да је E_0 седло (нестабилан еквилибријум). На исти начин као у тродимензионалном случају, закључујемо да је универзум у околини еквилибријума E_0 управо Милнов универзум (празан и отворен универзум без Λ).

Еквилибријум E_1 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у еквилибријуму E_1 су $\lambda_1 = 1 + 3\omega_m$ и $\lambda_2 = 3(1 + \omega_m)$, одакле закључујемо да је $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, па је еквилибријум E_1 нестабилан чвор (нестабилан еквилибријум). Универзум у околини еквилибријума E_1 је Ајнштајн де-Ситеров универзум (раван универзум са материјом као доминантним флуидом, без Λ).

Еквилибријум E_3 . Сопствене вредности Јакобијеве матрице у еквилибријуму E_3 су управо $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -3(1 + \omega_m)$. Како је $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, закључујемо да је E_3 стабилан чвор (асимптотски стабилан еквилибријум). Штавише, универзум у околини еквилибријума E_3 је де-Ситеров универзум (раван универзум којим доминира Λ).

Решења система (4.3.2) су трајекторије које теже E_1 када $\xi \rightarrow -\infty$ и теже E_3 када $\xi \rightarrow +\infty$. Из тога следи да ће Ајнштајн де-Ситеров универзум тежити да еволуира у де-Ситеров универзум. Изузеци су трајекторије које повезују E_1 са E_0 и E_0 са E_3 , односно оне трајекторије на Ω_m -оси и на Ω_Λ -оси. Те трајекторије одговарају или универзуму без зрачења и Λ , или универзуму без зрачења и материје. У првом случају, описана је тенденција еволуирања Ајнштајн де-Ситеровог универзума у Милнов универзум (приметили смо ово у Секцији 4.3.1), или (у другом случају) еволуирање Милновог универзума у де-Ситеров универзум.

4.4 Анализа стабилности еквилибријума за $\omega_m = \omega_r$

Ако претпоставимо да је $\omega_m = \omega_r$, онда E_1 није хиперболички еквилибријум (јер је тада $\lambda_2 = 3(\omega_m - \omega_r) = 0$). Стога његову стабилност не можемо да одредимо применом Теореме 1.0.4. Уместо тога, одредићемо његову стабилност коришћењем Теореме 1.0.7. Конкретно, показаћемо да је еквилибријум E_1 нестабилан на $(0, +\infty)^3$. Последице, еквилибријум E_1 је такође нестабилан на тетраедру на Слици 4.2, односно на фазном простору система (4.1.12).

Претпоставимо да је функција Љапунова облика $V_1(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) := \Omega_m^{-3} \Omega_r^2 \Omega_\Lambda$ [62]. Тада је $\dot{V}_1(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) = 3(1 + \omega_m) \Omega_m^{-3} \Omega_r^2 \Omega_\Lambda$. Приметимо да је функција V_1 диференцијабилна на $(0, +\infty)^3$, $V_1(E_1) = 0$ и да је $V_1(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) > 0$ за свако

$(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) \in (0, +\infty)^3$. С обзиром на то да је $\omega_m \in [0, 1]$, онда је $\dot{V}_1(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) > 0$ за свако $(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) \in (0, +\infty)^3$. На основу тога следи да је V_1 функција Љапунова за еквилибријум E_1 и E_1 је нестабилан еквилибријум на $(0, +\infty)^3$.

Штавише, под претпоставком $\omega_m = \omega_r$, исти резултат важи и за еквилибријум E_2 , односно нехиперболички еквилибријум E_2 је нестабилан на $(0, +\infty)^3$, одакле следи да је нестабилан на одговарајућем тетраедру. Да бисмо се уверили у то, можемо посматрати функцију Љапунова $V_2(\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda) := \Omega_m^2 \Omega_r^{-3} \Omega_\Lambda$.

Свеукупно, ако је $\omega_m = \omega_r$ тада су оба еквилибријума E_1 и E_2 нестабилна на фазном простору система (4.1.12). У космологији се обично узимају вредности $\omega_m = 0$ и $\omega_r = 1/3$, па је случај $\omega_m = \omega_r$ интересантан само са математичког аспекта.

Глава 5

Фридманове једначине као n -димензионални динамички систем

У овој глави је испитана динамика Λ CDM модела универзума који је састављен од n различитих баротропских савршених флуида који немају међусобну интеракцију (сем гравитационе). Показана је еквиваленција система Фридманових једначина и система од n нелинеарних диференцијалних једначина првог реда чије су зависне променљиве управо параметри густине флуида од којих је састављен универзум. Еквиваленција тог система, који је из класе n -димензионалних Лотка–Волтериних динамичких система, и система Фридманових једначина омогућава проучавање динамике система Фридманових једначина са аспекта теорије динамичких система. Одређено је и аналитичко решење тог n -димензионалног система у случају када су сви параметри густине позитивни. То аналитичко решење представља нову параметризацију параметара густине фактором ширења универзума. Доказано је да за фиксиран природан број n и за фиксирани вредности $\omega_i \in [0, 1]$, може бити одређено не само аналитичко решење одговарајућег динамичког система, већ и природа свих еквилибријума тог динамичког система као и еволуција одговарајућег космолошког модела. Без обзира на бесконачно много могућих космолошких модела и на бесконачно много могућности за еволуцију универзума, једно је сигурно - ако у изабраном космолошком моделу универзума постоји не-нула космолошка константа, онда је његова будућност одређена у виду де-Ситеровог универзума. Главни резултати пете главе се базирају на резултатима рада [11], док се нека појашњења ослањају и на рад [40], при чему се одговарајуће алгебарске зависности из рада [40] такође јављају и у раду [39].

У Глави 4 је анализирана динамика Λ CDM модела универзума, при чему су се компоненте материје у универзуму састојале од два баротропска савршена флуида (*материје* и *зрачења*) који, сем гравитационе, нису имали другу врсту међусобне интеракције, и чији су параметри једначина стања $\omega_m, \omega_r \in [0, 1]$, $\omega_m \neq \omega_r$, где се индекс m односи на *материју*, а индекс r се односи на *зрачење*. Под *материјом* подразумевамо барионску материју и хладну тамну материју, док се *зрачење* односи на релативистичке честице (фотоне и неутрине). Овде посматрамо n различитих баротропских савршених флуида који, сем гравитационе, немају другу врсту међусобне интеракције, при чему је један од њих управо космолошка константа Λ , за коју се у литератури (видети [7, 28, 47]) претпоставља да има једначину стања $\omega_\Lambda = -1$. Међу преосталих $(n - 1)$ флуида могу се наћи материја и зрачење, док тренутно није познато шта тачно могу бити преостали баротропски савршени флуиди, сем да за сваки i -флуид, $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, претпостављамо да важи $\omega_i \in [0, 1]$. Упркос недостатку одговарајуће космолошке интерпретације, са математичког аспекта је прилично интересантно видети шта се дешава у таквом универзуму.

Систем Фридманових једначина (4.0.1) у случају n флуида је облика

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \\ \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) &= 0,\end{aligned}\tag{5.0.1}$$

где је

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{j=1}^n \rho_j, \quad \rho_n = \rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G, \quad p = \sum_{j=1}^n p_j, \quad p_n = p_\Lambda, \\ p_i &= \omega_i \rho_i c^2, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \omega_n = \omega_\Lambda = -1.\end{aligned}\tag{5.0.2}$$

Веза између просечне густине i -флуида, означене са $\rho_i = \rho_i(t)$, где је $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, и притиска i -флуида, означеног са $p_i = p_i(t)$, одражава се у претпоставци да је сваки i -флуид баротропски савршен и према томе једначина стања је задовољена за сваки i -флуид, односно задовољено је

$$p_i = \omega_i \rho_i c^2,\tag{5.0.3}$$

где је ω_i параметар једначине стања за i -флуид, [7, 28]. За параметре једначина стања првих $(n-1)$ флуида претпостављамо да је задовољено $0 \leq \omega_i \leq 1$ (see [7]), $\omega_i \neq \omega_j$ за $i \neq j$, док за последњи флуид узимамо космолошку константу Λ , са $\omega_n = \omega_\Lambda = -1$.

Услов да флуиди немају међусобну интеракцију (сем гравитационе) значи да је једначина флуида задовољена за сваки i -флуид [7, 47]

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_i + \frac{p_i}{c^2}\right) = 0.\tag{5.0.4}$$

Уколико израз за Хаблов параметар $H = \dot{a}/a$ и једначину стања за i -флуид $p_i = \omega_i \rho_i c^2$ заменимо у (5.0.4), добијамо погоднију једначину флуида за i -флуид

$$\dot{\rho}_i = -3H\rho_i(1 + \omega_i).\tag{5.0.5}$$

Параметри густине су дефинисани на стандардан начин [34]

$$\Omega_i(t) = \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho_i(t), \quad \Omega_k(t) = -\frac{kc^2}{a^2(t)H^2(t)},\tag{5.0.6}$$

где је Ω_i параметар густине за i -флуид, док је Ω_k параметар густине која потиче од кривине простора.

Све дискусије у овој глави се односе на раван универзум ($k = 0$), или на отворен универзум ($k < 0$). У складу са физичким рестрикцијама, у овој глави претпостављамо да су све функције непрекидно диференцијабилне колико год пута да је потребно.

5.1 Аналитичко решење n -димензионалног динамичког система

У овој секцији формулисаћемо и доказаћемо теорему која представља уопштење Теореме 4.1.12 из Поглавља 4 за n баротропских савршених флуида који, сем гравитационе, немају међусобних интеракција. Тај резултат нам омогућава да систем

Фридманових једначина (5.0.1) проучавамо са становишта теорије динамичких система.

Да бисмо извели еквивалентан систем, применићемо поступак из Главе 4, који је базиран на [7, 21, 24, 47, 57], уводећи променљиву $\xi(t) = \ln(a(t))$. Изводе по променљивој ξ означаћемо са $'$.

Теорема 5.1.1 *Ако су задовољени услови (5.0.2), онда је систем Фридманових једначина (5.0.1) заједно са једначином (5.0.5) за сваки i -флуид, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, еквивалентан систему*

$$\begin{aligned}\Omega_i' &= \Omega_i \left(- (1 + 3\omega_i) + \sum_{j=1}^n \Omega_j (1 + 3\omega_j) \right), \\ \sum_{j=1}^n \Omega_j + \Omega_k &= 1, \\ \Omega_i' &= \frac{\dot{\Omega}_i}{H},\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

где су Ω_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ дефинисани у (5.0.6).

Доказ. Докажимо да систем (5.1.1) следи из система (5.0.1).

Заменом $\rho = \sum_{j=1}^n \rho_j$ у Фридманову једначину (прву једначину) у (5.0.1) и дељењем са $H^2 \neq 0$, следи

$$\sum_{j=1}^n \Omega_j + \Omega_k = 1.\tag{5.1.2}$$

Диференцирањем параметара густине Ω_i по променљивој ξ и заменом (5.0.5) (што је оправдано, јер флуиди не интерагују међусобно), добијамо

$$\Omega_i' = -3\Omega_i(1 + \omega_i) + \Omega_i \cdot \frac{-2\dot{H}}{H^2}.\tag{5.1.3}$$

Ако заменимо $\rho = \sum_{j=1}^n \rho_j$ у Фридманову једначину у (5.0.1) и онда је диференцирамо по временској променљивој t , добијамо

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3} \sum_{j=1}^n \rho_j + 2kc^2 \cdot \frac{\dot{a}}{a^3}.\tag{5.1.4}$$

Заменом $\Omega_k = 1 - \sum_{j=1}^n \Omega_j$ и (5.0.5) у (5.1.4), добијамо

$$\frac{-2\dot{H}}{H^2} = 2 + \sum_{j=1}^n \Omega_j(1 + 3\omega_j).\tag{5.1.5}$$

Заменом (5.1.5) у (5.1.3), изводимо

$$\Omega_i' = \Omega_i \left(- (1 + 3\omega_i) + \sum_{j=1}^n \Omega_j (1 + 3\omega_j) \right),\tag{5.1.6}$$

што је управо систем (5.1.1).

Докажимо други смер. Из $\sum_{j=1}^n \Omega_j + \Omega_k = 1$ директно следи Фридманова једначина у (5.0.1). Систем (5.0.1) није одређен и како једначина убрзања следи из једначине флуида и Фридманове једначине, да бисмо доказали други смер Теореме 5.1.1 довољно је доказати да је задовољена једначина флуида.

Из $\rho_n = \rho_\Lambda = \Lambda c^2 / 8\pi G$ следи $\Omega_n = \Omega_\Lambda = \Lambda c^2 / 3H^2$, одакле добијамо

$$\frac{\Omega_n'}{\Omega_n} = \frac{-2\dot{H}}{H^2}. \quad (5.1.7)$$

На основу (5.1.7) и прве једначине у (5.1.1) за $i = n$, закључујемо

$$\frac{-2\dot{H}}{H^2} = -(1 + 3\omega_n) + \sum_{j=1}^n \Omega_j(1 + 3\omega_j). \quad (5.1.8)$$

Из $\Omega_i' = \dot{\Omega}_i / H$ и $\Omega_i = 8\pi G \rho_i / 3H^2$, следи

$$\Omega_i' = \frac{8\pi G}{3H^3} \dot{\rho}_i + \frac{8\pi G \rho_i}{3H^2} \cdot \frac{-2\dot{H}}{H^2}, \quad (5.1.9)$$

одакле, заменом (5.1.8), следи

$$\frac{\Omega_i'}{\Omega_i} = \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \cdot \frac{1}{H} - (1 + 3\omega_n) + \sum_{j=1}^n \Omega_j(1 + 3\omega_j). \quad (5.1.10)$$

Поређењем једначине (5.1.10) са првом једначином из система (5.1.1) и заменом $\omega_n = -1$, добијамо

$$\frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \cdot \frac{1}{H} = 3(\omega_n - \omega_i) = -3(1 + \omega_i), \quad (5.1.11)$$

одакле следи

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= -3H\rho_i(1 + \omega_i), \quad i \neq n, \\ \dot{\rho}_n &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

што је управо једначина флуида (5.0.5) за сваки i -флуид, укључујући космолошку константу. Из (5.1.12) и (5.0.2) директно следи једначина флуида и самим тим систем Фридманових једначина (5.0.1), чиме је доказ завршен. $\square$

Теорема 5.1.1 тврди да систем Фридманових једначина (5.0.1) за n баротропских савршених флуида (један од њих је космолошка константа) који не интерагују међусобно (сем гравитационо), јесте еквивалентан динамичком систему (5.1.1). Следећи корак је одређивање аналитичког решења система (5.1.1).

Посматрајмо првих n једначина из система (5.1.1)

$$\Omega_i' = \Omega_i \left(-(1 + 3\omega_i) + \sum_{j=1}^n \Omega_j(1 + 3\omega_j) \right), \quad (5.1.13)$$

имајући у виду да важи и $\sum_{j=1}^n \Omega_j + \Omega_k = 1$ и $\Omega_i' = \frac{\dot{\Omega}_i}{H}$, где су $\Omega_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ дефинисани у (5.0.6).

Приметимо да је систем (5.1.13) из класе Лотка–Волтериних динамичких система. Претпоставимо да су сви параметри густине позитивни. Иначе (уколико је неки од

параметара густине једнак нули), одређивање аналитичког решења динамичког система (5.1.13) је много лакше, јер је број једначина у том систему смањен. С обзиром на то да сума свих параметара густине мора да буде једнака 1, следи да сви параметри густине морају да буду мањи од 1. Стога, тражимо само решења $0 < \Omega_i < 1$.

Према тродимензионалном случају из Главе 4, тврдимо да је аналитичко решење система (5.1.13), за $0 \leq \omega_i \leq 1$, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\omega_n = \omega_\Lambda = -1$, $\omega_i \neq \omega_j$ за $i \neq j$, облика

$$\Omega_i(\xi) = \frac{c_{i-1}}{\sum_{j=1}^n c_{j-1} e^{3(\omega_i - \omega_j)\xi} + c_n e^{(1+3\omega_i)\xi}}, \quad c_0 := 1, \quad (5.1.14)$$

где су $c_1, c_2, \dots, c_n$ позитивне реалне константе.

Функције Ω_i из (5.1.14) су непрекидно диференцијабилне за свако $\xi \in \mathbb{R}$.

Услов $0 < \Omega_i < 1$ је задовољен, јер су $c_1, c_2, \dots, c_n$ позитивне константе и јер је $1/\Omega_i > 1$.

Из (5.1.14) изводимо следеће

$$\begin{aligned} \Omega_i(\xi) &= c_{i-1} e^{3(\omega_1 - \omega_i)\xi} \Omega_1(\xi), \\ \Omega_j(\xi) &= \frac{c_{j-1}}{c_{i-1}} e^{3(\omega_i - \omega_j)\xi} \Omega_i(\xi), \quad c_0 := 1. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

Покажимо да Ω_i из (5.1.14) задовољавају систем (5.1.13) користећи везе из (5.1.15).

Заменом $i = 1$ у (5.1.14) добијамо $\Omega_1^{-1}(\xi) = \sum_{j=1}^n c_{j-1} e^{3(\omega_1 - \omega_j)\xi} + c_n e^{(1+3\omega_1)\xi}$. Диференцирањем

$\Omega_1^{-1}(\xi)$ по ξ , добијамо

$$-\frac{\Omega_1'(\xi)}{\Omega_1^2(\xi)} = \sum_{j=1}^n 3(\omega_1 - \omega_j) c_{j-1} e^{3(\omega_1 - \omega_j)\xi} + (1 + 3\omega_1) c_n e^{(1+3\omega_1)\xi}. \quad (5.1.16)$$

Ако обе стране прве једначине у систему (5.1.13) (која се добије за $i = 1$) поделимо са $-\Omega_1^2$, добијамо

$$-\frac{\Omega_1'}{\Omega_1^2} = -\Omega_1^{-1} \left(-(1 + 3\omega_1) + \sum_{j=1}^n \Omega_j (1 + 3\omega_j) \right). \quad (5.1.17)$$

Заменом прве једначине из (5.1.15) за $i = j$ у једначину (5.1.17) добијамо

$$-\frac{\Omega_1'}{\Omega_1^2} = \Omega_1^{-1} (1 + 3\omega_1) - \sum_{j=1}^n c_{j-1} (1 + 3\omega_j) e^{3(\omega_1 - \omega_j)\xi}. \quad (5.1.18)$$

Ако у десну страну једначине (5.1.18) заменимо $\Omega_1^{-1}(\xi) = \sum_{j=1}^n c_{j-1} e^{3(\omega_1 - \omega_j)\xi} + c_n e^{(1+3\omega_1)\xi}$,

добијамо управо (5.1.16), одакле закључујемо да $\Omega_1(\xi) = \left(\sum_{j=1}^n c_{j-1} e^{3(\omega_1 - \omega_j)\xi} + c_n e^{(1+3\omega_1)\xi} \right)^{-1}$

задовољава прву једначину у систему (5.1.13) за $i = 1$.

Покажимо да функције Ω_i из (5.1.14) задовољавају систем (5.1.13), за свако $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.

На основу прве једначине из (5.1.15) следи

$$\Omega_i'(\xi) = 3(\omega_1 - \omega_i) \Omega_i + c_{i-1} e^{3(\omega_1 - \omega_i)\xi} \Omega_1'(\xi). \quad (5.1.19)$$

Како смо доказали да Ω_1 задовољава прву једначину у систему (5.1.13) за $i = 1$, заменом

$\Omega_1' = \Omega_1 \left(- (1 + 3\omega_1) + \sum_{j=1}^n \Omega_j (1 + 3\omega_j) \right)$ у (5.1.19) и коришћењем прве једначине из (5.1.15), добијамо

$$\Omega_i' = \Omega_i \left(- (1 + 3\omega_i) + \sum_{j=1}^n \Omega_j (1 + 3\omega_j) \right), \quad (5.1.20)$$

што је управо систем (5.1.13). Према томе, (5.1.14) заиста представља аналитичко решење система (5.1.13).

Из (5.1.14) и $\sum_{j=1}^n \Omega_j + \Omega_k = 1$, изводимо следеће

$$\begin{aligned} \Omega_i(\xi) &= c_{i-1} e^{3(\omega_1 - \omega_i)\xi} \Omega_1(\xi), \\ \Omega_j(\xi) &= \frac{c_{j-1}}{c_{i-1}} e^{3(\omega_i - \omega_j)\xi} \Omega_i(\xi), \\ \Omega_k(\xi) &= 1 - \Omega_1(\xi) \sum_{j=1}^n c_{j-1} e^{3(\omega_1 - \omega_j)\xi}, \quad c_0 := 1. \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Заменом $\xi = \ln a$ у (5.1.14) и (5.1.21), аналитичко решење (5.1.14) можемо представити као

$$\Omega_i(a) = \frac{c_{i-1}}{\sum_{j=1}^n c_{j-1} a^{3(\omega_i - \omega_j)} + c_n a^{1+3\omega_i}}, \quad c_0 := 1, \quad (5.1.22)$$

док су одговарајуће релације

$$\begin{aligned} \Omega_i(a) &= c_{i-1} a^{3(\omega_1 - \omega_i)} \Omega_1(a), \\ \Omega_j(a) &= \frac{c_{j-1}}{c_{i-1}} a^{3(\omega_i - \omega_j)} \Omega_i(a), \\ \Omega_k(a) &= 1 - \Omega_1(a) \sum_{j=1}^n c_{j-1} a^{3(\omega_1 - \omega_j)}, \quad c_0 := 1. \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

Решење (5.1.22) описује релацију између параметара густина $0 < \Omega_i < 1$ и фактора ширења универзума, за сваки Λ CDM модел универзума који се састоји од произвољног броја баротропских савршених флуида који немају међусобну интеракцију (сем гравитационе) и са $0 \leq \omega_i \leq 1$, $\omega_i \neq \omega_j$ за $i \neq j$, са космолошким константом која је такође баротропских савршен неинтерагујући флуид са $\omega_n = \omega_\Lambda = -1$. Све што је потребно знати јесте број флуида, као и конкретне вредности од ω_i и заменити те вредности у (5.1.22). Стога, пронашли смо решења за случајеве који су описани у литератури и доказали смо да су сва та решења садржана у једној формули, а та формула је (5.1.22). У Секцији 5.2 је описана еволуција сваког таквог Λ CDM модела универзума.

Приметимо да, уколико посматрамо тродимензионални случај динамичког система (5.1.1) и уколико заменимо $\omega_\Lambda = -1$, добијамо динамички систем који је анализиран у Глави 4. Упркос томе, кратко ћемо размотрити тродимензионални случај динамичког система (5.1.1), јер се у њему види симетрија у односу на индексе m , r и Λ , за разлику од система разматраног у Глави 4. Последишно, та симетрија важи и када говоримо о аналитичком решењу тог система и управо је она послужила као мотивација за генерализацију овог тродимензионалног случаја у n -димензионални случај који је представљен у Секцији 5.1.

5.1.1 Случај $n=3$

Заменом $n = 3$, $\Omega_1 \rightarrow \Omega_m$, $\Omega_2 \rightarrow \Omega_r$, $\Omega_3 \rightarrow \Omega_\Lambda$, $\omega_1 \rightarrow \omega_m$, $\omega_2 \rightarrow \omega_r$, као и $\omega_3 \rightarrow \omega_\Lambda$, у систем (5.1.1) и у његово аналитичко решење (5.1.14), добијамо следећи систем

$$\begin{aligned}\Omega_m' &= \Omega_m(- (1 + 3\omega_m) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) + \Omega_\Lambda(1 + 3\omega_\Lambda)), \\ \Omega_r' &= \Omega_r(- (1 + 3\omega_r) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) + \Omega_\Lambda(1 + 3\omega_\Lambda)), \\ \Omega_\Lambda' &= \Omega_\Lambda(- (1 + 3\omega_\Lambda) + \Omega_m(1 + 3\omega_m) + \Omega_r(1 + 3\omega_r) + \Omega_\Lambda(1 + 3\omega_\Lambda)), \\ \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k &= 1, \\ \Omega_i' &= \frac{\dot{\Omega}_i}{H},\end{aligned}\tag{5.1.24}$$

чије је решење

$$\begin{aligned}\Omega_m(\xi) &= \frac{1}{1 + c_1 e^{3(\omega_m - \omega_r)\xi} + c_2 e^{3(\omega_m - \omega_\Lambda)\xi} + c_3 e^{(1+3\omega_m)\xi}}, \\ \Omega_r(\xi) &= \frac{c_1}{e^{3(\omega_r - \omega_m)\xi} + c_1 + c_2 e^{3(\omega_r - \omega_\Lambda)\xi} + c_3 e^{(1+3\omega_r)\xi}}, \\ \Omega_\Lambda(\xi) &= \frac{c_2}{e^{3(\omega_\Lambda - \omega_m)\xi} + c_1 e^{3(\omega_\Lambda - \omega_r)\xi} + c_2 + c_3 e^{(1+3\omega_\Lambda)\xi}}.\end{aligned}\tag{5.1.25}$$

Уколико заменимо $n = 3$, $\Omega_1 \rightarrow \Omega_m$, $\Omega_2 \rightarrow \Omega_r$, $\Omega_3 \rightarrow \Omega_\Lambda$, $\omega_1 \rightarrow \omega_m$, $\omega_2 \rightarrow \omega_r$, као и $\omega_3 \rightarrow \omega_\Lambda$ у (5.1.22) и (5.1.23), добијамо следеће зависности између параметара густина и фактора ширења универзума $a = a(t)$

$$\begin{aligned}\Omega_m(a) &= \frac{1}{1 + c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} + c_2 a^{3(\omega_m - \omega_\Lambda)} + c_3 a^{1+3\omega_m}}, \\ \Omega_r(a) &= \frac{c_1}{a^{3(\omega_r - \omega_m)} + c_1 + c_2 a^{3(\omega_r - \omega_\Lambda)} + c_3 a^{1+3\omega_r}}, \\ \Omega_\Lambda(a) &= \frac{c_2}{a^{3(\omega_\Lambda - \omega_m)} + c_1 a^{3(\omega_\Lambda - \omega_r)} + c_2 + c_3 a^{1+3\omega_\Lambda}},\end{aligned}\tag{5.1.26}$$

као и

$$\begin{aligned}\Omega_r(a) &= c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} \Omega_m(a), \\ \Omega_\Lambda(a) &= c_2 a^{3(\omega_m - \omega_\Lambda)} \Omega_m(a), \\ \Omega_k(a) &= 1 - \Omega_m(a) (1 + c_1 a^{3(\omega_m - \omega_r)} + c_2 a^{3(\omega_m - \omega_\Lambda)}).\end{aligned}\tag{5.1.27}$$

Подсећамо да, уколико заменимо $\omega_\Lambda = -1$ у систем (5.1.24) и у његово аналитичко решење, добијамо динамички систем који је анализиран у Глави 4, као и његово аналитичко решење. Ипак, имајући у виду да је $\omega_\Lambda = -1$, задржаћемо ω_Λ у Секцији 5.1.1, јер нам то обезбеђује симетрију у систему (5.1.24) у односу на индексе m , r и Λ .

Истичемо да су релације (5.1.27) за $\omega_m = 0$, $\omega_r = 1/3$ и $\omega_\Lambda = -1$ добијене у [39, 40] коришћењем алгебарског приступа.

Теорија о линеарној стабилности примењена на систем (5.1.24) нам даје исте резултате као у Глави 4. Кратко ћемо их навести овде ради лакшег уопштења на n -димензионални случај.

Координатни почетак $E_0 = (0, 0, 0)$ је један од еквилибријума система (5.1.24). Узимајући у обзир $\omega_m, \omega_r \in [0, 1]$, $\omega_m \neq \omega_r$, $\omega_\Lambda = -1$, преостали еквилибријуми система (5.1.24) су $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ и $E_3 = (0, 0, 1)$, и налазе се на координатним осама Ω_m , Ω_r и Ω_Λ , редом.

Сопствене вредности Јакобијеве матрице у еквилибријуму E_0 су $\lambda_m = -(1 + 3\omega_m)$, $\lambda_r = -(1 + 3\omega_r)$ и $\lambda_\Lambda = -(1 + 3\omega_\Lambda) = 2$, одакле следи $\lambda_m < 0$, $\lambda_r < 0$ и $\lambda_\Lambda > 0$, на основу

чега закључујемо да је E_0 седло. Овај модел универзума у околини E_0 је карактерисан као Милнов универзум (празан и отворен универзум без космолошке константе).

Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_1 су $\lambda_m = 1 + 3\omega_m$, $\lambda_r = 3(\omega_m - \omega_r)$ и $\lambda_\Lambda = 3(\omega_m - \omega_\Lambda) = 3(\omega_m + 1)$, на основу чега закључујемо да је $\lambda_m > 0$, $\lambda_r \neq 0$ и $\lambda_\Lambda > 0$, одакле следи да је овај еквилибријум седло (нестабилан еквилибријум) ако је $\omega_r > \omega_m$, иначе је нестабилан чвор (нестабилан еквилибријум). Универзум у околини E_1 понаша се као Ајнштајн-де Ситеров универзум (раван универзум са материјом као доминантним флуидом, без космолошке константе).

Стабилност еквилибријума E_2 може бити испитана заменом места индекса m и r у дискусији која се односила на стабилност еквилибријума E_1 . Универзум у околини E_2 се понаша као раван универзум без космолошке константе са зрачењем као доминантним флуидом.

У околини E_3 , универзум се понаша као де-Ситеров универзум (раван универзум којим доминира космолошка константа). Сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_3 управо $\lambda_m = 3(\omega_\Lambda - \omega_m) = -3(1 + \omega_m)$, $\lambda_r = 3(\omega_\Lambda - \omega_r) = -3(1 + \omega_r)$ и $\lambda_\Lambda = 1 + 3\omega_\Lambda = -2$, одакле следи $\lambda_m < 0$, $\lambda_r < 0$ и $\lambda_\Lambda < 0$, на основу чега закључујемо да је еквилибријум E_3 је стабилан чвор (асимптотски стабилан еквилибријум).

5.2 Анализа стабилности n-димензионалног динамичког система

Посматрајмо систем (5.1.1) за $0 \leq \Omega_i \leq 1$. Један од еквилибријума је координатни почетак E_0 . С обзиром на то да је $0 \leq \omega_i \leq 1$ за $i \neq n$, $\omega_n = -1$, као и $\omega_i \neq \omega_j$ за $i \neq j$, имамо још n еквилибријума система (5.1.1). Означимо их са E_i , при чему i указује на то да је i -та координата еквилибријума E_i једнака 1, док је преосталих $(n - 1)$ координата једнако 0. Дакле, имамо по један еквилибријум на свакој од n координатних оса Ω_i .

За потребе уопштења, уводимо замену $m \rightarrow 1$, $r \rightarrow 2$ и $\Lambda \rightarrow 3$ у сопствене вредности Јакобијеве матрице израчунате у еквилибријумима добијеним у тродимензионалном случају. Резултати за $i, j \in \{1, 2, 3\}$ су

$$\begin{aligned} \text{сопствене вредности у } E_0 \text{ су } \lambda_j &= -(1 + 3\omega_j), \\ \text{сопствене вредности у } E_i \text{ су } \lambda_j &= \begin{cases} 3(\omega_i - \omega_j), & i \neq j, \\ 1 + 3\omega_i, & j = i. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Истичемо да се сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, појављују у аналитичком решењу (5.1.25) тродимензионалног динамичког система (5.1.24) као степени фактора ширења универзума. Сличну ситуацију очекујемо за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Означимо са $F_i = F_i(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$ десну страну једнакости у систему (5.1.1), односно

$$F_i = \Omega_i \left(-(1 + 3\omega_i) + \sum_{j=1}^n \Omega_j (1 + 3\omega_j) \right). \quad (5.2.2)$$

Тада су елементи Јакобијеве матрице $\left[\frac{\partial F_i}{\partial \Omega_l} \right]_{n \times n}$ управо

$$\frac{\partial F_i}{\partial \Omega_l} = \begin{cases} \Omega_i(1 + 3\omega_l), & i \neq l, \\ -(1 + 3\omega_i) + \Omega_i(1 + 3\omega_i) + \sum_{j=1}^n \Omega_j(1 + 3\omega_j), & i = l. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Раздвојимо дискусију на два дела.

Еквилибријум E_0 . У овом случају су сви $\Omega_i = 0$, одакле следи да за параметар густине која потиче од густине простора важи $\Omega_k = 1$. Стога, универзум у околини овог еквилибријума понаша се као Милнов универзум и одредићемо његову стабилност.

Елементи Јакобијеве матрице у E_0 су

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial \Omega_l} \right|_{E_0} = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ -(1 + 3\omega_i), & i = l. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Јакобијева матрица у E_0 је дијагонална матрица и стога су њене сопствене вредности управо $\lambda_i = -(1 + 3\omega_i)$. Како је

$$\lambda_i = \begin{cases} -(1 + 3\omega_i), & i \neq n, \\ -(1 + 3\omega_n) = 2, & i = n, \end{cases} \quad (5.2.5)$$

следи $\lambda_i < 0$ за $i \neq n$ и $\lambda_n > 0$, па је еквилибријум E_0 нестабилан. Закључујемо да је универзум који се понаша као Милнов универзум нестабилан.

Еквилибријум E_p , $p \in \{1, 2, \dots, n\}$. У овом случају, само је $\Omega_p = 1$, док су сви други Ω_i (као и Ω_k) једнаки нули. Универзум у околини еквилибријума E_p је раван са доминантним p -флуидом.

Елементи Јакобијеве матрице у еквилибријуму E_p имају следеће вредности

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial \Omega_l} \right|_{E_p} = \begin{cases} 1 + 3\omega_l, & l \neq i = p, \\ 3(\omega_p - \omega_i), & l = i \neq p, \\ 1 + 3\omega_p, & l = i = p, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Према томе, Јакобијева матрица у E_p је облика

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial \Omega_l} \right] \Big|_{E_p} = \begin{bmatrix} 3(\omega_p - \omega_1) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3(\omega_p - \omega_2) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 + 3\omega_1 & 1 + 3\omega_2 & \dots & 1 + 3\omega_p & \dots & 1 + 3\omega_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 3(\omega_p - \omega_n) \end{bmatrix}. \quad (5.2.7)$$

Карактеристичан полином Јакобијеве матрице у E_p је

$$P(\lambda) = (1 + 3\omega_p - \lambda) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n (3(\omega_p - \omega_i) - \lambda). \quad (5.2.8)$$

Стога, сопствене вредности Јакобијеве матрице у E_p су

$$\lambda_i = \begin{cases} 3(\omega_p - \omega_i), & i \neq p, \\ 1 + 3\omega_p, & i = p. \end{cases} \quad (5.2.9)$$

Ако применимо замену $i \rightarrow j$ и $p \rightarrow i$ у (5.2.9) и у сопственим вредностима Јакобијеве

матрице у E_0 , онда за $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ добијамо

$$\begin{aligned} \text{сопствене вредности у } E_0 \text{ су } \lambda_j &= -(1 + 3\omega_j), \\ \text{сопствене вредности у } E_i \text{ су } \lambda_j &= \begin{cases} 3(\omega_i - \omega_j), & j \neq i, \\ 1 + 3\omega_i, & j = i, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

што је управо исти резултат као у (5.2.1). Штавише, примећујемо исту ситуацију у тродимензионалном случају, односно сопствене вредности у E_i из (5.2.10) су степени фактора ширења универзума у (5.1.14), што је аналитичко решење n -димензионалног случаја.

Када говоримо о знаку сопствених вредности у E_i , када је $i \neq n$, добијамо

$$\lambda_j = \begin{cases} 3(\omega_i - \omega_j), & j \neq i \text{ и } j \neq n, \\ 3(\omega_i - \omega_n) = 3(\omega_i + 1), & j \neq i \text{ и } j = n, \\ 1 + 3\omega_i, & j = i \neq n, \end{cases} \quad (5.2.11)$$

одакле следи да је $\lambda_j > 0$ за $j = n \neq i$ и за $j = i \neq n$, па закључујемо да је E_i нестабилан еквилибријум за $i \neq n$, без обзира на знак члана $3(\omega_i - \omega_j)$ за $j \neq i$ и $j \neq n$. Одговарајућа физичка интерпретација је да раван универзум без космолошке константе доминиран i -флуидом, $0 \leq \omega_i \leq 1$, јесте нестабилан.

Са друге стране, ако је $i = n$, односно ако испитујемо стабилност еквилибријума E_n , онда имамо

$$\lambda_j = \begin{cases} 3(\omega_n - \omega_j) = -3(1 + \omega_j), & j \neq n, \\ 1 + 3\omega_n = -2, & j = n, \end{cases} \quad (5.2.12)$$

одакле следи да је $\lambda_j < 0$ за свако $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, Према томе, еквилибријум E_n је стабилан чвор (асимптотски стабилан еквилибријум). Дакле, де-Ситеров универзум је асимптотски стабилан.

Већ смо видели у Глави 4 да варирањем броја флуида у универзуму добијамо различите моделе универзума и разноврсну еволуцију таквих модела. Међутим, ако у изабраном моделу универзума постоји не нула космолошка константа, тада је последњи стадијум тог универзума управо де-Ситеров универзум, што је конзистентно са [47].

Литература

- [1] M. A. Adbelkader, *Exact solutions of Lotka–Volterra equations*, Math. Biosci. 21 (1974) 171–179.
- [2] V. Aboites, J. F. Bravo-Avilés, J. H. García-López, R. Jaimes Reategui, and G. Huerta-Cuellar, *Interpretation and Dynamics of the Lotka-Volterra Model in the Description of a Three-Level Laser*, Photonics 9 (2022) 16.
- [3] S. Ahmad, *On the nonautonomous Volterra-Lotka competition equations*, Proc. Am. Math. Soc. 117 (1993) 199–204.
- [4] S. Ahmad, A. C. Lazer, *On species extinction in an autonomous competition model*, in: *World Congress of Nonlinear Analysts '92. Proceedings of the First World Congress*, Tampa, FL, USA, August 19–26, 1992, 4 volumes, Berlin, de Gruyter, 1996, 359–368.
- [5] S. Ahmad, A. C. Lazer, *Necessary and sufficient average growth in a Lotka–Volterra system*, Nonlinear Anal. 34 (1998) 191–228.
- [6] S.F. AL-Azzawi, *Stability and bifurcation of pan chaotic system by using Routh–Hurwitz and Gardan methods*, Appl. Math. Comput. 219 (2012) 1144–1152.
- [7] S. Bahamonde, C. G. Böhmér, S. Carloni, E. J. Copeland, W. Fang, N. Tamanini, *Dynamical systems applied to cosmology: Dark energy and modified gravity*, Phys. Rep. 775–777 (2018) 1–122.
- [8] R.L. Borrelli, C.S. Coleman, *Differential Equations*, 4th Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1998.
- [9] W.E. Boyce, R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 8th Edition, John Wiley and Sons, Inc., United States of America, 2010.
- [10] D. Branković, *Cosmic time for multi-component universe*, Serb. Astron. J. 201 (2020) 15–23.
- [11] D. Branković, *Friedmann equations as n -dimensional dynamical system*, An. Sti. U. Ovid. Co. - Mat. 31 (2023) 23–37.
- [12] D. Branković, Ž. Mijajlović, M. Mikić, *Dynamics of the Λ CDM model of the universe from the aspect of the dynamical systems theory*, Ann. Acad. Rom. Sci. Math. Appl. 18 (2026) 5–29.
- [13] D. Branković, M. Mikić, *Stability of Equilibriums and Bifurcation Analysis of Two-dimensional Autonomous Competitive Lotka-Volterra Dynamical System*, Kragujev. J. Math. 51 (2027) 1087–1105 (прихваћен за објављивање).
- [14] D. Branković, M. Mikić, *Stability of equilibriums of n -dimensional autonomous competitive Lotka-Volterra dynamical system* (2026) (рад на рецензији).

- [15] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, 4th Edition, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 1993.
- [16] M. Braun, *The principle of competitive exclusion in population biology*, in: M. Braun, C. S. Coleman and D. A. Drew (Eds.), *Differential Equation Models*, Springer, New York, 1983.
- [17] F. Cao, J. Jiang, *The classification on the global phase portraits of two-dimensional Lotka–Volterra system*, J. Dynam. Differential Equations 20 (2008) 797–830.
- [18] U. Foryś, *Multi-dimensional Lotka–Volterra systems for carcinogenesis mutations*, Math. Meth. Appl. Sci. 32 (2009) 2287–2308.
- [19] A. Friedman, *Über die Krümmung des Raumes*, Z. Physik 10 (1922) 377–386.
- [20] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Pub. Co., 1959.
- [21] R. García-Salcedo, T. Gonzales, F. A. Horta-Rangel, I. Quiros, and D. Sanchez-Guzmán, *Introduction to the application of the dynamical systems theory in the study of the dynamics of cosmological models of dark energy*, Eur. J. Phys. 36 (2015) 025008.
- [22] M. Gilpin, F. Ayala, *Global models of growth and competition*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 70 (1973) 3590–3593.
- [23] B.-S. Goh, *Management and Analysis of Biological Populations*, Developments in Agricultural and Managed-forest Ecology, Elsevier Scientific Pub. Co., 1980.
- [24] M. Goliath, G. F. R. Ellis, *Homogeneous cosmologies with a cosmological constant*, Phys. Rev. D 60 (1999) 023502.
- [25] E. Gonzalez-Olivares, A. Rojas-Palma, *Stability in Kolmogorov-type quadratic systems describing interactions among two species. A brief revision*, Sel. Mat. 8 (2021) 131–146.
- [26] C. P. Grant, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Brigham Young University, 2007, https://sites.pitt.edu/~phase/bard/bardware/classes/2920/Grant_4july2007.pdf.
- [27] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [28] M. Hobson, G. Efstathiou, A. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [29] J. Hofbauer, K. Sigmund, *Evolutionary games and population dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [30] J. Hofbauer, K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems. Mathematical Aspects of Selection*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [31] E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1977.
- [32] Kamke Benchmark, https://www.maplesoft.com/products/maple/new_features/maple15/differential_equations.aspx.
- [33] J. Катић, Диференцијалне једначине (скрипта), <https://poincare.matf.bg.ac.rs/~jelena.katic/DJ/dj.pdf>.

- [34] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, 2000.
- [35] D. Liu, *Stability*, in W.-K. Chen (Ed.), *The Electrical Engineering Handbook* (pp. 1027–1035), Elsevier Academic Press, 2005.
- [36] A. J. Lotka, *Elements of mathematical biology*, (unabridged), Republication of the first edition published under the title: *Elements of Physical Biology*, Dover Publications Inc., New York, 1956, 465 p.
- [37] Mathematica files 1712.03107 [gr-qc], <https://www.christianboehmer.co.uk/review.html> (accessed 17 July 2026).
- [38] R. May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, 2nd Edition, Princeton University Press, 2001.
- [39] Ž. Mijajlović, D. Branković, *Algebraic dependencies and representations of cosmological parameters*, Publ. Astron. Obs. Belgrade 100 (2021) 295–300.
- [40] Ž. Mijajlović, D. Branković, *On Algebraic Dependence of Cosmological Parameters*, Gravit. Cosmol. 29 (2023) 456–467.
- [41] F. Munteanu, *A study of a three-dimensional competitive Lotka–Volterra system*, ITM Web Conf. 34 (2020), Article ID 03010.
- [42] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, 2nd Edition, Springer, Berlin, 1993.
- [43] S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110 (2024) 030001.
- [44] D. Neal, *Introduction to Population Biology*, Cambridge University Press, 2003.
- [45] F. Niedermann, M. S. Sloth, *New early dark energy*, Phys. Rev. D 103 (2021) L041303.
- [46] F. Pacucci, *The First Black Holes in the Cosmic Dark Ages*, Zenodo (2016).
- [47] J. Perez, A. Füzfa, T. Carletti, L. Mélot, and S. Guedeounme, *The Jungle Universe: Coupled cosmological models in a Lotka–Volterra framework*, Gen. Relativ. Gravit. 46 (2014) 1753.
- [48] S. Perlmutter et al, *Measurements of Ω and Λ from 42 High–Redshift Supernovae*, ApJ 517 (1999) 565.
- [49] V. Poulin, T. L. Smith, T. Karwal and M. Kamionkowski, *Early Dark Energy can Resolve the Hubble Tension*, Phys. Rev. Lett. 122 (2019) 221301.
- [50] J. Reyn, *Phase Portraits of Planar Quadratic Systems*, Springer, New York, 2007.
- [51] J. Reyn, *Phase portraits of a quadratic system of differential equations occurring frequently in applications*, Nieuw Arch. Wisk. 5 (1987) 107–151.
- [52] A. G. Riess et al, *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, AJ 116 (1998) 1009.
- [53] B. Ryden, *Introduction to cosmology*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

- [54] D. Schlomiuk, N. Vulpe, *Global classification of the planar Lotka-Volterra differential systems according to their configurations of invariant straight lines*, J. Fixed Point Theory Appl. 8 (2010), 177–245.
- [55] F. Scudo, J. Ziegler, *The golden age of theoretical ecology, 1923–1940: A collection of works by Volterra, Kostitzin, Lotka and Kolmogoroff*, Lecture Notes in Biomathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [56] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Perseus Books Publishing, Reading, MA, 1994.
- [57] J.-P. Uzan, R. Lehoucq, *A dynamical study of the Friedmann equations*, Eur. J. Phys. 22 (2001) 371.
- [58] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la Lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [59] V. Volterra, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Memorie del R. Comitato talassografico italiano, Mem. CXXXI 1927.
- [60] V. Volterra, *Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically*, Nature 118 (1926) 558–560.
- [61] A. Wörz-Busekros, *A complete classification of all two-dimensional Lotka–Volterra systems*, Differential Equations Dynam. Systems 1 (1993) 101–118.
- [62] M. L. Zeeman, *Extinction in competitive Lotka–Volterra systems*, Proc. Am. Math. Soc. 123 (1995) 87–96.
- [63] R. Zhang, G. Sun, *Hopf Bifurcation control of the Qi 3-D four wing chaotic system via washout filter*, in: The Second Int. Conf. Intelligent Control and Inform. Processing (2011) 177–179.

Биографија аутора

Данијела Бранковић је рођена 25. фебруара 1990. године у Руми, где је 2005. године завршила Основну школу „Душан Јерковић“ као ђак генерације. Природно–математички смер Гимназије „Стеван Пузић“ у Руми завршила је 2009. године као носилац Вукове дипломе. Основне академске студије на Математичком факултету у Београду, модул Теоријска математика и примене, уписала је 2009. године и дипломирала је 28. фебруара 2014. године са просечном оценом 8.73. Била је стипендиста Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије од 2010. до 2013. године.

Мастер академске студије на Математичком факултету у Београду на модулу Теоријска математика и примене уписала је 2014. године, а 2016. године одбранила је мастер рад под насловом „Диференцијални рачун на тангентним и котангентним раслојењима са интерпретацијом у класичној механици“ под менторством проф. др Јелене Катић. Просечна оцена на мастер студијама је 10. Докторске студије на Математичком факултету уписала је 2016. године и положила је све испите са просечном оценом 9.88.

Запослена је на Електротехничком факултету као сарадник у настави на Катедри за примењену математику од 1.10.2015. године, а као асистент од 16.11.2017. године.

Аутор је девет објављених научних радова, од којих су пет у часописима на SCI листи (два су категорије M21, два су категорије M22, један је категорије M23), један је у часопису са категоријом M24+, један је у часопису са категоријом M34, два су у часописима са категоријом M53. Има један рад који је прихваћен у часопису са категоријом M22, један рад који је на рецензији у часопису на SCI листи и један рад који је на рецензији у часопису који није на SCI листи. Учествовала је на четири међународне конференције, пет домаћих конференција са међународним учешћем и пет домаћих конференција.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Данијела Бранковић

број уписа 2020/2016

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Динамика аутономних компетитивних Лотка-Волтериних динамичких система

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 20.7.2026.

Бранковић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора _____ Данијела Бранковић _____

Број уписа _____ 2020/2016 _____

Студијски програм _____ Математика _____

Наслов рада Динамика аутономних компетитивних Лотка-Волтериних
динамичких система _____

Ментор _____ др Марија Микић _____

Потписани _____ Данијела Бранковић _____

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 20.7.2026.

Д. Бранковић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Динамика аутономних компетитивних Лотка-Волтериних динамичких система

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
- ☒ 3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 20.7.2026.

Српковић

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.