

ИЗБОРНОМ ВЕЋУ МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА

У листу „Послови“ од 8. октобра 2025. године објављен је Конкурс за избор у звање редовног професора за ужу научну област Топологија. На Конкурс се пријавио један кандидат - проф. др Бранислав Првуловић. Одређена је комисија за писање реферата у саставу: проф. др Владимир Грујић, проф. др Синиша Врећица, проф. др Дарко Милинковић, др Зоран Петрић и др Божидар Јовановић.

Комисија је прегледала уз Конкурс приложени материјал и подноси следећи

ИЗВЕШТАЈ

Биографија кандидата.

Проф. др Бранислав Првуловић је рођен 1977. године у Београду.

На Математичком факултету у Београду је дипломирао 2003. године са просечном оценом 9,32. Магистрирао је 2007. године одбранивши магистарски рад „Карактеристичне класе у теорији опструкција“.

Маја 2012. године Бранислав Првуловић је одбранио докторску дисертацију под називом „Гребнерове базе и имерзије Грасманових многострукости“. У раду су приказане и унапређене неке веома важне и напредне тополошке, као и алгебарске технике, које су потом примењене на добијање нових резултата у класичним проблемима као што је проблем имерзије многострукости у еуклидске просторе и неки други.

Од 2005. године запослен је као асистент приправник на Математичком факултету у Београду, од 2008. године као асистент, од 2013. године као доцент и од 2018. године као ванредни професор.

Научни рад кандидата.

Проф. др Бранислав Првуловић је до сада објавио 17 радова (од којих су 15 објављени у часописима са SCI листе). Од првог избора у звање ванредног професора је објавио 6 радова у часописима са SCI листе.

1. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *On Groebner bases and immersions of Grassmann manifolds* $G_{2,n}$, Homology, Homotopy Appl. **13(2)** (2011) 113–128. (M22)

2. B. I. Prvulović, *Groebner bases for complex Grassmann manifolds*, Publ. Inst. Math. **90(104)** (2011) 23–46. (M51)

3. Đ. Baralić, B. Prvulović, G. Stojanović, S. Vrećica, R. Živaljević, Topological obstructions to totally skew embeddings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012) 2213–2226. (M21)
4. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *On Grobner bases for flag manifolds $F(1, 1, \dots, 1, n)$* , *J. Algebra Appl.* **12**, 1250182 (2013) [7 pages] DOI: 10.1142/S0219498812501824. (M23)
5. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *Equivariant maps between complex Stiefel manifolds*, *Osaka J. Math.* **50** (2013) 187–196. (M23)
6. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *Gröbner bases and nonembeddings of some flag manifolds*, *J. Aust. Math. Soc.* **96** (2014) 338–353. (M23)
7. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *Note on immersion dimension of real Grassmannians*, *Topology Appl.* **175** (2014) 38–42. (M22)
8. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, M. Radovanović, *Multiplication in the cohomology of Grassmannians via Gröbner bases*, *J. Algebra* **438** (2015) 60–84. (M22)
9. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, M. Radovanović, *On maximality of the cup-length of flag manifolds*, *Acta Math. Hungar.* **149** (2) (2016) 448–461. (M22)
10. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, *New immersion theorems for Grassmann manifolds $G_{3,n}$* , *Publ. Inst. Math.* **101** (115) (2017) 1–10. (M51)
11. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, M. Radovanović, *Characteristic rank of canonical vector bundles over oriented Grassmann manifolds $\tilde{G}_{3,n}$* , *Topology Appl.* **230** (2017) 114–121. (M22)
12. B. I. Prvulović, M. Radovanović, *On the characteristic rank of vector bundles over oriented Grassmannians*, *Fund. Math.* **244** (2019) 167–190. (M23)
13. Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, M. Radovanović, *Gröbner bases for (partial) flag manifolds*, *J. Symb. Comput.* **101** (2020) 90–108. (M23)
14. U. A. Colović, B. I. Prvulović, *Gröbner bases in the mod 2 cohomology of oriented Grassmann manifolds $\tilde{G}_{2^t,3}$* , *Math. Slovaca* **74**(1) (2024) 195–208. (M21a)
15. U. A. Colović, B. I. Prvulović, *Cup-length of oriented Grassmann manifolds via Gröbner bases*, *J. Algebra* **642** (2024) 256–285. (M21)
16. M. Jovanović, B. I. Prvulović, *On the mod 2 cohomology algebra of oriented Grassmannians*, *J. Homotopy Relat. Struct.* **19** (2024) 379–396. (M22)

17. U. A. Colović, M. Jovanović, B. I. Prvulović, *Cohomology rings of oriented Grassmann manifolds $\tilde{G}_{2^t,4}$* , Topology Appl. **367** (2025) 109318. (M22)

Према извору Web of Science радови др Бранислава Првуловића цитирани су до сада 34 пута.

Приказ нових радова (од првог избора у звање ванредног професора).

- B. I. Prvulović, M. Radovanović, *On the characteristic rank of vector bundles over oriented Grassmannians*, Fund. Math. **244** (2019) 167–190.

Грасманову многострукост $\tilde{G}_{k,n}$ чине оријентисани k -димензиони потпростори еуклидског простора $\mathbb{R}^{n+k}$. За разлику од „обичног“ Грасманијана $G_{k,n}$, кохомолошка алгебра „оријентисаног“ Грасманијана $\tilde{G}_{k,n}$, поред Штифел–Витнијевих класа канонског векторског раслојења над $\tilde{G}_{k,n}$, садржи и друге, тзв. „аномаличне“ кохомолошке класе. То су оне које се не могу представити као полиноми над поменутим Штифел–Витнијевим класама. У овом раду разматра се проблем одређивања минималне кохомолошке димензије у којој се јављају аномаличне класе. Другим речима, проучава се карактеристични ранг канонског раслојења над $\tilde{G}_{k,n}$ (он је за један мањи од поменуте минималне димензије). Један од два главна резултата овог рада јесте доказ чињенице да је карактеристични ранг канонског раслојења над $\tilde{G}_{k,n}$ растућа функција од k . Тај доказ се есенцијално ослања на теорију Гребнерових база. Други је тачно израчунавање поменутог карактеристичног ранга за случај $k = 4$ (он је одраније познат у случајевима $k = 1, 2, 3$). То је, пак, употребљено за добијање неких процена кохомолошке дужине (cup-length) Грасманијана $\tilde{G}_{4,n}$.

- Z. Z. Petrović, B. I. Prvulović, M. Radovanović, *Gröbner bases for (partial) flag manifolds*, J. Symb. Comput. **101** (2020) 90–108.

Многострукост комплексних застава $F = F^{\mathbb{C}}(n_1, \dots, n_r)$ хомеоморфна је хомогеном простору $U(n_1 + \dots + n_r)/U(n_1) \times \dots \times U(n_r)$. Један од најпознатијих описа кохомолошке алгебре $H^*(F; \mathbb{Z})$ јесте Борелов опис, према ком је $H^*(F; \mathbb{Z})$ количник полиномијалне алгебре над Черновим класама канонских раслојења над F по добро познатом идеалу I_F . У овом раду одређена је Гребнерова база идеала I_F у свим случајевима (за све $r, n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$). Ова Гребнерова база олакшава рачунање у кохомолошкој алгебри, што је у раду и показано. Између осталог, помоћу ње су изведена нека правила за множење Чернових класа. Такође, у раду је представљена и аналогна Гребнерова база одговарајућег идеала за модуло 2 кохомологију многострукости реалних застава $F^{\mathbb{R}}(n_1, \dots, n_r) \cong O(n_1 + \dots + n_r)/O(n_1) \times \dots \times O(n_r)$.

- U. A. Colović, B. I. Prvulović, *Gröbner bases in the mod 2 cohomology of oriented Grassmann manifolds $\tilde{G}_{2^t,3}$* , Math. Slovaca **74**(1) (2024) 195–208.

У једном свом скорашњем раду индијски математичари Басу и Чакраборти дали су делимичан опис модуло 2 кохомологије Грасманових многострукости $\tilde{G}_{n,3}$, која се састоји од оријентисаних тродимензионалних потпростора од $\mathbb{R}^n$. Тај опис у случају кад је n степен двојке есенцијално је следећи:

$$H^*(\tilde{G}_{2^t,3}) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, a_{2^t-1}]}{(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, a_{2^t-1}^2 - Pa_{2^t-1})}.$$

На десној страни индекс променљиве јесте њен степен (кохомолошка димензија), косети од w_2 и w_3 при овом изоморфизму одговарају редом другој и трећој Штифел–Витнијевој класи канонског векторског раслојења над $\tilde{G}_{2^t,3}$, док косет од a_{2^t-1} одговара тзв. аномаличној кохомолошкој класи. Полиноми g_{2^t-2} и g_{2^t-1} су добро познати полиноми над w_2 и w_3 , који се могу добити из релације

$$(1 + w_2 + w_3)(1 + g_1 + g_2 + \cdots) = 1.$$

Опис је делимичан јер је полином P остао непознат (само је било познато да је он полином над w_2 и w_3). Другим речима, није био израчунат квадрат аномаличне класе у кохомологији.

Главни резултат рада који представљамо јесте доказ да је квадрат аномаличне класе једнак нули, тј. да се за P у горњем опису може узети нула-полином. Последице, кохомолошка алгебра је изоморфна следећем тензорском производу:

$$H^*(\tilde{G}_{2^t,3}) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3]}{(g_{2^t-2}, g_{2^t-1})} \otimes \Lambda(a_{2^t-1}),$$

где је $\Lambda(a_{2^t-1})$ спољна алгебра над a_{2^t-1} . Основни алати којима је добијен овај резултат јесу теорија Гребнерових база и дејство Стинродове алгебре на кохомологију.

- U. A. Colović, B. I. Prvulović, *Cup-length of oriented Grassmann manifolds via Gröbner bases*, J. Algebra **642** (2024) 256–285.

Кохомолошка дужина (cup-length) простора X (у односу на прстен R) јесте максимални природан број m такав да постоји m позитивно димензионалних кохомолошких класа $x_1, x_2, \dots, x_m \in H^*(X; R)$ таквих да је $x_1 \cdot x_2 \cdots x_m \neq 0$. За ову инваријанту се користи ознака $\text{cup}_R(X)$, а њен значај првенствено долази од чињенице да је она једно доње ограничење за Љустерник–Шнирелманову категорију простора X . Јапански математичар Фукаја је 2008. године поставио једну хипотезу о вредности кохомолошке дужине оријентисаних Грасманијана у односу на $\mathbb{Z}_2$: ако је $\tilde{G}_{n,3}$ Грасманова многострукост оријентисаних тродимензионалних потпростора у $\mathbb{R}^n$, $t \geq 3$ природан број са својством $2^t - 1 \leq n < 2^{t+1} - 1$, онда је

$$\sup_{\mathbb{Z}_2}(\tilde{G}_{n,3}) = \begin{cases} 2^t - 3, & 2^t - 1 \leq n \leq 2^t + 2^{t-1} - 2 \\ 2^t - 2, & n = 2^t + 2^{t-1} - 1 \\ 2^t - 1, & n = 2^t + 2^{t-1} \\ n - 2^s - 1, & 2^{t+1} - 2^{s+1} + 1 \leq n \leq 2^{t+1} - 2^s \quad (1 \leq s \leq t-2) \end{cases}$$

Фукаја је ову своју хипотезу доказао за случај $n = 2^t - 1$. Након тога у неколико радова различитих математичара хипотеза је потврђена у још неким парцијалним случајевима.

Основни резултат рада који приказујемо јесте доказ ове Фукајине хипотезе (у свим случајевима). Уз то су израчунате и висине Штифел–Витнијевих класа канонског раслојења над $\tilde{G}_{n,3}$. Главни метод који је коришћен у раду јесте теорија Гребнерових база. Тачније, за произвољно фиксирано n конструисана је Гребнерова база идеала који је у блиској вези с кохомолошком алгебром $H^*(\tilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}_2)$, што је омогућило лакше рачунање у овој алгебри.

- М. Jovanović, B. I. Prvulović, *On the mod 2 cohomology algebra of oriented Grassmannians*, J. Homotopy Relat. Struct. **19** (2024) 379–396.

Према Бореловом опису, модуло 2 кохомолошка алгебра Грасманових многострукости $G_{n,k}$ (k -димензионалних потпростора у $\mathbb{R}^n$) јесте изоморфна количнику полиномијалне алгебре $\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_k]$ по идеалу $(\bar{w}_{n-k+1}, \dots, \bar{w}_n)$ генерисаном полиномима $\bar{w}_i$, $n - k + 1 \leq i \leq n$, који се могу добити из идентитета:

$$(1 + w_1 + w_2 + \dots + w_k)(1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots) = 1.$$

Редукцијом по модулу w_1 добија се опис *праве* подалгебре кохомологије *оријентисаних* Грасманових многострукости $\tilde{G}_{n,k}$ (чији су елементи *оријентисани* k -димензионални потпростори од $\mathbb{R}^n$). Дакле, ова подалгебра је изоморфна са $\mathbb{Z}_2[w_2, \dots, w_k]/(g_{n-k+1}, \dots, g_n)$, где су g_i модуло w_1 редукције полинома $\bar{w}_i$. Али она је права подалгебра и досад није пронађен генералан потпун опис од $H^*(\tilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$, већ само неки парцијални резултати.

Оно што је било познато обухвата тривијалан случај $k = 1$ ($\tilde{G}_{n,1}$ је сфера димензије $n - 1$), затим случај $k = 2$, и случај $k = 3$, $n = 2^t$ ($t \geq 3$). Тема овог рада су случајеви $k = 3$, $n \in \{2^t - 3, 2^t - 2, 2^t - 1\}$ ($t \geq 3$). У свом скорашњем раду индијски математичари Басу и Чакраборти добили су делимичан опис ове кохомологије у овим случајевима доказавши да је

$$H^*(\tilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, a_{2^t-4}]}{(g_{n-2}, g_{n-1}, g_n, a_{2^t-4}^2 - P_1 a_{2^t-4} - P_2)},$$

где су P_1 и P_2 неки (непознати) полиноми над w_2 и w_3 (при чему су још утврдили да је $P_2 = 0$ за $n \in \{2^t - 3, 2^t - 2\}$). У раду који приказујемо доказано је да за $n \in \{2^t - 3, 2^t - 2\}$ важи и $P_1 = 0$, што даје потпун опис алгебре $H^*(\tilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}_2)$ у овим случајевима, док је за $n = 2^t - 1$ ($t \geq 3$)

показано да је $P_1 = g_{2^t-4}$ и $P_2 = \gamma w_2^{2^t-4}$ за неко (и даље непознато) $\gamma \in \mathbb{Z}_2$. Дакле, основни резултат рада су следећи изоморфизми градираних алгебри (зна се да је $g_{2^t-3} = 0$, па је овај полином сувишан у опису):

$$\begin{aligned} - H^*(\tilde{G}_{2^t-1,3}; \mathbb{Z}_2) &\cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, a_{2^t-4}]}{(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, a_{2^t-4}^2 - g_{2^t-4}a_{2^t-4} - \gamma w_2^{2^t-4})}; \\ - H^*(\tilde{G}_{2^t-2,3}; \mathbb{Z}_2) &\cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3]}{(g_{2^t-4}, g_{2^t-2})} \otimes \Lambda(a_{2^t-4}); \\ - H^*(\tilde{G}_{2^t-3,3}; \mathbb{Z}_2) &\cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3]}{(g_{2^t-5}, g_{2^t-4})} \otimes \Lambda(a_{2^t-4}). \end{aligned}$$

Резултат је добијен комбиновањем различитих техника – пре свега теорије Гребнерових база и неких класичних метода алгебарске топологије. Притом су коришћени одраније познати описи кохомолошке алгебре $H^*(\tilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$ у случајевима $k = 3$, $n = 2^t$ ($t \geq 3$), и $k = 2$, $n \equiv 2 \pmod{4}$.

- U. A. Colović, M. Jovanović, B. I. Prvulović, *Cohomology rings of oriented Grassmann manifolds* $\tilde{G}_{2^t,4}$, *Topology Appl.* **367** (2025) 109318.

Добро је позната чињеница да је модуло 2 кохомолошка алгебра Грасманове многострукости $G_{n,k}$ (k -димензионалних потпростора у $\mathbb{R}^n$) генерисана Штифел–Витнијевим класама канонског векторског раслојења над $G_{n,k}$. Кад је у питању тзв. *оријентисана* Грасманова многострукост $\tilde{G}_{n,k}$ (која се састоји од *оријентисаних* k -димензионалних потпростора од $\mathbb{R}^n$) Штифел–Витнијеве класе канонског раслојења не генеришу кохомолошку алгебру $H^*(\tilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$, већ је подалгебра генерисана овим класама димензије упола мање од $\dim H^*(\tilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$ (као векторског простора над $\mathbb{Z}_2$). Штавише, у овом „оријентисаном“ случају немамо тако леп опис мултипликативне структуре у кохомологији, који би одговарао Бореловом опису за „неоријентисани“ случај. Зато је проучавање и описивање алгебре $H^*(\tilde{G}_{n,k}; \mathbb{Z}_2)$ отворено поље истраживања, где су у последње време постигнути неки резултати. Између осталог, пронађени су мање-више потпуни описи ове алгебре кад је $k \leq 3$.

Овај рад се бави овим проблемом у наредном случају $k = 4$, и то кад је n степен двојке (делује да је ту ствар најједноставнија). У њему је доказано да је, поред поменутих Штифел–Витнијевих класа, довољна још једна (тзв. *аномалична*) класа, да бисмо добили генератрису од $H^*(\tilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$ као алгебре (та класа је кохомолошке димензије $2^t - 4$). То је урађено помоћу Серових спектралних низова извесних сферних раслојења. Одавде следи да је $H^*(\tilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$, као градирана алгебра, изоморфна количнику полиномијалне алгебре $\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]$ по неком идеалу. Затим је у раду конструисана Гребнерова база за тај идеал, која је, уз још неке стандардне технике алгебарске топологије (нпр. теорему Лере–Хирша), омогућила да се добије следећи опис ове кохомолошке алгебре:

$$H^*(\tilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{Z}_2[w_2, w_3, w_4, a_{2^t-4}]}{(g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t}, a_{2^t-4}^2 + P a_{2^t-4} + Q)}.$$

Овде су $g_{2^t-2}, g_{2^t-1}, g_{2^t}$ добро познати полиноми над променљивим w_2, w_3 и w_4 , док су P и Q *непознати* полиноми над истим овим променљивим. То што полиноми P и Q нису одређени овај опис чини непотпуним. Ипак, доказано је да полином P не може бити нула, из чега следи да је квадрат аномаличне класе у кохомологији нетривијалан. Поред овог описа, Гребнерова база је искоришћена да се добије једна адитивна база од $H^*(\tilde{G}_{2^t,4}; \mathbb{Z}_2)$.

Наставна делатност кандидата.

Проф. др Бранислав Првуловић је до сада са успехом држао предавања из Топологије А, Топологије Б, Очигледне топологије, Алгебарске топологије, Одабраних поглавља геометрије и топологије, Одабраних поглавља алгебарске топологије (на мастер студијама), Анализе 1, као и Анализе 1, Анализе 2 и Анализе 3 (за I смер) и Математике за студенте хемије, као и вежбе из Топологије, Очигледне топологије, Анализе 1 и 2 и Математике 1 и 2. Својим обавезама приступа максимално савесно и његов ангажман у настави је за сваку похвалу. Он је и изузетно позитивна личност и његов однос према студентима и колегама је потпуно примерен. (У анкетама студената је један од најбоље оцењених наставника, његова просечна оцена у последњих пет школских година је 4,89.) Са успехом обавља дужност шефа катедре за топологију.

Објавио је уџбеник

Б. Првуловић, Очигледна топологија, Математички факултет, Београд, 2022, ISBN 978-86-7589-157-4.

као и помоћни уџбеник

В. Грујић, Б. Првуловић, Збирка задатака из топологије, Математички факултет, Београд, 2012, ISBN 978-86-85633-15-7.

До сада је био ментор једне докторске дисертације (Милица Јовановић) и 8 мастер радова и члан комисије за одбрану 2 докторске дисертације и 5 мастер радова.

Учешће кандидата на научним скуповима.

Проф. др Бранислав Првуловић је одржао саопштења на следећим конференцијама:

- В. Prvulović, *Vector fields on Grassmann manifolds*, XVII Geometrical Seminar, 3-8. септембар 3-8. 2012, Златибор.
- В. Prvulović, *Modified Postnikov towers*, Шести Симпозијум – Математика и примене, 16-17. октобар 2015, Београд.
- Б. Првуловић, *Карактеристични ранг векторских раслојења*, Мини-конференција поводом 30 година КГТА семинара, 15. децембар 2016, Београд.

- B. Prvulović, *Lyusternik–Schnirel’mann category and the cup-length of Grassmann manifolds*, Workshop on Symplectic Topology, August 21-25, 2023, Belgrade.

Он је такође учествовао у раду међународног научног пројекта „Примењена и рачунарска алгебарска топологија“, (билатерални пројекат Србија-Словенија (2016-2017)), као и у раду пројекта МНТР Републике Србије 174034: *Топологија, геометрија и глобална анализа на многострукостима и дискретним структурама*.

Закључак.

Област интересовања проф. др Бранислава Првуловића свакако спада у ред најзахтевнијих математичких дисциплина. Објекти чије особине су предмет његовог истраживања су класични и важни у разним математичким дисциплинама. Проблеми којима се бави су значајни проблеми у области, неки од којих су отворени низ година (попут проблема одређивања минималне димензије еуклидског простора у који могу да се уложе неке важне класе многострукости или попут проблема одређивања кохомолошке алгебре оријентисаног Грасманијана).

Поред тога, проф. др Бранислав Првуловић је сјајан предавач и изузетно одговорна личност која свим својим обавезама приступа савесно и са максималном посвећеношћу. Са великим задовољством предлагемо његов избор у звање редовног професора за ужу научну област Топологија.

У Београду, новембар 2025.

Комисија:

Проф. др Владимир Грујић, редовни професор
Математичког факултета у Београду

Проф. др Синиша Врећница, професор емеритус
Математичког факултета у Београду

Проф. др Дарко Милинковић, редовни професор
Математичког факултета у Београду

др Зоран Петрић, научни саветник
Математичког института САНУ

др Божидар Јовановић, научни саветник
Математичког института САНУ