ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ЗА УПИС НА МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Београд, 28.06.2023.

Време за рад је 180 минута.

1. Број $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{108}}$ једнак је:

(A) $-\frac{2-\sqrt{2}}{3}$; **(B)** $-\frac{2+\sqrt{2}}{3}$; **(C)** $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$; **(D)** $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$; **(E)** $\frac{2}{3}$; **(N)** не знам.

2. Скуп вредности реалног параметра a, тако да једначина $|x|-|x-1|+|x-2|=a$ има тачно два реална решења је:

(A) $(2,\infty)$; **(B)** $[2,\infty)$; **(C)** $(0,1)\cup\{2\}$; **(D)** $\{1\}\cup(2,\infty)$; **(E)** $\{1\}\cup[2,\infty)$; **(N)** не знам.

3. Аца, Бане и Влада су поделили чоколаду у односу $11:8:6$. Колики је проценат чоколаде добио Аца?

(A) 11%; **(B)** 24%; **(C)** 32%; **(D)** 44%; **(E)** 55%; **(N)** не знам.

4. Скуп решења неједначине $\dfrac{|2x-1|+x+1}{x^2-x}\leqslant 1$ је:

(A) $(-\infty,-\sqrt{2}\,]\cup(0,\frac{1}{2}]\cup[4,\infty)$; **(B)** $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup[4,\infty)$; **(C)** $[\frac{1}{2},1)\cup[4,\infty)$;
(D) $(-\infty,-\sqrt{2}\,]\cup(0,1)\cup[4,\infty)$; **(E)** ниједан од понуђених одговора; **(N)** не знам.

5. Ако су $a,b\in\mathbb{R}$ и ако за решења x_1 и x_2 квадратне једначине $x^2+ax+b=0$ важи $x_1<0$, $x_2>0$ и $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2}=-1$, онда x_1 припада интервалу:

(A) $(-\infty,-5)$; **(B)** $[-5,-4]$; **(C)** $(-4,-2)$; **(D)** $[-2,-1]$; **(E)** $(-1,0)$; **(N)** не знам.

6. Скуп решења неједначине $\sqrt[3]{x^2-1}\geqslant x-1$ је:

(A) $[0,3]$; **(B)** $[1,3]$; **(C)** $(-\infty,-1]$; **(D)** $(-\infty,-1]\cup[1,3]$; **(E)** $(-\infty,0]\cup[1,3]$; **(N)** не знам.

7. Скуп решења неједначине $\dfrac{5\cdot 3^x}{3^x-2^x}\geqslant 9+\dfrac{2^x}{3^{x-2}}$ је:

(A) $(-\infty,0)\cup[1,\infty)$; **(B)** $(0,1]$; **(C)** $(0,1)$; **(D)** $[-1,0)\cup(0,1]$; **(E)** $[0,1]$; **(N)** не знам.

8. Број решења неједначине $\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x-1}-\frac{1}{2}\right)\leqslant 2$ у скупу природних бројева је:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** већи од 3; **(N)** не знам.

9. Дужина полупречника описаног круга једнакокраког троугла, дужине основице 6, а крака 5, припада интервалу:

(A) $(0,1)$; **(B)** $[1,2]$; **(C)** $(2,3)$; **(D)** $[3,4]$; **(E)** $(4,\infty)$; **(N)** не знам.

10. У праву зарубљену кружну купу уписана је лопта површине P, а угао који изводница те зарубљене купе образује са равни којој припада већа основа је 60°. Онда је површина омотача те зарубљене купе једнака:

(A) $\frac{4\sqrt{3}P}{3}$; **(B)** $\frac{3\sqrt{3}P}{2}$; **(C)** $\frac{3P}{2}$; **(D)** $\frac{4P}{3}$; **(E)** $\frac{4\sqrt{3}P}{2}$; **(N)** не знам.

11. Збир свих решења једначине $4\cos x\cos 2x = \cos 3x$ која припадају интервалу $[0, 2\pi]$ је:
(A) 2π; **(B)** 3π; **(C)** 4π; **(D)** 5π; **(E)** 6π; **(N)** не знам.

12. Нека је AB дужа основица једнакокраког трапеза $ABCD$. Ако дијагонала дели трапез на два једнакокрака троугла, онда вредност $\dfrac{AB}{CD}$ припада интервалу:
(A) $(1, \sqrt{2})$; **(B)** $[\sqrt{2}, \sqrt{3})$; **(C)** $[\sqrt{3}, 2)$; **(D)** $[2, \sqrt{5})$; **(E)** $[\sqrt{5}, \infty)$; **(N)** не знам.

13. Тачка кружнице $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$ која је најближа кружници $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ има x координату једнаку:
(A) $2,8$; **(B)** $3,4$; **(C)** 4; **(D)** $3,8$; **(E)** $6,6$; **(N)** не знам.

14. Странице правоуглог троугла представљају три узастопна члана аритметичке прогресије корака d. Површина тог троугла је:
(A) $\frac{9d^2}{2}$; **(B)** $6d^2$; **(C)** $12d^2$; **(D)** d^2; **(E)** $15d^2$; **(N)** не знам.

15. Нека је n непаран природан број који је дељив са 3. Онда за број $n^2 + 3$ важи:
(A) дељив је са 3 и 4, а није са 9;
(B) дељив је са 2 и 9, а није са 4;
(C) дељив је са 2 и 9, а није са 4 и 9;
(D) дељив је са 4 и 9;
(E) није тачно ниједно од наведених тврђења;
(N) не знам.

16. Имагинарни део комплексног броја $\dfrac{5(1+i)^{24}}{(1+i)^{20} + (1-i)^{18}}$, где је $i^2 = -1$, је:
(A) -6; **(B)** -4; **(C)** -2; **(D)** 8; **(E)** 16; **(N)** не знам.

17. Остатак при дељењу полинома $x^{2024} + x^{2023} + 1$ са $x^3 - x^2 + x - 1$ једнак је:
(A) $-x^2 - x + 5$; **(B)** $x^2 - x + 3$; **(C)** $-x^2 + x + 3$; **(D)** $-x^2 + 4$; **(E)** $x^2 + 2$; **(N)** не знам.

18. Скуп вредности реалног параметра a, за које једначина $|x^3 - 3x^2 + 2x| = a$ има највећи могући број решења, је:
(A) $(0, \frac{2\sqrt{3}}{9})$; **(B)** $(0, \frac{2\sqrt{3}}{9}]$; **(C)** $\{0\}$; **(D)** $(\frac{2\sqrt{3}}{9}, \infty)$; **(E)** $[\frac{2\sqrt{3}}{9}, \infty)$; **(N)** не знам.

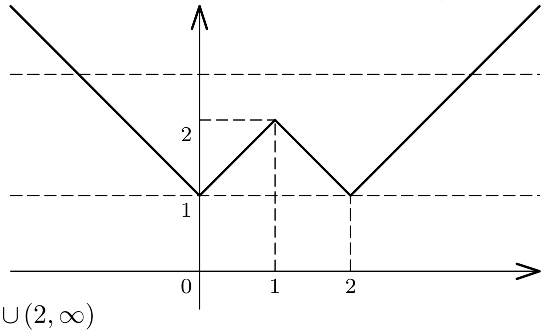
19. Ученик игра игру у којој баца новчић (који има две различите стране) и након сваког бацања бележи добијени резултат, а игра се завршава у моменту у ком се по четврти пут појави једна од страна новчића. Исход игре представља добијени низ резултата. Колико има могућих исхода описане игре?
(A) 35; **(B)** 56; **(C)** 70; **(D)** 112; **(E)** 117; **(N)** не знам.

20. Број рационалних чланова у развоју бинома $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{2023}$ је:
(A) 0; **(B)** 337; **(C)** 338; **(D)** 675; **(E)** 1 687; **(N)** не знам.

Решења задатака.

1. Како је $\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{108}=\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{4\cdot 6}-\sqrt{16\cdot 3}+\sqrt{36\cdot 3}=\sqrt{3}-\sqrt{6}-2\sqrt{6}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}=3\sqrt{3}-3\sqrt{6}$, следи $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{108}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=-\frac{3\sqrt{2}+6}{9}=-\frac{2+\sqrt{2}}{3}$.

2. Важи $f(x)=|x|-|x-1|+|x-2|=\begin{cases}(-x)+(x-1)-(x-2)=-x+1, & \text{ако је } x\in(-\infty,0)\\ x+(x-1)-(x-2)=x+1, & \text{ако је } x\in[0,1)\\ x-(x-1)-(x-2)=-x+3, & \text{ако је } x\in[1,2)\\ x-(x-1)+(x-2)=x-1, & \text{ако је } x\in[2,\infty)\end{cases}$,



следи да је на $(-\infty,0)$ једначина $f(x)=a$ еквивалентна са $-x+1=a$, односно $x=1-a$, па има решење ако и само ако је $a\in(1,\infty)$. Аналогно, на $[0,1)$ једначина $f(x)=a$ је еквивалентна са $x=a-1$ и има решење ако и само ако је $a\in[1,2)$, на $[1,2)$ са $x=3-a$ и има решење ако и само ако је $a\in(1,2]$, а на $[2,\infty)$ са $x=a+1$ и има решење ако и само ако је $a\in[1,\infty)$. Из претходних закључака следи да $f(x)=a$ има два решења ако и само ако је $a\in\{1\}\cup(2,\infty)$

3. Проценат чоколаде који је добио Аца је $\frac{11}{11+8+6}=\frac{11}{25}=44\%$.

4. Неједначина је дефинисана за $x\notin\{0,1\}$. Ако је $x\in(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2})$, еквивалентна је са $\frac{2-x}{x^2-x}=\frac{1-2x+x+1}{x^2-x}\leqslant 1$, тј. са $\frac{2-x^2}{x(x-1)}\leqslant 0$, па је у овом случају решење $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup(0,\frac{1}{2})$, а ако је $x\in[\frac{1}{2},1)\cup(1,\infty)$, еквивалентна је са $\frac{3x}{x^2-x}=\frac{2x-1+x+1}{x^2-x}\leqslant 1$, тј. са $\frac{4x-x^2}{x(x-1)}\leqslant 0$, односно са $\frac{4-x}{x-1}\leqslant 0$. па је у овом случају решење $x\in[\frac{1}{2},1)\cup[4,\infty)$. Дакле, решење наведене неједначине је $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup(0,1)\cup[4,\infty)$.

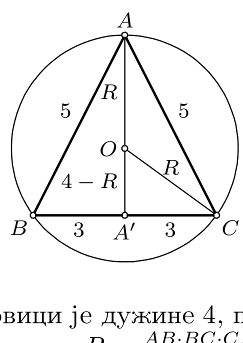
5. По Виетовим правилима је $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=b$, а из наведених услова следи $b\neq 0$ и да је израз $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2}$ добро дефинисан и једнак $\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}=\frac{1-a}{b}$. Из наведеног услова следи $\frac{1-a}{b}=-1$, тј. $1-a+b=0$, а како је лева страна последње једнакости једнака вредности уочене квадратне функције у тачки -1, следи да је $x_1=-1$.

6. Наведена неједначина је еквивалентна са $x^2-1\geqslant(x-1)^3$, тј. са $(x-1)((x-1)^2-(x+1))=(x-1)(x^2-3x)=x(x-1)(x-3)\leqslant 0$, па јој је решење $x\in(-\infty,0]\cup[1,3]$.

7. Неједначина је дефинисана ако је $3^x\neq 2^x$, тј. за $x\neq 0$. Ако је $t=\frac{2^x}{3^x}$ за $x\neq 0$, онда је $t\in(0,1)\cup(1,\infty)$, неједначина је еквивалентна са $\frac{5}{1-t}\geqslant 9+9t$, тј. са $9t+9+\frac{5}{t-1}\leqslant 0$, односно са $\frac{(3t-2)(3t+2)}{t-1}=\frac{9t^2-4}{t-1}\leqslant 0$. Међутим, како је $t>0$, последње значи да је $t\in[\frac{2}{3},1)$, па како је $t=(\frac{2}{3})^x$ (и пошто је $\frac{2}{3}<1$, функција $(\frac{2}{3})^x$ је опадајућа), следи $x\in(0,1]$.

8. Због дефинисаности неједначине мора бити $2^x-1>0$ и $2^{x-1}-\frac{1}{2}>0$, тј. $x>0$. Како је $\log_{\frac{1}{2}}(2^{x-1}-\frac{1}{2})=\log_{\frac{1}{2}}\frac{2^x-1}{2}=\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)+1$, ако је $t=\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)$, следи $t(t+1)\leqslant 2$, тј. $t\in[-2,1]$, односно $-2\leqslant\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1)\leqslant 1$. Како је функција $\log_{\frac{1}{2}}x$ опадајућа на $(0,\infty)$, из добијеног следи $\frac{1}{2}\leqslant 2^x-1\leqslant 4$, тј. $\frac{3}{2}\leqslant 2^x\leqslant 5$, одакле је $x\in[\log_2\frac{3}{2},\log_2 5]$, а природни бројеви који припадају овом скупу су 1 и 2.

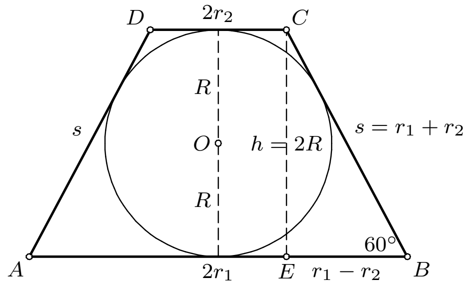
9. Ако је уочени троугао ABC, при чему је $BC=6$ и $CA=AB=5$, ако је A' подножје нормале из A на BC, онда је $A'C=\frac{BC}{2}=3$ и $\triangle AA'C$ је правоугли, па по Питагориној теореми следи $AA'=\sqrt{CA^2-A'C^2}=4$, што је дужина висине која одговара основици BC. Како је уочени троугао једнакокрак и оштроугли (важи $CA^2+AB^2=50>36=BC^2$), центар описаног круга O припада дужи AA' и $\triangle OA'C$ је правоугли, катета $A'C=3$ и $OA'=AA'-OA=4-R$, а хипотенузе $OC=R$, при чему је R дужина полупречника описаног круга, те из Питагорине теореме следи $(4-R)^2+9=R^2$, одакле је $R=\frac{25}{8}$.



Друго решење. Као у првом решењу, висина која одговара основици је дужине 4, па је површина троугла $\triangle ABC$ једнака $P=\frac{4\cdot 6}{2}=12$, а полупречник описаног круга $R=\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{4P}=\frac{25}{8}$.

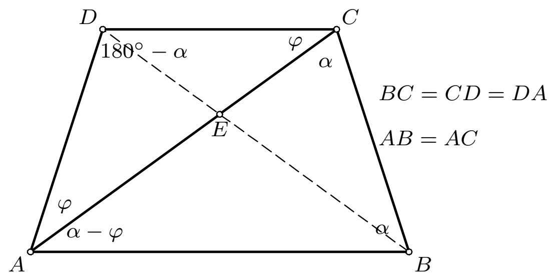
Треће решење. Ако је α угао код темена A троугла ABC, на основу косинусне теореме је $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$, па је $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ и $\sin\alpha = \sqrt{1 - (\frac{7}{25})^2} = \frac{24}{25}$, а по синусној теореми је $2R = \frac{BC}{\sin\alpha}$, одакле је $R = \frac{6}{2 \cdot \frac{24}{25}} = \frac{25}{8}$.

10. Ако су $r_1 > r_2$ полупречници основа, s изводница, а h висина уочене зарубљене купе, њен осни пресек је једнакокраки трапез $ABCD$, основа $AB = 2r_1$ и $CD = 2r_2$, крака $BC = DA = s$ и висине h. По условима задатка, тај трапез је тангентан (полупречника уписаног круга једнаког $\frac{h}{2}$, што је једнако полупречнику уписане сфере R) и важи $\sphericalangle ABC = 60°$. Из тангентности следи $2(r_1+r_2) = AB+CD = BC+DA = 2s$, тј. $s = r_1+r_2$. Ако је E подножје нормале из C на AB, следи да је $\triangle EBC$ правоугли, катета $CE = 2R$ и $EB = \frac{AB-CD}{2} = r_1 - r_2$, хипотенузе $BC = s = r_1 + r_2$, а угао уз теме B је једнак $60°$, па је $2R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$, односно $s = \frac{4R}{\sqrt{3}}$. Како је површина уписане сфере $P = 4R^2\pi$, следи да је површина омотача уочене зарубљене купе $(r_1 + r_2)s\pi = s^2\pi = \frac{16R^2\pi}{3} = \frac{4P}{3}$.



11. Једначина је еквивалентна са $4\cos x(2\cos^2 x - 1) = 4\cos^3 x - 3\cos x$, тј. са $4\cos^3 x - \cos x = 0$, односно са $\cos x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$, па је $\cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}$, односно $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, где је $k \in \mathbb{Z}$. Интервалу $[0, 2\pi]$ припадају решења $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, а њихов збир је 6π.

12. Нека је α оштар унутрашњи угао уоченог трапеза. Како је угао код темена D трапеза $180° - \alpha > 90°$, а $\triangle ACD$ једнакокраки, следи да је AC основица тог једнакокраког троугла и важи $AC > CD = DA$, а ако је $\sphericalangle DAC = \varphi$, углови $\triangle ACD$ су $\varphi, \varphi, 180° - \alpha$. Како је и $\triangle ABC$ једнакокраки, из претходног следи да је BC основица тог троугла и да је $AB = AC$, а углови тог троугла су $\alpha - \varphi, \alpha, \alpha$. Како је збир углова троугла $180°$, следи $\alpha = 2\varphi$ и $3\alpha - \varphi = 180°$, па је $\varphi = 36°$ и $\alpha = 72°$. Како је $BC = CD$, на основу синусне теореме у $\triangle ABC$ следи $\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sin\sphericalangle BCA}{\sin\sphericalangle CAB} = \frac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36°$.

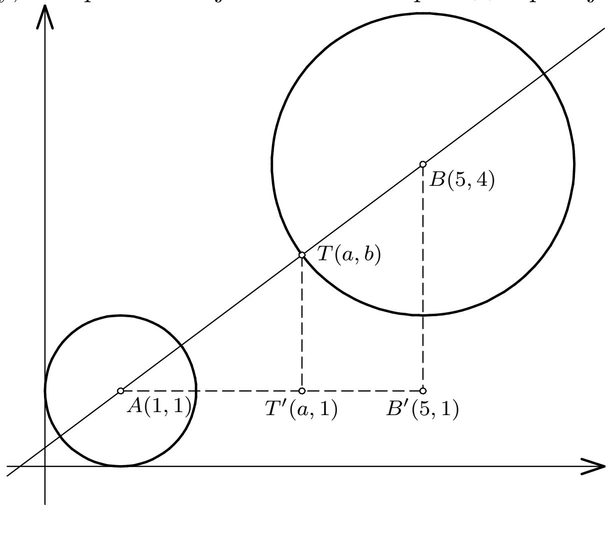


Пошто је функција $\cos x$ строго опадајућа на $(0°, 90°)$ и $30° < 36° < 45°$, следи $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos 36° < \frac{\sqrt{3}}{2}$, па је $\sqrt{2} < \frac{AB}{CD} < \sqrt{3}$.

Друго решење. Као и у првом решењу, углови између крака и веће основице су $72°$, а угао између дијагонала и основица $36°$. Ако је E пресек дијагонала, онда је $\triangle ABE \sim \triangle ACD \sim CDE$ (у питању су једнакокраки троуглови, чији је угао на основици $36°$), а притом је $AB = AC$, па је $\triangle ABE \cong \triangle ACD$. Следи $CE = AC - AE = AB - CD$ и $\frac{AB}{CD} = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CE} = \frac{CD}{AB-CD}$, па важи $\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 - \frac{AB}{CD} - 1 = 0$, а како је $\frac{AB}{CD} > 0$, следи $\frac{AB}{CD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in [\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

13. Како је растојање центара наведених кружница $(\sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5)$ веће од збира њихових полупречника $(1 + 2 = 3)$, оне се не секу, па тражена најближа тачка припада правој која садржи центре кружница, тј. тачке $(5, 4)$ и $(1, 1)$. Следи да њене координате (x, y) задовољавају $y - 1 = \frac{4-1}{5-1}(x - 1) = \frac{3}{4}(x - 1)$ и $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$. Заменом, следи да x координата задовољава $(x - 5)^2 + (\frac{3}{4}x - \frac{15}{4})^2 = 4$, односно $16(x-5)^2 + 9(x-5)^2 = 64$, тј. $(x-5)^2 = \frac{64}{25}$, па је $x \in \{\frac{17}{5}, \frac{33}{5}\}$. Међутим, тачка $(\frac{33}{5}, \frac{26}{5})$ је на већем растојању од друге кружнице у односу на тачку $(\frac{17}{5}, \frac{14}{5})$ (то је најудаљенија тачка прве кружнице у односу на другу), па је тражена тачка $(\frac{17}{5}, \frac{14}{5})$.

Друго решење. Нека су $A(1,1)$ и $B(5,4)$ центри датих кругова и $T(a,b)$ тражена тачка. Као и у првом решењу, T припада правој AB и важи $AB = 5$ и $TB = 2$, па је $AT = 3$. Ако су $T'(a,1)$



и $B'(5,1)$ пројекције T и B на праву $y=1$, онда је $AT'=a-1$, $AB'=4$ и важи $\triangle ATT' \sim \triangle ABB'$, па је $\frac{AT}{AB}=\frac{AT'}{AB'}$, тј. $\frac{3}{5}=\frac{a-1}{4}$, одакле је $a=\frac{17}{5}=3,4$.

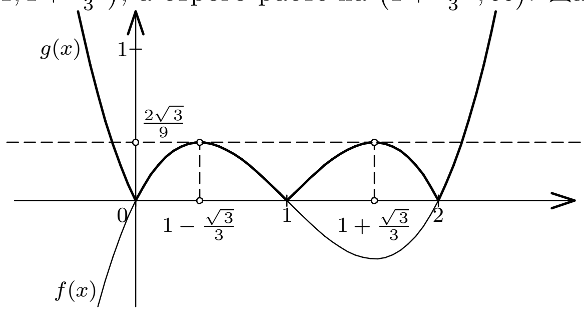
14. Без умањења општости нека је $d>0$. Ако је a најмања страница троугла, друге две су $a+d$ и $a+2d$, па је на основу Питагорине теореме $a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2$, односно $a^2-2ad-3d^2=0$, тј. $(a+d)(a-3d)=0$. Како је $a>0$, следи $a=3d$, па су катете уоченог троугла $3d$ и $4d$, а његова површина $\frac{3d\cdot 4d}{2}=6d^2$.

15. Како је n непаран, онда је $2k+1$ за неко $k\in\mathbb{N}_0$, па је $n^2+3=(2k+1)^2+3=4(k^2+k+1)$, па $4 \mid n^2+3$. Како је n дељив са 3, следи да је n^2 дељив са 9, па број n^2+3 даје остатак 3 при дељењу са 9, те је дељив са 3, а није са 9.

16. Како је $(1+i)^2=2i$ и $(1-i)^2=-2i$, следи $\frac{5(1+i)^{24}}{(1+i)^{20}+(1-i)^{18}}=\frac{5(2i)^{12}}{(2i)^{10}+(-2i)^{9}}=\frac{5\cdot 2^{12}}{-2^{10}-2^{9}i}=-\frac{5\cdot 2^3}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=-\frac{5\cdot 8\cdot(2-i)}{5}=-16+8i$, па је имагинарни део овог броја једнак 8.

17. Како је степен полинома $q(x)=x^3-x^2+x-1$ једнак 3, остатак при дељењу $p(x)=x^{2024}+x^{2023}+1$ са $q(x)$ је полином степена највише 2, па је $p(x)=k(x)q(x)+ax^2+bx+c$, где је $k(x)$ количник у уоченом дељењу. Притом, како су $p(x)$ и $q(x)$ реални полиноми, важи $a,b,c\in\mathbb{R}$. Пошто је $q(x)=(x-1)(x^2+1)$, заменом $x=1$ у добијену везу следи $a+b+c=p(1)=3$, а заменом $x=i$ следи $-a+bi+c=p(i)=2-i$, а како су $a,b,c\in\mathbb{R}$, следи $-a+c=2$ и $b=-1$. Из добијених веза следи $a=1$, $b=-1$, $c=3$, тј. остатак у уоченом дељењу је x^2-x+3.

18. Нека је $f(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$ и $g(x)=|f(x)|$. Следи да једначина $g(x)=a$ нема решења ако је $a<0$, а има 3 решења ако је $a=0$. Како је $f(x)=(x-1)((x-1)^2-1)$, следи $f(1-x)=-f(1+x)$, одакле је $|g(1-x)|=|g(1+x)|$, па је у случају $a>0$ број решења уочене једначине на $\mathbb{R}$ дупло већи од броја њених решења на $(1,\infty)$, те ћемо у наставку посматрати случај $a>0$ и $x\in(1,\infty)$. На $(1,2)$ је $g(x)=-f(x)$, а на $(2,\infty)$ је $g(x)=f(x)$, па како је $f'(x)=3x^2-6x+2$, следи да f строго опада на $\left(1,1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, а строго расте на $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$. Дакле, пошто је $f(2)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ и f је непрекидна и строго расте на $(2,\infty)$, следи да једначина $g(x)=a>0$ на овом интервалу има тачно једно решење, а, како је $g(x)=-f(x)$ за $x\in(1,2)$, следи да је g непрекидна и строго расте на $\left(1,1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, а непрекидна је и строго опада на $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$, па уочена једначина на интервалу $(1,2)$ нема решења ако је $a>g\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left|f\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right|=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, има једно решење ако је $a=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, а два решења ако је $a\in\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$. Дакле, највећи могући број решења наведене једначине је 6 и постиже се за $a\in\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.



19. Нека су стране новчића глава и писмо, а нека је дужина исхода број бацања који је извршен у њему. Онда дужина исхода мора бити најмање 4 (иначе се не може десити да се једна од страна појави 4 пута), а највише 7 (у 7 бацања бар једна од страна се појављује 4 пута). Ако се игра завршила појављивањем главе по четврти пут и ако је дужина исхода те игре k, по претходном је $k\in\{4,5,6,7\}$, а у првих $k-1$ бацања се 3 пута појавила глава и $k-4$ пута писмо, а притом је могући било који такав распоред резултата у првих $k-1$ бацања, па таквих исхода има $\binom{k-1}{3}$. Дакле, могућих исхода у којима је 4 пута пала глава има $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}$, а, по симетрији, једнак је број исхода у којима је 4 пута пало писмо, те је укопан број могућих исхода игре $2\cdot\left(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}\right)=70$.

Друго решење. Уз нотацију из првог решења, приметимо да могућих исхода у којима је 4 пута пала глава има колико низова резултата дужине 7 у којима се 4 пута појављује глава. Заиста, уколико је исход дужине $k<7$, уколико га „допунимо” додавањем $7-k$ резултата падања писма на местима $k+1,\dots,7$, добија се низ дужине 7, који на тачно 4 места има за резултат падање главе. Обрнуто, ако се „обришу” појављивања писма након четвртог падања главе, добија се исход игре описане у задатку. Дакле, могућих исхода игре у којима 4 пута падне глава има $\binom{7}{4}$, по симетрији је толики и број исхода игре у којима 4 пута падне писмо, па је тражени број $2\cdot\binom{7}{4}=70$.

20. Општи члан развоја уоченог бинома је $\binom{2023}{n}\cdot 2^{\frac{2023-n}{2}}\cdot 3^{\frac{n}{3}}$, где је $0\leqslant n\leqslant 2023$. Како су 2 и 3 узајамно прости, следи да је уочени члан рационалан ако и само ако $2\mid 2023-n$ и $3\mid n$, тј. ако и само ако је $n=6k+3$ за неко $k\in\mathbb{Z}$, а у скупу $\{0,1,\dots,2023\}$ таквих бројева има 337 (важи $3=6\cdot 0+3$ и $2\,019=6\cdot 336+3$).