ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ЗА УПИС НА МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Београд, 29.06.2022.
Време за рад је 180 минута.

1. Нека је $f(x) = x - 1$ и $g(x) = |x+1|$. Скуп решења једначине $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ је:

A) $(0, +\infty)$ **B)** $\{0, 1\}$ **C)** $[0, +\infty)$ **D)** $(-\infty, +\infty)$ **E)** $(-\infty, 0]$ **N)** не знам

2. Квадратна функција дата са $f(x) = ax^2 + bx + c$ је таква да важи $f(-3) = 12$, $f(-1) = 6$, $f(2) = 12$. Ако су x_1 и x_2 обе нуле ове функције, тада је $x_1^3 + x_2^3$ једнако:

A) -19 **B)** -17 **C)** -7 **D)** 17 **E)** 19 **N)** не знам

3. Реалних решења једначине $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$ има:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** бесконачно много **N)** не знам

4. Први, други и трећи члан геометријског низа су, редом, први, четврти и шести члан аритметичког низа. Ако је збир свих чланова геометријског низа једнак 12, онда је први члан геометријског низа једнак:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5 **N)** не знам

5. Фигура у равни која је у правоуглом Декартовом координатном систему одређена са $x^2 + y^2 \leqslant 1 + 2|x|$ има површину једнаку:

A) $3\pi + 2$ **B)** $\frac{10}{3}\pi + \sqrt{3}$ **C)** $3\pi - 2$ **D)** $4\pi - 2$ **E)** 4π **N)** не знам

6. Најмање позитивно решење једначине $2\sin(2x - 70^\circ) = 3\mathrm{tg}(x - 35^\circ)$ припада интервалу:

A) $(0^\circ, 10^\circ)$ **B)** $[10^\circ, 30^\circ]$ **C)** $(30^\circ, 45^\circ)$ **D)** $[45^\circ, 60^\circ]$ **E)** $(60^\circ, 90^\circ)$ **N)** не знам

7. Ако је $f\colon (-3, \infty) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = x + \log_2(3+x) + 4^x$, онда је $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + f^{-1}(7)$ једнако:

A) 0 **B)** 2 **C)** $\frac{7}{4}$ **D)** $\frac{29}{4}$ **E)** f^{-1} не постоји **N)** не знам

8. Најмањи позитиван реалан број r за који је број $r \cdot (3\sqrt{3} - 4\sqrt{2})$ цео је:

A) $\frac{4}{5}\sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt{3}$ **B)** $4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ **C)** $4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **E)** не постоји такво r **N)** не знам

9. Целих бројева x за које важи $\dfrac{\log_4 x + 1}{|\log_2 x - 1|} > 1$ има:

A) 2 **B)** 3 **C)** 13 **D)** 14 **E)** бесконачно много **N)** не знам

10. Дати су комплексни бројеви $z_1 = 1 + \frac{i}{a}$ и $z_2 = 1 - ia$, где је $a \neq 0$ реалан број. Скуп вредности параметра a за које важи $|z_1| < |z_2|$ је:

A) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ **B)** $(-1, 0) \cup (0, 1)$ **C)** $(1, +\infty)$ **D)** $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ **E)** $(0, 1)$ **N)** не знам

11. Посластичарница продаје n врста воћних и $n+2$ врсте млечних сладоледа. Ако на 175 начина можемо изабрати три различите врсте сладоледа од којих је бар једна воћна и бар једна млечна, онда је n једнако:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9 **N)** не знам

12. У кутији се налазе црвене, плаве и беле куглице, од чега је 25% њих црвене боје, 40% плаве, а 98 беле боје. Ако 37,5% плавих куглица обојимо у бело, а затим 45% белих куглица обојимо у црвено, онда ће број црвених куглица у кутији бити једнак:

A) 163 **B)** 140 **C)** 112 **D)** 136 **E)** 133 **N)** не знам

13. Природних бројева $n \leqslant 2022$ таквих да се број 2^n у декадном запису завршава цифром 6 има:

A) 500 **B)** 505 **C)** 550 **D)** 555 **E)** 55 **N)** не знам

14. Највећи од бројева 2022^{2022}, $2022!$, $20^{(22^{20})}$, $22^{(20^{20})}$ и $20^{(20^{22})}$ је:

A) 2022^{2022} **B)** $2022!$ **C)** $20^{(22^{20})}$ **D)** $22^{(20^{20})}$ **E)** $20^{(20^{22})}$ **N)** не знам

15. Ако је $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и важи $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = \dfrac{4}{3}$, онда број $\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{5x}{2}$ припада интервалу:

A) $\left[0, \dfrac{1}{5}\right)$ **B)** $\left[\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ **C)** $\left[\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ **D)** $\left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ **E)** $\left[\dfrac{4}{5}, 1\right)$ **N)** не знам

16. Дата је права купа са врхом V и центром основе S. Ако раван паралелна основи купе полови њену запремину и сече њену висину VS у тачки M, онда је $VS : VM$ једнако:

A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt[3]{2}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{\pi}$ **E)** 2 **N)** не знам

17. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао такав да је $AD = BC$. Ако је $\sphericalangle BDC = 20^\circ$ и $\sphericalangle CBD = 50^\circ$, тада је $\sphericalangle ADB$ једнак:

A) 110° **B)** 90° **C)** 80° **D)** 70° **E)** 50° **N)** не знам

18. Ако су a и b реални бројеви такви да је остатак при дељењу полинома $x^{2022} + ax + b$ са $x^2 - 1$ једнак $2bx + a$, онда је ab једнако:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 6 **N)** не знам

19. Број целобројних вредности параметра a за које једначина $|x^2 - 22x + 21| = a$ има највећи могући број решења је:

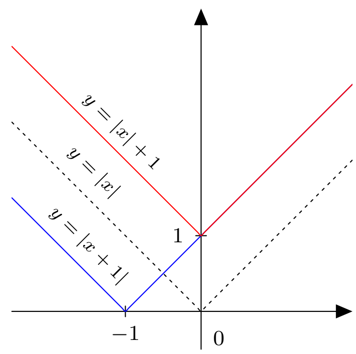
A) 231 **B)** 100 **C)** 99 **D)** 22 **E)** 21 **N)** не знам

20. Који од бројева 1223, 1309, 1989, 2431 и 2717 је производ три узастопна проста броја?

A) 1223 **B)** 1309 **C)** 1989 **D)** 2431 **E)** 2717 **N)** не знам

Решења задатака

Задатак 1: Расписивање даје једначину $|x+1|-1 = |(x-1)+1|$, односно $|x+1| = |x|+1$, што важи за $x \geqslant 0$. **C**

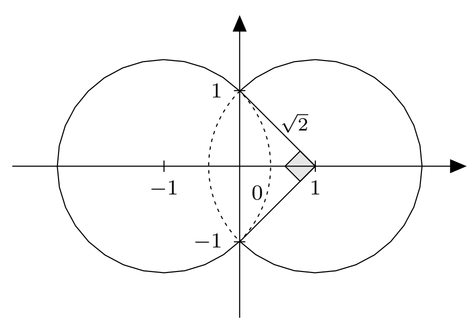


Задатак 2: Важи $9a-3b+c=12$, $a-b+c=6$ и $4a+2b+c=12$, одакле следи $a=1$, $b=1$, $c=6$. Зато је $x_1+x_2=-b/a=-1$ и $x_1x_2=c/a=6$, те $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=17$. Задатак се може брже урадити ако се примети да је $f(x)-12=a(x+3)(x-2)$. **D**

Задатак 3: Неопходно је $x \geqslant 1/2$, а тада је $x \geqslant \sqrt{2x-1}$ због $(x-1)^2 \geqslant 0$. Након квадрирања добијамо $x+\sqrt{2x-1}+x-\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x^2-(2x-1)}=2$, одакле је $x+|x-1|=1$. За $x>1$ очигледно нема решења, док за $1/2 \leqslant x \leqslant 1$ једначина увек важи, те су решења $x \in [1/2, 1]$ и има их бесконачно много. **E**

Задатак 4: Ако је a тражени број, онда су чланови аритметичког низа облика $a+(i-1)d$, а геометријског $a \cdot t^{i-1}$ за неке d и t. Услов задатка даје $at = a+3d$ и $at^2 = a+5d$, одакле имамо $5at-5a = 15d = 3at^2-3a$, односно $3t^2-5t+2=0$ (јер је $a \neq 0$), те како је $t \neq 1$ (да бисмо сумирали геометријски низ мора бити $|t|<1$) имамо $t=2/3$. Како је $a(1+t+t^2+\dots)=12$, то следи $a=12-12t=4$. **D**

Задатак 5: Неједнакост постаје $(|x|-1)^2+y^2 \leqslant 2$ те је тражена фигура унија два круга полупречника $\sqrt{2}$ са центрима у $(1,0)$ и $(-1,0)$. Област у полуравни $x \geqslant 0$ састоји се од $3/4$ круга и половине квадрата ивице $\sqrt{2}$, а све то треба дуплирати. Зато је тражена површина $2 \cdot (\frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}^2\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2}^2) = 3\pi+2$. **A**



Задатак 6: Једначина постаје $4\sin(x-35^\circ)\cos(x-35^\circ) = 3\sin(x-35^\circ)/\cos(x-35^\circ)$. Област дефинисаности је $x \neq 125^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Ако је $\sin(x-35^\circ)=0$, то имамо $x = 35^\circ + k\cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. У супротном мора бити $\cos^2(x-35^\circ) = 3/4$, односно $\cos(x-35^\circ) = \pm\sqrt{3}/2$, одакле су решења $x = 65^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ и $x = 5^\circ + k\cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Најмање позитивно решење је 5°. **A**

Задатак 7: Функција f је строго растућа, као збир три такве функције, те постоји f^{-1}. Како је $f(1)=1+2+4=7$ и $f(-1)=-1+1+1/4=1/4$, следи $f^{-1}(1/4)+f^{-1}(7) = -1+1=0$. **A**

Задатак 8: Како је $3\sqrt{3}-4\sqrt{2}<0$, мање r даје већи цео број, који највише може бити -1, а тада је $r=-1/(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})=(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})/5$. **A**

Задатак 9: Неопходно је $x>0$, док провером видимо да $x=1$ и $x=2$ нису решења, те је $x\geqslant 3$, због чега важи $\log_2 x-1>0$. Једначина постаје $\log_4 x+1>\log_2 x-1$, односно $0<2+\log_4 x-\log_2 x=\log_4(16/x)$, што важи за $x<16$, тако да има 13 решења $x\in\{3,4,\ldots,15\}$. **C**

Задатак 10: Неједнакост је $\sqrt{1+1/a^2}<\sqrt{1+a^2}$ што даје $a^4>1$, односно $|a|>1$. **A**

Задатак 11: Из услова задатка је $175=\binom{n}{2}(n+2)+n\binom{n+2}{2}=n^2(n+2)$. Једино природно решење је очигледно $n=5$. **C**

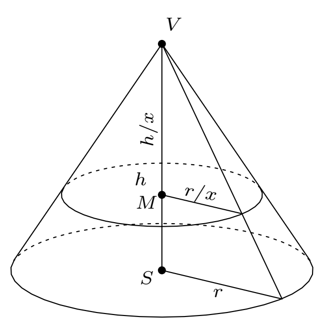
Задатак 12: На почетку, белих куглица је 98, што је $100\%-25\%-40\%=35\%$, одакле је укупан број куглица $98\cdot 100/35=280$, од чега је $280\cdot 25\%=70$ црвено, а $280\cdot 40\%=112$ плаво. Најпре бојимо $112\cdot 37{,}5\%=42$ плавих куглица у бело, те сад имамо $98+42=140$ белих куглица, а затим њих $140\cdot 45\%=63$ бојимо у црвено, тако да на крају добијамо $70+63=133$ црвених куглица. **E**

Задатак 13: Бројеви 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, се редом завршавају цифрама, 2, 4, 8, 6, 2, што се периодично понавља са периодом 4. Зато се 2^k завршава цифром 6 ако је k дељиво са 4. Тражимо све $0<x\leqslant 2022$ који су дељиви са 4, а њих има $\lfloor 2022/4\rfloor=505$. **B**

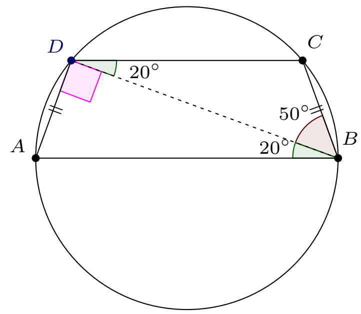
Задатак 14: Очигледно је $2022!<2022^{2022}<(22^3)^{2022}=22^{6066}<22^{(20^{20})}<400^{(20^{20})}=20^{(2\cdot 20^{20})}<20^{(20^{22})}$, док из $(1+\frac{1}{10})^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\frac{1}{10^k}<\sum_{k=0}^{10}1=11$ следи $(1+\frac{1}{10})^{20}<11^2<400$, те је $22^{20}<400\cdot 20^{20}=20^{22}$, одакле је $20^{(22^{20})}<20^{(20^{22})}$. **E**

Задатак 15: Имамо $\mathrm{ctg}(3\pi/2-x)=\mathrm{tg}x=4/3$, док се тражен број трансформише у $a=(\sin 2x+\sin 3x)/2$. У првом квадранту је $\sin x=\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}=\dfrac{4}{5}$ и $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}=\dfrac{3}{5}$, одакле је $\sin 2x=2\sin x\cos x=24/25$, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=-7/25$, те $\sin 3x=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=44/125$, и коначно $a=82/125$. **D**

Задатак 16: Ако је $x=VS:VM$, а r полупречник основе купе (која има висину $h=VS$), онда мања купа (која има висину $VM=h/x$) има полупречник r/x, те има запремину $(r/x)^2\pi(h/x)/3=(r^2\pi h/3)/2$. Одавде је $x^3=2$, те $x=\sqrt[3]{2}$. **B**

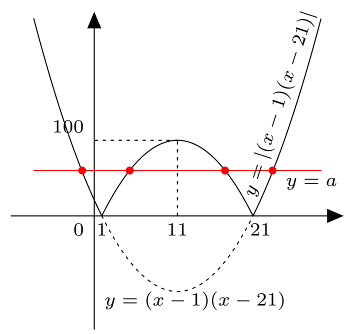


Задатак 17: Како је $AD = BC$, то је $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC = 20^\circ$. Такође, $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 110^\circ$, јер је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$, те добијамо $\sphericalangle ADB = 110^\circ - 20^\circ = 90^\circ$. **B**



Задатак 18: Имамо $x^{2022}+ax+b = (x^2-1)q(x)+2bx+a$, те заменом $x = 1$ и $x = -1$ добијамо $a+b+1 = 2b+a$ и $-a+b+1 = -2b+a$, одакле је $b = 1$ и $a = 2$, што даје $ab = 2$. **C**

Задатак 19: Једначина је $|(x-1)(x-21)| = a$, док квадрирањем видимо да може имати највише 4 решења. Лева страна једначине је $(x-1)(x-21)$ на $(-\infty, 1] \cup [21, \infty)$, док је $-(x-1)(x-21)$ на $(1, 21)$, при чему је екстремна вредност у оба случаја у 11, те је на сваком од интервала $(-\infty, 1]$, $[1, 11]$, $[11, 21]$ и $[21, \infty]$ строго монотона. Због тога 4 решења постоје за $0 < a < 10^2 = 100$, те је целобројних a укупно 99. **C**



Задатак 20: Сви понуђени одговори су већи од $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, те следеће треба проверити $11 \cdot 13 \cdot 17 = 2431$, док су сви понуђени одговори мањи од $13 \cdot 17 \cdot 19 = 4199$. **D**