АТЛАС РАСПОДЕЛА

Драган Ђорић
Факултет организационих наука, Београд

Јован Малишић
Математички факултет, Београд

Весна Јевремовић
Математички факултет, Београд

Емилија Николић-Ђорић
Пољопривредни факултет, Нови Сад

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

У статистичкој обради података добијених мерењем вредности неке случајне величине (случајног обележја на елементима популације, пре свега мерењем нумеричког обележја) често се поставља питање који статистички модел одабрати. Друкчије речено, поставља се питање из које теоријске расподеле можда потичу добијени резултати мерења. Овај *Атлас* чини један покушај да се помогне свима онима који имају потребе да решавају наведени задатак.

При обради статистичких података, који представљају измерене вредности неког нумеричког случајног обележја, обично прво треба одговорити на питање да ли се ради о дискретном или о непрекидном обележју. Под дискретним обележјем (тј. дискретном случајном величином) подразумевамо свако оно обележје чији скуп могућих вредности је само коначан или пребројив скуп реалних бројева: Под непрекидним обележјем, пак, подразумевамо свако оно обележје чији скуп могућих вредности је скуп свих реалних бројева са једног или више интервала, који могу бити како отворени тако и затворени (са једне или са обе стране), како коначни тако и бесконачни. Овај *Атлас* посвећен је само расподелама непрекидних случајних величина.

Који од статистичких модела ће истраживач у свом раду одабрати зависи од много фактора. Међу њима свакако ниво познавања статистичких расподела (и ранијих искустава) није занемарљив. У долажењу до коначног опредељења за неки статистички модел обично треба проћи неколико корака и користити се "методом елиминације".

Када истраживач среди податке формирајући варијациони низ (тј. ређајуц1и податке по величини, почев од најмањег па до највећег резултата), следећи корак би био формирање табела са фреквенцијама појављивања вредности по појединим подинтервалима скупа могућих вредности. После тога, најчешће се даје графички приказ добијених резултата путем формирања полигона и/или хистограма, који одговарају изабраним подинтервалима (класама вредности) и њиховим фреквенцијама (релативним и/или апсолутним). Уколико добијени полигони односно хистограми подсећају на графике густине неке расподеле, онда је та расподела један од могућих кандидата за избор теоријских модела. Таквих кандидата може да буде више. Тај скуп кандидата ће се даље сужавати на основу нових информација, као што су: скуп могућих вредности, број (и вредности) непознатих параметара, средња вредност, дисперзија, медијана, модус, већа или мања очекивана симетричност расподеле, већа или мања спљоштеност итд.

Када се, коришћењем горњих информација, скуп могућих кандидата сведе на само њих неколико, онда у коначном опредељењу може важну улогу да одигра и једноставност у аналитичким изразима за густине, за математичка очекивања, дисперзије, коефицијенте асиметрије итд. Наравно, треба имати на уму и то да ће често бити и више од једне расподеле која ће моћи да се изабере као модел.

Адекватност изабране расподеле најчешће се проверава коришћењем

Пирсоновог χ^2-теста, мада има и много других тестова. При коришћењу Колмогоровљевог теста треба бити веома опрезан, с обзиром на то да се у њему унапред подразумева познавање свих параметара расподеле.

За расподеле у овом Атласу дати су следећи подаци:

– функција густине,
– скуп вредности и значење параметара,
– карактеристични графици густине у зависности од параметара.

За значајније расподеле дати су и неки од следећих података:

– функција расподеле,
– карактеристична функција,
– генератриса момената,
– ентропија,
– моменти,
– модус и медијана
– коефицијенти асиметрије и спљоштености,
– оцене параметара,
– области примене,
– генерисање вредности одговарајуће случајне промењиве.

Осим тога, за већину расподела дата су и нека додатна својства као и везе са другим расподелама.

Пре описа појединих расподела, у уводном делу под називом *Непрекидне расподеле* дате су дефиниције свих појмова који се користе у *Атласу*, као и најважнихи резултати који могу бити корисни у примени расподела. Кратак приказ специјалних функција које се помињу у *Атласу* дат је после описа расподела, као *Додатак*. На крају књиге је списак коришћене литературе.

За помоћ при изради финалне верзије *Атласа* захваљујемо се рецензентима, Др Павлу Младеновићу, професору Математичког факултета у Београду и ???

Београд, 2007. Аутори

СПИСАК ОЗНАКА

Опште ознаке

∞	бесконачно
$\emptyset$	празан скуп
$\{a, b, c\}$	скуп чији су елементи a, b и c
$A \cup B$	унија скупова A и B
$A \cap B$	пресек скупова A и B
$A \setminus B$	разлика скупова A и B
$X_{\min}, X_{\max}$	најмањи и највећи елемент скупа $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$
$x \to a$	x тежи a
$f : A \to B$	функција f пресликава скуп A у скуп B
$\approx$	приближно
$\lvert x \rvert$	апсолутна вредност броја x
$\overline{z}$	коњуговано комлексни број броја z
a/b	разломак - исто што и $\dfrac{a}{b}$
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$	збир бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$	производ бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$\dfrac{df}{dx}$	извод функције једне променљиве
$\dfrac{\partial f}{\partial x} f(x, y)$	парцијални извод функције f по x
$\displaystyle\int f(x)dx$	неодређени интеграл функције f
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$	одређени интеграл функције f на (a, b)

Бројеви

R	скуп реалних бројева
N	скуп природних бројева
C	скуп комплексних бројева
π	константа (≈ 3.141592)
e	основа природног логаритма (≈ 2.71828)
γ	Ојлерова константа (≈ 0.577)
$\binom{m}{n}$	биномни коефицијент
$n!$	факторијел ($= 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$)
$(2n)!!$	двоструки факторијел ($= 2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot 2n$)
(a, b)	скуп реалних бројева x за које важи $a < x < b$
$[a, b]$	скуп реалних бројева x за које важи $a \le x \le b$
B_{2n}	Бернулијеви бројеви

Случајне променљиве

g_X, g	густина случајне променљиве X
F_X, F	функција расподеле случајне променљиве X
$E(X)$	очекивање случајне променљиве X
$D(X)$	дисперзија случајне променљиве X
σ	стандардна девијација
m_r	r-ти момент случајне променљиве
μ_r	r-ти централни момент случајне променљиве
φ	карактеристична функција
M	генератриса момената
$H(X)$	ентропија случајне променљиве X
$\pi_1(X)$	коефицијент асиметрије
$\pi_2(X)$	коефицијент спљошености
$C_V(X)$	коефицијент варијације
Q_1, Q_3	први и тртећи квартил
$Mo(X)$	модус или мод случајне променљиве X
$Me(X)$	медијана случајне променљиве
$X : W_1(a)$	случајна променљива има расподелу $W_1(a)$

Узорачке величине

$\overline{X}_n, \overline{X}$	средња вредност узорка $X_1, \ldots, X_n$
$\overline{S}_n^2, S^2$	узорачка дисперзија
$\overline{D}_n, D_n$	узорачка дисперзија (познато очекивање)
$\widehat{S}_n^2, \widehat{S}^2$	модификована узорачка дисперзија
$\overline{S}_n, \overline{S}$	узорачка стандардна девијација
$\overline{X}_n^r, \overline{X}_r, M_r$	узорачки моменат реда r
L	функција веродостојности
$\widehat{a}, \widetilde{a}$	оцене параметра a

Специјалне функције

Γ	гама функција
$\Gamma(a, \cdot)$	непотпуна гама функција
$\gamma(a, \cdot)$	непотпуна гама функција
$P(a, \cdot)$	непотпуна гама функција
$Q(a, \cdot)$	непотпуна гама функција
ψ	дигама функција
$\psi^{(1)}$	тригама функција
$\psi^{(n)}$	полигама функција
B	бета функција
B_x	непотпуна бета функција
I_x	непотпуна бета функција
Φ	функција расподеле нормалне стандардне расподеле
$\mathrm{e}rf, \mathrm{e}rfc$	функције грешке
ζ	Риманова зета функција
J_a	Беселова функција прве врсте
I_a	модификована Беселова функција прве врсте
N_a	Беселова функција друге врсте
K_a	модификована Беселова функција друге врсте
$M,\ {}_1F_1$	хипергеометријска функција
L_n, N_n^c	Лагеров и уопштени Лагеров полином

Елементарне функције

sin	синус
cos	косинус
tan	тангенс
arcsin	аркусинус
arccos	аркускосинус
arctan	аркустангенс
sh	синус хиперболички
ch	косинус хиперболички
$tanh$	тангенс хиперболички
exp	експоненцијална функција $(\exp(x) = e^x)$
ln	логаритамска функција са основом e

НЕПРЕКИДНЕ РАСПОДЕЛЕ

У овом делу су дате дефиниције и основе чињенице које се односе на расподеле непрекидних случајних променљивих или краће, *непрекидне расподеле*.

1 Случајне променљиве и функције расподела

Појам случајне променљиве увео је Карл Пирсон[1] 1909. године.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноће (Ω је скуп елементарних догађаја, $\mathcal{F}$ је σ-алгебра догађаја, а P је вероватноћа дефинисана на $(\Omega, \mathcal{F})$) и нека је $\mathcal{B}$ Борелова σ-алгебра подскупова скупа реалних бројева R.

Дефиниција 1 *Функција $X : \Omega \to R$ је случајна променљива (величина) ако је мерљива у односу на σ-алгебре $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$, односно ако за сваки Борелов скуп $B \in \mathcal{B}$ важи*

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\Omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Из дефиниције следи да се на природан начин може дефинисати вероватноћа скупа B за сваки Борелов акуп $B \in \mathcal{B}$. Функција $P_X : \mathcal{B} \to R$ дефинисана са

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

је вероватноћа и назива се расподела вероватноћа случајне променљиве X. Специјално, за $x \in R$ можемо да узмемо $B = (-\infty, x]$.

1.1 Функција расподеле

Дефиниција 2 *Функција $F_X : R \to R$ дефинисана са*

$$F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) \le x\}$$

је функција расподеле вероватноћа или краће, функција расподеле случајне променљиве X.

Ако је јасно о којој променљивој је реч, уместо F_X може се писати F. Функција F је растућа, непрекидна с десне стране за сваки реалан број x и важи:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Издвајају се три типа функција расподеле: дискретне, апсолутно непрекидне и сингуларне, при чему свака фунција расподеле F може да се прикаже у облику

$$F(x) = \alpha F_1(x) + \beta F_2(x) + (1 - \alpha - \beta) F_3(x), \quad \alpha, \beta \ge 0,$$

[1] Karl Pearson (1857-1936) - енглески математичар

где је F_1 апсолутно непрекидна, F_2 дискретна и F_3 сингуларна фунција расподеле.

Овде дајемо само дефиницију апсолутно непрекидне функције расподеле обзиром да су у *Атласу* заступљене само непрекидне расподеле.

Дефиниција 3 *Функција расподеле F случајне променљиве X је апсолутно непрекидна ако постоји интеграбилна функција $g : R \to R$ таква да за сваки реалан број x важи*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt.$$

Функција g је густина расподеле случајне променљиве X.

Апсолутно непрекидна функција расподеле је непрекидна и диференцијабилна скоро свуда, при чему у тачки диференцијабилности x важи $g(x) = F'(x)$. Свака ненегативна интеграбилна функција $g : R \to R$ за коју је $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$ је густина неке расподеле.

1.2 Независност случајних величина

За две или више случајних променљивих дефинише се појам независности.

Дефиниција 4 *Случајне променљиве X и Y на истом простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ су независне ако за свака два Борелова скупа A и B из $\mathcal{B}$ важи*

$$P\{\omega : X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\} = P\{\omega : X(\omega) \in A\} \cdot P\{\omega : Y(\omega) \in B\}.$$

На сличан начин се дефинише независност три или више случајних променљивих. Независност може да се изрази и помоћу функција расподеле. На пример, случајне променљиве X и Y су независне ако и само ако је

$$P\{\omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

за свака два реална броја x и y.

2 Непрекидне случајне променљиве

За разлику од дискретних случајних величина, непрекидна случајна променљива узима вредности из неког интервала или уније интервала реалне праве. При томе, интервал може да буде коначан или бесконачан, као и затворен, отворен или полузатворен.

Дефиниција 5 *Случајна променљива X је апсолутно непрекидна ако је њена функција расподеле F апсолутно непрекидна.*

Ако је случајна променљива апсолутно непрекидна, кажемо да она има апсолутно непрекидну или краће, непрекидну расподелу. Обзиром да фукција расподеле у том случају може да се изрази помоћу густине, важи следеће тврђење.

Теорема 1 *Вероватноћа да вредност апсолутно непрекидне случајне променљиве X припада било ком од скупова (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ или $[a,b]$ једнака је $\int_a^b g(x)dx$.*

У овом *Атласу* заступљене су непрекидне расподеле које имају непрекидну густину. У том случају је функција расподеле диференцијабилна, при чему је $g(x) = F'(x)$ за сваки реалан број x. Из својства 1. наведеног тврђења следи да је

$$P\{\omega : x \le X(\omega) \le x + \Delta x\} = g(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

када $\Delta x \to 0$.

3 Тип расподеле

Дефиниција 6 *Две случајне променљиве су једнаке ако имају исту функцију расподеле.*

У смислу ове дефиниције, ознака $X = Y$ значи да је

$$F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) \le x\} = P\{\omega : Y(\omega) \le x\} = F_Y(x)$$

за сваки реалан број x.

Дефиниција 7 *За случајне променљиве X и Y кажемо да имају исти тип расподеле ако постоје реални бројеви a и b $(b > 0)$ такви да је*

$$Y = a + bX.$$

Према дефиницији имамо да је

$$F_Y(x) = P\{Y \le x\} = P\left\{X \le \frac{x-a}{b}\right\} = P_X\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

за сваки реалан број x. То значи да се функција расподеле за Y може добити помоћу функције расподеле за X линеарном трансформацијом аргумента. Другим речима, избором функције расподеле F одређена је и цела једна двопараметарска фамилија функција расподеле дефинисана са

$$F(x; a, b) = F\left(\frac{x-a}{b}\right), \quad x \in R,\ a \in R,\ b > 0.$$

При томе је $F(x) = F(x; 0, 1)$. Све расподеле ове фамилије су истог типа. Параметар a је *параметар локације*, а параметар b је *параметар скалирања*.

За непрекидне расподеле наведеној фамилији функција расподеле одговара двопараметарска фамилија густина дефинисана са

$$g(x; a, b) = \frac{1}{b} g\left(\frac{x-a}{b}\right),$$

где је g густина расподеле за X. При томе је

$$g_Y(x) = g(x; a, b), \quad g_X(x) = g(x; 0, 1).$$

4 Фамилије расподела

Постоје и фамилије расподела које садрже више типова расподела, при чему све расподеле из фамилије имају неко заједничко својство. Овде се наводе две такве фамилије расподела: *Пирсонове расподеле* и *експоненцијалне расподеле*. У случају фамилије експоненцијалних расподела густине расподела имају исти облик, а у случају Пирсонових расподела густине расподела су решења диференцијалних једначина истог облика.

4.1 Пирсонове расподеле

Развијајући математичку теорију еволуције Пирсон је открио једноставну диференцијалну једначину

$$\frac{g'}{g} = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

чија су решења густине дванаест типова расподела. Решења ове једначине се класификују зависно од природе нула полинома $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$. На тај начин се добија дванаест типова решења која одређују одговарајуће типове расподела познатих као Пирсонове расподеле (тип I до тип XII).

4.2 Експоненцијалне расподеле

Густине расподела ове фамилије су експоненцијалне функције дате са

$$g(x) = \exp\left\{a(\theta)b(x) + c(\theta) + d(x)\right\},$$

где су a, b, c, d реалне функције, а θ параметар.

Специјални случај је фамилија ексоненцијално степених расподела коју је први описао Суботин (Subbotin, 1923). По угледу на Пирсонове расподеле, Лунета (Lunetta, 1963) је експоненцијално степене расподеле разматрао као расподеле чије су густине решења диференцијалне једначине

$$\frac{g'}{g} = k \cdot \frac{\ln g - \ln a}{x - c}.$$

На тај начин се добија тропараметарска фамилија густина

$$g(x; p, \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma p^{1/p}\Gamma(1+1/p)} \exp\left\{-\frac{|x-\mu|^p}{p\sigma^p}\right\},$$

где параметри p, μ и σ зависе од a, c и k.

5 Основне нумеричке карактеристике

Неке нумеричке карактеристике, као што су очекивање, варијанса, модус и медијана, дају основне информације о расподели случајне променљиве.

5.1 Математичко очекивање

Основна мера централне тенденције случајне променљиве је њена очекивана вредност.

Дефиниција 8 *Математичко очекивање $E(X)$ непрекидне случајне променљиве X чија је густина расподеле g је дато са*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx$$

под условом да наведени интеграл апсолутно конвергира. Ако то није случај, математичко очекивање не постоји.

За математичко очекивање линеарне комбинације и производа две случајне променљиве важи следеће тврђење.

Теорема 2 *Ако су X и Y случајне променљиве које имају математичко очекивање, тада је:*

1. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ *за* $a, b \in R$,
2. $E(XY) = E(X)E(Y)$ *ако су* X *и* Y *независне.*

5.2 Модус

Још једна мера централне тенденције је *модус* или *мод*.

Дефиниција 9 *За непрекидну случајну променљиву мод је тачка у којој функција густине достиже локални максимум.*

Према томе, потенцијалне вредности мода су нуле првог извода функције густине. Мод не мора да постоји, а ако расподела има само један мод каже се да је унимодална. Расподела са два мода је бимодална, а са више модова је вишемодална.

Термин *мод* је увео Пирсон 1895. године.

5.3 Дисперзија

Дисперзија или варијанса представља очекивано средњеквадратно одступање од очекиване вредности случајне променљиве.

Дефиниција 10 *Дисперзија $D(X)$ или варијанса $V(X)$ случајне променљиве X је дата са*

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

под условом да наведена очекивања постоје. У противном дисперзија не постоји. Позитивна вредност квадратног корена дисперзије назива се стандардна девијација и означава са $\sigma(X)$ или само σ.

Из дефиниције следи да је

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

што значи да је $D(X) \leq E(X^2)$ и $|E(X)| \leq \sqrt{E(X^2)}$. За дисперзију линеарне комбинације две променљиве важи следеће тврђење.

Теорема 3 *Ако су X и Y назависне случајне променљиве које имају дисперзије и ако су a и b реални бројеви, тада је*

$$D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y).$$

Ако је $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ (стандардизовани или нормирани облик случајне променљиве X), тада је $D(X^*) = 1$.

Појам стандардне девијације увео је Пирсон 1894. године, а појам варијансе увео је Фишер[2] 1918. године.

5.4 Коефицијент варијације

Још једна мера одступања од очекивање вредности је *коефицијент варијације* који је такође увео Пирсон.

Дефиниција 11 *Ако је m очекиваће, а σ стандардна девијација случајне променљиве X, коефицијент варијације C_V је дат са*

$$C_V = 100 \frac{\sigma}{m}.$$

Према томе, овај коефицијент представља количник стандардне девијације и математичког очекивања изражен у процентима.

5.5 Квантили

Обзиром да математичко очекивање и варијанса не морају постојати за дату расподелу, дефинишу се и неке мере централне тенденције и дисперзије које постоје за сваку расподелу.

Дефиниција 12 *За непрекидну случајну променљиву квантил реда или нивоа α $(0 < \alpha < 1)$ је број x_α за који је*

$$F(x_\alpha) = \alpha.$$

Квантили реда $\alpha = 0.25$ и $\alpha = 0.75$ називају се први и трећи квартил и означавају са Q_1 и Q_3. Као мера дисперзије расподеле често се, у случају једнозначно одређених квартила, користи њихова разлика (интерквартилна разлика)

$$Q = Q_3 - Q_1.$$

[2] Ronald Aymler Fisher (1890-1962) – енглески статистичар

5.6 Медијана

Дефиниција 13 *За непрекидну случајну променљиву X квантил реда $1/2$ назива се медијана и означава са $Me(X)$.*

Ако је функција густине симетрична у односу на неку тачку, та тачка је управо медијана, при чему су математичко очекивање и медијана једнаки (уколико очекивање постоји).

6 Моменти

Додатне информације о расподелама се могу добити из вредности момената и централних момената.

Дефиниција 14 *Ако је g функција густине случајне променљиве X, моменат m_r реда r је дефинисан са*

$$m_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r g(x) dx,$$

а централни моменат μ_r реда r је дефинисан са

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^r g(x) dx,$$

при чему се претпоставља да су наведени интеграли апсолутно конвергентни. Ако су наведени интеграли дивергентни, одговарајући моменти не постоје.

Према дефиницији, математичко очекивање је моменат првог реда, а дисперзија је централни моменат другог реда,

$$E(X) = m_1, \quad D(X) = \mu_2.$$

Коришћењем биномног развоја за $(x-m)^r$ могу се добити везе између момената и централних момената. Наиме, важе једнакости

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} m_{k-i} m^i,$$

за $k \in N$, где је $\mu_0 = m_0 = 1$. Слично се добијају и једнакости

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_{k-1} m^i, \quad k \in N.$$

7 Мере асиметрије и спљоштености

Поред основних нумеричких карактеристика дате расподеле, некада су важни и подаци који се односе на облик расподеле. Најзначајнији међу њима су они који говоре о симетрији, односно асиметрији и о спљоштености расподеле, а познати су као *Пирсонови* коефицијенти.

Дефиниција 15 *Расподела непрекидне случајне промењиве X је симетрична уколико постоји тачка a за коју је*

$$g(a-x) = g(a+x)$$

за сваки реалан број x. У супротном расподела је асиметрична.

За асиметричне расподеле потребна је и мера асиметрије.

Дефиниција 16 *Коефицијент асиметрија $\pi_1(X)$ је дефинисан са*

$$\pi_1(X) = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

За $\pi_1(X) = 0$ расподела је симетрична, за $\pi_1(X) > 0$ кажемо да је расподела позитивно асиметрична или асиметрична удесно, а за $\pi_1(X) < 0$ кажемо да је расподела негативно асиметрична или асиметрична улево.

Како коефицијент $\pi_1(X)$ не зависи од средње вредности, нити скалирања случајне промењиве, све расподеле истог типа имају исту асиметрију.

Спљоштеност расподеле се односи на брзину конвергенције ка нули крајева густине расподеле, као и концентрација око средње вредности. Користи се и термин дебљина репа расподеле и обично се упоређује са дебљином репа нормалне расподеле. Пирсон је дефинисао коефицијент спљоштености или киртозис као количник $\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$. Како је киртозис нормалне расподеле једнак 3, често се као мера спљоштености узима вредност киртозиса умањена за 3.

Дефиниција 17 *Коефицијент спљоштености $\pi_2(X)$ је дефинисан са*

$$\pi_2(X) = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3.$$

За $\pi_2(X) > 0$ кажемо да је расподела са дебелим крајевима (реповима) или лептокиртична, за $\pi_2(X) < 0$ кажемо да је расподела са танким крајевима (реповима) или платикиртична, док за $\pi_2(X) = 0$ кажемо да расподела има крајеве (репове) исте дебљине као и нормална расподела или да је мезокиртична.

Спљоштеност је такође иста за све расподеле истог типа.

8 Ентропија

У теорији информација је важна количина информација садржана у случајном догађају, а као мера неизвесности случајне промењиве користи се појам ентропије који је увео Шенон[3].

[3] Claude Elwood Shannon (1916 -2001) - ??

Дефиниција 18 *За непрекидну случајну променљиву X са позитивном густином g ентропија $H(X)$ је дефинисана са*

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ln_2 g(x)dx.$$

Ако густина није свуда позитивна, онда се интеграл на десној страни претходне једнакости узима на скупу $\{x : g(x) > 0\}$.

Расподеле истог типа немају исту ентропију, али постоји једноставна релација за њихове ентропје.

Теорема 4 *Ако је $Y = a + bX$, где је $a \in R$ и $b > 0$, тада је*

$$H(Y) = H(X) + \ln b.$$

9 Карактеристична функција

Карактеристична функција непрекидне случајне променљиве је Фуријеова трансформација њене густине.

Дефиниција 19 *Нека је X непрекидна случајна променљива чија је густина g. Функција $\varphi : R \to C$, где је C скуп свих комплексних бројева, дефинисана са*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(x)dx, \quad t \in R$$

је карактеристична функција за X.

Из дефиниције следи да свака непрекидна случајна променљива има карактеристичну функцију и да је

1. $\varphi(0) = 1$,
2. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$,
3. $|\varphi(t)| \leq 1$.

Расподела случајне променљиве је јединствено одређена њеном карактеристичном фунцијом, при чему постоји и инверзна формула.

Теорема 5 *Ако је φ карактеристична функција случајне променљиве X и ако је*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|dt < \infty,$$

тада је густина g за X дата са

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Осим тога, свака функција φ која је позитивно дефинитна и непрекидна на R и за коју је $\varphi(0) = 1$ је карактеристична функција неке случајне променљиве.

За карактеристичне функције променљивих са истим типом расподеле постоји веза.

Теорема 6 *Ако је $Y = a + bX$ и ако су φ_X и φ_Y карактеристичне функције за X и Y, тада је*

$$\varphi_Y(t) = e^{iat}\varphi_X(bt).$$

Помоћу карактеристичне функције могу се одредити моменти случајне променљиве.

Теорема 7 *Ако случајна променљива има моменат реда r и ако је њена карактеристична функција φ диференцијабилна n пута, , тада је*

$$m_r = \frac{1}{i^n}\varphi^{(n)}(0),$$

где је i имагинарна јединица ($i^2 = -1$).

Често се користи и следеће својство карактеристичне функције.

Теорема 8 *Ако су X и Y независне случајне променљиве са карактеристичним функцијама φ_X и φ_Y и ако је φ_{X+Y} карактеристична функција њиховог збира, тада је*

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t), \quad t \in R.$$

10 Генератриса момената

За случајне променљиве се дефинише и трансформација густине која је реална верзија Фуријеове трансформације.

Дефиниција 20 *Нека је X непрекидна случајна променљива чија је густина g. Функција $M : R \to R$ дефинисана са*

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}g(x)dx, \quad t \in R,$$

под условом да интеграл на десној стране ове једнакости постоји, је генератриса момената променљиве X.

На основу веза између функција φ и M,

$$\varphi(t) = M(it), \quad M(t) = \varphi(-it),$$

следи да се и помоћу генератрисе момената могу добити моменти за X. Наиме, ако за случајну променљиву X постоји моменат реда r, тада је

$$m_r = M^{(r)}(0).$$

Предност функција генератриса је у томе што су реалне функције, а предност карактеристичних функција је у томе што не постоји проблем конвергенције.

11 Оцене параметара

За оцену непознатог параметра неке расподеле на основу простог узорка $(X_1, \ldots, X_n)$ могу се користити различите статистике. У њима се често појављују стандардне статистике као што су:

1. узорачка средина $\overline{X}_n$ или $\overline{X}$ дефинисана са
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$
2. узорачка дисперзија $\overline{S}_n^2$ или $\overline{S}^2$ дефинисана са
$$\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{X}_n\right)^2,$$
3. узорачка дисперзија $\overline{D}_n^2$ или $\overline{D}^2$ дефинисана са
$$\overline{D}_n^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right)^2,$$
у случају да је познато математичко очекивање m посматране расподеле,
4. модификована узорачка дисперзија $\widehat{S}_n^2$ или $\widehat{S}^2$ дефинисана са
$$\widehat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{X}_n\right)^2,$$
5. узорачки моменат $\overline{X}_n^r$ или $\overline{X}^r$ или M_r $(r \in N)$ дефинисан са
$$\overline{X}_n^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r.$$

Наравно, важно је знати својства оцена.

Две основне технике за оцене параметара су метода момената и метода максималне веродостојности. Методу момената је увео Карл Пирсон 1984. године, а методу максималне веродостојности Фишер 1912. године. Метода момената је једноставнија, а метода максималне веродостојности даје асимптотски најефикасније оцене.

11.1 Својства оцена

Нека је $(X_1, \ldots, X_n)$ прост случајан узорак за обележје X и нека је θ непознати параметар у расподели тог обележја.

Дефиниција 21 *Статистика $\widehat{\theta}_n$ је непристрасна оцена за параметар θ ако је $E(\widehat{\theta}_n) = \theta$, а асимптотски непристрасна оцена ако $E(\widehat{\theta}_n) \to \theta$ када $n \to \infty$.*

Уместо термина *непристрасна* користе се и термини *центрирана* и *непомерена*. Оцена која није непристрасна зове се пристрасна. На пример, статистика $\overline{X}_n$ је непристрасна оцена за математичко очекивање, статистика D_n^2 је непристрасна оцена за варијансу, док је статистика S_n^2 пристрасна и асимптотски непристрасна оцена за варијансу.

Термине *пристрасна* и *непристрасна оцена* увео је Боули[4] 1897. године.

Следеће својство се односи на одступање реализоване вредности статистике од очекиване вредности.

Дефиниција 22 *Статистика $\widehat{\theta}_n$ је постојана оцена параметра θ ако $\widehat{\theta}_n$ конвергира у вероватноћи ка θ, односно ако за свако $\varepsilon > 0$ важи*

$$P\{|\widehat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Уместо термина *постојана* користе се и термини *конзистентна* и *стабилна*. Ако је оцена непристрасна и ако $D(\widehat{\theta}_n) \to 0$ када $n \to \infty$, тада је оцена $\widehat{\theta}_n$ стабилна. На пример, статистике $\overline{X}_n$, D_n^2 и S_n^2 су стабилне оцене.

Више различитих, непристрасних и стабилних оцена истог параметра, за исти обим узорка, могу се упоређивати помоћу својих дисперзија.

Дефиниција 23 *Оцена $\widehat{\theta}$ је ефикаснија од оцене $\widetilde{\theta}$ непознатог параметра θ ако је $D(\widehat{\theta}) < D(\widetilde{\theta})$.*

Доњу границу дисперзије непристрасних оцена даје Рао-Крамерова неједнакост. Оцена чија је дисперзија једнака тој доњој граници је *ефикасна оцена*. За анализу оцене није довољно знати само њено очекивање и дисперзију, већ треба одредити и њену расподелу.

11.2 Метода момената

Непрекидне расподеле су, под извесним условима, одређене својим моментима. На пример, ако је за низ момената (m_i) дате расподеле испуњен Карлеманов услов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_{2n}^{1/2n}} = +\infty,$$

тада моменти једнозначно одређују ту расподелу. Самим тим, познавање момената је довољно за налажење непознатих параметара расподеле.

Ако су непознати параметри $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, довољно је узети k момената који зависе од тих параметара. Претпоставимо да су то првих k момента. У том случају имамо систем

$$m_r = f_r(\theta_1, \ldots, \theta_k), \quad r = 1, \ldots, k$$

који одређује непознате параметре. Међутим, како параметре оцењујемо на основу узорка, уместо момената узимамо узорачке моменте и онда из наведног система добијамо оцене непознатих параметара.

[4] Arthur Lyon Bowley (1869-1957) - енглески статистичар

Дефиниција 24 *Оцене параметара $\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_k$ по методи момената, на основу простог узорка $(X_1, \ldots, X_n)$ из неке расподеле, дате су системом*

$$\overline{X}_n^r = f_r(\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_k), \quad r = 1, \ldots, k.$$

Према томе,

$$\widehat{\theta}_i = \widehat{\theta}_i(\overline{X}_n, \overline{X}_n^2, \ldots, \overline{X}_n^k).$$

За реализовани узорак $(x_1, \ldots, x_n)$ добијају се конкретне оцене непознатих параметара.

Предност ове методе је једноставност, а недостатак је немогућност одређивања квалитета и интервала поверења за добијене оцене.

11.3 Метода максималне веродостојности

У овој методи оцена за непознати параметар θ се узима тако да вероватноћа реализације узорка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ буде највећа. Претпоставимо да је $(X_1, \ldots, X_n)$ прост узорак из неке непрекидне расподеле чија густина g зависи од θ, при чему $\theta \in \Theta \subset R$. Функција L дефинисана са

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} g(x_k; \theta)$$

представља густину расподеле узорка као случајног вектора. Обзиром да се реализоване вредности узорка концентришу у области у којој функција L има велике вредности, за оцену непознатог параметра се узима вредност која максимизира функцију L.

Дефиниција 25 *Оцена $\widehat{\theta}$ одређена са*

$$L(X_1, \ldots, X_n; \widehat{\theta}) = \max_{\theta} L(X_1, \ldots, X_n; \theta)$$

је оцена максималне веродостојности. Функција L је функција веродостојности.

Ако је Θ отворен скуп и ако је L диференцијабилна функција по θ, довољно је одредити стационарне тачке функције L и упоредити одговарајуће вредности. Пошто функције L и $\ln L$ имају исте тачке максимума, оцена се једноставније добија из једначине

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0,$$

познате као *једначина веродостојности*. У неким случајевима она има само једно решење.

Теорема 9 *Ако постоји ефикасна оцена параметра θ, онда једначина веродостојности има јединствено решење.*

Метода максималне веродостојности може се применити и у случају да расподела има више непознатих параметара. Ако је $g(x;\theta_1,\ldots,\theta_k)$ густина расподеле која зависи од параметара $\theta_1,\ldots,\theta_k$, тада је функција веродостојности дата са

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta_1,\ldots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n} g(x_i;\theta_1,\ldots,\theta_k).$$

Ако функција L има парцијалне изводе по $\theta_1,\ldots,\theta_k$, оцена непознатих параметара добија се решавањем система

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}L(x_1,\ldots,x_n;\theta_1,\ldots,\theta_k)=0,\quad i=1,\ldots,k.$$

Овај систем је углавном нелинеаран и најчешће се решава нумеричким методама.

Оцене добијене методом максималне веродостојнсти могу бити и пристрасне и неефикасне. Међутим, при одређеним условима оцене су асимптотски ефикасне и имају асимптотски нормалну расподелу.

12 Трансформација случајне променљиве

Ако је позната функција расподеле F_X непрекидне случајне променљиве X и ако је f монотона функција, тада је $Y=f(X)$ такође непрекидна случајне променљива чија се функција расподеле једноставно одређује. Уз додатни услов диференцијабилности функције f лако се налази и густина случајне променљиве $f(X)$.

Теорема 10 *Нека је $Y=f(X)$ и нека је $f:R\to R$ строго монотона диференцијабилна функција. Ако је $h=f^{-1}$ (инверзна функција за f), тада је*

$$g_Y(y)=g_X(h(y))|h'(y)|,\quad y\in(a,b)$$

и $g_Y(y)=0$ за $x\notin(a,b)$, где је

$$a=\min\{f(-\infty),f(+\infty)\},\quad b=\max\{f(-\infty),f(+\infty)\}.$$

Густина случајне променљиве $f(X)$ се може одредити и ако је f део по део монотона. Нека је g строго монотона и диференцијабилна на интервалима $I_1,\ldots,I_k$ и нека је $f_j:I_j\to R$ за $j=1,\ldots k$ рестрикција функцијие f на интервалу I_j. Тада је

$$Y=f_1(X)+f_2(X)+\cdots+f_k(X),$$

па применом претходне теореме на случајне променљиве $f_1(X),\ldots,f_k(X)$ добијамо следеће тврђење.

Теорема 11 *Нека је $Y=f(X)$ и нека је $h_j=f_j^{-1}$ за $j=1,\ldots,k$. Тада је*

$$g_Y(y)=\sum_{j=1}^{k} f_X(h_j(y))|h_j'(y)|.$$

За налажење математичког очекивања случајне променљиве $Y = f(X)$ није неопходно знати густину g_Y.

Теорема 12 *Ако је* $Y = f(X)$*, тада је*

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

под условом да наведени интеграл апсолутно конвергира.

12.1 Такијева трансформација

Амерички статистичар Таки[5] је 1962. године предложио трансформацију

$$Y = \begin{cases} \dfrac{X^\lambda - (1-X)^\lambda}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \ln \dfrac{X}{1-X}, & \lambda = 0 \end{cases}$$

где је X случајна променљива са стандардном униформном расподелом. За одређене вредности параметртa λ расподела добро апроксимира нормалну и студентову расподелу.

12.2 Бокс-Кокс трансформација

За позитивне случајне променљиве Бокс[6] и Кокс[7] су 1964. године увели трансформацију којом се добија приближно нормална расподела. Ако је X позтивна случајна променљива, тада случајна променљива Y дефинисана са

$$Y = \begin{cases} \frac{X^\lambda - 1}{\lambda,} & \lambda \neq 0 \\ \ln X, & \lambda = 0 \end{cases}$$

за погодно изабрану вредност константе λ има приближно нормалну расподелу.

12.3 Џонсонове трансформације

Енглески статистичар Џонсон[8] је 1949. године предложио трансформације

$$X = a + b \ln \frac{Y}{1-Y},$$

$$X = a + b\, arcsh\, Z,$$

где је X случајна променљива са стандардном нормалном расподелом.

Расподела случајне променљиве Y је позната као Џонсонова S_B расподела, а расподела случајне променљиве Z као Џонсонова S_U расподела.

[5] John Wilder Tukey (1915-2000) - амерички стаистичар
[6] George Box (1919-) - енглески статистичар
[7] David Roxbee Cox (1924-) - енглески статистичар
[8] Norman Lloyd Johnson (1917-) - енглески статистичар

13 Моделирање случајних променљивих

Моделирање непрекидне случајне променљиве зависи од карактеристика њене расподеле. У принципу постоје опште методе, као што су *метода инверзне функције*, *Нојманова метода* и друге, али постоје и специфични поступци моделирања за поједине расподеле.

13.1 Метода инверзне функције

Ова метода заснива се на једној једноставној чињеници. Ако је X случајна променљива с непрекидном и монотоно растућом функцијом расподеле F, случајна променљива $Y = F(X)$ има униформну расподелу на $(0,1)$. Према томе, функција расподеле случајне променљиве $F^{-1}(Y)$ је F, односно $X = F^{-1}(Y)$.

За генерисање вредности x случајне променљиве X довољно је генерисати вредност y из униформне расподеле $U(0,1)$ и узети да је $x = F^{-1}(y)$. На тај начин се проблем своди на генерисање вредности случајне променљиве са униформном расподелом, а за то постоје већ готове рутине у свим статистичким програмским пакетима. То су, заправо, *случајни бројеви*.

Генерисање расподеле методом инверзне функције је, дакле, врло једноставно, али је потребно да знамо аналитички облик инверзне функције. Међутим, у многим случајевима то није могуће добити. Због тога ова метода не може да се примени за генерисање, на пример нормалне, бета, гама или хи квадрат расподеле.

Метода се може проширити на случај када је

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k g_k(x),$$

где је $p_1 + \cdots + p_n = 1$ и где густинама g_k одговарају функције расподеле F_k $(k = 1, \ldots, n)$ које имају аналитички израз за инверзну функцију. Алгоритам је тада следећи:

1. Изабрати индекс k са вероватноћом p_k.
2. Генерисати случајну вредност y из униформне расподеле $U(0,1)$.
3. Узети да је $x = F_k^{-1}(y)$.

13.2 Нојманове методе

Нојманове методе или *методе прихватања и одбацивања* користе се за генерисање расподеле са густином g која је позитивна на интервалу $[x_{\min}, x_{\max}]$. Углавном се у њима користи алгоритам у којем се проверава одређени услов и зависно од испуњења тог услова одређена вредност се прихвата или одбацује као случајан број из расподеле са густином g.

Једна од тих метода захтева познавање случајне променљиве Y коју знамо да генеришемо и чија расподела има густину h за коју важи

$$h(x) \leq cg(x), \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}]$$

за неки реалан број $c > 0$. Метода може да се опише следећим алгоритмом:

1. Нека је x генерисана вредност случајне променљиве Y.
2. Генерисати случајан број u из униформне расподеле $U(0,1)$.
3. Ако је $u < \dfrac{g(x)}{ch(x)}$, тада је x тражена вредност случајне променљиве X са густином g. У противном, поступак се понавља (од 1. корака).

Ова метода се заснива на чињеници да је

$$P\left(Y \leq x \,\middle|\, U \leq \frac{g(Y)}{ch(Y)}\right) = \int_{-\infty}^{x} g(y)dy,$$

где је U случајна променљива са униформном расподелом $U(0,1)$. Остале Нојманове методе су мање или веће модификације ове идеје.

14 Тестови сагласности

За тестирање сагласности расподеле посматраног обележја са претпостављеном расподелом постоји више различитих тестова. Тестови се могу поделити у две групе према томе да ли расподела тест статистике зависи од претпостављене расподеле или не. У тестове слободне од расподеле спадају, на пример, Пирсонов χ^2 тест, Колмогоровљев[9] тест, Куиперов[10] тест, фон Мизисов[11] тест. У другу групу спадају, на пример, Андерсон[12]-Дарлингов[13] тест, разне модификације Колмогоровљевог теста уколико параметри претпостављене расподеле нису познати, Шапиро[14]-Вилков[15] тест. За тестирање прилагођености података нормалној расподели постоји још и специфични тестови засновани на поређењу емпиријских коефицијената асиметрије и спљоштености са одговарајућим коефицијентима нормалне расподеле.

14.1 Пирсонов тест

Најпопуларнији је χ^2-тест који је увео Пирсон 1900. године. Тест има облик

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

где су O_i опсервиране, а E_i очекиване фреквенције (под претпоставком одређене расподеле) у интервалима I_i $(i = 1, \ldots, k)$, таквим да је $\cup_{i=1}^{k} I_i = R$

[9] Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987) - руски математичар
[10] ??? (??-??) - ??????
[11] Richard Martin Edler von Mises (1883-1953) - аустријски инжењер и математичар
[12] Theodore Wilbur Anderson (1918-) - амерички статистичар
[13] Davis Darling (??-??) - ?????
[14] Samuel Shapiro (1930-) - амерички статистичар
[15] Martin Bradbury Wilk (1922-) - амерички математичар

и $I_i \cap I_j = \emptyset$ за $i \neq j$. Претпостављајући нулту хипотезу да су опсервиране и очекиване фреквенције статистички значајно не разликују, тест статистика има расподелу $\chi^2(k-p-1)$, где је p број оцењених параметара на основу k опсервираних вредности.

14.2 Тестови којима се пореде емпиријска и теоријска функција расподеле

На основу разлике између емпиријске функције расподеле F_n (простог случајног узорка $X_1, \ldots, X_n$) и теоријске функције расподеле F треба тестирати нулту хипотезу да обележје X има расподелеу F. У тест статистикама се узимају неке функције разлика $F_n(x) - F(x)$ за $x \in R$. На пример, тест статистика Колмогоровљевог теста је

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|,$$

тест статистика Куиперовог теста је

$$V_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| - \inf_x |F_n(x) - F(x)|,$$

док је тест статистика фон Мизисовог теста

$$W_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x).$$

15 Графичке методе испитивања сагласности

Поред тестова за испитивање сагласности обележја са претпостављеном расподелом користе се и графичке методе као што су *дијаграм квантила* ($Q-Q$ дијаграм) и *дијаграм вероватноћа* ($P-P$ дијаграм) које се базирају на статистици поретка $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$.

$Q-Q$ дијаграм је скуп тачака чије су координате $\left(X_{(i)}, F^{-1}(p_i)\right)$, где се за p_i узима нека од вредности $\dfrac{i-1/2}{n}$, $\dfrac{i}{n+1}$, $\dfrac{i-3/8}{n+1/4}$, док је $P-P$ дијаграм скуп тачака $\left(p_i, F(X_{(i)})\right)$.

У случају да су подаци сагласни са претпостављеном расподелом, тачке $Q-Q$ дијаграма приближно припадају правој. Исто важи и за $P-P$ дијаграм.

ОПИС
РАСПОДЕЛА

1

АРКУССИНУС РАСПОДЕЛА $ASS1$

(стандардна)

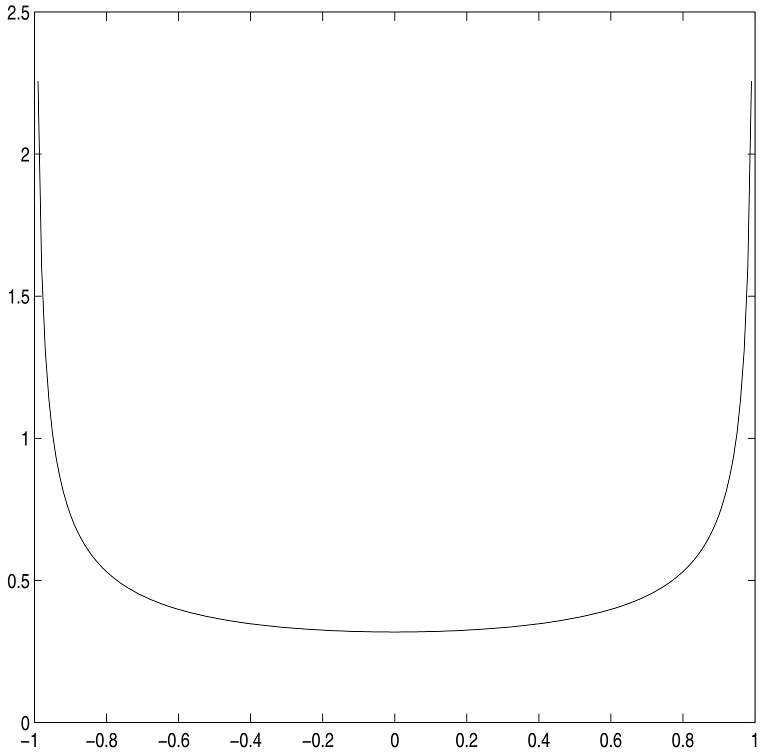
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



Праве $x = -1$ и $x = 1$ су вертикалне асимптоте графика густине.

Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Моменти

$$\mu_{2k-1} = 0, \quad \mu_{2k} = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}, \quad k \in N.$$

Нека својства

1. Густина g је парна функција, при чему је $g_{\min} = g(0) = \dfrac{1}{\pi}$.
2. Нека је X симетрична случајна променљива. Тада X има аркуссинус расподелу ако и само ако случајне променљиве X^2 и $(1+X)/2$ имају исту расподелу.

Везе са другим расподелама

1. Ако $X : U(-\pi, \pi)$, онда случајне променљиве $\sin X$, $\sin 2X$ и $-\cos 2X$ имају аркуссинус расподеле $ASS1$.
2. Ако $X : U(-\pi, \pi)$ и $Y : U(-\pi, \pi)$ и ако су X и Y независне, тада случајне променљиве $\sin(X+Y)$ и $\sin(X-Y)$ имају аркуссинус расподеле $ASS1$.

2

АРКУССИНУС РАСПОДЕЛА $AS1(a)$

(једнопараметарска)

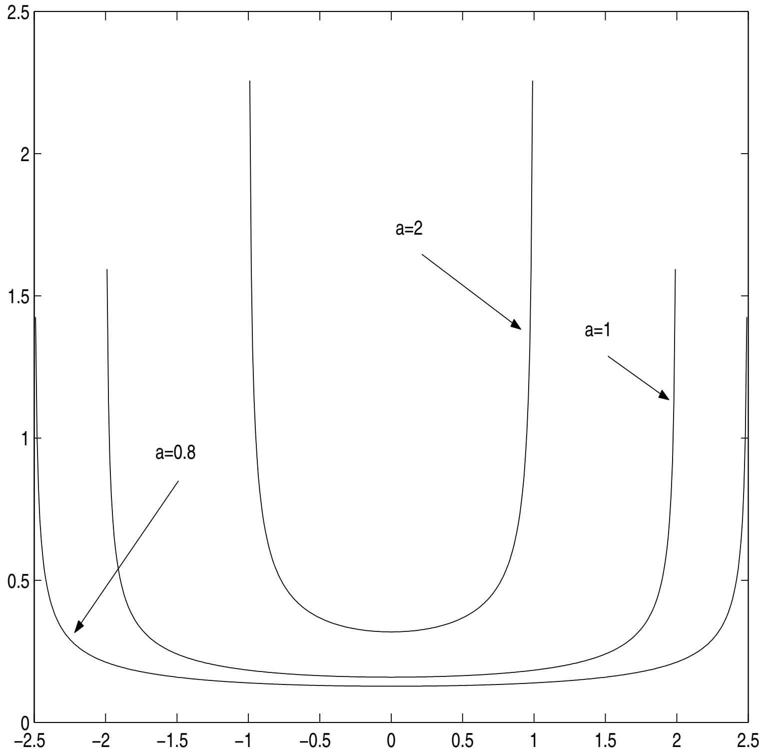
Густина

$$g(x) = \frac{|a|}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 - a^2x^2}}, \qquad -\frac{2}{|a|} < x < \frac{2}{|a|}.$$

Параметри

a $(a \in R \setminus \{0\})$ – параметар локације.

График густине



Праве $x = -2/a$ и $x = 2/a$ су вертикалне асимптоте графика густине.

Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{|a|x}{2}, \quad -\frac{2}{|a|} \leq x \leq \frac{2}{|a|}.$$

Моменти

$$\mu_{2k-1} = 0, \quad \mu_{2k} = \binom{2k}{k} b^{-2k}, \quad k \in N.$$

Нека својства

Густина g је парна функција, при чему је $g_{\min} = g(0) = \dfrac{|a|}{2\pi}$.

Везе са другим расподелама

$AS(2) = AS$.

3

АРКУССИНУС РАСПОДЕЛА $ASS2$

(стандардна)

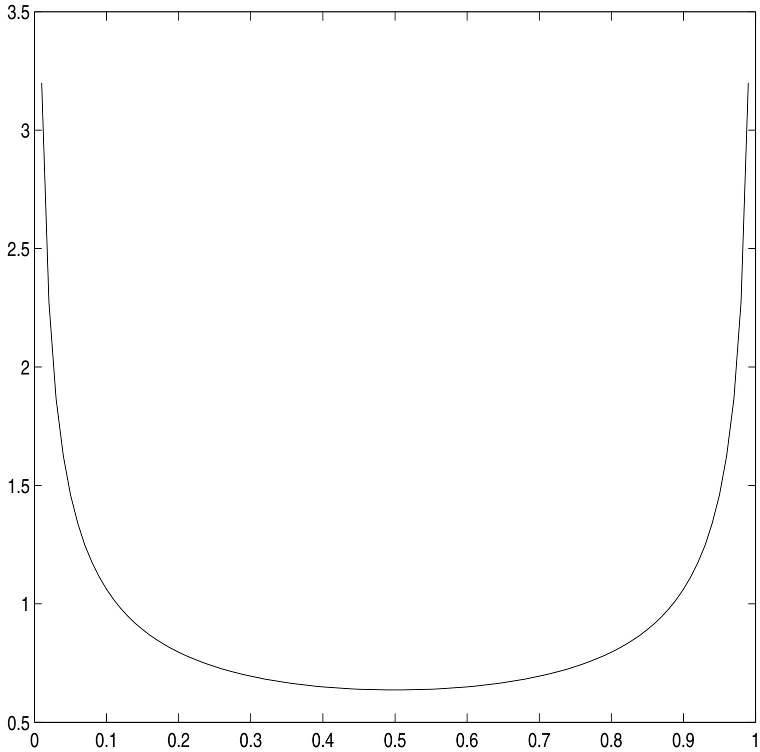
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 < x < 1.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



Праве $x = 0$ и $x = 1$ су вертикалне асимптоте графика густине.

Функција расподеле

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k k!} \binom{2k}{k} (it)^k = M\left(\frac{1}{2}, 1, it\right),$$

где је $M(a,b,z)$ хипергеометријска функција (видети Додатак).

Моменти

$$m_r = \frac{(2r)!}{4^r (r!)^2}, \; r \in N.$$

Специјално,

$$m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{3}{8}, \quad m_3 = \frac{5}{16}, \quad m_4 = \frac{35}{128}.$$

Централни моменти:

$$\mu_{2r-1} = 0, \quad \mu_{2r} = \frac{m_r}{4^r} = \frac{(2r)!}{4^{2r}(r!)^2}, \; r \in N.$$

Специјално,

$$\mu_2 = D(X) = \frac{1}{8}, \quad \mu_4 = \frac{3}{128}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = -1.5.$$

Нека својства

1. Густина g је парна функција, при чему је $g_{\min} = g(1/2) = \dfrac{2}{\pi}$.
2. Ако $X \,:\, ASS2$, тада $1 - X \,:\, ASS2$.
3. Ако $X \,:\, ASS2$, тада $4(X - 1/2)^2 \,:\, ASS2$.

Везе са другим расподелама

1. $ASS2 = B(1/2, 1/2)$.

2. Ако $X : ASS2$, тада $\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{X} : U(0,1)$.
3. Ако $X : U(0,\pi)$, тада $\cos X : ASS2(-1,2)$.
4. Ако $X_k : B\left(\frac{2k-1}{2k}, \frac{1}{2k}\right)$ за $k = 1, 2, \ldots, n$, тада

$$\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{1/n} : ASS2.$$

Примена

Случајни процеси (Брауново кретање).

Напомена

Расподелу је увео Леви (Paul Pierre Levy, 1886-1971) 1939. године.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = \sin^2\frac{u\pi}{2}$ случајан број из $ASS2$ расподеле.

4

АРКУСCИНУС РАСПОДЕЛА $AS2(a,b)$

(двопараметарска)

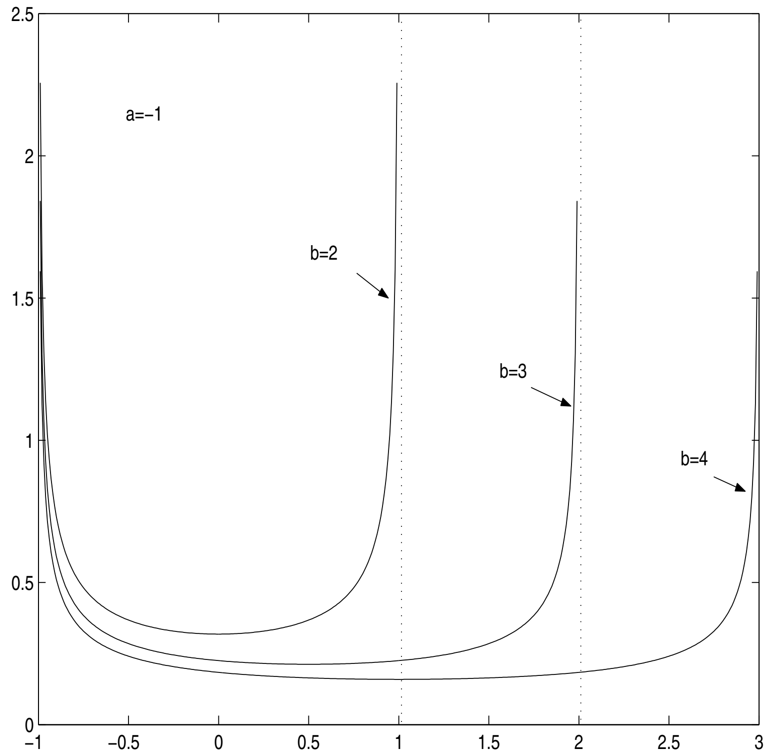
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-a)(a+b-x)}}, \qquad a < x < a+b.$$

Параметри

a, b $(a \in R,\ b > 0)$ – параметри локације.

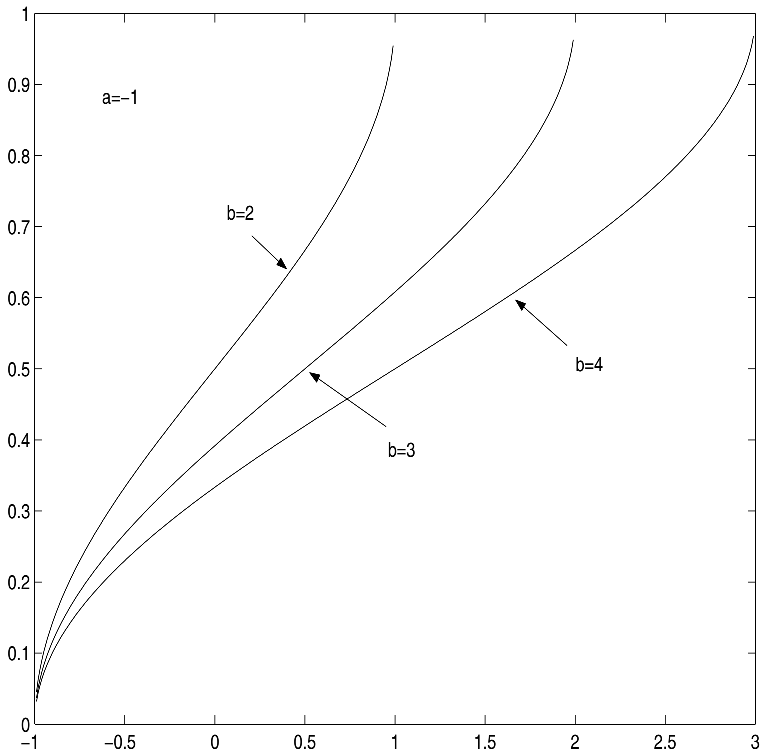
График густине



Праве $x = a$ и $x = a + b$ су вертикалне асимптоте графика густине.

Функција расподеле

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b}}, \quad a < x < a+b.$$



5

БЕТА РАСПОДЕЛА $B_2(a,b)$

(двопараметарска)

Густина

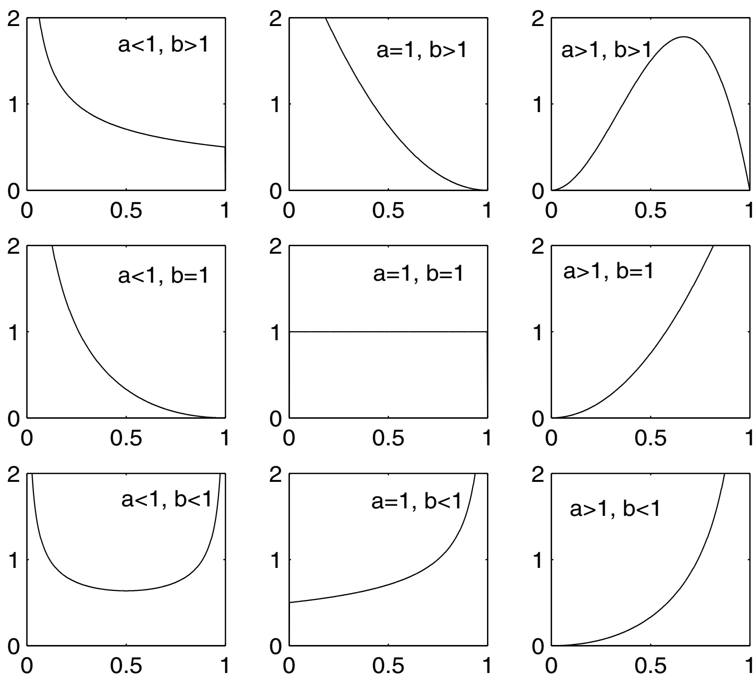
$$g(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Параметри

a, b $(a > 0, b > 0)$ – параметри облика.

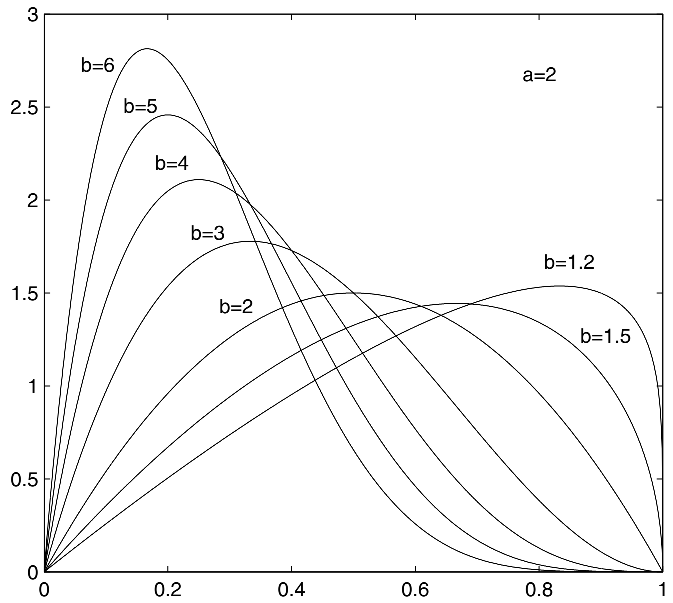
График густине

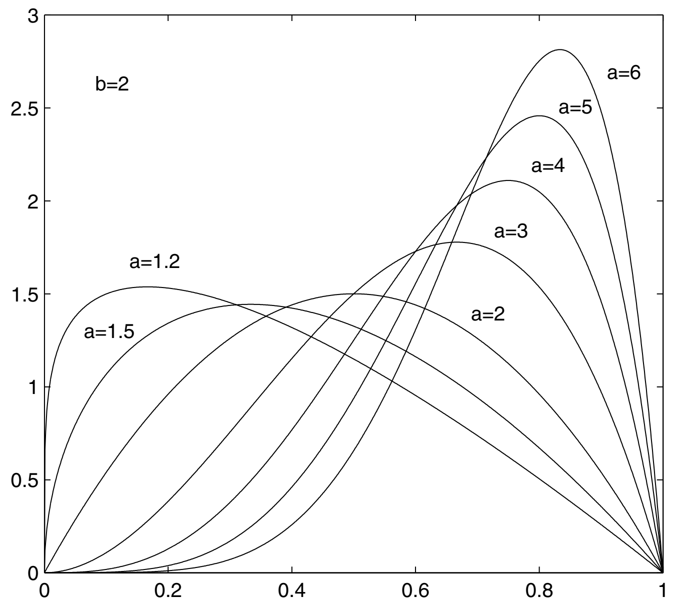
Постоји више карактеристичних случајева зависно од вредности параметара a и b.



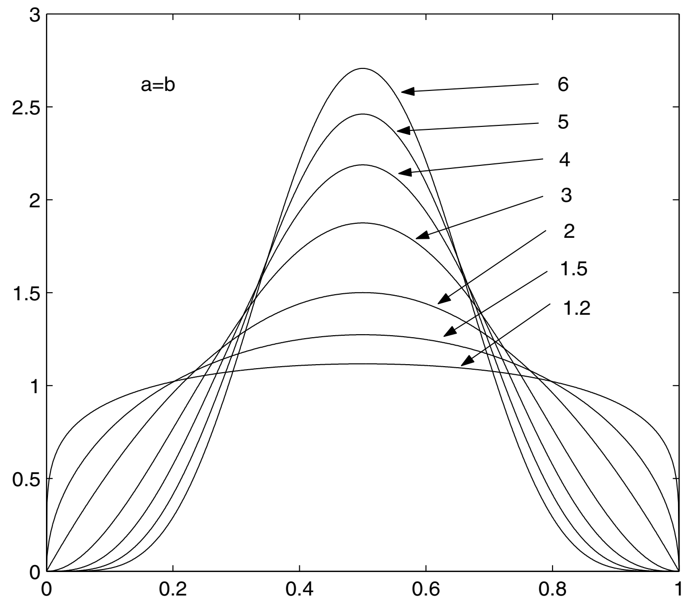
Ако је бар један од параметара мањи од 1, график густине има одговарајуће вертикалне асимптоте.

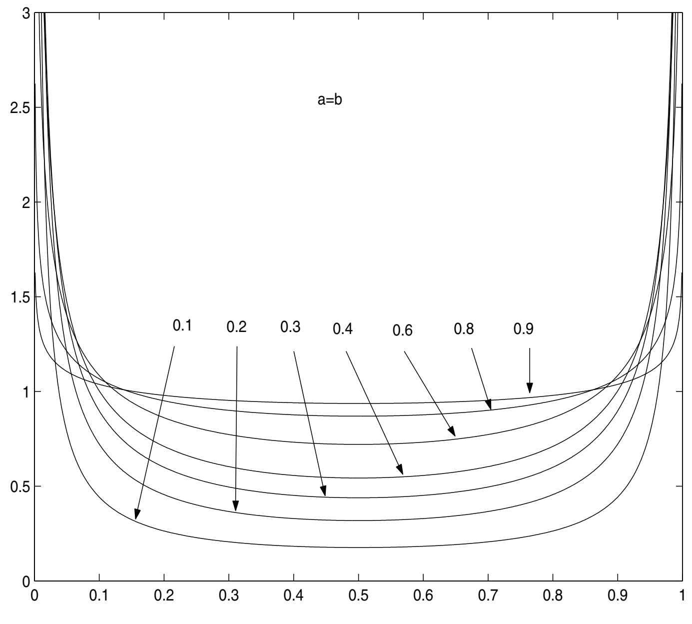
Следеће две слике приказују како се мења густина кад се мења један од параметара, док је други фиксиран.



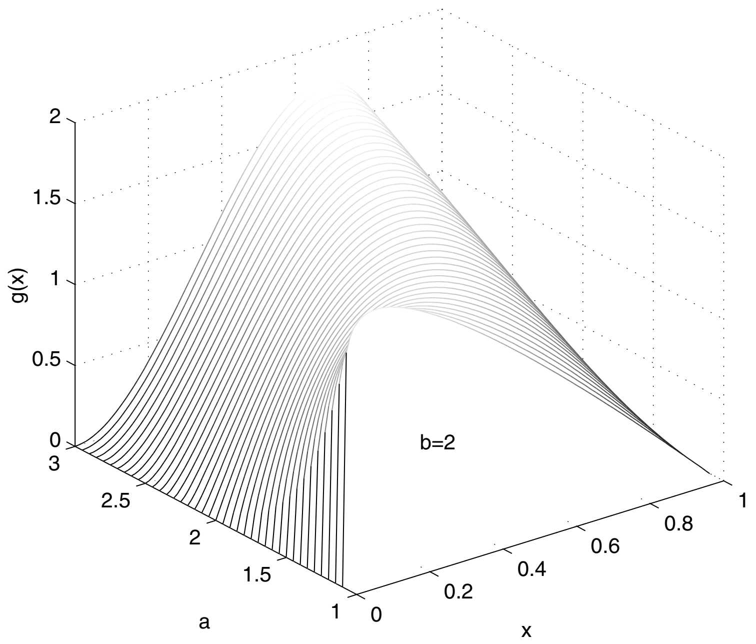


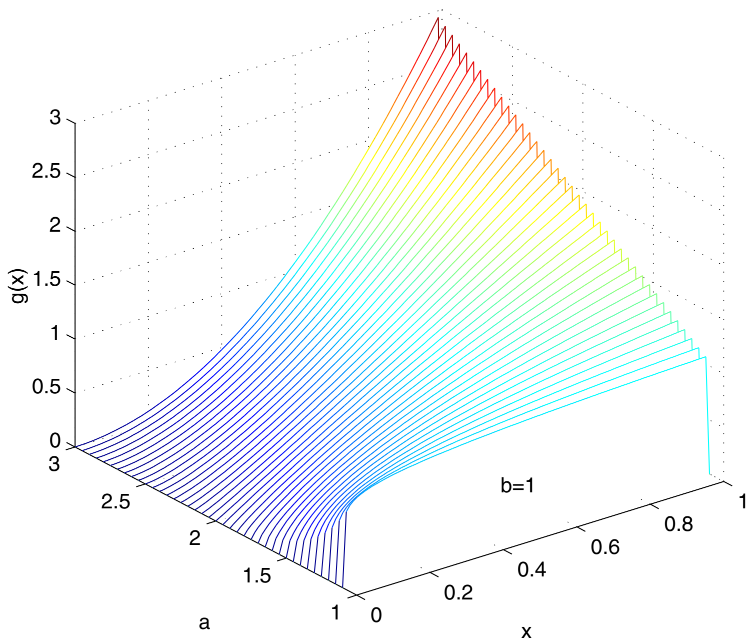
Следеће две слике приказују како се мења густина када се мењају параметри a и b у случају кад је $a = b$.





Слично приказују и следеће две слике, али у 3D.





Функција расподеле

$$F(x) = \frac{B_x(a,b)}{B(a,b)} = I_x(a,b),$$

где су B_x и I_x непотпуне Бета функције (видети Додатак).

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+b+k)} = M(a, a+b, it),$$

где је M хипергеометријска функција (видети Додатак).

Генератриса момената

$$M(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{a+i}{a+b+i} \cdot \frac{t^k}{k!}.$$

Моменти

$$m_r = \frac{B(a+r,b)}{B(a,b)} = \frac{a(a+1)\cdots(a+r-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+r-1)}, \quad r > 0.$$

Специјално,

$$m_1 = \frac{a}{a+b}, \quad m_2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}.$$

Централни моменти:

$$\mu_2 = D(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}, \quad \mu_3 = \frac{2ab(b-a)}{(a+b)^3(a+b+1)(a+b+2)},$$

$$\mu_4 = \frac{3ab(2(a+b)^2 + ab(a+b-6))}{(a+b)^4(a+b+1)(a+b+2)(a+b+3)}.$$

Модус и медијана

1. За $a > 1$ и $b > 1$ расподела има мод једнак $\dfrac{a-1}{a+b-2}$, а за $a < 1$ и $b < 1$ има антимод једнак $\dfrac{a-1}{a+b-1}$, док за $a > 1$ и $b < 1$, као и за $a < 1$ и $b > 1$, не постоји ни мод ни антимод.

2. За медијану не постоји једноставан израз.

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2(b-a)}{a+b+2}\sqrt{\frac{a+b+1}{ab}},$$

$$\pi_2(X) = \frac{3(a+b+1)(2(a+b)^2+ab(a+b-6))}{ab(a+b+2)(a+b+3)}$$

Оцене параметара

Оцене по методи максималне веродостојности су:

$$\widehat{a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-((1-X_1)(1-X_2)\cdots(1-X_n))^{1/n}}{1-(X-1X_2\cdots X_n)^{1/n}-((1-X_1)(1-X_2)\cdots(1-X_n))^{1/n}},$$

$$\widehat{b} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-(X_1X_2\cdots X_n)^{1/n}}{1-(X_1X_2\cdots X_n)^{1/n}-((1-X_1)(1-X_2)\cdots(1-X_n))^{1/n}},$$

при чему је

$$D(\widehat{a}) \sim \frac{a(2a-1)}{n}, \quad D(\widehat{b}) \sim \frac{b(2b-1)}{n}, \quad (n\to\infty)$$

и за $a>2$ и $b>2$

$$\rho(\widehat{a},\widehat{b}) \sim \sqrt{\frac{(a-2)(b-2)}{ab}}, \quad (n\to\infty).$$

Оцене по методи момената су:

$$\widetilde{a} = (M_1-M_2)\frac{M_1}{S_n^2}, \quad \widetilde{b} = (M_1-M_2)\frac{1-M_1}{S_n^2}.$$

Нека својства

1. За $a=b$ график густине је симетричан у односу на праву $x=1/2$.

2. За све вредности параметара је $D(X)<1/4$. Специјално, за $a>1$ и $b>1$ је $D(X)<1/12$, а за $a<1$ и $b<1$ је $D(X)>1/12$.

3. Ако $X\ :\ B_2(a,b)$, онда $1-X\ :\ B_2(b,a)$.

4. Бета расподела је расподела статистика поретка за узорак са униформном расподелом. Ако су $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независне случајне променљиве са $U(0,1)$ расподелом и $\xi(1),\ldots,\xi(n)$ статистике поретка, онда $\xi(k)$ има $B_2(k,n-k+1)$ расподелу.

5. Ако $X\ :\ B_2(a+b,c)$ и $Y\ :\ B_2(a,b)$ и ако су X и Y независне, тада $XY\ :\ B_2(a,b+c)$.

6. Ако $X\ :\ B_2(a,b)$ и $Y\ :\ B_2(a+1/2,b)$ и ако су X и Y независне, тада $\sqrt{XY}\ :\ B_2(2a,2b)$.

Везе са другим расподелама

1. Бета расподела је специјалан случај Пирсонове расподеле типа I.
2. $B_2(1,2)$ и $B_2(2,1)$ су троугаоне расподеле.
3. $B_2(2,2)$ је параболичка расподела.
4. $B_2(1,1)=U(0,1)$.
5. $B_2(1/2,1/2)=AS2$.
6. $B_2(a,b)=B_4(a,b,0,1)$.
7. Ако $X\ :\ B_2(a,b)$, тада e^X има лог-бета расподелу, односно Y има лог-бета расподелу ако $\ln Y\ :\ B_2(a,b)$.
8. Ако $X\ :\ B_2(a,b)$, тада $\dfrac{X}{1-X}$ има Пирсонову расподелу типа VI или бета расподелу друге врсте.
9. $B_2(a,1)$ је такозвана стандардна степена расподела.
10. Ако $X\ :\ B_2(1,b)$, онда $-\ln X\ :\ E(1/b)$.
11. Ако $X\ :\ B_2(a,1)$, онда $-\ln X\ :\ E(1/a)$.
12. $B_2(a,a+1)$ је уопштена аркуссинус расподела.
13. Ако $X\ :\ G_1(a),\ Y\ :\ G_1(b)$ и ако су X и Y независне, тада
$$\frac{X}{X+Y}\ :\ B_2(a,b).$$
14. Ако $X\ :\ F(m,n)$ и $Y=\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{nX}{n+mX}$, тада $Y\ :\ B_2\Big(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\Big)$.
15. Ако $X\ :\ \chi^2(m)$ и $Y\ :\ \chi^2(n)$ и ако су X и Y независне, тада
$$\frac{X}{X+Y}\ :\ B_2\Big(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\Big).$$
16. Ако $X_i\ :\ \chi^2(n_i)$ и ако су X_i и X_j независне за $i\neq j$, тада
$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}X_i}{\sum\limits_{j=1}^{k}X_j}\ :\ B_2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}n_i,\frac{1}{2}n_k\right).$$

Примена

Метеорологија, биологија, хидрологија, комуникације, операциона истраживања, климатологија, Бајесовска статистика, соларно зрачење.

Напомена

Како постоји веза између бета и гама функције, густина расподеле $B_2(a,b)$ може да се изрази и преко гама функције на следећи начин:

$$g(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Генерисање

Ако је y случајан број из $G(a)$ и z случајан број из $G(b)$ расподеле, тада је

$$x = \begin{cases} \dfrac{y}{y+z}, & a \geq b \\ 1 - \dfrac{z}{y+z}, & a < b \end{cases}$$

случајан број из $B_2(a,b)$ расподеле.

6

БЕТА РАСПОДЕЛА $B_4(a, b, c, d)$

(четворопараметарска)

Густина

$$g(x) = \frac{1}{B(a,b)} \frac{(x-c)^{a-1}(d-x)^{b-1}}{(d-c)^{a+b-1}}, \quad c \le x \le d.$$

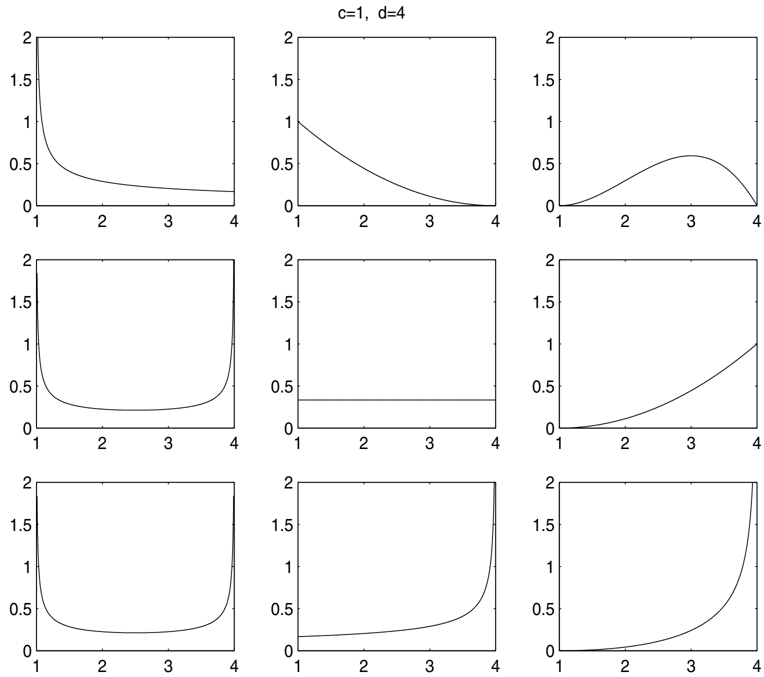
Параметри

a, b $(a > 0, b > 0)$ – параметри облика,

c, d $(c, d \in R, c < d)$ – најмања и највећа вредност случајне променљиве.

График густине

Карактеристични случајеви су исти као за $B_2(a, b)$, само што је уместо интервала $(0, 1)$ интервал (c, d).



Моменти

$$m_1 = c + \frac{da}{a+b}, \quad D(X) = \frac{ab(d-c)^2}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2(b-a)}{a+b+2}\sqrt{\frac{a+b+1}{ab}},$$
$$\pi_2(X) = \frac{3(a+b+1)(2(a+b)^2 + ab(a+b-6))}{ab(a+b+2)(a+b+3)}.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Ако су параметри c и d познати, оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ параметара a и b методом максималне веродостојности добијају се из система

$$\begin{aligned} \psi(\widehat{a}) - \psi(\widehat{a}+\widehat{b}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{X_i - c}{d-c} \\ \psi(\widehat{b}) - \psi(\widehat{a}+\widehat{b}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{d - X_i}{d-c}, \end{aligned}$$

где је ψ дигама функција (видети Додатак).

Метода момената

Оцене $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ методом момената за непознате параметре a и b (под претпоставком да су параметри c и d познати) добијају се из система

$$\begin{aligned} \frac{M_1 - c}{d-c} &= \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{a}+\widetilde{b}}, \\ \frac{S_n^2}{(d-c)^2} &= \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{a}+\widetilde{b}}\left(1 - \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{a}+\widetilde{b}}\right)\frac{1}{\widetilde{a}+\widetilde{b}+1}. \end{aligned}$$

Нека својства

1. За $a > 1$ и $b > 1$ расподела има мод једнак $\dfrac{d(a-1)+c(b-1)}{a+b-2}$.

Везе са другим расподелама

1. Ако $X\ :\ B_2(a,b)$, тада $c + (d-c)X\ :\ B_4(a,b,c,d)$.

2. Ако $X \ : \ B_4(a,b,c,d)$, тада $\dfrac{X-c}{d-c} \ : \ B_2(a,b)$.

Примена

Расподела $B_4(a,b,c,d)$ служи за описивање разних појава које се карактеришу случајним величинама чије су вредности у коначном интервалу. На пример, степен облачности у метеорологији.

Напомена

Како постоји веза између бета и гама функције, густина расподеле $B_4(a,b,c,d)$ може да се изрази и преко гама фунције на следећи начин:

$$g(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{(x-c)^{a-1}(d-x)^{b-1}}{(d-c)^{a+b-1}}, \quad c \leq x \leq d.$$

7

БЕТА ПРИМ РАСПОДЕЛА $BP(a,b)$

(двопараметарска)

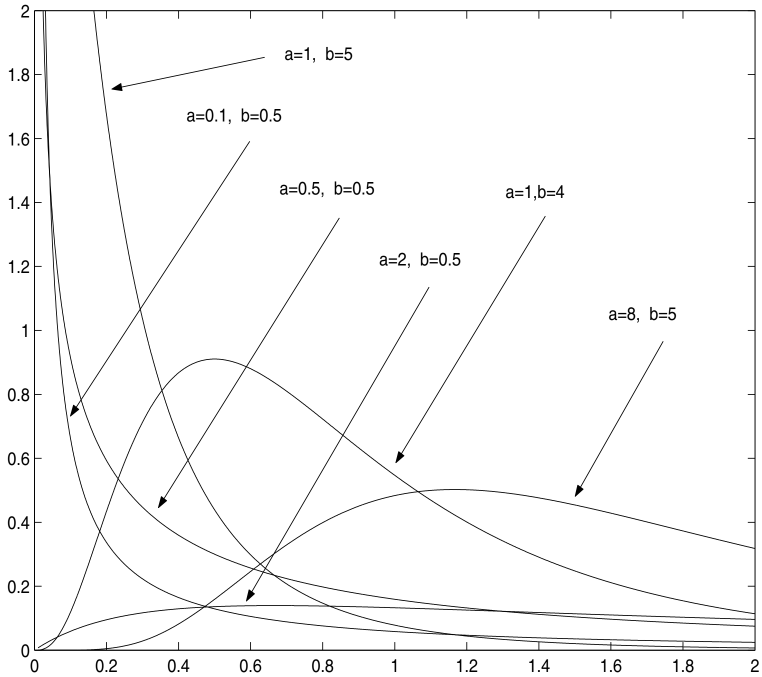
Густина

$$g(x) = \frac{1}{B(a,b)} \cdot \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}, \quad x > 0.$$

Параметри

a, b $(a, b > 0)$ – параметри облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = I_{x/(1+x)}(a, b),$$

где је I_x непотпуна бета функција (видети Додатак).

Нека својства

1. Ако $X : BP(a, b)$, онда $\frac{1}{X} : BP(b, a)$.
2. Модус расподеле је једнак $\frac{a-1}{b+1}$.

Везе са другим расподелама

1. Расподела је специлајан случај Пирсонове расподеле (тип VI).
2. Ако $X : B_2(a, b)$, онда $\frac{1-X}{X} : BP(b, a)$ и $\frac{X}{1-X} : BP(a, b)$.
3. Ако $X : G_1(a)$ и $Y : G_1(b)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $\frac{X}{Y} : BP(a, b)$.
4. Ако $\frac{X^2}{2} : G_1(1/2)$ и $\frac{Y^2}{2} : G_1(1/2)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $\frac{X^2}{Y^2} : BP(1/2, 1/2)$.

Напомена

У литератури на енглеском језику се користе и називи beta distribution of the second kind и inverted beta.

8

БРАДФОРДОВА РАСПОДЕЛА $BR(a,b,c)$

(тропараметарска)

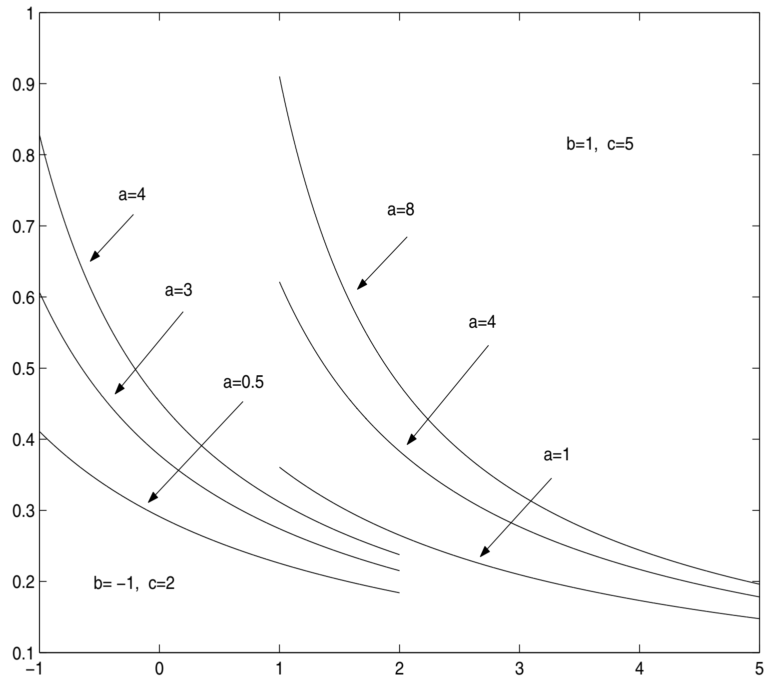
Густина

$$g(x) = \frac{a}{a(x-b) + (c-b)\log(a+1)}, \quad b < x < c.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b, c $(b < c)$ – параметри локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{\log\left(1 + a\dfrac{x-b}{c-b}\right)}{\log(a+1)}, \quad b < x < c.$$

Моменти

$$m_1 = \frac{a(c - b + \log(a+1)(c(a+1) - c)}{a\log(a+1)},$$
$$D(X) = \frac{(c-b)^2(a(\log(a+1) - 2) + 2\log(a+1))}{2a\log^2(a+1)}.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = b, \quad Me(X) = \frac{1}{a}(b(a+1) - c + (c-b)\sqrt{a+1}).$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \sqrt{2}\frac{12a^2 - 9ka(a+2) + 2k^2(a(a+3)+3)}{\sqrt{a(a(k-2)+2k}(3a(k-2)+6k)},$$
$$\pi_2(X) = \frac{a^3(k-3)(k(3k-16)+24) + 12ka^2(k-4)(k-3) + 6ak^2(3k-14) + 12k^3}{3a(a(k-2)+2k)^2},$$

где је $k = \log(a+1)$.

Нека својства

Квартили расподеле су:

$$Q_1 = \frac{1}{a}(b(a+1) - c + (c-b)\sqrt[4]{a+1}), \quad Q_3 = \frac{1}{a}(b(a+1) - c + (c-b)\sqrt[4]{(a+1)^3}).$$

9

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU2(a)$

(тип II, једнопараметарска)

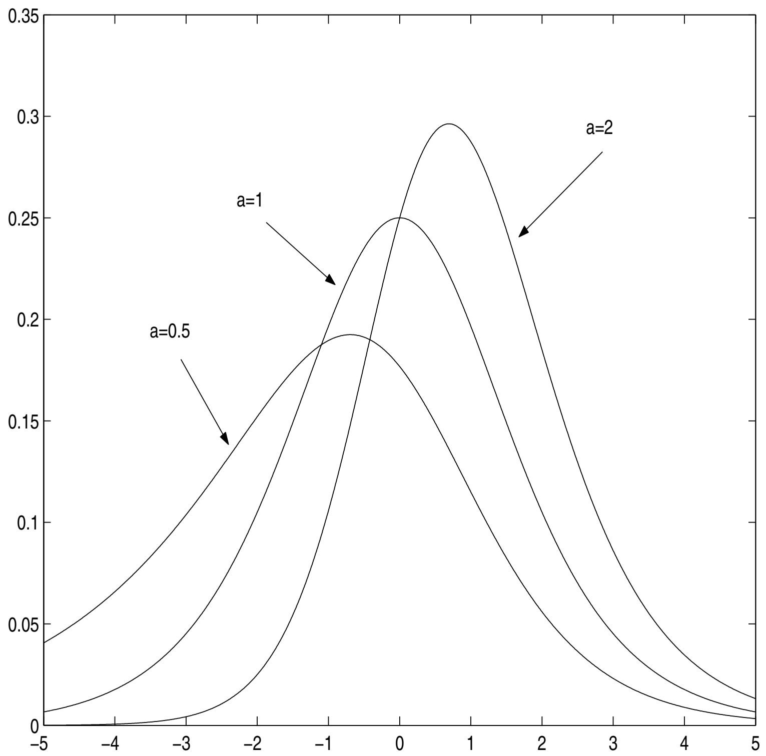
Густина

$$g(x) = \frac{ae^{-x}}{(1+e^{-x})^{a+1}}, \quad x \in R.$$

Параметри

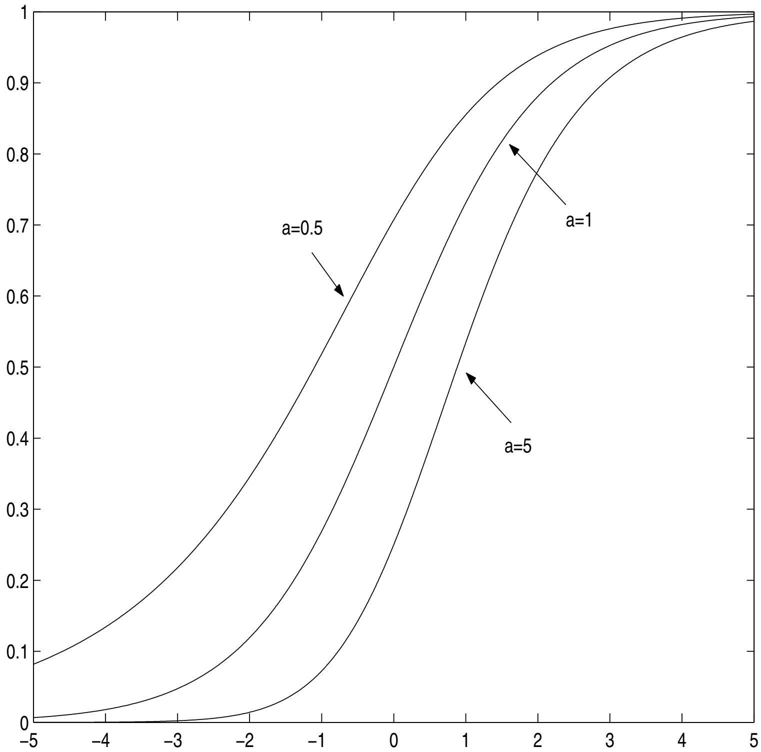
a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(1 + e^{-x}\right)^{-a}, \quad x \in R.$$



10

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU3(a,b)$

(тип III, двопараметарска)

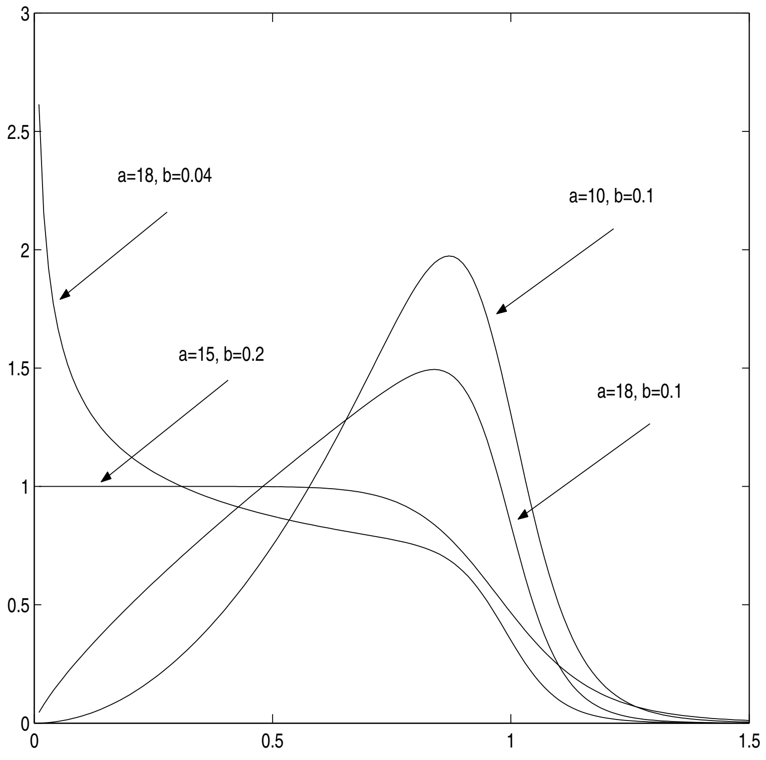
Густина

$$g(x) = \frac{ab}{x^{a+1}\left(1+x^{-a}\right)^{b+1}}, \quad x > 0.$$

Параметри

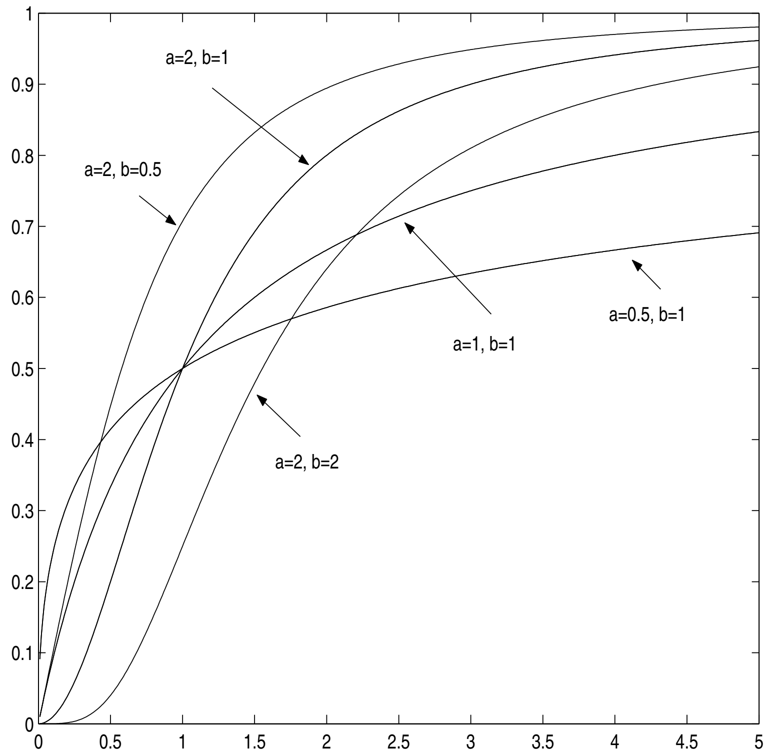
a, b $(a, b > 0)$ - параметри облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(1 + x^{-a}\right)^{-b}, \quad x > 0.$$



11

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU4(a,b)$

(тип IV, двопараметарска)

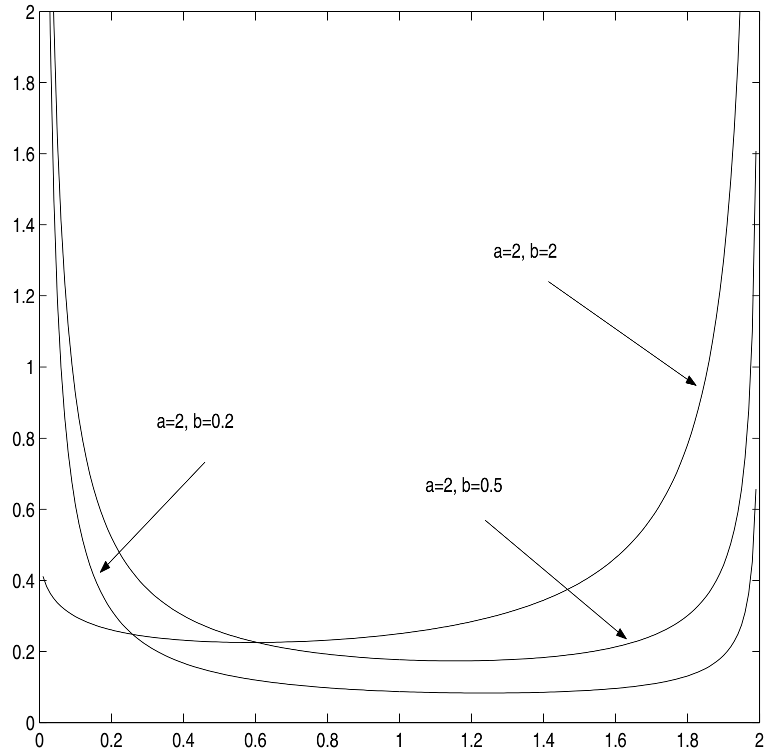
Густина

$$g(x) = \frac{b}{x(x-a)} \cdot \left(\frac{a-x}{x}\right)^{1/a} \cdot \left(1 + \left(\frac{a-x}{x}\right)^{1/a}\right)^{-b-1}, \quad 0 < x < a.$$

Параметри

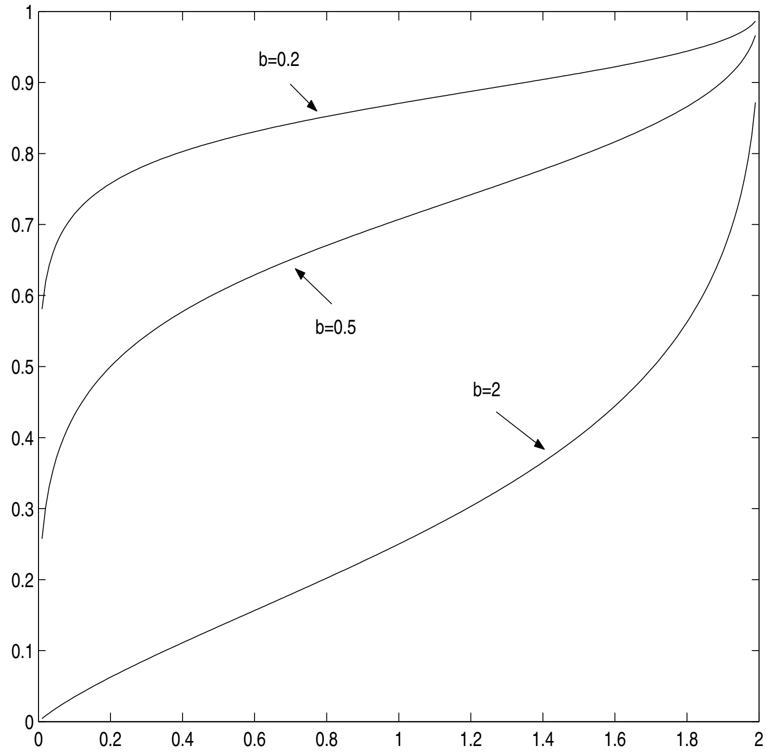
a, b $(a > 0, b > 0)$ - параметри облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(1 + \left(\frac{a-x}{x}\right)^{1/a}\right)^{-b}, \quad 0 < x < a.$$



12

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU5(a,b)$

(тип V, двопараметарска)

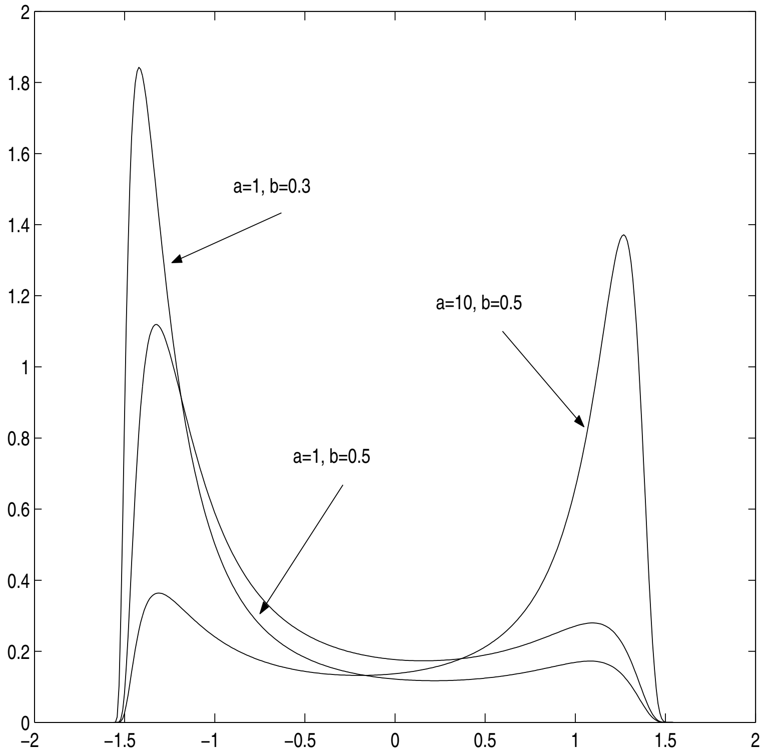
Густина

$$g(x) = \frac{ab}{e^{\tan x}} \cdot \frac{1+\tan^2 x}{(1+ae^{-tanx})^{b+1}}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Параметри

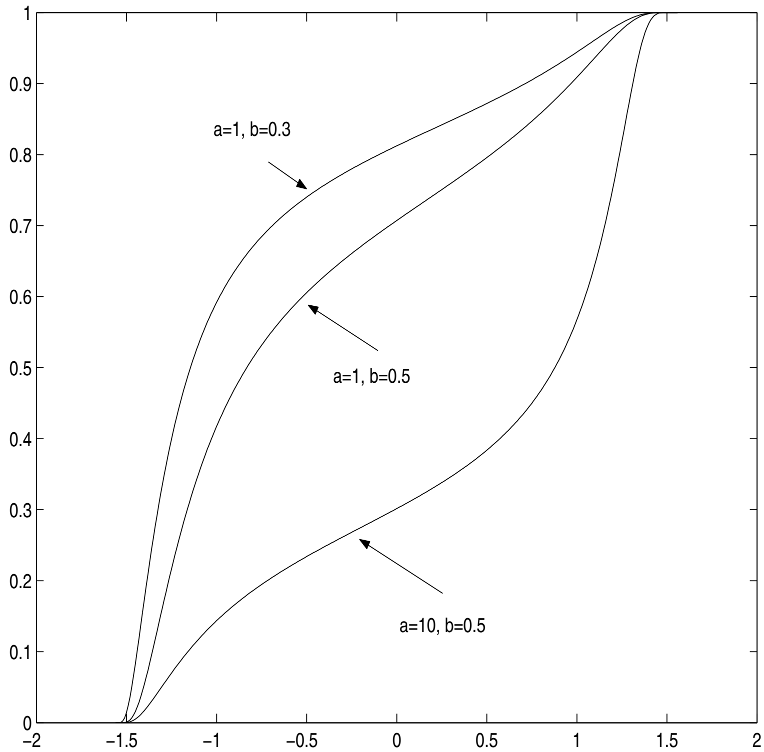
a, b ($a \in R, b > 0$) – параметри облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(1 + ae^{-\tan x}\right)^{-b}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$



13

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU6(a, b)$

(тип VI, двопараметарска)

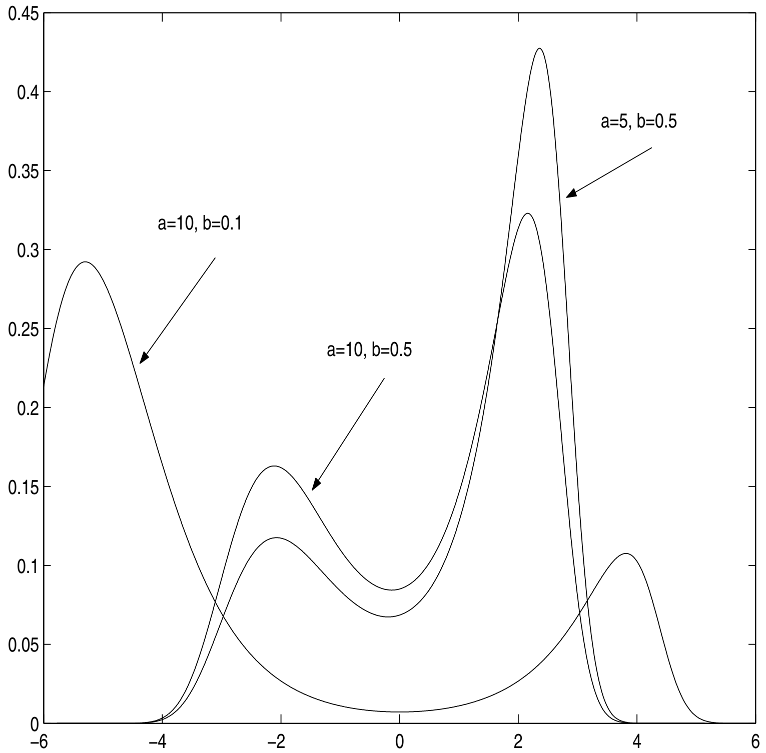
Густина

$$g(x) = ab^2\, ch\, xe^{-b\, sh\, x} \left(1 + ae^{-b\, sh\, x}\right)^{-b-1}, \quad x \in R.$$

Параметри

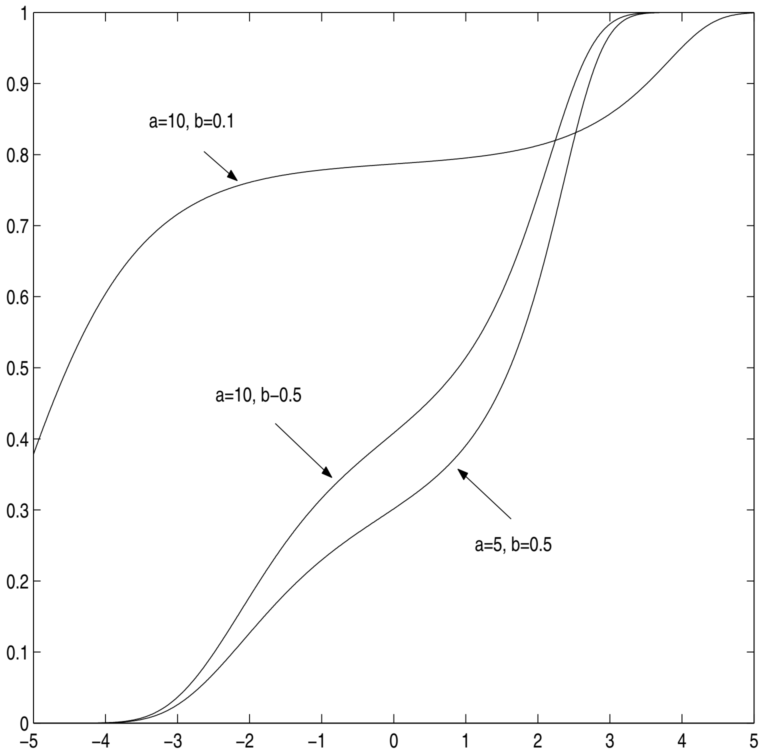
a, b $(a > 0, b > 0)$ – параметри облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(1 + ae^{-b\, sh\, x}\right)^{-b}, \quad x \in R.$$



14

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU7(a)$

(тип VII, једнопараметарска)

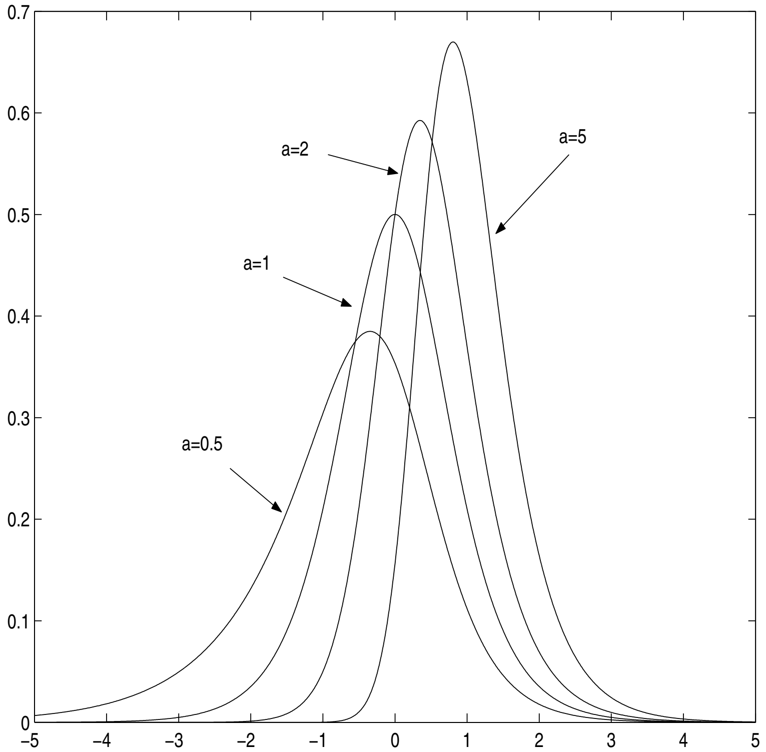
Густина

$$g(x) = -a\,(tanh\,x - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,tanh\,x\right)^{a}, \quad x \in R.$$

Параметри

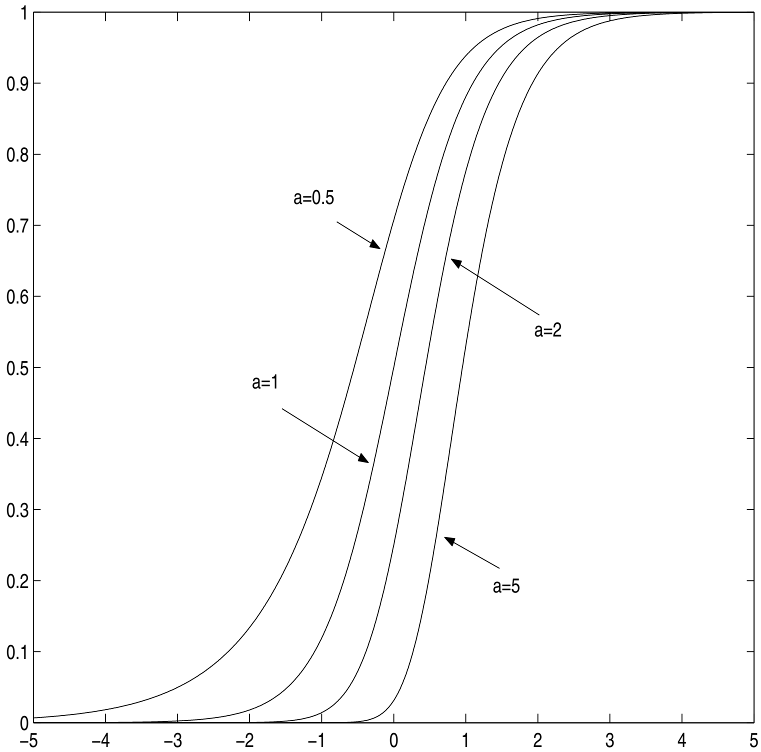
a $(a > 0)$ - параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 2^{-a}\,(1 + tanh\,x)^a\,, \quad x \in R.$$



15

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU8$(a)

(тип $VIII$, једнопараметарска)

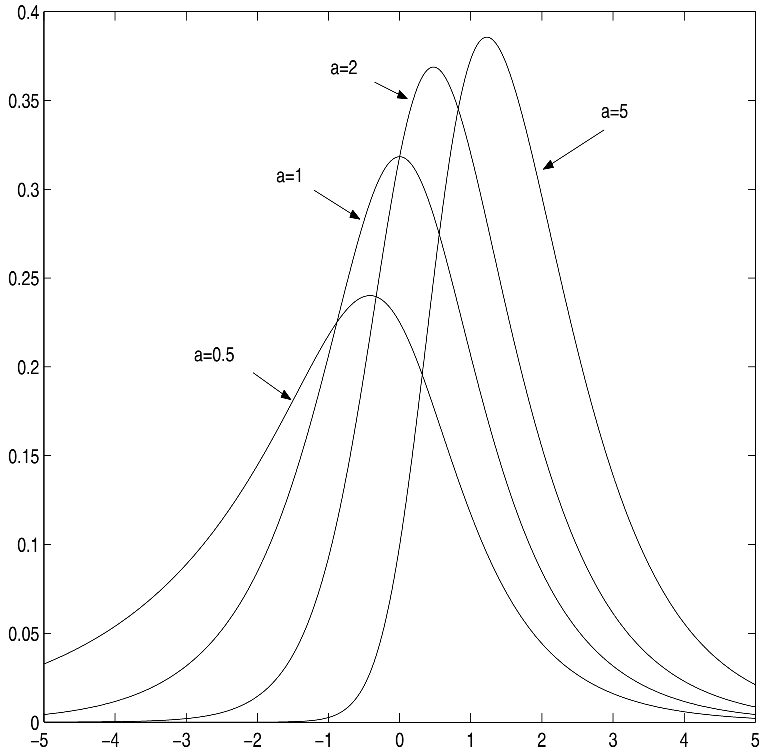
Густина

$$g(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^a \cdot \frac{ae^x}{1+e^{2x}} \cdot (\arctan e^x)^{a-1}, \quad x \in R.$$

Параметри

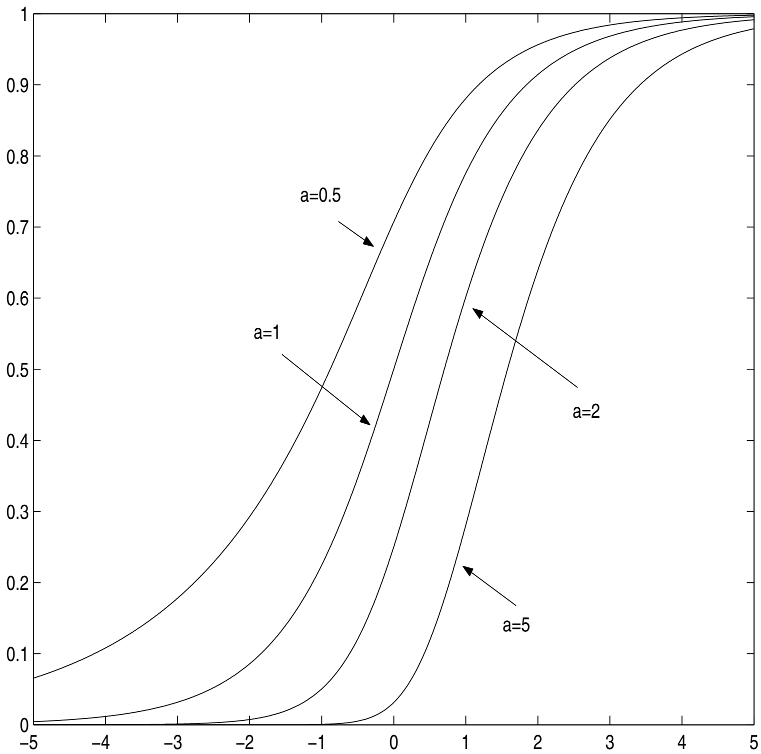
a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(\frac{2}{\pi}\arctan e^x\right)^a, \quad x \in R.$$



16

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU9(a, b)$

(тип IX, двопараметарска)

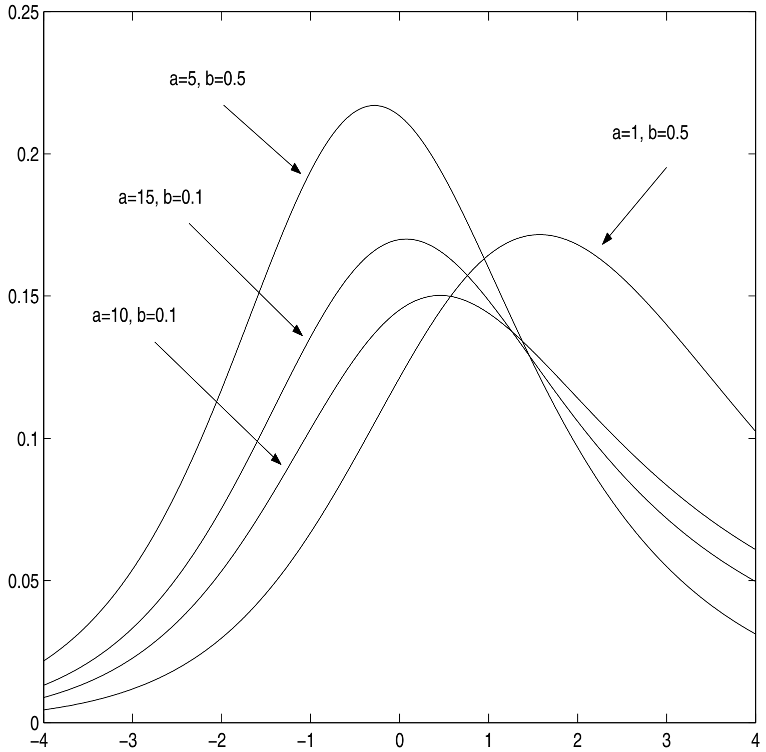
Густина

$$g(x) = 2abe^x \cdot \frac{(1+e^x)^{b-1}}{\left(a(1+e^x)^b - a + 2\right)^2}, \quad x \in R.$$

Параметри

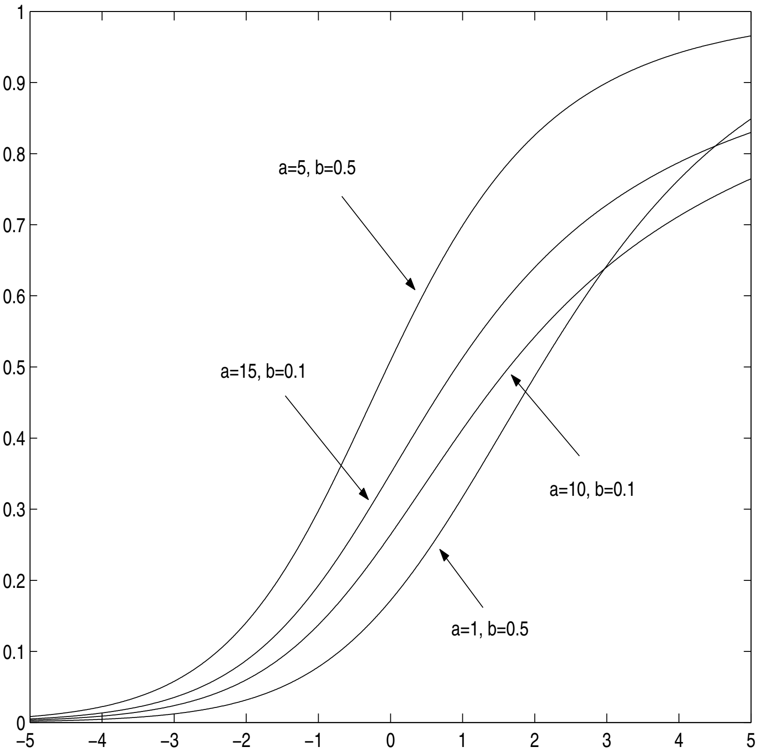
a, b $(a > 0, b > 0)$ – параметри облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \frac{2}{a\left((1+e^x)^b - 1\right) + 2}, \quad x \in R.$$



17

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU10(a)$

(тип X, једнопараметарска)

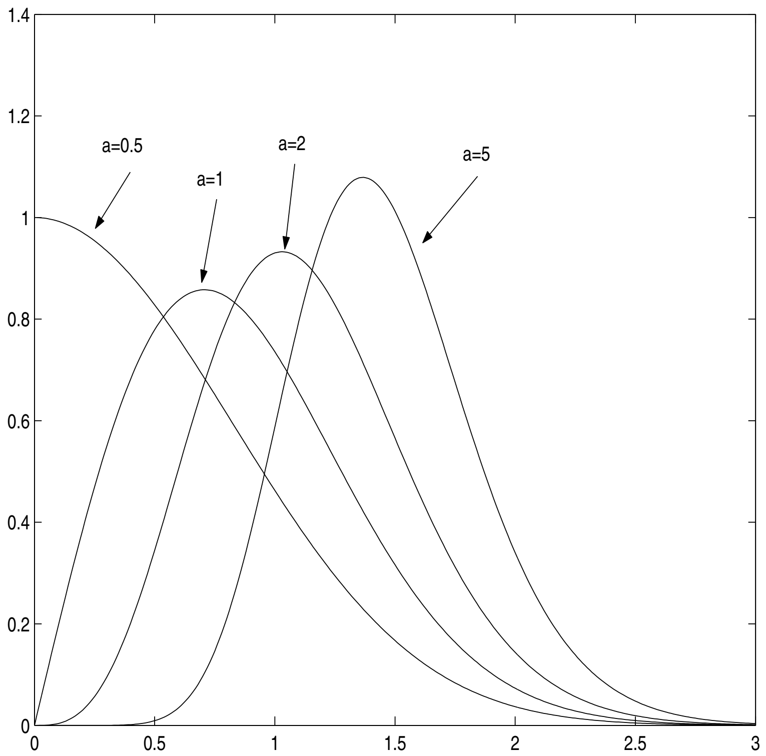
Густина

$$g(x) = 2axe^{-x^2}\left(1 - e^{-x^2}\right)^{a-1}, \quad x > 0.$$

Параметри

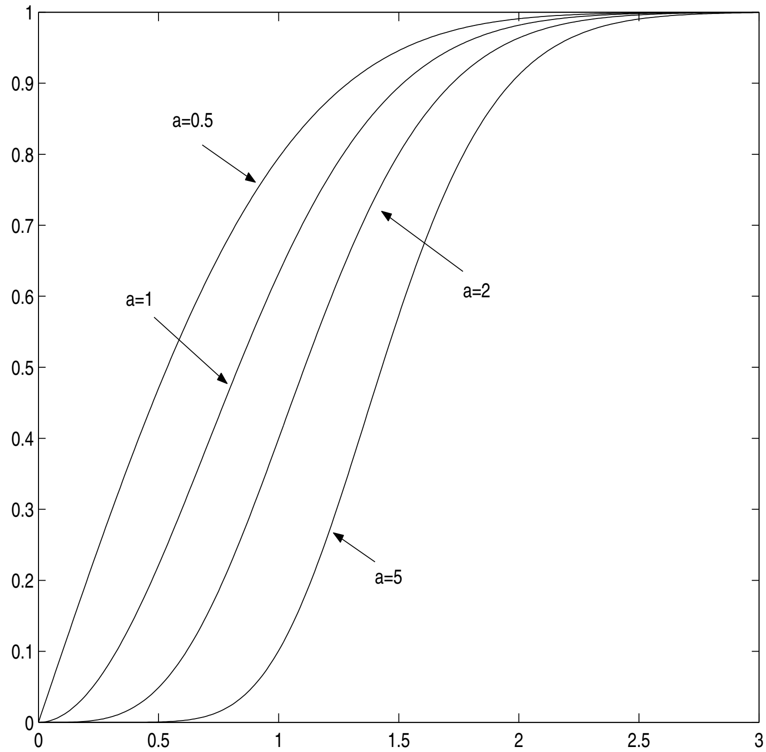
a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(1 - e^{-x^2}\right)^a, \quad x > 0.$$



18

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU11(a)$

(тип XI, једнопараметарска)

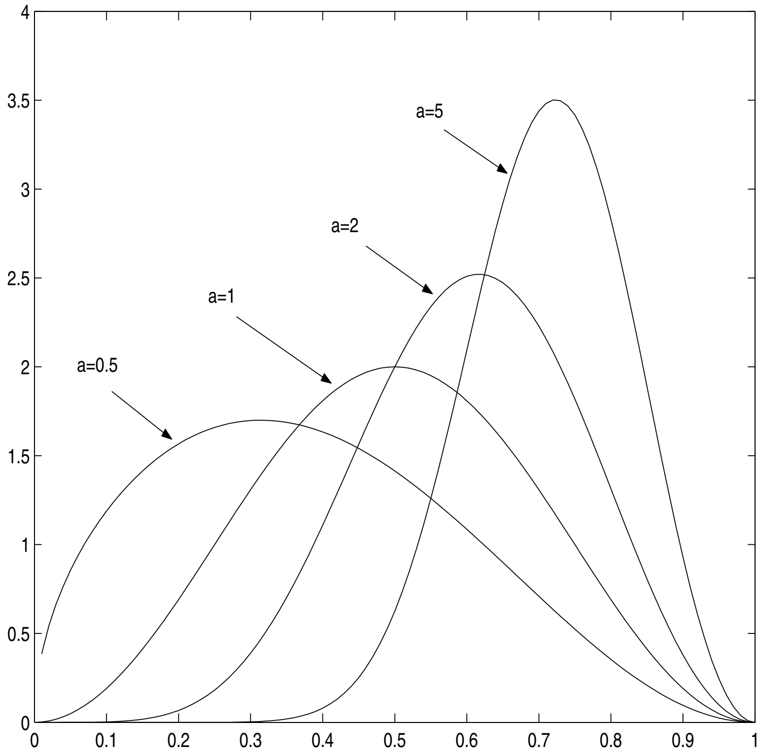
Густина

$$g(x) = a(1 - \cos 2\pi x)\left(x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right)^{a-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Параметри

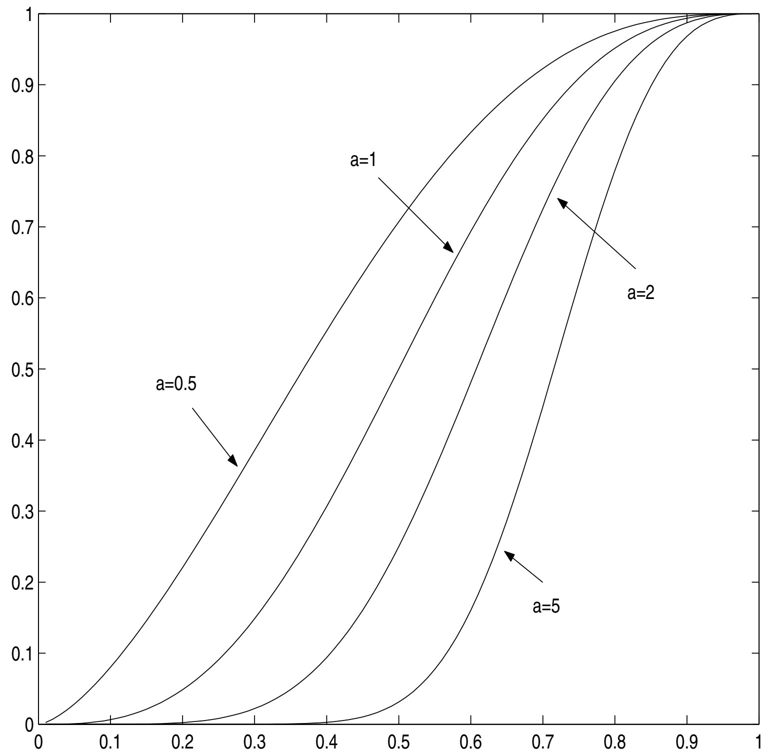
a ($a > 0$) – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right)^a, \quad 0 < x < 1.$$



19

БУРОВА РАСПОДЕЛА $BU12(a,b)$

(тип XII, двопараметарска)

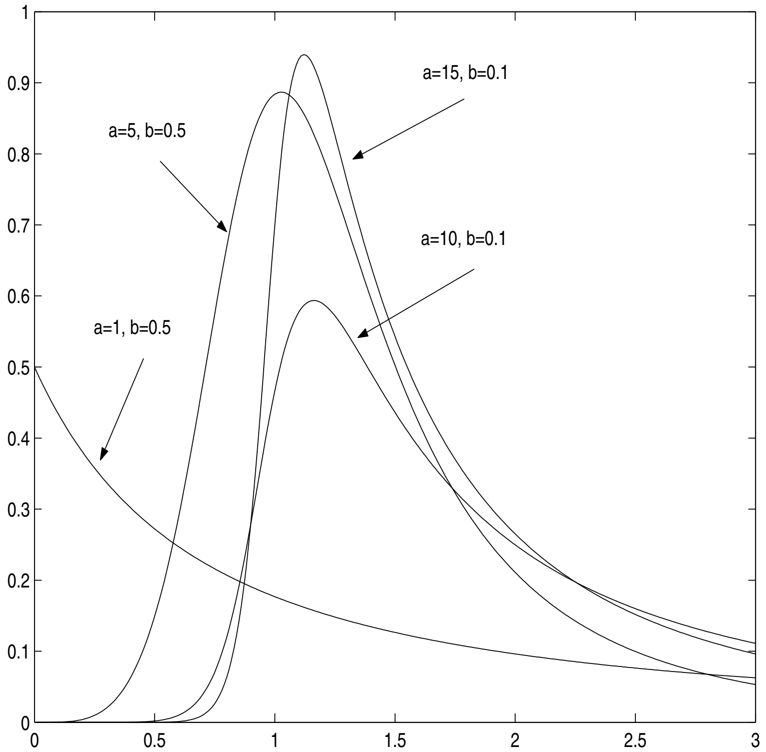
Густина

$$g(x) = \frac{abx^{a-1}}{(1+x^a)^{b+1}}, \quad x > 0.$$

Параметри

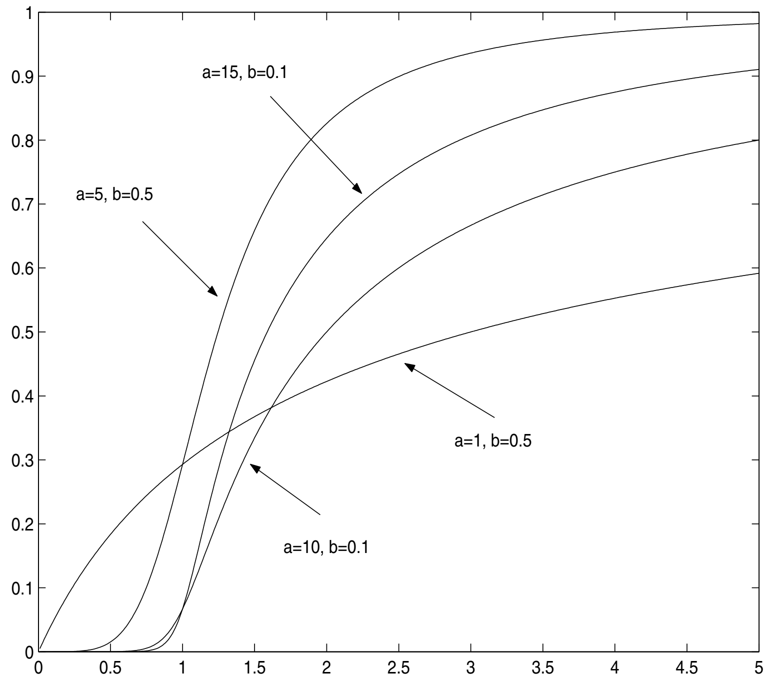
a, b $(a > 0, b > 0)$ – параметри облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - (1 + x^a)^{-b}, \quad x > 0.$$



Оцене параметара

Ако је параметар a познат, оцена $\widehat{b}$ параметра b методом максималне веродостојности дата је са

$$\widehat{b} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + X_k^a)}.$$

Везе са другим расподелама

1. Ако $X : BU12(a, b)$, тада $\ln(1 + X^a) : \mathcal{E}(1/b)$,

2. Ако $X_1, \ldots, X_n : BU12(a, b)$ и ако су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне променљиве, тада

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + X_k^a) : G_2(n, 1/b).$$

20

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $W_1(a)$

(једнопараметарска)

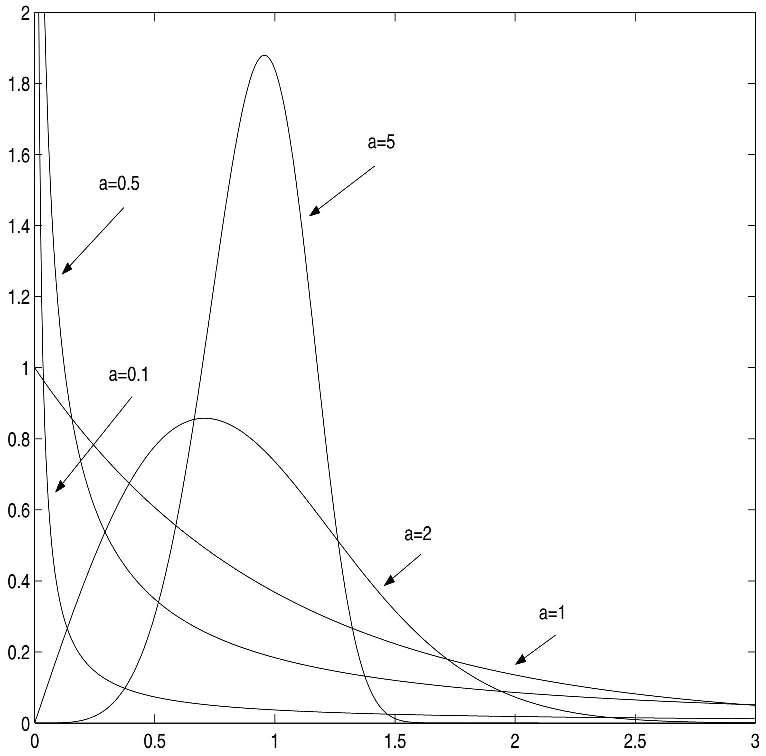
Густина

$$g(x) = ax^{a-1}exp\{-x^a\}, \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - exp\{-x^a\}, \quad x > 0.$$

Моменти

$$m_r = \Gamma\left(1 + \frac{r}{a}\right), \quad r > 0.$$

Специјално,

$$m_1 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right), \quad m_2 = \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right),$$

$$m_3 = \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right), \quad m_4 = \Gamma\left(1 + \frac{4}{a}\right).$$

Централни моменти

$$\mu_2 = D(X) = \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right),$$

$$\mu_3 = \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{a}\right),$$

$$\mu_4 = \Gamma\left(1 + \frac{4}{a}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) + 6\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) - 3\Gamma^4\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \begin{cases} \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{1/a}, & a > 1 \\ 0, & 0 < a \le 1 \end{cases}, \qquad Me(X) = (\ln 2)^{1/a}.$$

Функција веродостојности

$$L = a^n (X_1 \cdot X_2 \cdots X_n)^{a-1} exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} X_i^a\right\},$$

$$\ln L = n \ln a + (a-1)\sum_{k=1}^{n} \ln X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k^a.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Како је

$$\frac{\ln L}{da} = \frac{n}{a} + \sum_{k=1}^{n} \log X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k^a \ln X_k,$$

оцена $\widehat{a}$ за параметар a добија се из једначине

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^{\widehat{a}} \ln X_k - \frac{1}{\widehat{a}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln X_k.$$

Метода момената

Оцена $\widetilde{a}$ параметра a, по методи момената, добија се из $M_1 = m_1$, односно из једначине

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{\widetilde{a}}\right) = \overline{X}$$

или из $M_2 = m_2$, односно из једначине

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{\widetilde{a}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

Нека својства

1. Коефицијент варијације је $C_v = \dfrac{\sqrt{G\left(1+\frac{2}{a}\right) - G^2\left(1+\frac{1}{a}\right)}}{G\left(1+\frac{1}{a}\right)}$.
2. За $a > 3.6$ расподела је позитивно асиметрична, а за $a < 3.6$ негативно асиметрична.
3. За $a = 3.6$ расподела је приближно нормална ($\pi_1(X) = 0$).
4. За велике вредности параметра a ($a > 100$) расподела је приближно симетрична ($\pi_1(X) \to 0$ ($a \to \infty$)).
5. За $a = 2.25$ и за $a = 5.83$ спљоштеност расподеле је слична спљоштености нормалне расподеле ($\pi_2(X) = 0$).
6. Ако су $X_1, X_1, \ldots, X_n$ независне случајне промењиве и $X_i \ : \ W_1(a)$, тада $X_{\min} \ : \ W_1(an^{-1/n})$.

Везе са другим расподелама

1. $W_1(1) = E(1)$
2. $W_1(a) = W_2(a, 1)$.
3. $W_1(a) = W_3(a, 1, 0)$.
4. $W_1(a) = W_4(a, 1, 0, 1)$.
5. Ако $X \ : \ W_1(a)$, тада $bX \ : \ W_2(a, b)$.

6. Ако $X : W_1(a)$, тада $bX + c : W_3(a, b, c)$.

7. Ако $X : W_3(a, b, c)$, тада $\dfrac{X - c}{b} : W_1(a)$.

8. Ако $X : W_1(a)$, тада $X^a : E(1)$.

Напомене

1. Расподела носи назив по шведском инжењеру и физичару Вејбулу (Waloddi Weibull, 1887-1979).

2. За расподелу се користи и назив *Фрешеова*, по француском математичару (Rene-Maurice Frechet, 1878-1973), као и *Гнеденко-Вејбулова* (Борис Владимирович Гнеденко, 1912-1995 је руски математичар).

21

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $W_2(a,b)$

(двопараметарска)

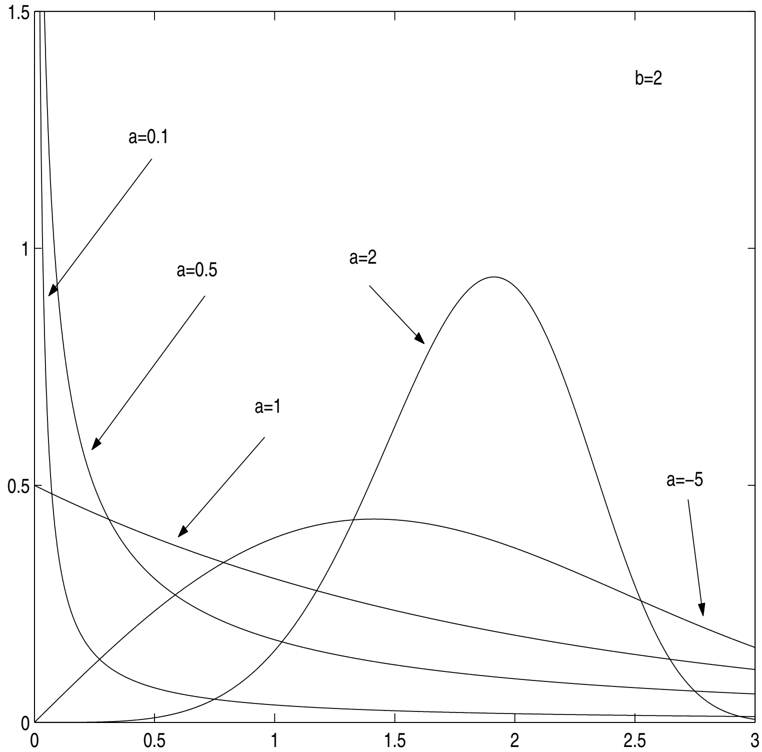
Густина

$$g(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right\}, \quad x > 0.$$

Параметри

a ($a > 0$) – параметар облика, b ($b > 0$) – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\}, \quad x > 0.$$

Ентропија

$$H(X) = b\left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)^a + \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Моменти

$$m_r = b^r\Gamma\left(1 + \frac{r}{a}\right), \quad r > 0.$$

Специјално,

$$m_1 = b\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right), \quad m_2 = b^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right),$$

$$\mu_2 = D(X) = b^2\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right).$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \begin{cases} b\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{1/a}, & a > 1 \\ 0, & 0 < a \leq 1 \end{cases}, \qquad Me(X) = b(\ln 2)^{1/a}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right)b^3 - 3m_1\sigma^2 - m_1^3}{\sigma^3},$$

$$\pi_2(X) = \frac{b^4\Gamma\left(1 + \frac{4}{a}\right) - 3\sigma^4 - 4\pi_1\sigma^3 m_1 - 6\sigma^2 m_1^2 - m_1^4}{\sigma^4},$$

где је $\sigma^2 = \mu_2$.

Функција веродостојности

$$L = \frac{a^n}{b^{na}}(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n)^{a-1} exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{b}\right)^a\right\},$$

$$\ln L = n\ln a - na\ln b + (a-1)\sum_{k=1}^{n}\ln X_k - \frac{1}{b^a}\sum_{k=1}^{n} X_k^a.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ непознатих параметара a и b добијају се из система

$$\begin{aligned}\widehat{b} &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^{\widehat{a}}\right)^{1/\widehat{a}},\\ \frac{1}{\widehat{a}} &= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(X_k) + \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k^{\widehat{a}}\ln X_k}{\sum_{k=1}^{n} X_k^{\widehat{a}}}.\end{aligned}$$

При томе је

$$D(\widehat{a}) \approx \frac{0.608}{n}a^2, \quad D(\widetilde{b}) \approx \frac{1.109}{n}\cdot\frac{b^2}{a^2}.$$

Метода момената

Оцена $\widetilde{a}$ за параметар a може да се добије из израза за коефицијент варијације, а оцена $\widetilde{b}$ параметра b из израза за први моменат. У том случају $\widetilde{a}$ је решење једначине

$$\overline{X}_n\left(\Gamma\left(a+\frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)S_n,$$

а $\widetilde{b}$је дато са $\widetilde{b} = \dfrac{\overline{X}_n}{\Gamma(1+1/a)}$.

Нека својства

1. Коефицијент варијације је $C_v = \dfrac{\sqrt{G\left(1+\frac{2}{a}\right) - G^2\left(1+\frac{1}{a}\right)}}{G\left(1+\frac{1}{a}\right)}$

2. За $a > 3.6$ расподела је позитивно асиметрична, а за $a < 3.6$ негативно асиметрична.

3. За $a = 3.6$ расподела је приближно нормална ($\pi_1(X) = 0$).

4. За велике вредности параметра a ($a > 100$) расподела је приближно симетрична ($\pi_1(X) \to 0$ ($a \to \infty$)).

5. За $a = 2.25$ и за $a = 5.83$ спљоштеност расподеле је слична спљоштености нормалне расподеле ($\pi_2(X) = 0$).

6. Ако су $X_1, X_1, \ldots, X_n$ независне случајне променљиве и $X_i : W_2(a,b)$, тада $X_{\min} : W_2(an^{-1/n}, b)$.

7. За $a < 1$ расподела има мод у $x = 0$, за $a > 1$ има мод у $x = (1-1/a)^{1/a}$, а за $a = 1$ расподела је експоненцијална.

Везе са другим расподелама

1. $W_2(1, b) = E(b)$
2. $W_2(a, 1) = W_1(a)$.
3. $W_2(a, b) = W_3(a, b, 0)$.
4. $W_2(a, b) = W_4(a, b, 0, 1)$.
5. $W_2(2, \sqrt{2}c) = R(c)$.
6. Ако $X \ : \ W_1(a)$, тада $bX \ : \ W_2(a, b)$.
7. Ако $X \ : \ U(0, 1)$, тада $b(-\ln X)^{1/a} \ : \ W_2(a, b)$.

Примена

Метеорологија, теорија поузданости, бежична комумникација, метеорологија (на пример, брзина ветра)

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0, 1)$ расподеле, тада је $x = b(-\ln u)^{1/a}$ случајан број из $W_2(a, b)$ расподеле.

22

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $W_3(a, b, c)$

(тропараметарска)

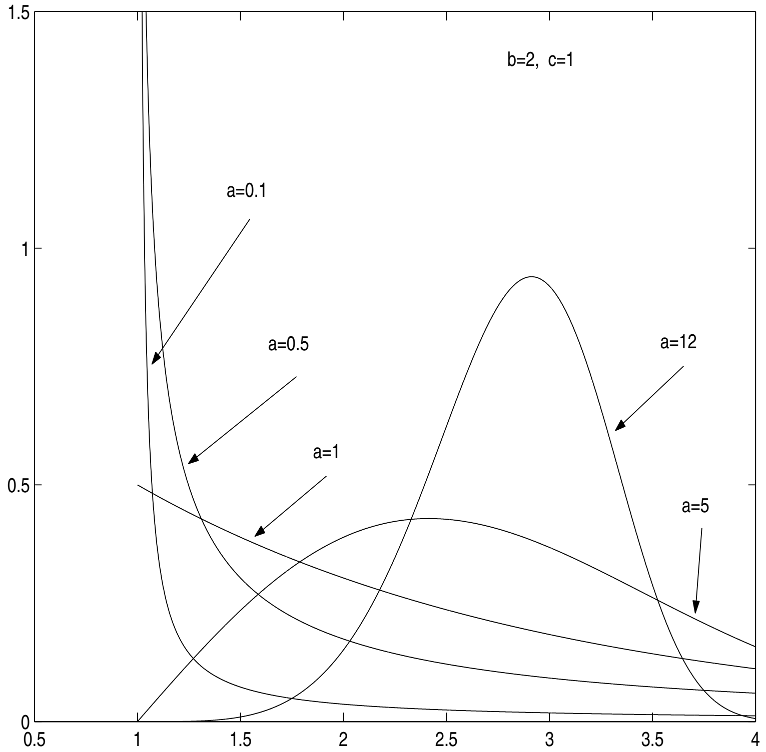
Густина

$$g(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x-c}{b}\right)^{a-1} exp\left\{-\left(\frac{x-c}{b}\right)^{a}\right\}, \quad x > c.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања, c $(c \in R)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - exp\left\{-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right\}, \quad x > c.$$

Моменти

$$m_r = \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} b^j c^{r-j} \Gamma\left(1 + \frac{j}{a}\right), \quad r > 0.$$

Централни моменти

$$\mu_2 = D(X) = b^2 \left(\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\right),$$

$$\mu_3 = b^3\left(\Gamma\left(1+\frac{3}{a}\right) - 3\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right)G\left(1+\frac{1}{a}\right) - 2\Gamma^3\left(1+\frac{1}{a}\right)\right),$$

$$\begin{aligned}\mu_4 \quad = \quad & a^4\left(\Gamma\left(1+\frac{4}{a}\right) - 4\Gamma\left(1+\frac{3}{a}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\right. \\ & \left. + 6\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right)\Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right) - 3\Gamma^4\left(1+\frac{1}{a}\right)\right).\end{aligned}$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \begin{cases} c + b\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{1/a}, & a > 1 \\ c, & 0 < a \le 1 \end{cases}, \qquad Me(X) = c + b(\ln 2)^{1/a}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2\Gamma^3\left(1+\frac{1}{a}\right) - 3\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right) + \Gamma\left(1+\frac{3}{a}\right)}{\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\right)^{3/2}},$$

$$\pi_2(X) = \frac{-3\Gamma^4\left(1+\frac{1}{a}\right) + 6\Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right) - 4\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(1+\frac{3}{a}\right) + \Gamma\left(1+\frac{4}{a}\right)}{\left(\Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right) - \Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right)\right)^2}.$$

Функција веродостојности

$$L = \frac{a^n}{b^{na}} \prod_{k=1}^{n} (X_k - c)^{a-1} \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k - c}{b} \right)^a \right\},$$

$$\ln L = n \ln a - na \ln b + (a-1) \sum_{k=1}^{n} \ln(X_k - c) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k - c}{b} \right)^a.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Како је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \frac{n}{a} - n \ln b - \sum_{k=1}^{n} \ln(X_k - c) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k - c}{b} \right)^a \ln \frac{X_k - c}{b}, \\
\frac{\partial \ln L}{\partial b} &= -\frac{an}{b} - \frac{a}{b^{a+1}} \sum k = 1^n (X_k - c)^a, \\
\frac{\partial \ln L}{\partial c} &= -(a-1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k - c} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k - c}{b} \right)^a,
\end{aligned}$$

оцене $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ и $\widehat{c}$ непознатих параметара a, b и c добијају се решавањем система

$$\begin{aligned}
\widehat{b} &= \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \widehat{c})^{\widehat{a}} \right)^{1/\widehat{a}}, \\
\frac{1}{\widehat{a}} &= \ln \widehat{b} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(X_k - \widehat{c}) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X - \widehat{c}}{\widehat{b}} \right)^{\widehat{a}} \ln \frac{X - \widehat{c}}{\widehat{b}}, \\
\widehat{a} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \widehat{c})^{\widehat{a}-1} &= \widehat{b}^{\widehat{a}} (\widehat{a} - 1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k - \widehat{c}}.
\end{aligned}$$

У случају када је параметар c познат променљива $Y = X - c$ има двопараметарску Вејбулову расподелу, па уместо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ може да се узме узорак $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Тада је

$$L(Y_1, \ldots, Y_n; a, b) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a}{b} \left(\frac{Y_k}{b} \right)^{a-1} \exp\left\{ -\left(\frac{Y_k}{b} \right)^a \right\},$$

па се оцене добијају из система

$$\begin{aligned}
\widehat{b} &= \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_i^{\widehat{a}} \right)^{1/\widehat{a}}, \\
\frac{1}{\widehat{a}} &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln Y_k + \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k^{\widehat{a}} \ln Y_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k^{\widehat{a}}}.
\end{aligned}$$

Метода момената

Ако је параметар c познат, оцене за параметре a и b добијамо на основу узорка $Y_1, \dots Y_n$ као у случају расподеле $W_2(a, b)$. Ако параметар c није познат, онда оцена $\widetilde{a}$ параметра a може да се добије из израза за μ_3/σ^3, а оцене $\widetilde{b}$ и $\widetilde{c}$ параметара b и c су тада дате са

$$\widetilde{b} = \frac{S_n}{\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\widetilde{a}}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\widetilde{a}}\right)\right)^{1/2}}, \quad \widetilde{c} = \overline{X}_n - \widetilde{b}\Gamma\left(1+\frac{1}{\widetilde{a}}\right).$$

Нека својства

1. Квартили расподеле су
$$Q_1 = c + b\left(\ln\frac{4}{3}\right)^{1/a}, \quad Q_3 = c + b(\log 4)^{1/a}.$$
2. Коефицијент варијације је $C_v = \dfrac{b\sqrt{G\left(1+\frac{2}{a}\right) - G^2\left(1+\frac{1}{a}\right)}}{c + bG\left(1+\frac{1}{a}\right)}$
3. За $a > 3.6$ расподела је позитивно асиметрична, а за $a < 3.6$ негативно асиметрична.
4. За $a = 3.6$ расподела је приближно нормална ($\pi_1(X) = 0$).
5. За велике вредности параметра a ($a > 100$) расподела је приближно симетрична ($\pi_1(X) \to 0$ $(a \to \infty)$).
6. За $a = 2.25$ и за $a = 5,83$ спљоштеност расподеле је слична спљоштености нормалне расподеле ($\pi_2(X) = 0$).
7. Ако $X : W_3(a, b, c)$, онда $X - c : W_3(a, b, 0)$.
8. Ако су $X_1, X_1, \dots, X_n$ независне случајне промењиве и $X_i : W_3(a, b, c)$, тада $X_{\min} : W_3(an^{-1/n}, b, c)$.

Везе са другим расподелама

1. $W_3(a, b, 0) = W_2(a, b)$.
2. $W_3(a, 1, 0) = W_1(a)$.
3. $W_3(a, b, c) = W_4(a, b, c, 1)$.
4. $W_3(1, b, 0) = E(b)$.
5. $W_3(1, b, c) = E_2(b, c)$.

6. Ако $X\ :\ W_!(a)$, тада $c+bX\ :\ W_3(a,b,c)$.

7. Ако $X:\left(\dfrac{X-c}{b}\right)^a : E_2(1,0)$, тада $X:W_3(a,b,c)$.

8. $W_3(2,\sqrt{2}\sigma,c)=R_2(c,\sigma)$.

9. $W(2,\sqrt{2}\sigma,0)=R_1(\sigma)$.

10. Ако $X:W(a,b,c)$, тада стандардизована случајна променљива $\dfrac{X-E(X)}{\sigma}$ за $a\in[2,6]$ има приближно расподелу $N(0,1)$.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x=c+b(-\ln u)^{1/a}$ случајан број из $W_3(a,b,c)$.

23

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $W_4(a, b, c, d)$

(четворопараметарска)

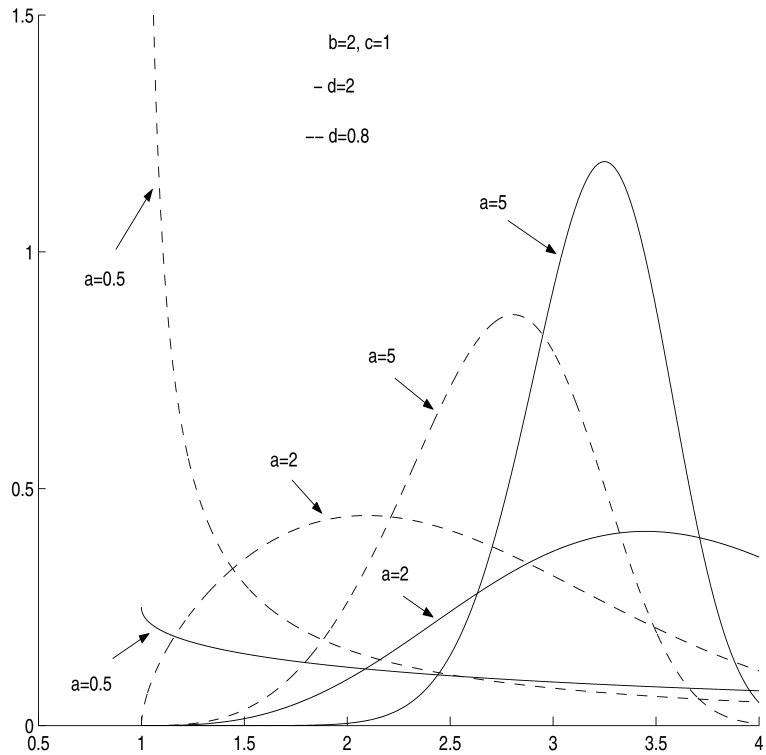
Густина

$$g(x) = \frac{a}{b^{ad}\Gamma(d)}(x-c)^{ad-1}\exp\left\{-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right\}, \quad x > c.$$

Параметри

a, d $(a, d > 0)$ – параметри облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања, c $(c > 0)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(d)}\Gamma\left(d,\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right),\quad x\geq c,$$

где је $\Gamma(d,t)$ непотпуна Гама функција (видети Додатак).

Моменти

$$m_r=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}b^kc^{r-k}\frac{\Gamma(d+r/a)}{\Gamma(d)},\quad r>0.$$

Специјално,

$$m_1=c+b\frac{\Gamma\left(d+\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(d)},\quad m_2=c^2+2bc\frac{\Gamma\left(d+\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(d)}+b^2\frac{\Gamma\left(d+\frac{2}{a}\right)}{\Gamma(d)},$$

$$m_3=c^3+3bc^2\frac{\Gamma(d+1/a)}{\Gamma(d)}+3b^2c\frac{\Gamma(d+2/a)}{\Gamma(d)}+b^3\frac{\Gamma(d+3/a)}{\Gamma(d)}.$$

Везе са другим расподелама

1. $W_4(a,b,c,1)=W_3(a,b,c)$.
2. $W_4(a,b,0,1)=W_2(a,b)$.
3. $W_4(a,1,0,1)=W_1(a)$.
4. $W_4(1,b,c,a)=G_3(a,b,c)$.
5. $W_4(1,b,0,a)=G_2(a,b)$.
6. $W_4(1,1,0,a)=G_1(a)$.
7. Ако $X\ :\ W_4(a,b,c,d)$, тада $\left(\frac{X-c}{b}\right)^a\ :\ G_1(d)$ и обрнуто.
8. $W_4(1,\lambda,0,1)=E_1(\lambda)$.
9. $W_4(1,\lambda,c,1)=E_2(\lambda,c)$.
10. $W_4(2,2,0,\nu/2)=\chi^2_\nu$.

Напомена

Расподела је позната и као уопштена Гама расподела.

24

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $WN(a,b,c)$

(негативна, тропараметарска)

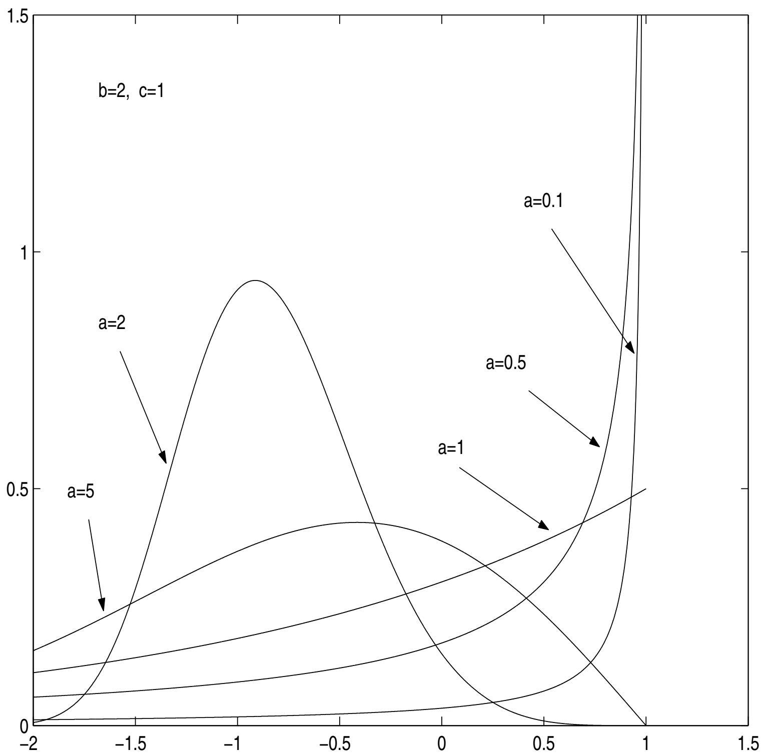
Густина

$$g(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{c-x}{a}\right)^{a-1} exp\left\{-\left(\frac{c-x}{b}\right)^{a}\right\}, \quad x < c.$$

Параметри

a ($a > 0$) – параметар облика, b ($b > 0$) – параметар скалирања, c ($c \in R$) – параметар локације.

График густине



25

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $WD(a,b,c)$

(двострана, тропараметарска)

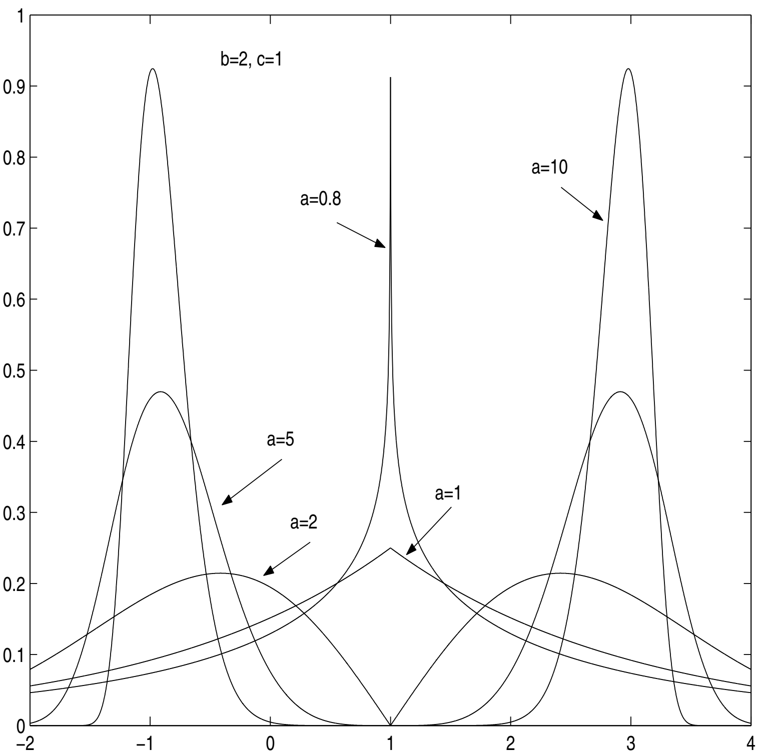
Густина

$$g(x) = \frac{a}{2b}\left|\frac{x-c}{b}\right|^{a-1} exp\left\{-\left|\frac{x-c}{b}\right|^{a}\right\}, \quad x \in R.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања, c $(c > 0)$ – параметар локације.

График густине



26

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $WE(a,b,c)$

(експоненцијална, тропараметарска)

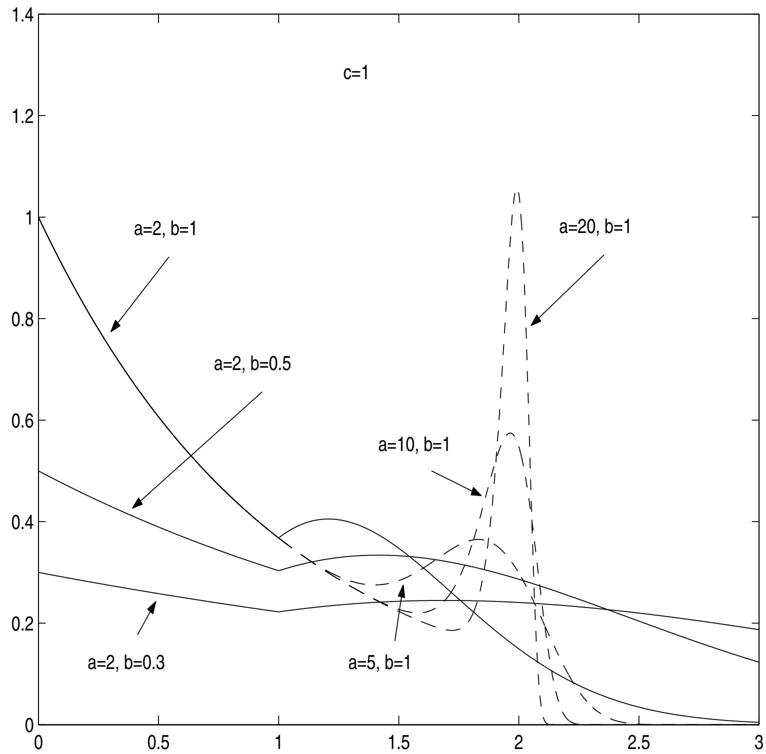
Густина

$$g(x) = \begin{cases} b\exp\{-bx\}, & 0 < x < c, \\ \left(b + ab^a(x-c)^{a-1}\right) exp\{-bx - (b(x-c))^a\}, & x \geq c \end{cases}.$$

Параметри

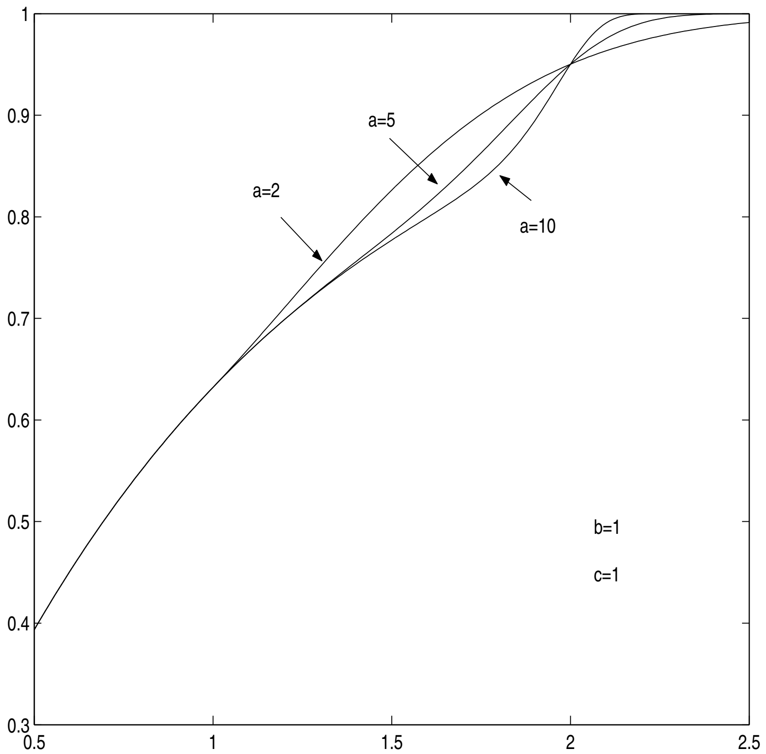
a $(a \geq 1)$ – параметар облика, b $(b \geq 0)$ – параметар скалирања, c $(c \geq 0)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\{-bx\}, & x < c \\ 1 - \exp\left\{-bx - (b(x-c))^a\right\}, & x \geq c \end{cases}.$$



27

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $WU(a,b,c)$

(уопштена тропараметарска)

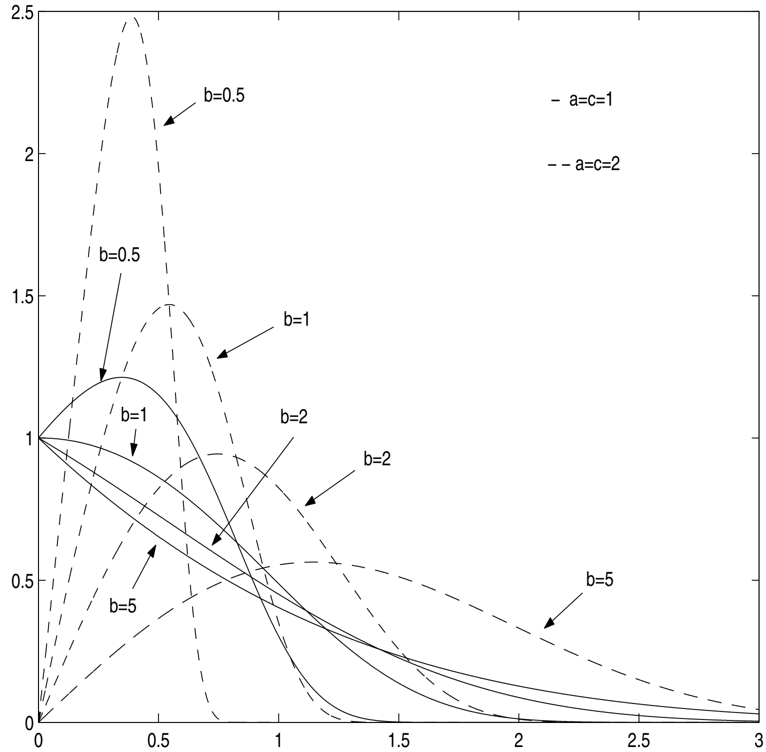
Густина

$$g(x) = ca\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} exp\left\{\left(\frac{x}{b}\right)^{a} + cb\left(1 - e^{(x/b)^{a}}\right)\right\}, \quad x > 0.$$

Параметри

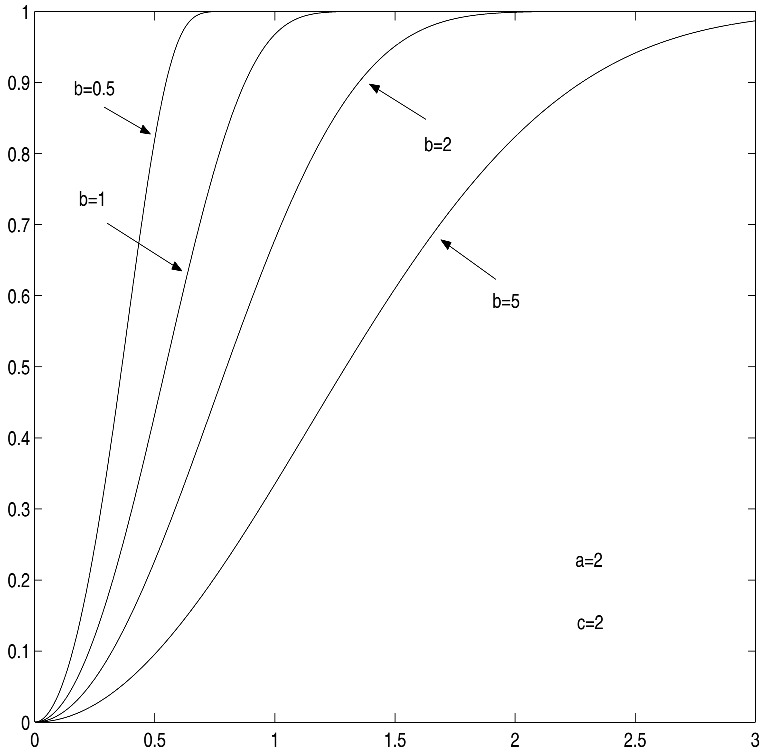
a, c $(a, c > 0)$ – параметри облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \exp\left\{cb\left(1 - e^{(x/b)^a}\right)\right\}, \quad x > 0.$$



28

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $WEX(a,b,c)$

(експоненцијализована, тропараметарска)

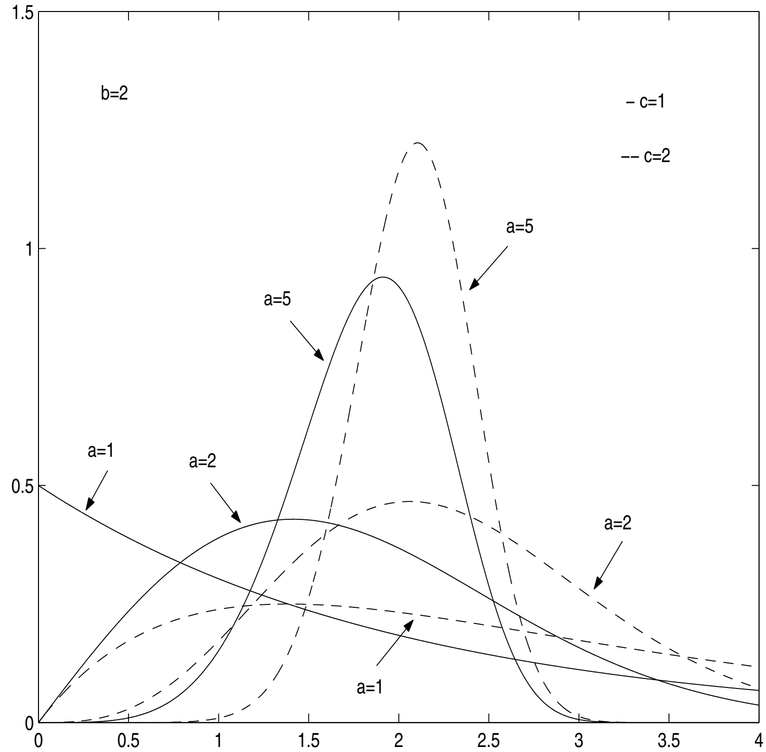
Густина

$$g(x) = \frac{ac}{b}\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\}\right)^{c-1}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\}, \quad x > 0.$$

Параметри

a, c $(a, c > 0)$ – параметри облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



29

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $WM(a,b,c)$

(модификована, тропараметарска)

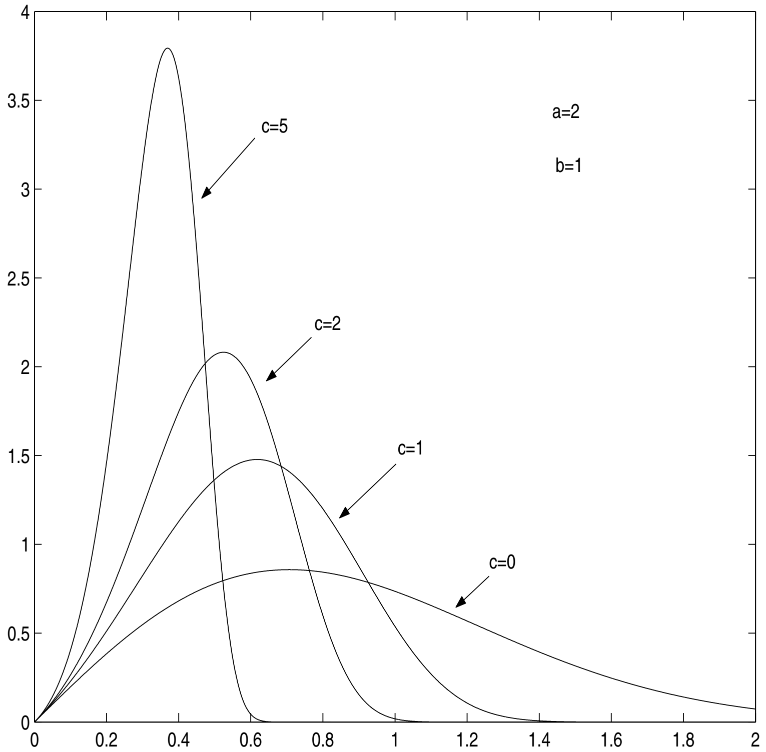
Густина

$$g(x) = b((a+cx)x^{a-1} exp\{cx - bx^a e^{cx}\}, \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b, c $(b > 0, c \geq 0)$ – параметри скалирања.

График густине



30

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $WZ(a,b,c,\alpha.\beta)$

(засечена са обе стране, петопараметарска)

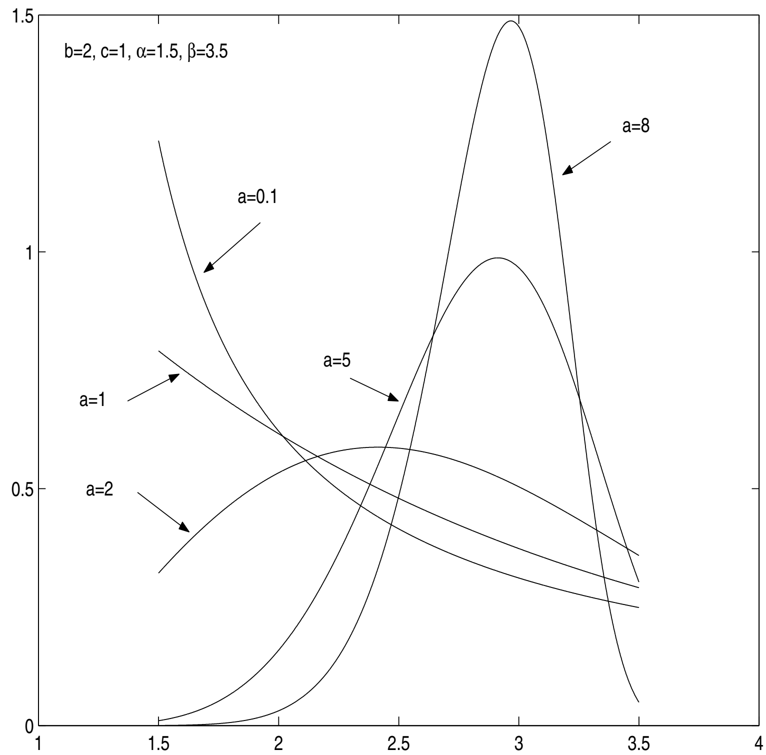
Густина

$$g(x) = \frac{a}{b\left(e^{-((\alpha-c)/b)^a} - e^{((\beta-c)/b)^a}\right)} \left(\frac{x-c}{b}\right)^{a-1} exp\left\{\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right\}, \ \alpha < x < \beta.$$

Параметри

a $(a > 0)$ - параметар облика, b $(b > 0)$ - параметар скалирања,
c, α, β $(c \le \alpha < \beta)$ - параметри локације.

График густине



31

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $WZL(a,b,c,\alpha)$

(засечена са леве стране, четворопараметарска)

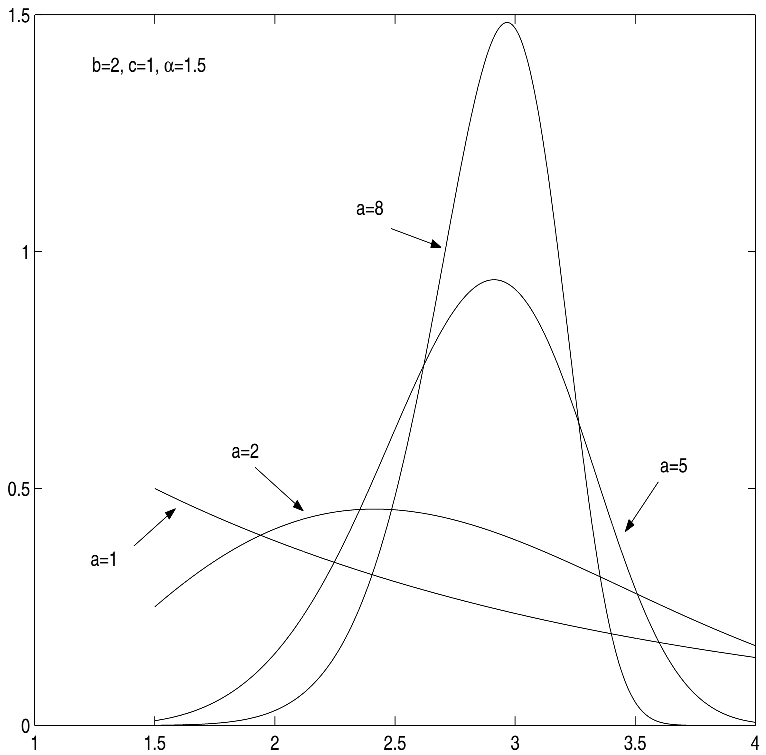
Густина

$$g(x)=\frac{a}{b}\left(\frac{x-c}{b}\right)^{a-1}\exp\left\{\left(\frac{x-c}{b}\right)^{a}+\left(\frac{\alpha-c}{b}\right)^{a}\right\},\quad x>\alpha.$$

Параметри

a $(a>0)$ - параметар облика, b $(b>0)$ - параметар скалирања,
c,α $(c\le\alpha)$ - параметри локације.

График густине



32

ВЕЈБУЛОВА РАСПОДЕЛА $WZD(a,b,c,\beta)$

(засечена са десне стране, четворопараметарска)

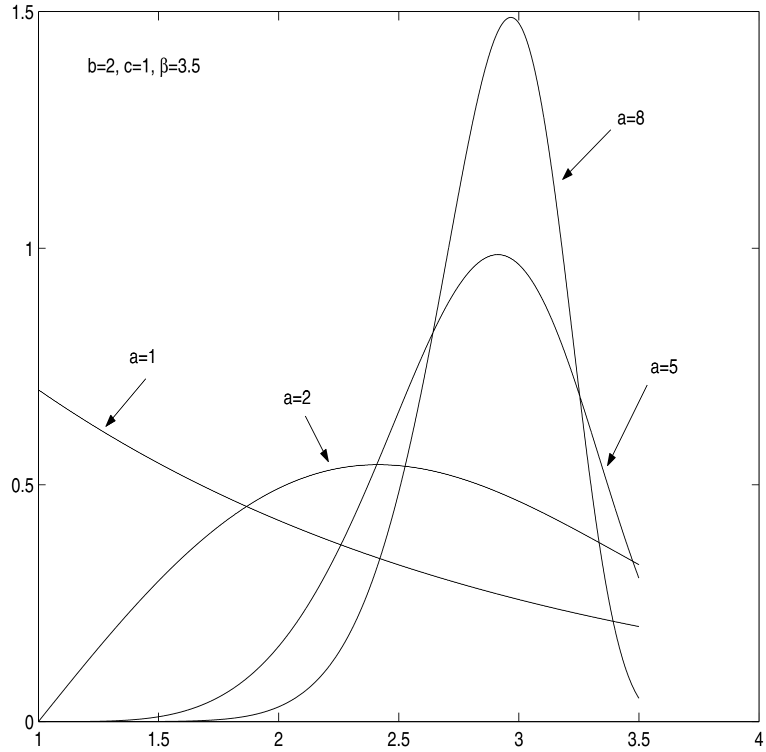
Густина

$$g(x) = \frac{a}{b\left(e^{-((\beta-c)/b)^a}\right)}\left(\frac{x-c}{b}\right)^{a-1} exp\left\{\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right\}, \quad c < x < \beta.$$

Параметри

a $(a > 0)$ –параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања,
c, β $(c < \beta)$ – параметри локације.

График густине



33

ГАМА РАСПОДЕЛА $G_1(a)$

(једнопараметарска)

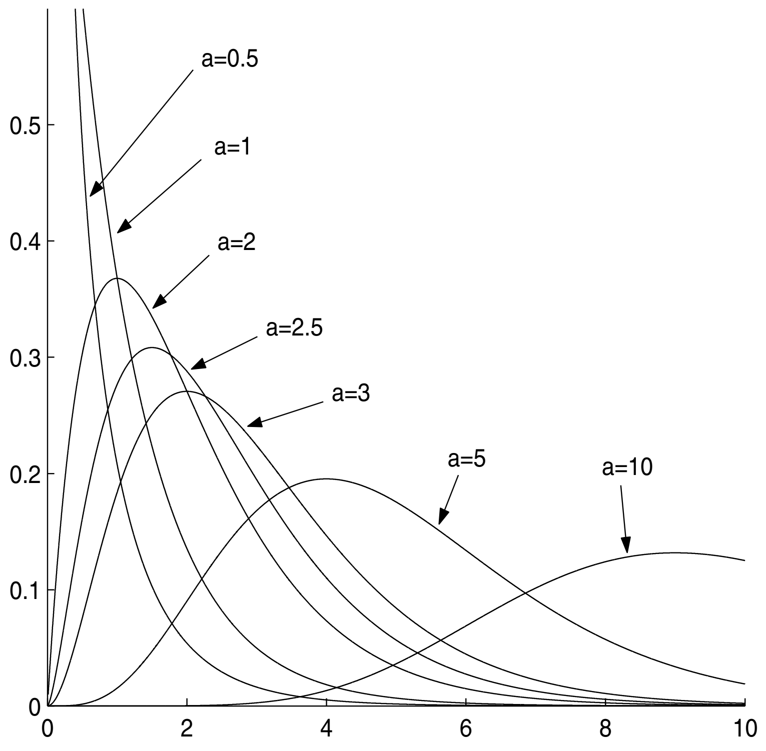
Густина

$$g(x) = \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(a)}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ - параметар облика.

График густине



Моменти

$$m_r = \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}, \quad r > 0.$$

Специјално,

$$m_1 = a,\ m_2 = a(a+1),\ m_3 = a(a+1)(a+2),$$

$$m_4 = a(a+1)(a+2)(a+3),$$

$$\mu_2 = D(X) = a, \quad \mu_3 = 2a, \quad \mu_4 = 3a^2 + 6a.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2}{\sqrt{a}}, \quad \pi_2(X) = \frac{6}{a}.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцена $\widehat{a}$ за непознати параметар a је решење једначине

$$\psi(\widehat{a}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln X_k,$$

где је $\psi)$ *дигама* функција (видети Додатак).

Метода момената

Оцена $\widetilde{a}$ за непознати параметар a, по методи момената, дата је са $\widetilde{a} = \overline{X}$, при чему је $E\widetilde{a} = a$ и $D\widetilde{a} = \dfrac{a}{n}$.

Нека својства

1. Коефицијент варијације је $C_V(X) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.
2. Ако $X\ :\ G_1(a)$, $Y\ :\ G_1(b)$ и ако су X и Y независне случајне промен-љиве, тада $X+Y\ :\ G_1(a+b)$.

Везе са другим расподелама

1. $G_1(a) = G_2(a,1) = G_3(a,1,0) = G_4(a,1,0,1)$.
2. $G_1(1) = \mathcal{E}(1)$.
3. $G_1(n) = ER_2(1,n),\ n \in N$.

4. Ако $X : G_1(a)$ и $Y : G_1(b)$ и ако су X и Y независне случајне промењиве, тада
$$X + Y \; : \; G_2(a, b), \qquad \frac{X}{X+Y} : B_2(a, b).$$

5. Ако $X : G_1(a)$ и $Y : G_1(a + 1/2)$ и ако су X и Y независне случајне промењиве, тада $2\sqrt{XY} : G_1(2a)$.

6. Ако су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са $U(0,1)$ расподелама независне и ако је
$$Y = -\ln(X_1 X_2 \cdots X_n) = \ln\frac{1}{X_1} + \ln\frac{1}{X_2} + \ldots + \ln\frac{1}{X_n},$$
тада $Y : G_1(n)$.

34

ГАМА РАСПОДЕЛА $G_2(a,b)$

(двопараметарска)

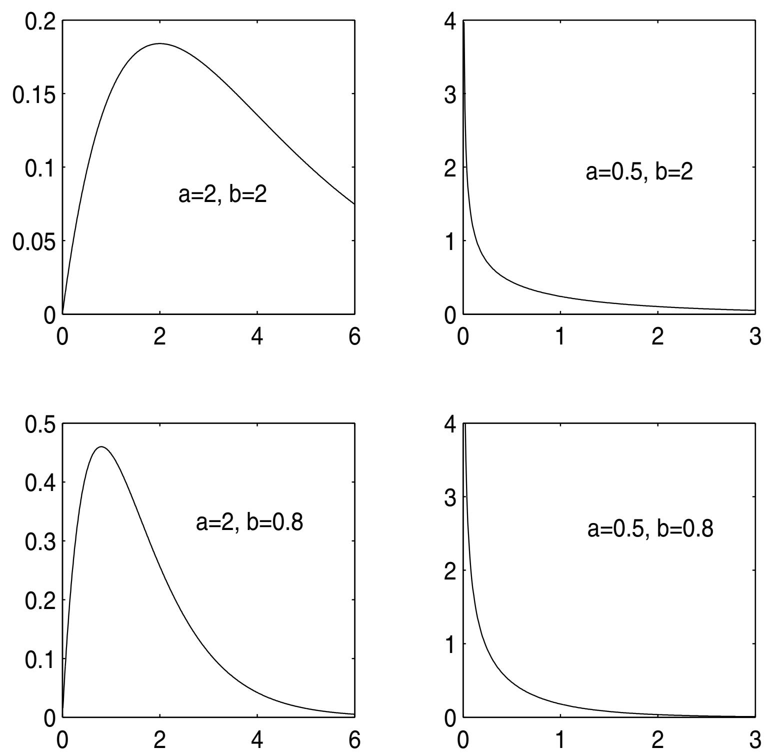
Густина

$$g(x) = \frac{1}{b\Gamma(a)} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-x/b}, \quad x \geq 0.$$

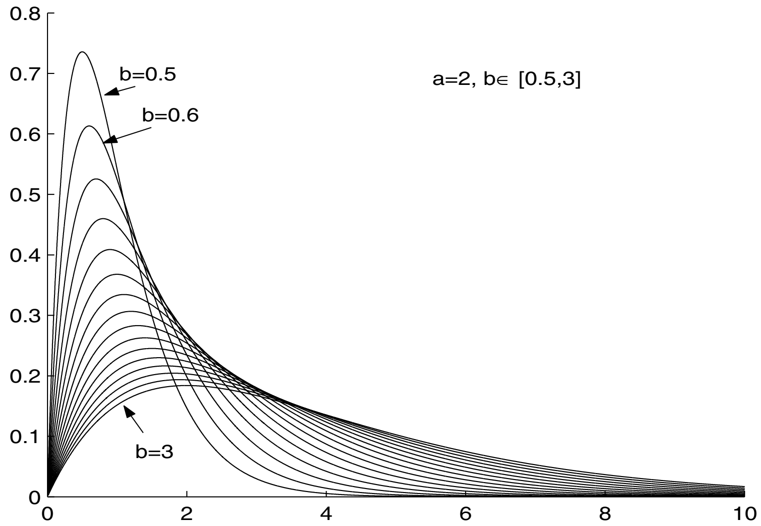
Параметри

a $(a > 0)$ - параметар облика, b $(b > 0)$ - параметар скалирања.

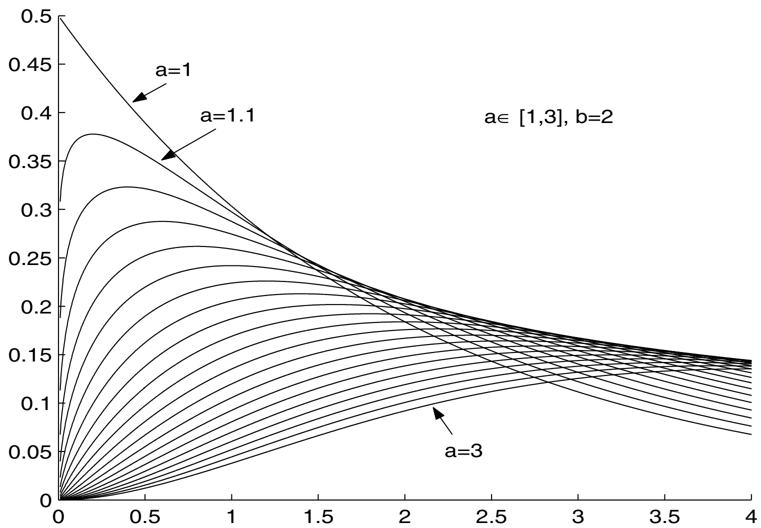
График густине



На следећој слици су приказани графици густина у случају кад је фиксиран први параметар, $a = 2$, док се други параметар мења у интервалу $[0.5, 3]$.



Следећа слика приказује графике густина у случају кад је фиксиран други параметар, док се први параметар мења.



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\gamma\left(a, \frac{x}{b}\right), \quad x \geq 0,$$

где је γ непотпуна гама функција (видети Додатак).

Ентропија

$$H(X) = ab + (1-a)\ln b + \ln\Gamma(a) + (1-a)\psi(a),$$

где је ψ дигама функција (видети Додатак).

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1-bt)^a}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = \frac{1}{(1-bt)^a}, \quad t < \frac{1}{b}.$$

Моменти

$$m_r = b^r\frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}, \quad r > 0.$$

Специјално,

$$m_1 = ab, \quad m_2 = a(a+1)b^2, \quad m_3 = a(a+1)(a+2)b^3,$$

Централни моменти

$$\mu_2 = D(X) = ab^2, \quad \mu_3 = 2ab^3, \quad \mu_4 = (3a^2+6a)b^4.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2}{\sqrt{a}}, \quad \pi_2(X) = \frac{6}{a}.$$

Функција веродостојности

$$L = \left(\frac{1}{b^a\Gamma(a)}\right)^n (X_1 \cdot X_2 \cdots X_n)^{a-1} \exp\left\{-\sum_i = 1^n \frac{X_i}{b}\right\},$$

$$\ln L = (a-1)\sum_{i=1}^n \ln X_i - \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{b} - na\ln b - n\ln\Gamma(a).$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ непознатих параметара a и b су решења система једначина

$$\widehat{a}\widehat{b} = \overline{X}, \quad \psi(\widehat{a}) + \ln\widehat{b} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln X_k,$$

где је ψ дигама функција (видети Додатак).

Метода момената

Оцене $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ по методи момената дате су са

$$\widetilde{a} = \frac{\overline{X}^2}{S^2}, \quad \widetilde{b} = \frac{S^2}{\overline{X}^3}.$$

Нека својства

1. Коефицијент варијације је $C_V = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.
2. Ако $X : G_2(a,b)$, тада $cX : G_2(a,cb)$.
3. Ако $X : G_2(a,b)$, тада $\dfrac{1}{X} : G_2(a,1/b)$.
4. Ако $X_i : G_2(a_i,b)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ и ако су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независне случајне променљиве, тада

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n : G_2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n, b).$$

Везе са другим расподелама

1. Ако $X : G_1(a)$, тада $bX : G_2(a,b)$.
2. $G_2(1,b) = E_1(b)$.
3. $G_2(a,1) = G_1(a)$.

4. $G_2(a,b) = G_3(a,b,0) = G_4(a,b,0,1)$.

5. $\chi^2(n) = G_2(n/2,2)$.

6. $MAX(b) = G_2(3/2,b)$.

7. Ако $X, Y \,:\, G_2(a,b)$ и ако су X и Y независне, тада
$$\frac{X}{X+Y} \,:\, B_2(a,b).$$

8. Ако $X_1,\dots,X_n \,:\, E_1(b)$, тада $X_1+\cdots+X_n \,:\, G_2(n,b)$.

9. $G_2(a,b) \sim N(ab,ab^2)$ када $a \to \infty$.

Генерисање

Ако су $u_1,\dots,u_n$ независни случајни бројеви из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = -\sum_{i=1}^{n} \ln u_i$ случајан број из $G(n,1)$, а bx случајан број из $G(n,b)$ расподеле. Генерисање случајног броја из $G(a,b)$ у случају кад a није цео број је компликованије и може се добити применом Нојманове нетоде.

35

ГАМА РАСПОДЕЛА $G_3(a,b,c)$

(тропараметарска)

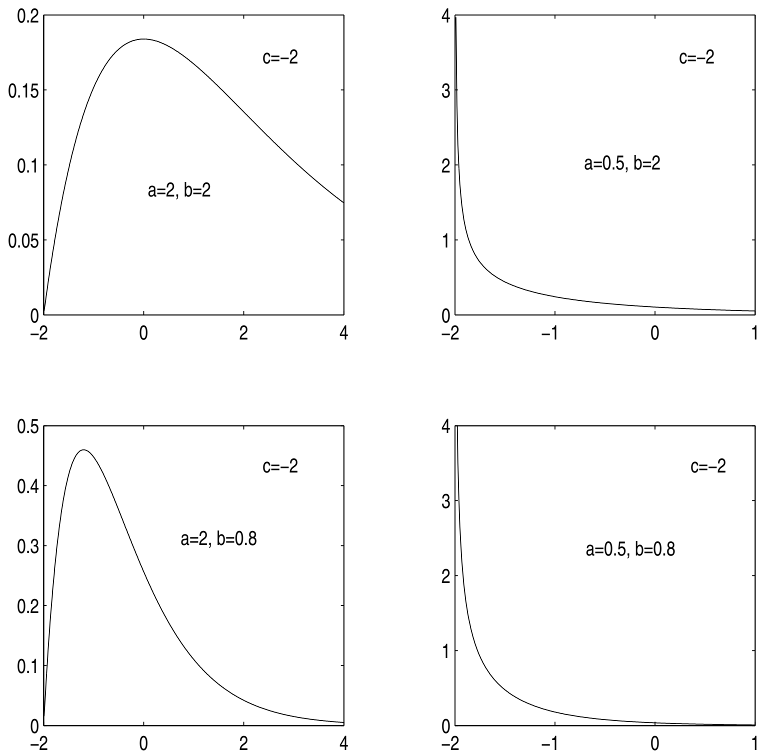
Густина

$$g(x) = \frac{1}{b\Gamma(a)} \left(\frac{x-c}{b}\right)^{a-1} \exp\left\{-\frac{x-c}{b}\right\}, \quad x > c.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања, c $(c \in R)$ - параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \Gamma\left(a, \frac{x-c}{b}\right) - \Gamma(a).$$

Специјално за $a \in N$ је

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x-c}{b}\right\} \sum_{k=0}^{a-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{x-c}{b}\right)^k, \quad x > c.$$

Карактеристична функција

$$\phi(t) = e^{ict}(1 - ibt)^{-a}.$$

Моменти

$$m_r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} b^k c^{r-k} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad r > 0.$$

Специјално,

$$m_1 = ab + c, \quad m_2 = a(a+1)b^2 + 2abc + c^2.$$

Централни моменти

$$\mu_2 = D = ab^2, \quad \mu_3 = 2ab^3, \quad \mu_4 = (3a^2 + 6a)b^4.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \begin{cases} c + b(a-1), & a \geq 1 \\ c, & a < 1, \end{cases}$$

За медијану не постоји једноставан израз.

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2}{\sqrt{a}}, \quad \pi_2(X) = \frac{6}{a}.$$

Функција веродостојности

$$L = \frac{\prod_{k=1}^{n}(X_k - c)^{a-1}}{b^{an}\Gamma^n(a)} \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{n}(X_k - c)\right\},$$

$$\ln L = (a-1)\sum_{k=1}^{n}\ln(X_k - c) - \frac{n\overline{X}+c}{b} - an\ln b - n\ln\Gamma(a),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \sum_{k=1}^{n}\ln(X_k - c) - n\ln b - nd(a),\\ \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= \frac{n}{b^2}(\overline{X}-c) - \frac{an}{b},\\ \frac{\partial \ln L}{\partial c} &= (a-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{X_k - c} + \frac{1}{b}.\end{aligned}$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ и $\widehat{c}$ непознатих параметара a, b и c су решења система једначина

$$\begin{aligned}\widehat{a}\widehat{b} + \widehat{c} &= \overline{X},\\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{X_k - \widehat{c}}\right) &= \frac{1}{(\widehat{a}-1)\widehat{b}},\\ \psi(\widehat{a}) + \ln\widehat{b} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(X_k - \widehat{c}).\end{aligned}$$

где је ψ дигама функција (видети Додатак).

При томе је

$$D(\widehat{a}) \sim \frac{6a^3}{n},\quad D(\widehat{b}) \sim \frac{3ab^2}{n},\quad D(\widehat{c}) \sim \frac{3a^3b^2}{2n},\quad (n\to\infty).$$

За вредности a блиске 1 и/или за вредности b блиске 0 није препоручљиво користити наведени систем.

Специјално:

– Ако су a и b познати, онда је $\widehat{c} = \overline{X} - ab$, ако су a и c познати, онда је $\widehat{b} = \dfrac{\overline{X}-c}{a}$, а ако су b и c познати, онда је $\widehat{a} = \dfrac{\overline{X}-c}{b}$.

– Ако је познат само параметар a, онда се оцене $\widehat{b}$ и $\widehat{c}$ добијају из система

$$a\widehat{b} + \widehat{c} = \overline{X},\qquad \frac{1}{(a-1)\widehat{b}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k - \widehat{c}},$$

при чему је

$$D(\widehat{b}) \sim \frac{b^2}{n},\quad D(\widehat{c}) \sim \frac{a(a-1)b^2}{2n},\quad \rho(\widehat{b},\widehat{c}) \sim -\frac{a+1}{a+3},\quad (n\to\infty).$$

– Ако је познат само параметар b, онда се оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{c}$ добијају из система

$$\frac{1}{(\widehat{a}-1)b}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k-\widehat{c}},\qquad \ln b+d(\widehat{a})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(X_k-\widehat{c}).$$

– Ако је познат само параметар c, онда се оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ добијају из система

$$\widehat{a}\widehat{b}+c=\overline{X},\qquad \ln\widehat{b}+d(\widehat{a})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(X_k-c).$$

Метода момената

Оцене $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ и $\widetilde{c}$ за a, b и c, по методи момената, дате су са

$$\widetilde{a}=\frac{4}{\pi_1^2},\qquad \widetilde{b}=\frac{C_3}{2C_2},\qquad \widetilde{c}=\overline{X}-\frac{2C_2^2}{C_3},$$

где је

$$C_2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2,\qquad C_3=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^3.$$

Специјално:

– Ако је познат параметар a, онда је

$$\widetilde{b}=\frac{S_n}{\sqrt{a}},\qquad \widetilde{c}=\overline{C}-S_n\sqrt{a},$$

при чему је

$$D(\widetilde{b})\sim\frac{(a+3)b^2}{2an},\qquad D(\widetilde{c})\sim\frac{a(a+3)b^2}{2n},\qquad \rho(\widetilde{b},\widetilde{c})\sim-\frac{a+1}{a+3},\qquad (n\to\infty).$$

– Ако је познат параметар b, онда је

$$\widetilde{a}=\frac{S_n^2}{b^2},\qquad \widetilde{c}=\overline{X}-\frac{S_n^2}{b}.$$

– Ако је познат параметар c, онда је

$$\widetilde{a}=\frac{(\overline{X}-c)^2}{S_n^2},\qquad \widetilde{b}=\frac{S_n^2}{\overline{X}-c}.$$

Везе са другим расподелама

1. Ако $X\ :\ G_1(a)$, тада $bX+c\ :\ G_3(a,b,c)$.
2. $G_3(1,b,0)=E_1(b)$.

3. $G_3(1,b,c) = E_2(b,c)$.
4. $G_3(a,1,0) = G_1(a)$.
5. $G_3(n,1,0) = ER_1(n),\ n \in N$.
6. $G_3(a,b,0) = G_2(a,b)$.
7. $G_3(a,b,0) = G_4(a,b,0,1)$.
8. $G_3(a,b,c) = G_4(a,b,c,1)$.

Примена

Финансије, хидрологија, метеорологија, економија.

Напомена

Расподела је специјалан случај Пирсонове III ($PIR3$) расподеле.

36

ГАМА ЗАСЕЧЕНА РАСПОДЕЛА $GZ1(a)$

(засечена на $[0, T]$, једнопараметарска)

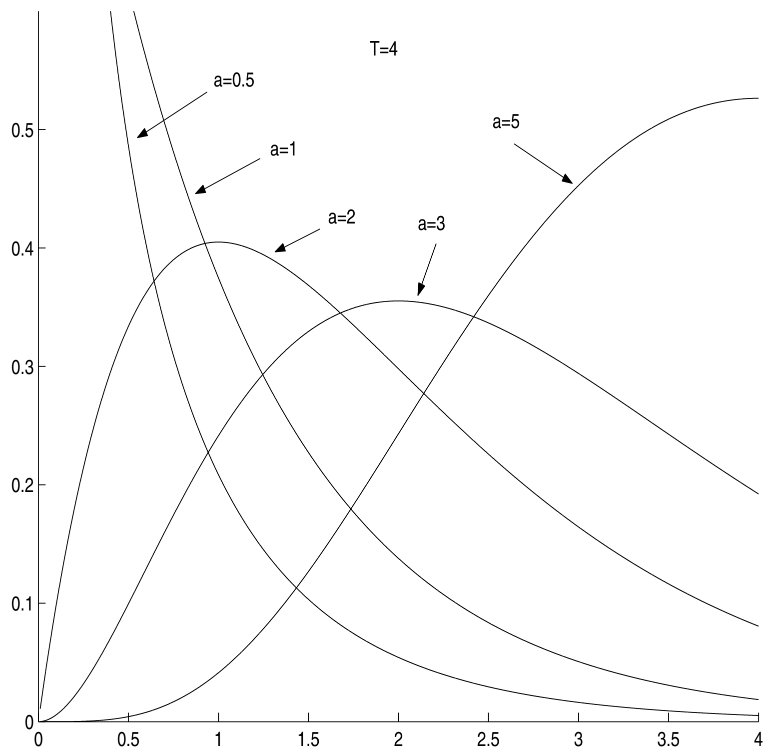
Густина

$$g(x) = \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\gamma(a, T)}, \quad 0 \leq x \leq T.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



37

ГАМА РАСПОДЕЛА $GZ2(a,b)$

(засечена на $[0,T]$, двопараметарска)

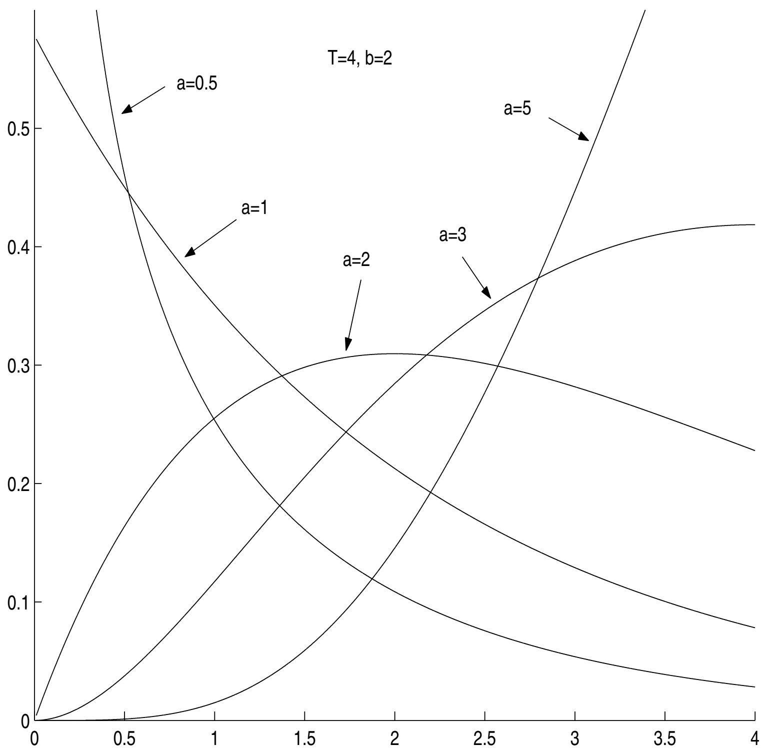
Густина

$$g(x) = \frac{x^{a-1}e^{-x/b}}{b^{a-1}\gamma(a,T/b)}, \quad 0 \le x \le T.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



38

ГИЛБРАТОВА РАСПОДЕЛА GL

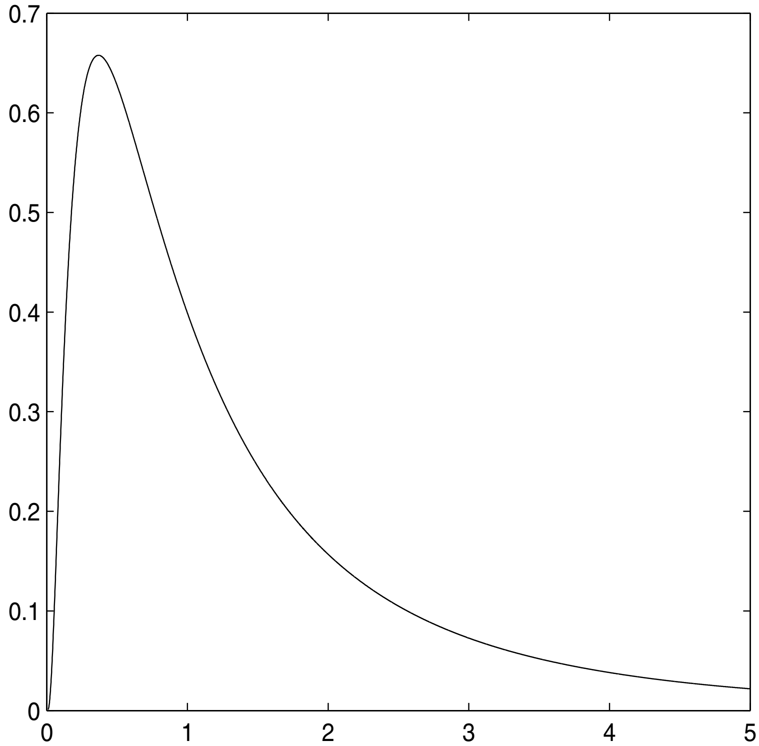
Густина

$$g(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{\ln^2 x}{2}}, \quad x > 0.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P\left(\frac{1}{2}, \frac{\ln^2 x}{2}\right), \quad x > 0.$$

Моменти

$$m_r = e^{r^2/2}, \quad r \in N.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = (e+2)\sqrt{e-1}, \quad \pi_2(X) = e^4 + 2e^3 + 3e^2 - 3.$$

Везе са другим расподелама

1. $GL = LN_2(0,1)$.
2. $GL = LN_3(0,1,0)$.
3. Ако $X : GL$, тада $\log X : N(0,1)$.

39

ГУМБЕЛОВА РАСПОДЕЛА *GU*

(стандардна)

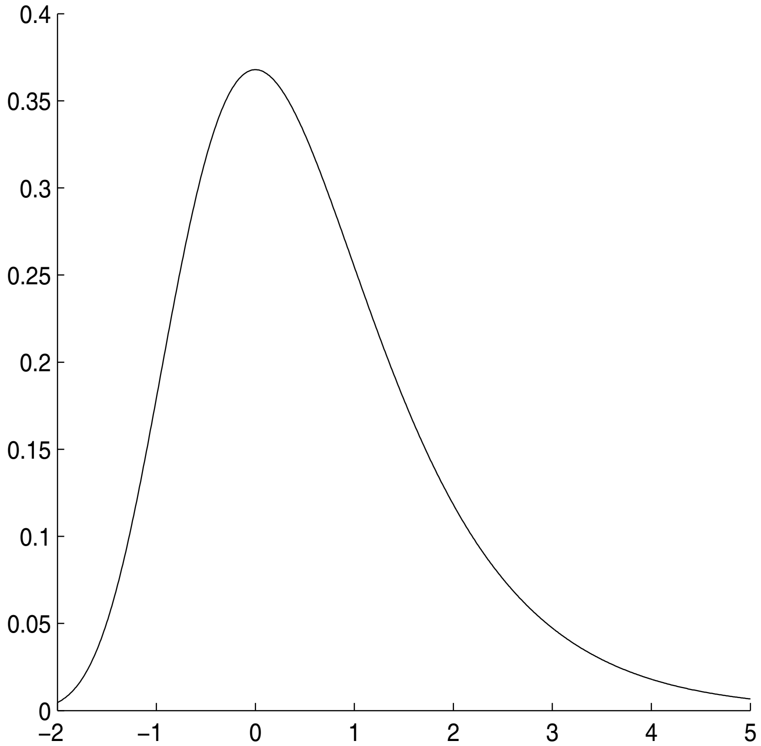
Густина

$$g(x) = e^{-x - e^{-x}}, \quad x \in R.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in R.$$

Моменти

$$m_1 = \gamma, \quad m_2 = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}, \quad m_3 = \gamma^3 + \frac{\gamma\pi^2}{2} + 2\zeta(3), \quad m_4 = \gamma^4 + \gamma^2\pi^2 + \frac{3\pi^4}{20} + 8\gamma\zeta(3),$$

$$m_5 = \gamma^5 + \frac{5\gamma^3\pi^2}{3} + \frac{3\gamma\pi^4}{4} + 20\gamma^2\zeta(3) + \frac{10\pi^2\zeta(3)}{3} + 24\zeta(5),$$

где је γ Ојлерова константа, а ζ риманова зета функција.

Централни моменти

$$\mu_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad \mu_3 = 2\zeta(3), \quad \mu_4 = \frac{3\pi^4}{20}, \quad \mu_5 = \frac{10\pi^2\zeta(3)}{3} + 24\zeta(5)..$$

Везе са другим расподелама

1. $GU = GU1(1)$.
2. $GU = GU2(1, 0)$.

Примена

Екстремне вредности случајних низова, хидрологија, метеорологија.

Напомене

1. Расподела је добила име по немачком статистичару Гумбелу (Emil Julius Gumbel, 1891-1966)).
2. Користи се и назив *двоструко експоненцијална расподела*.

40

ГУМБЕЛОВА РАСПОДЕЛА GUN

(негативна, стандардна)

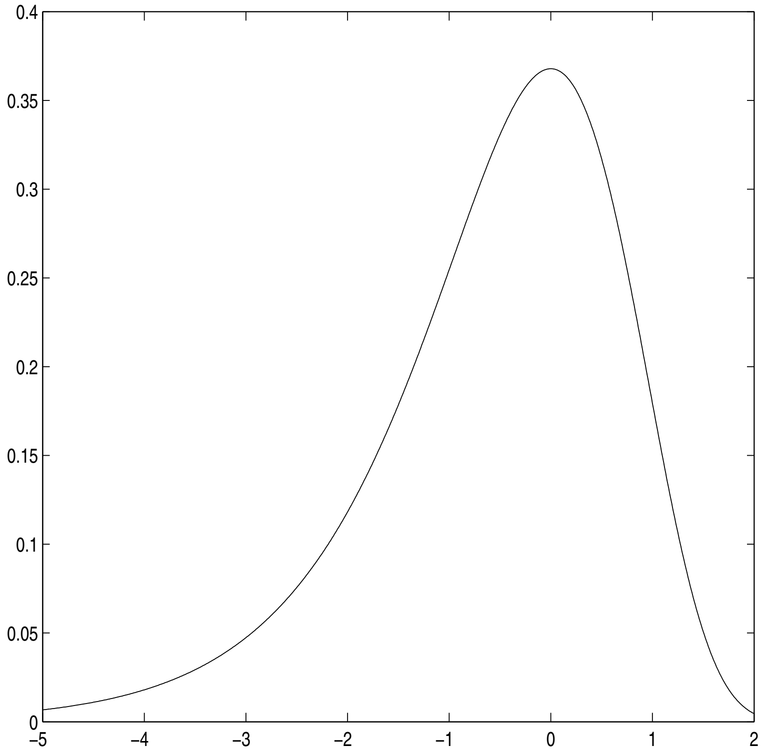
Густина

$$g(x) = e^{x-e^x}, \quad x \in R.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



41

ГУМБЕЛОВА РАСПОДЕЛА $GU1(a)$

(једнопараметарска)

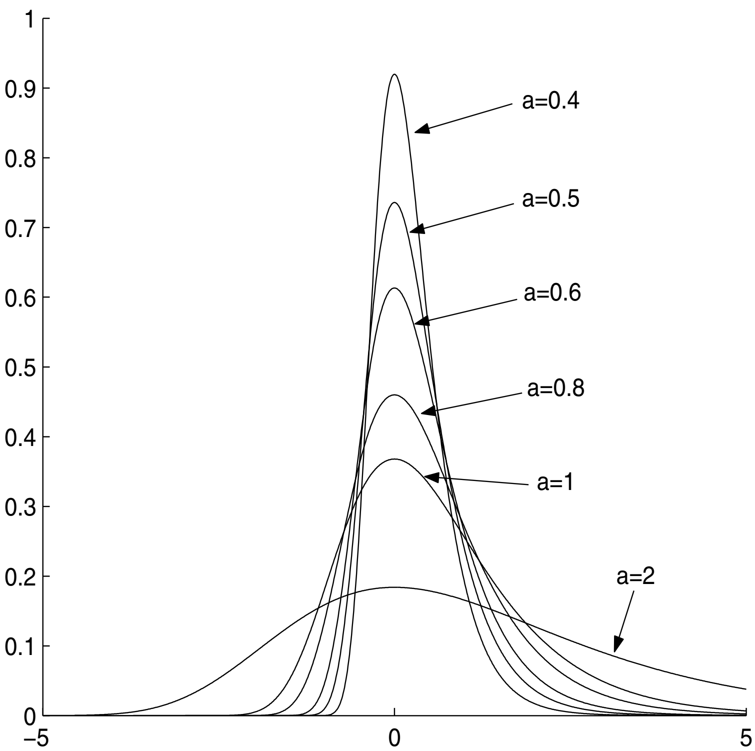
Густина

$$g(x) = ae^{-ax - e^{-ax}}, \quad x \in R.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = e^{-e^{-ax}}, \quad x \in R.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \Gamma\left(1 - \frac{it}{a}\right).$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) > 0, \quad \pi_2(X) \approx 2.4.$$

Нека својства

1. За густину и функцију расподеле важи једнакост
$$\ln g(x) - \ln F(x) + ax = 0.$$
2. Густина расподеле је решење диференцијалне једначине
$$a\left(e^{-ax} - 1\right) g - g' = 0.$$
3. Функција расподеле је решење диференцијалне једначине
$$\ln F' - \ln F + ax = 0.$$

Везе са другим расподелама

1. $GU1(1) = GU$.
2. Ако $X \, : \, E_1(1)$, тада $-\dfrac{1}{a}\ln X \, : \, GU1(a)$.
3. Ако $X \, : \, U(0,1)$, тада $-\dfrac{1}{a}\ln(-\ln X) \, : \, GU1(a)$.

Напомена

Гумбелова расподела је позната и као двоструко експоненцијална, као расподела екстремних вредности типа I и као Фишер-Типетова расподела.

42

ГУМБЕЛОВА РАСПОДЕЛА $GU2(a, b)$

(двопараметарска)

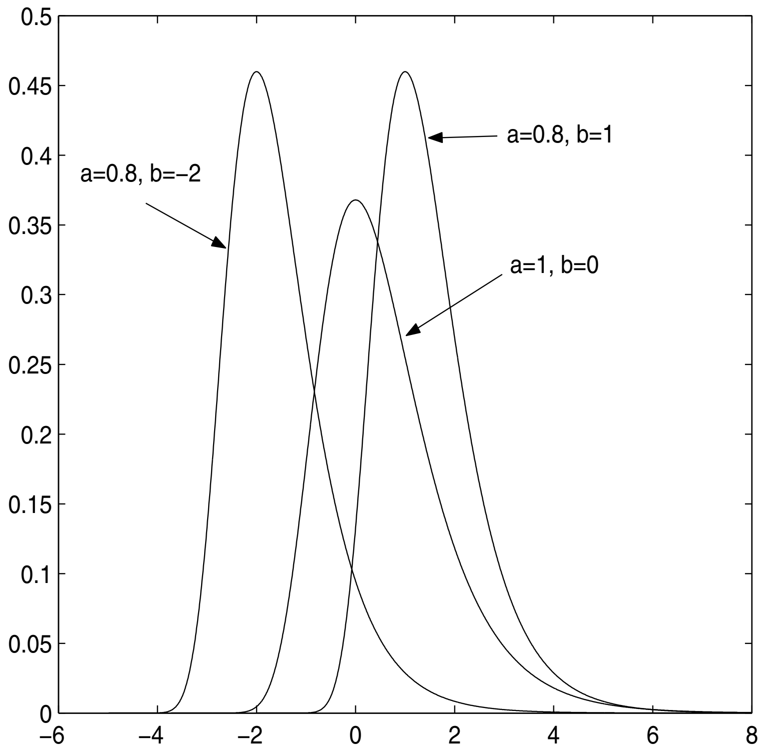
Густина

$$g(x) = ae^{-a(x-b) - e^{-a(x-b)}}, \quad x \in R.$$

Параметри

a $(a > 0)$ - параметар скалирања, b $(b \in R)$ - параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = e^{-e^{-a(x-b)}}, \quad x \in R.$$

Ентропија

$$H(X) = -\ln a + \gamma + 1,$$

где је γ Ојлерова константа.

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \Gamma\left(1 - \frac{it}{a}\right) e^{ibt}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = \Gamma\left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{bt}.$$

Моменти

$$m_1 = b + \gamma\frac{1}{a}, \quad D(X) = \frac{\pi^2}{6a^2}.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = b, \quad Me(X) = b - \frac{1}{a}\ln(\ln 2).$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{12\sqrt{6}\zeta(3)}{\pi^3} \approx 1.1396, \quad \pi_2(X) = 2.4,$$

где је ζ Риманова зета функција.

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ непознатих параметара a и b добијају се из једначина

$$\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-\widehat{a}X_i} - \left(\overline{X} - \frac{1}{\widehat{a}}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{-\widehat{a}X_i} = 0, \quad \widehat{b} = \frac{1}{\widehat{a}}\ln n - \frac{1}{\widehat{a}}\ln\sum_{i=1}^{n} e^{-\widehat{a}X_i}.$$

Метода момената

Оцене $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ за a и b, по методи момената, дате су са

$$\widetilde{a} = \frac{\pi}{S_n\sqrt{6}}, \quad \widetilde{b} = \overline{X} - \frac{\gamma\sqrt{6}}{\pi}S_n,$$

где је γ Ојлерова константа.

Нека својства

1. Картили расподеле дати су са

$$Q_1 = b - \frac{1}{a}\ln(\ln 4), \quad Q_3 = b - \frac{1}{a}\ln\left(\ln\frac{4}{3}\right).$$

2. Расподела је асиметрична удесно.

3. Ако $X : GU2(a,b)$, онда је $-X$ асиметрична улево.

Везе са другим расподелама

1. Ако $X : GU2(a,b)$, тада $a(X-b) : GU$.

2. $GU2(a,0) = GU1(a)$.

3. $GU2(1,0) = GU$.

Примена

Хидрологија, економија, метеорологија.

Напомене

1. $GU(a,b)$ спада у класу расподела екстремних вредности.

2. Расподела је позната и као *Лог Вејбулова*, *Гомперцова* (*Gompertz*) и Фишер-Типетова (*Fisher-Tippett*) расподела.

3. Густина расподеле може да се параметризује и са

$$g(x) = \frac{1}{b}\exp\left\{\frac{a-x}{b} - e^{-\frac{a-x}{b}}\right\}.$$

43

ГУМБЕЛОВА РАСПОДЕЛА $GU2Z(a,b)$

(засечена на $[0,+\infty)$, двопараметарска)

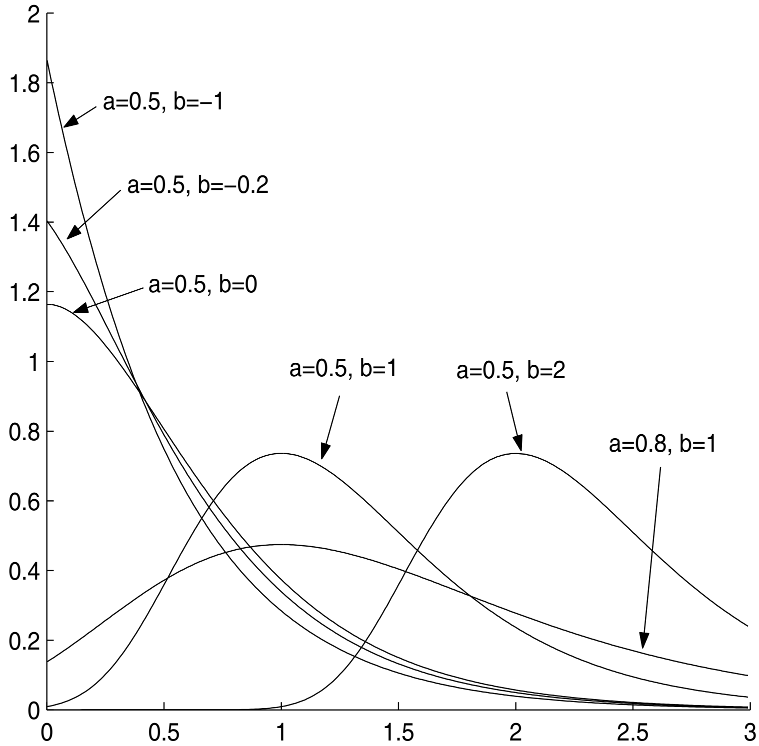
Густина

$$g(x) = \frac{ae^{-a(x-b) - e^{-a(x-b)}}}{1 - e^{-e^{ab}}}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ - параметар скалирања, b $(b \in R)$ - параметар локације.

График густине



44

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАСПОДЕЛА E

(стандардна)

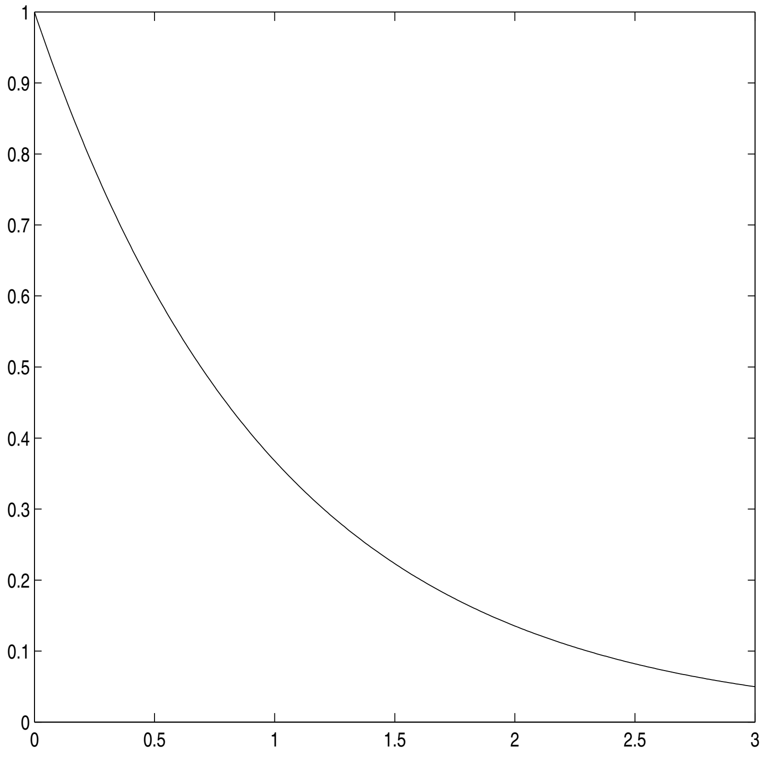
Густина

$$g(x) = e^{-x}, \quad x \in R.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \in R.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - it}.$$

Моменти

$$m_r = r!, \quad r \in N.$$

Везе са другим расподелама

1. $E = E_1(1)$.
2. Ако $X, Y\ :\ E$, тада $\dfrac{X}{X+Y}\ :\ U(0,1)$.

45

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАСПОДЕЛА $E_1(\lambda)$

(једнопараметарска)

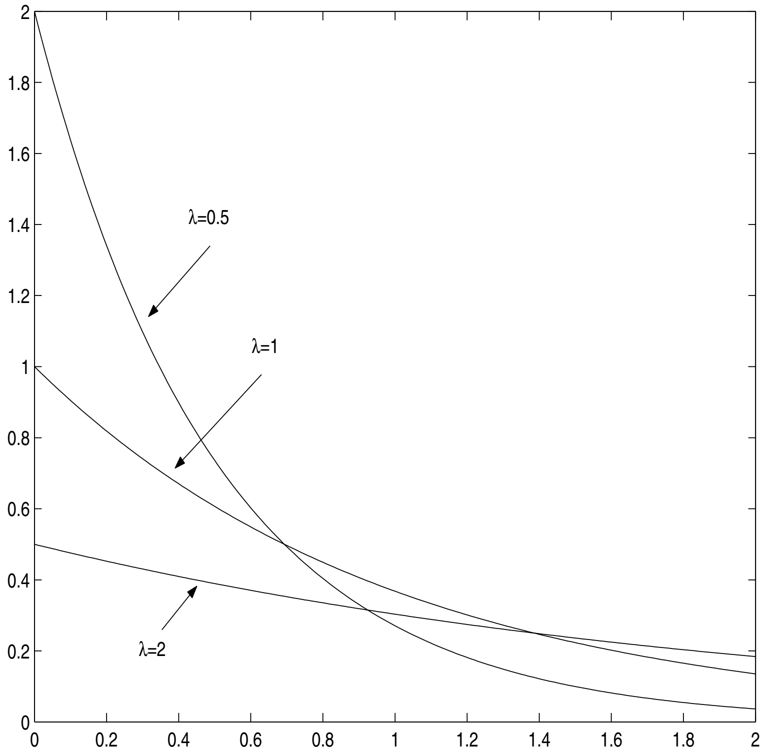
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\dfrac{x}{\lambda}}, \quad x \geq 0$$

Параметри

λ ($\lambda > 0$) – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - e^{-x/\lambda}, \quad x \geq 0.$$

Ентропија

$$H(x) = 1 + \ln \lambda.$$

У скупу случајних променљивих чије су густине једнаке нули за $x < 0$ и позитивне за $x \geq 0$ и које имају очекивање λ, највећу ентропију имају оне са расподелом $E_1(\lambda)$.

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - i\lambda t}.$$

Моменти

$$m_r = \lambda^r \cdot r!, \quad r \in N.$$

Специјално,

$$m_1 = \lambda, \quad m_2 = 2\lambda^2, \quad m_3 = 6\lambda^3, \quad m_4 = 24\lambda^4.$$

За централне моменте важи:

$$\mu_{r+1} = (r+1)\lambda\mu_r + (-1)^{r+1}\lambda^{r+1},$$

као и

$$\mu_r = m_r \sum_{o}^{r} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Специјално,

$$\mu_2 = D(X) = \lambda^2, \quad \mu_3 = 2\lambda^3, \quad \mu_4 = 9\lambda^4, \mu_5 = 44\lambda^5, \quad \mu_6 = 265\lambda^6, \quad \mu_7 = 1854\lambda^7.$$

За велике вредности r је $\mu_r \approx \frac{m_r}{e}$.

Модус и медијана

$$Mo(X) = 0, \quad Me(X) = \lambda \cdot \ln 2.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 2, \quad \pi_2(X) = 6.$$

Функција веродостојности

$$L(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Како је

$$\ln L(\lambda) = -n \ln \lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

из $\dfrac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = 0$ добија се оцена за λ по методи максималне веродостојности

$$\widehat{\lambda} = \overline{X}_n.$$

Метода момената

Оцена је иста као она која се добија методом максималне веродостојности, при чему је

$$E(\widehat{\lambda}) = \lambda, \quad D(\widehat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n},$$

па је оцена непристрасна и стабилна.

Нека својства

1. Коефицијент варијације је $C_V(X) = 1$.
2. Ако $X : E_1(1)$, тада $\lambda X : E_1(\lambda)$.
3. Ако $X_i : E_1(\lambda_i)$ за $i = 1, \ldots, n$ и ако су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} : E_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n).$$
4. Ако $X : E_1(\lambda)$, тада за свако $x \geq 0$ и свако $y \geq 0$ важи
$$P\{X \geq x + y \mid X \geq y\} = P\{X \geq x\}.$$
Ово својство се зове *недостатак меморије* и оно је карактеристично само за експоненцијалну расподелу.

Везе са другим расподелама

1. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda, 0)$.
2. $E_1(\lambda) = G_3(1, \lambda, 0)$.

3. $E_1(1) = E$.

4. Ако $X : E_1(\lambda)$, тада $e^{-X/\lambda} : U(0,1)$.

5. Ако $(X-c)^h : E_1(\lambda)$, тада $X : W_3(\lambda, c, h)$.

6. Ако $X : E_1(\lambda)$, тада $\sqrt{2X/\lambda} : R_1(1/\lambda)$.

7. Ако су $X_1, \ldots X_n$ независне и $X_i : E_1(\lambda)$, тада $\sum_{i=1}^{n} X_i : G_2(n, \lambda)$.

8. Ако $X : E_1(\lambda)$, тада $a - b\ln(X/\lambda) : GU2(a, b)$.

9. Ако су X_1 и X_2 независне и $X_1, X_2 : E_1(\lambda)$, тада $X_1 - X_2 : L(\lambda)$.

Примена

Биологија, физика, системи масовног опслуживања, електротехника, метеорологија, хидрологија,теорија поузданости.

Напомена

Користи се и параметризација у којој се уместо $1/\lambda$ узима λ. У том случају је

$$g(x) = \lambda^{-\lambda(x-c)}, \quad x \geq c,$$

где је $\lambda > 0$.

46

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАСПОДЕЛА $E_2(\lambda, c)$

(двопараметарска)

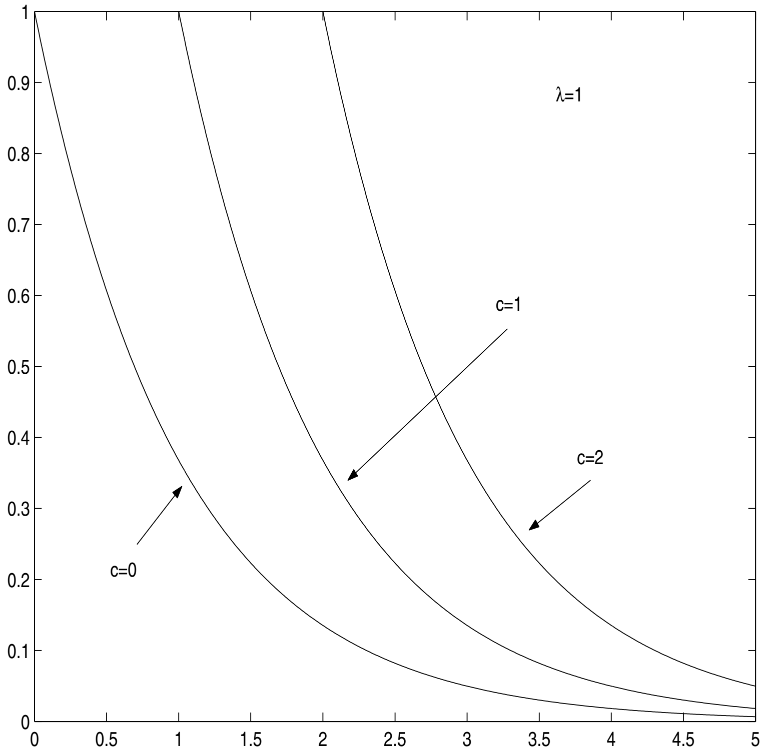
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-c}{\lambda}}, \quad x \geq c.$$

Параметри

λ ($\lambda > 0$) – параметар скалирања, c ($c \in R$) – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x-c}{\lambda}\right\}, \quad x \geq c.$$

Ентропија

$$H(x) = 1 + \ln \lambda.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{e^{ict}}{1 - i\lambda t}.$$

Моменти

За моменте важи

$$m_r = c^r + r\lambda m_{r-1} = r! \sum_{i=0}^{r} \frac{\lambda^i c^{r-i}}{(r-i)!}, \quad r \in N.$$

Специјално,

$$m_1 = c + \lambda, \quad m_2 = (c+\lambda)^2 + \lambda^2, \quad m_3 = c^3 + 3c^2\lambda + 6c\lambda^2 + 6\lambda^3,$$

$$m_4 = c^4 + 4c^3\lambda + 12c^2\lambda^2 + 24c\lambda^3 + 24\lambda^4.$$

За централне моменте важи

$$\mu_r = r\lambda\mu_{r-1} + (-1)^r\lambda^r = \lambda^r r! \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^r}{r!}, \quad r \in N.$$

Специјално,

$$\mu_2 = D(X) = \lambda^2, \quad \mu_3 = 2\lambda^3, \quad \mu_4 = 9\lambda^4.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = c, \quad Me(X) = c + \lambda \ln 2.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 2, \quad \pi_2(X) = 6.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Ако је параметар c познат, оцена за λ по методи максималне веродостојности је
$$\widehat{\lambda} = \overline{X}_n - c,$$
при чему је $E(\widehat{\lambda}) = \lambda$ (непристрасност) и $D(\widehat{\lambda}) = \lambda^2/n \to 0$ кад $n \to \infty$ (стабилност).

Ако је параметар λ познат, оцена за c по методи максималне веродостојности је $\widehat{c} = X_{\min}$.

Оцене оба параметра по методи максималне веродостојности су
$$\widehat{c} = X_{\min}, \quad \widehat{\lambda} = \overline{X} - X_{\min}.$$
Ове оцене су асимптотски непристрасне и стабилне:
$$E(\widehat{c}) = c + \frac{\lambda}{n}, \quad D(\widehat{c}) = \frac{\lambda^2}{n^2},$$
$$E(\widehat{\lambda}) = \lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad D(\widehat{\lambda}) = \lambda^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right).$$

Метода момената

Ако је параметар c познат, оцена за λ по методи момената је $\tilde{\lambda} = \overline{X} - c$. Она је непристрасна и стабилна, јер је
$$E(\tilde{\lambda}) = \lambda, \quad D(\tilde{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n}.$$
Слично, ако је параметар λ познат, оцена $\tilde{c} = \overline{X} - \lambda$, по методи момената, је такође непристрасна и стабилна јер је
$$E(\tilde{c}) = c, \quad D(\tilde{c}) = \frac{\lambda^2}{n}.$$
Оцене за оба параметра по методи момената су
$$\tilde{\lambda} = S, \quad \tilde{c} = \overline{X} - S, \quad S^2 - \frac{1}{n}\sum_1^n (X_k - \overline{X})^2.$$

Још неке оцене параметара

Оцене
$$c^* = \frac{1}{n-1}(nX_{\min} - \overline{X}), \quad \lambda^* = \frac{n}{n-1}(\overline{X} - X_{\min})$$
су непристрасне, стабилне и слабо корелисане, јер је
$$E(c^*) = c,\ E(\lambda^*) = \lambda,\ D(c^*) = \frac{\lambda^2}{n(n-1)},\ D(\lambda^*) = \frac{\lambda^2}{n-1},$$

$$cov(c^*, \lambda^*) = \frac{\lambda^2}{n(n-1)}, \quad \rho(c^*, \lambda^*) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Везе са другим расподелама

1. $G_3(1, \lambda, c) = E_2(\lambda, c)$
2. $E_2(\lambda, 0) = E_1(\lambda)$
3. Ако $X_i \ : \ E(\lambda_i)$ и ако су X_i $(i = 1, \ldots, n)$ независне, онда случајна променљива $a_1 X_1 + \cdots a_n X_n$ има Ерлангову расподелу.

Примена

Биологија, физика, теорија поузданости, системи масовног опслуживања, метеорологија, хидрологија, електротехника, теорија поузданости, психологија.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = c - \lambda \ln u$ случајан број из $E_2(\lambda, c)$ расподеле.

47

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАСПОДЕЛА $EZ(\lambda,T)$

$\big($засечена на $[0,T]\big)$

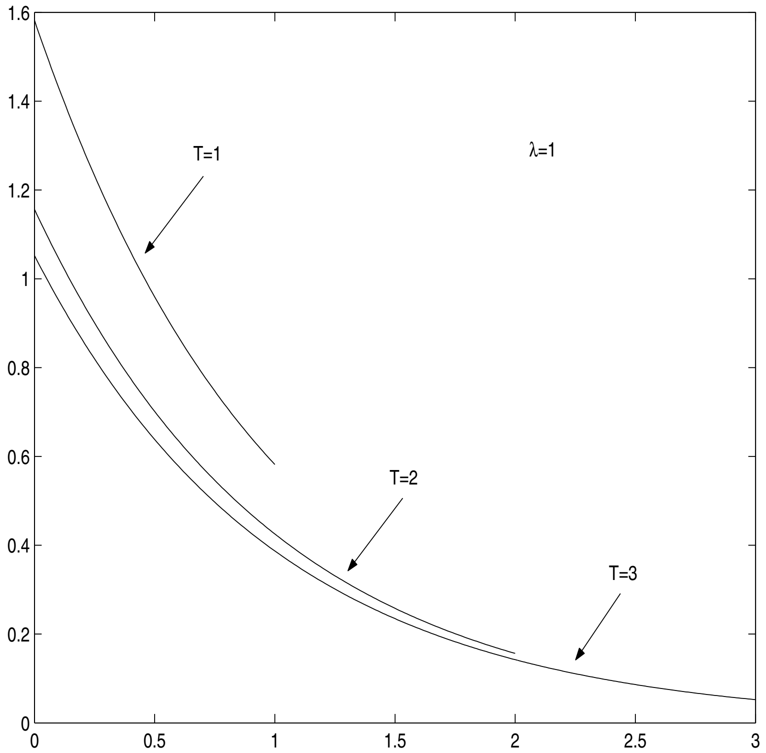
Густина

$$g(x) = \left(1 - e^{-T/\lambda}\right)^{-1} \frac{1}{\lambda} e^{-\dfrac{x}{\lambda}}, \quad 0 \le x \le T.$$

Параметри

λ $(\lambda > 0)$ – параметар скалирања, T $(T > 0)$ – параметар локације.

График густине



Моменти

$$E(X) = \lambda - \frac{T}{e^{T/\lambda} - 1}, \quad D(X) = \lambda^2 - \frac{T^2 e^{T/\lambda}}{(e^{T/\lambda} - 1)^2}.$$

Оцене параметара

Оцена по методи максималне веродостојности за λ се добија решавањем једначине

$$\widehat{\lambda} = \overline{X} + \frac{T}{e^{T/\widehat{\lambda}} - 1}.$$

Напомена

Параметар T се обично бира тако да важи $P(0 \leq X \leq T) = \alpha$, где је α дато, на пример $\alpha = 0.95$ или $\alpha = 0.99$.

48

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАСПОДЕЛА $ES(a,b,c)$

(степена, тропараметарска)

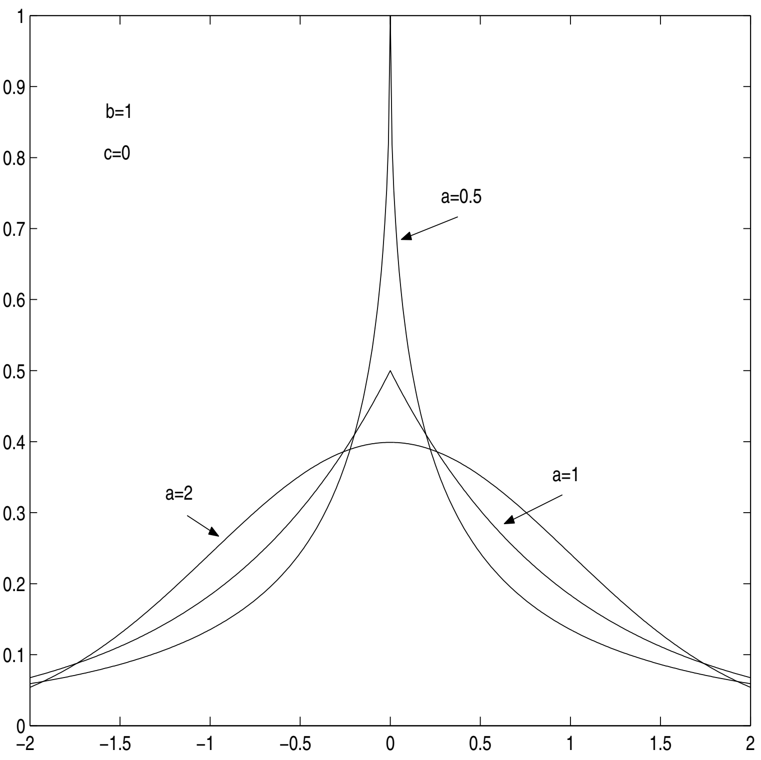
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2a^{1/a}b\Gamma\left(1+\dfrac{1}{a}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{ab^a}|x-c|^a\right\}, \quad x \in R.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања, c $(c \in R)$ – параметар локације.

График густине



49

ЕРЛАНГОВА РАСПОДЕЛА $ER1(n)$

(једнопараметарска)

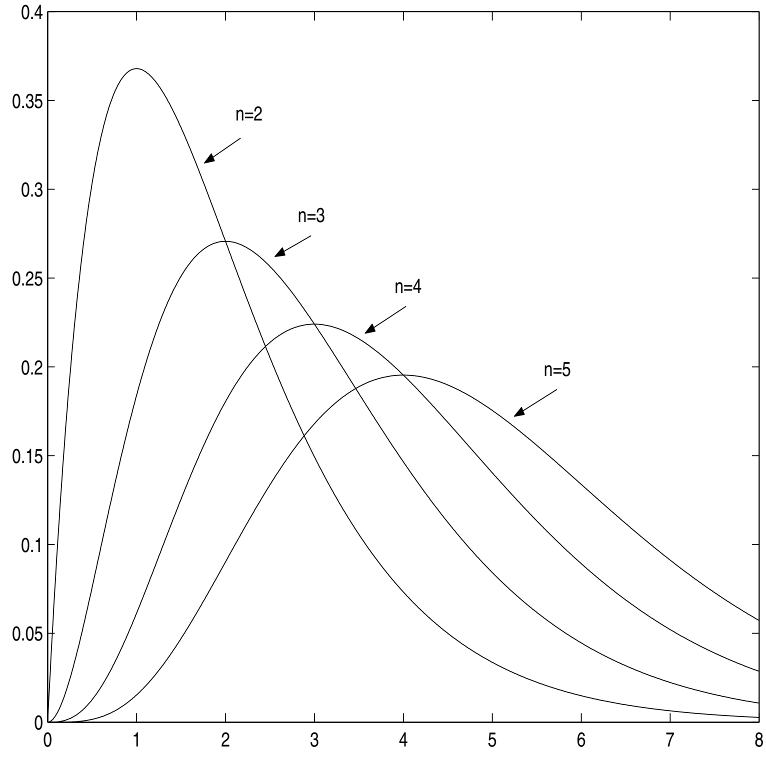
Густина

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

n ($n \in N$) – параметар облика.

График густине



50

ЕРЛАНГОВА РАСПОДЕЛА $ER2(n,b)$

(двопараметарска)

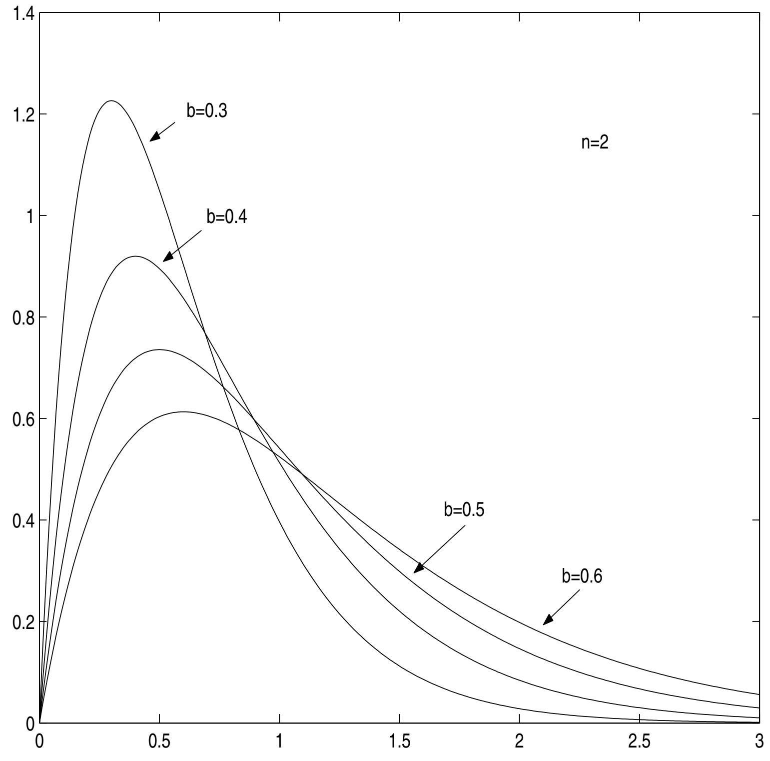
Густина

$$g(x) = \frac{1}{b(n-1)!}\left(\frac{x}{b}\right)^{n-1} e^{-x/b}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

n $(n \in N)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - e^{-x/b} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{b}\right)^k, \quad x \geq 0.$$

Ентропија

$$H(X) = nb - (n-1)\ln b + \ln(n-1)! + (1-n)\psi(n),$$

где је ψ дигама функција (видети Додатак).

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = (1 - itb)^{-n}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = (1 - tb)^{-n}, \quad t < 1/b.$$

Моменти

$$m_1 = bn, \quad D(X) = b^2 n.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \pi_2(X) = \frac{6}{n}.$$

Везе са другим расподелама

1. $ER2(1, b) = E_1(b)$.
2. $ER2(n, 1) = ER1(n)$.
3. $ER2(n, b) = ER3(n, b, 0)$.
4. $ER2(n, 2) = \chi^2(2n)$.
5. $ER2(n, b) = G_3(n, b, 0)$.
6. Ако $X_i \,:\, E_1(b)$ за $i = 1, \ldots, n$ и ако су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне променљиве, тада

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \,:\, ER2(n, b).$$

7. Ако $X_i \,:\, N(0,1)$ за $i = 1, \ldots, 2n$ и ако су $X_1, \ldots, X_{2n}$ независне случајне промењиве, тада
$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{2n}^2 \,:\, ER2(n,2).$$

Примена

Телекомуникације, случајни процеси, биологија, екологија.

Напомене

1. Расподелу је увео дански статистичар Ерланг (Agner Krarup Erlang, 1878-1929).

2. Користи се и параметризација у којој је $1/b$ уместо b. У том случају је
$$g(x) = \frac{b}{\Gamma(n)}(bx)^{n-1}e^{-bx}.$$

Генерисање

Ако су $u_1, u_2, \ldots, u_n$ независни случајни бројеви из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = -b\sum_{k=1}^{n} \ln u_k$ случајан број из $ER2(n,b)$ расподеле.

51

ЕРЛАНГОВА РАСПОДЕЛА $ER3(n,b,c)$

(тропараметарска)

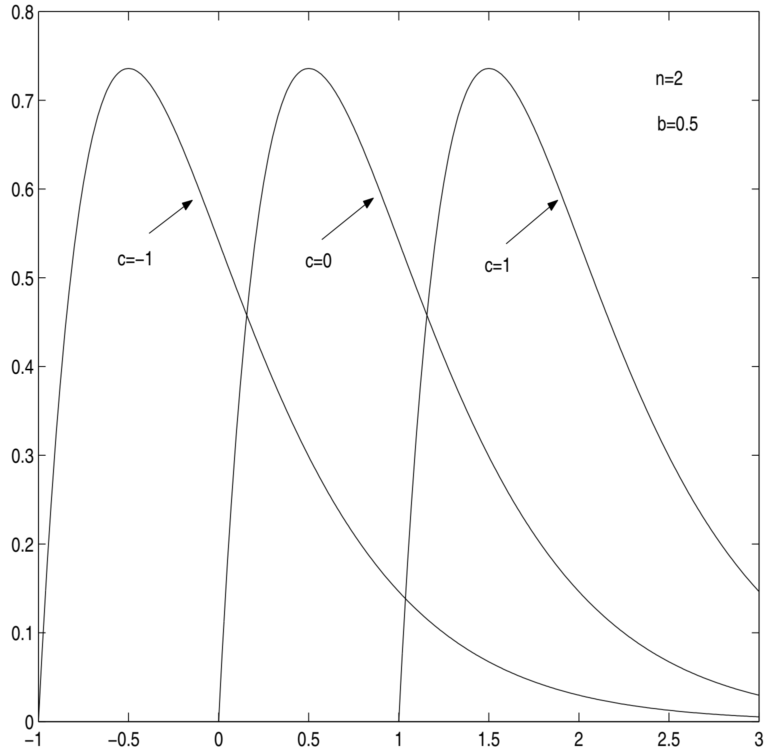
Густина

$$g(x) = \frac{1}{b^n(n-1)!}\left(\frac{x-c}{b}\right)^{n-1}\exp\left\{-\frac{x-c}{b}\right\}, \quad x \geq c.$$

Параметри

n $(n \in N)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања, c $(c > 0)$ – параметар локације.

График густине



Моменти

$$m_1 = bn, \quad D(X) = b^2 n.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \pi_2(X) = \frac{6}{n}.$$

Везе са другим расподелама

1. $ER3(1, b, 0) = E_1(b)$.
2. $ER3(n, 1, 0) = ER1(n)$.
3. $ER3(n, b, 0) = ER2(n, b)$.
4. $ER3(n, 2, 0) = \chi^2(2n)$.
5. $ER3(n, b, c) = G_3(n, b, 0)$.
6. Ако $X_i \,:\, E_2(b, c)$ за $i = 1, \ldots, n$ и ако су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \,:\, ER3(n, b, c).$$
7. Ако $X_i \,:\, N(0, 1)$ за $i = 1, \ldots, 2n$ и ако су $X_1, \ldots, X_{2n}$ независне случајне променљиве, тада
$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{2n}^2 \,:\, ER3(n, 2, 0).$$

Напомена

Користи се и параметризација у којој је $1/b$ уместо b. У том случају је

$$g(x) = \frac{b^n}{\Gamma(n)} (x - c)^{n-1} e^{-b(x-c)}.$$

52

ЗИПФ РАСПОДЕЛА $Z(a)$

(једнопараметарска)

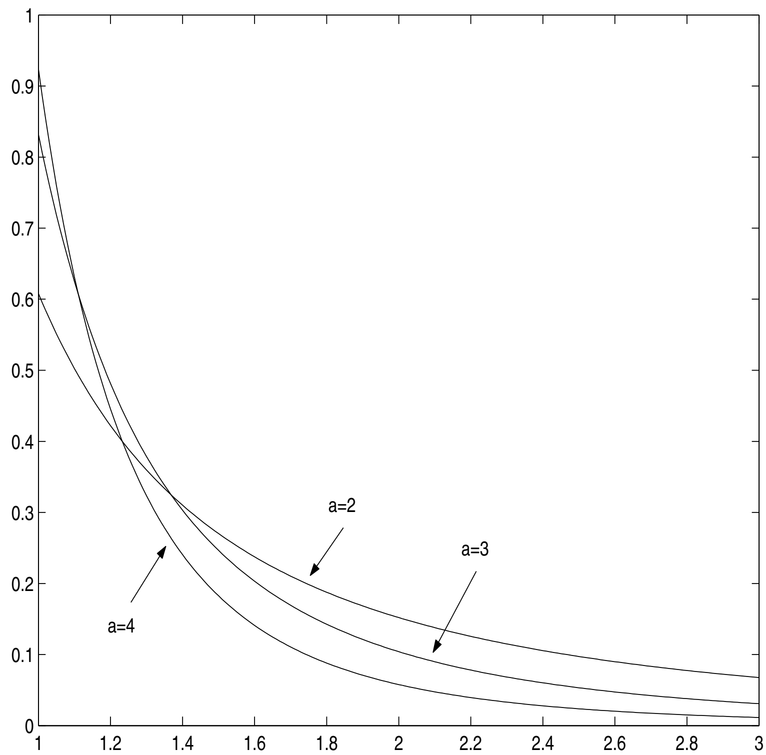
Густина

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^a} \cdot \frac{1}{x^a}, \quad x > 1.$$

Параметри

a $(a > 1)$ – параметар облика.

График густине



53

ИНВЕРЗНА ГАМА РАСПОДЕЛА $IG(a,b)$

(двопараметарска)

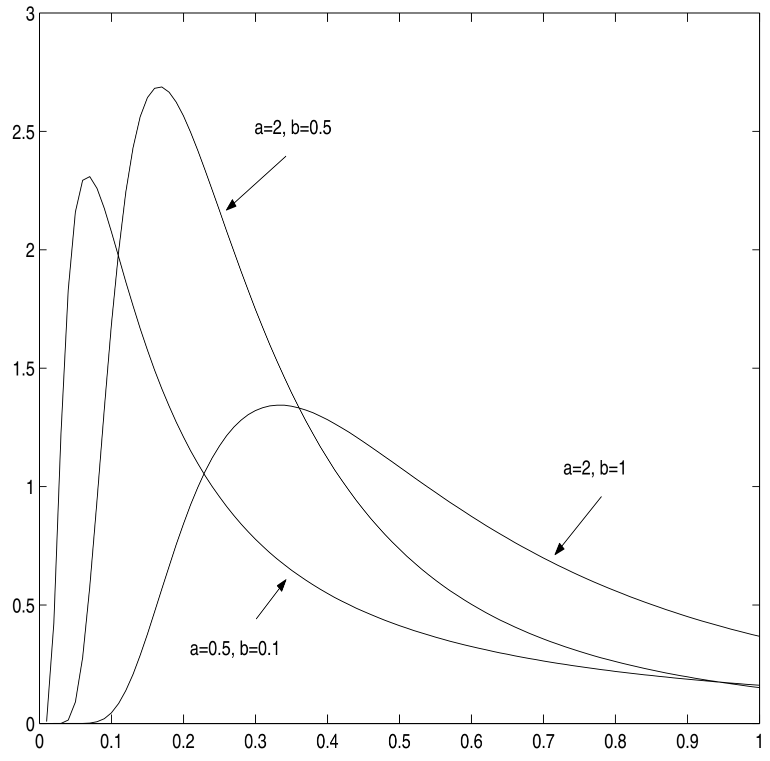
Густина

$$g(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} e^{-b/x}, \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(a, b/x\right)}{\Gamma(a)}, \quad x > 0.$$

Ентропија

$$H(X) = a + \ln(b\Gamma(a)) - (1 + a)\psi(a).$$

Карактеристична функција

$$\phi(t) = \frac{2}{\Gamma(a)}(-ibt)^{a/2} K_a(\sqrt{-4ibt}).$$

Генератриса момената

$$M(t) = \frac{2}{\Gamma(a)}(-bt)^{a/2} K_a(\sqrt{-4bt}).$$

Моменти

$$m_1 = \frac{b}{a-1} \ (a > 1), \quad D(X) = \frac{b^2}{(a-1)^2(a-2)} \ (a > 2).$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 4\frac{\sqrt{a-2}}{a-3} \ (a > 3), \quad \pi_2(X) = \frac{30a - 66}{(a-3)(a-4)} \ (a > 4).$$

Везе са другим расподелама

1. Ако $X : G_2(a, b)$, тада $\frac{1}{X} : IG(a, 1/b)$.
2. $I\chi^2(n) = IG(n/2, 1/2)$.

54

ИНВЕРЗНА ГАУСОВА РАСПОДЕЛА $IG1(a)$

(једнопараметарска)

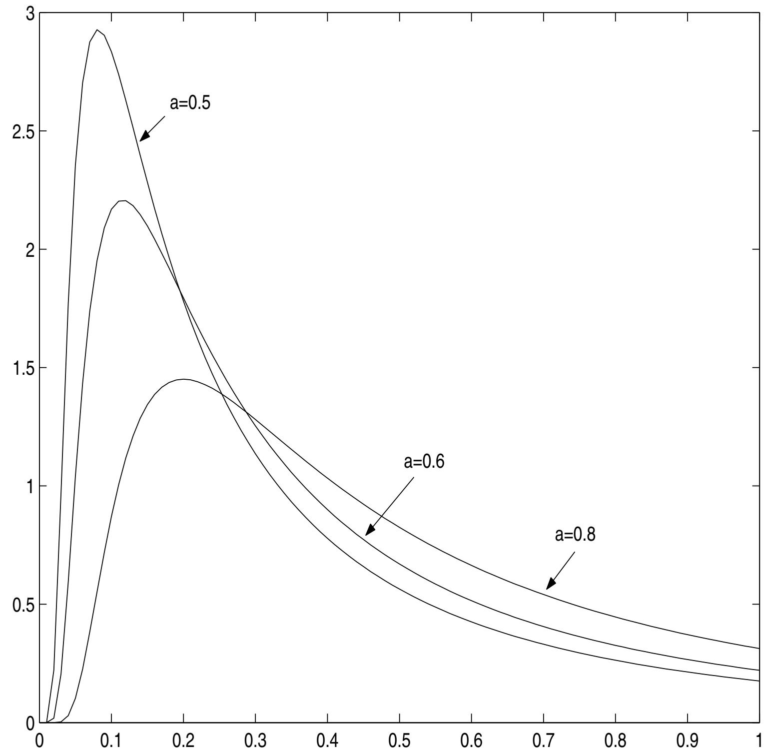
Густина

$$g(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\dfrac{(a-x)^2}{2x}}, \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



55

ИНВЕРЗНА ГАУСОВА РАСПОДЕЛА $IG2(a,b)$

(двопараметарска)

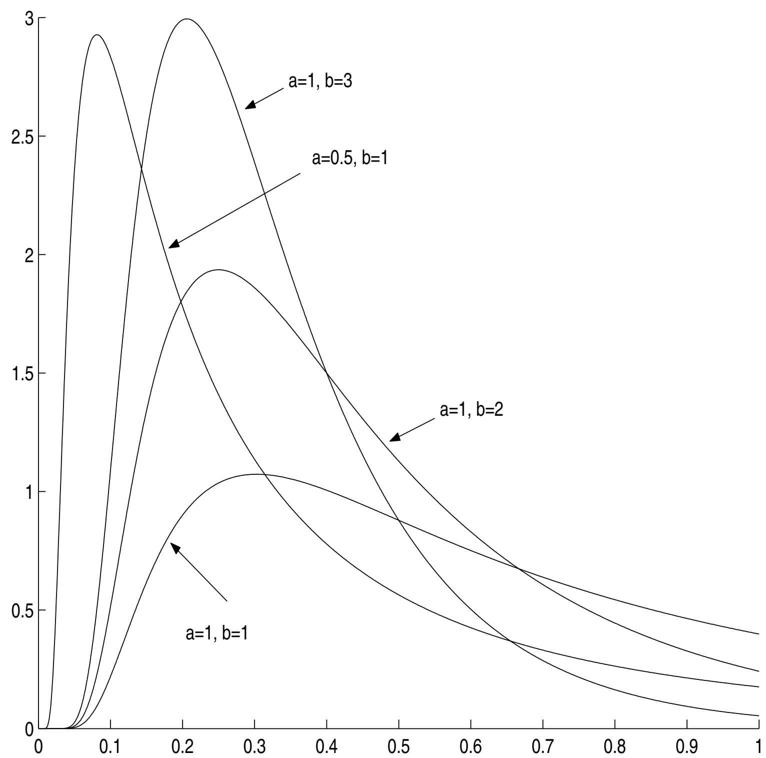
Густина

$$g(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\dfrac{(a-bx)^2}{2x}}, \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар локације, b $(b > 0)$ - параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \Phi\left(\frac{bx-a}{\sqrt{x}}\right) + e^{2ab}\Phi\left(-\frac{bx+a}{\sqrt{x}}\right), \quad x > 0.$$

Моменти

$$m_1 = \frac{a}{b}, \quad D(X) = \frac{a}{b^3}.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \frac{1}{2ab}\left(\sqrt{4a^4 + 9\frac{a^2}{b^2}} - 3\frac{a}{b}\right),$$

За медијану не постоји једноставан израз.

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{3}{\sqrt{ab}}, \quad \pi_2(X) = \frac{15}{ab}.$$

Везе са другим расподелама

1. $IG2(a,1) = IG(a)$.
2. Ако $X\ :\ IG2(a,b)$ и ако је

$$Y = \sqrt{ab}\left(\frac{bX}{a} - 1\right), \quad Z = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{ab}} + \sqrt{ab}\ln\frac{bX}{a},$$

   тада случајне величине Y и Z имају приближно нормалну расподелу $N(0,1)$.
3. Ако $X_1\ :\ IG2(a,b)$ за $i = 1,\ldots,n$ и ако су $X_1,\ldots,X_n$ независне случајне променљиве, тада $\overline{X}_n\ :\ IG2\left(\frac{a}{b}, na^2\right)$.

Примена

Физика, електроника, радиотехника, секвенцијална анализа, метеорологија, финансије, демографија.

Напомене

1. Расподелу је увео Tweedie 1947. године.

2. Расподела је добила име по томе што је њена генератриса момената инверзна функција генератрисе момената нормалне (Гаусове) расподеле.

3. Расподела је позната и као Валдова (Wald, 1902-1950) расподела.

4. Користи се и канонички облик функције густине

$$g(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\dfrac{\lambda}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2},$$

где је $\mu = \dfrac{a}{b}$ и $\lambda = a^2$. Ако се у овој параметризацији уведе смена $\lambda = \alpha\beta^2$ и $\mu = \alpha\beta$, добија се нова параметризација за коју је

$$g(x) = \sqrt{\frac{\alpha\beta^2}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{(x-\alpha\beta)^2}{2\alpha x}\right\}.$$

5. Расподела може да се користи уместо логнормалне расподеле у случају када подаци указују да се ради о расподели са 'дебелим' крајевима.

56

ИНВЕРЗНА РЕЛЕЈЕВА РАСПОДЕЛА $IR(a)$

(једнопараметарска)

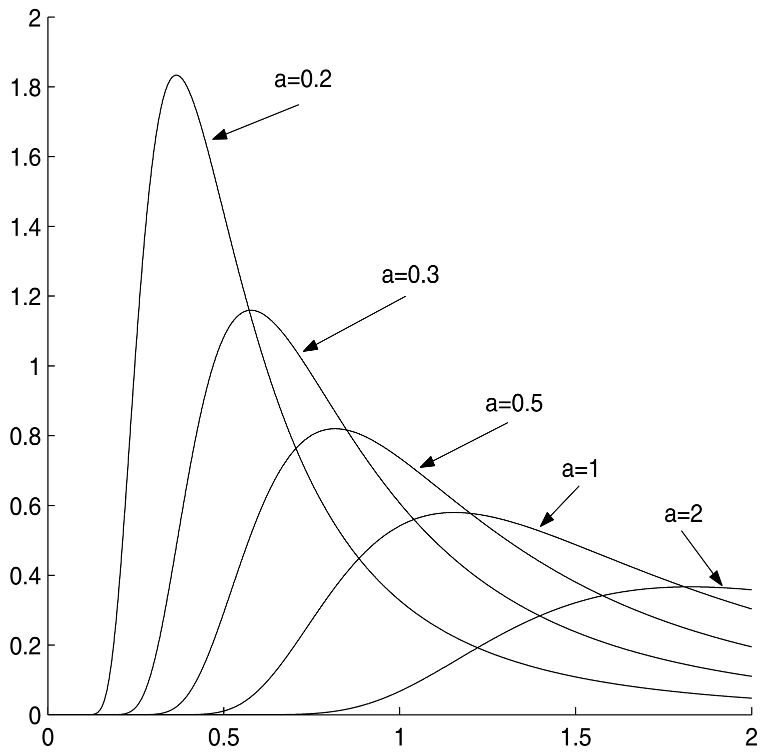
Густина

$$g(x) = \frac{2a}{x^3} e^{-a/x^2}, \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



57

ИНВЕРЗНА ХИ КВАДРАТ РАСПОДЕЛА $I\chi^2(n)$

(једноопараметарска)

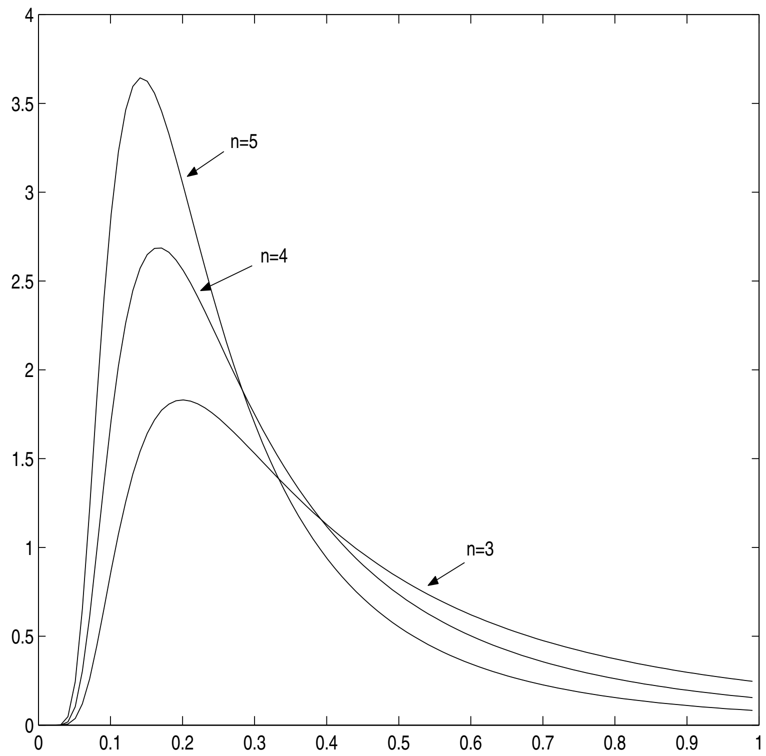
Густина

$$g(x) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{-n/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2x}\right\}, \quad x > 0.$$

Параметри

n ($n \in N$) – параметар облика (број степени слободе).

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{1}{2x}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}, \quad x > 0.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(-it)^{n/2}K_{n/2}(\sqrt{-2it}).$$

Генератриса момената

$$M(t) = 1\ 2^{n/4-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(it)^{n/4}K_{n/4}(\sqrt{-2t}), \quad t \in R.$$

Моменти

$$m_1 = \frac{1}{n-2}\ (n > 2), \quad D(X) = \frac{2n^2}{(n-2)^2(n-4)}\ (n > 4).$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{4}{n-6}\sqrt{2(n-4)}\ (n > 6), \quad \pi_2(X) = 12\frac{5n-22}{(n-6)(n-8)}\ (n > 9).$$

Везе са другим расподелама

1. Ако $X\ :\ \chi^2(n)$, тада $\dfrac{1}{X}\ :\ I\chi^2(n)$.
2. $I\chi^2(n) = IG2\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

58

ИНВЕРЗНА ХИ КВАДРАТ РАСПОДЕЛА $IS\chi^2(n, \sigma^2)$

(скалирана, двопараметарска)

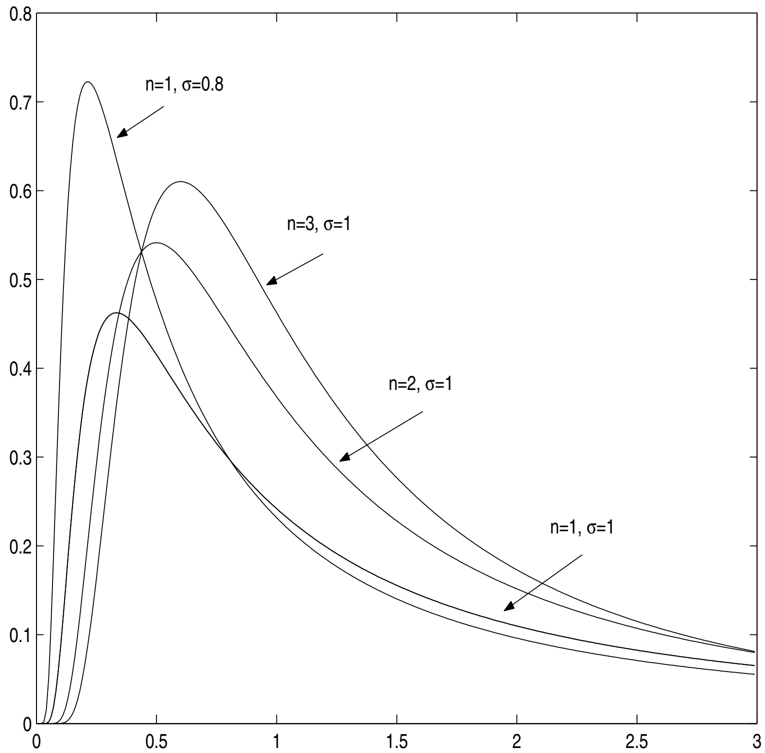
Густина

$$g(x) = \frac{2^{-n/2}(n\sigma^2)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{-n/2-1} \exp\left\{-\frac{n\sigma^2}{2x}\right\}, \quad x > 0.$$

Параметри

n $(n \in N)$ – параметар облика (број степени слободе),
σ $(\sigma > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{n\sigma^2}{2x}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x > 0.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(-in\sigma^2 t)^{n/2} K_{n/2}(\sqrt{-2in\sigma^2 t}).$$

Генератриса момената

$$M(t) = 1\ 2^{n/4-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(in\sigma^2 t)^{n/4} K_{n/4}(\sqrt{-2n\sigma^2 t}), \quad t \in R.$$

Моменти

$$m_1 = \frac{1}{n-2}\ (n > 2), \quad D(X) = \frac{2n^2\sigma^4}{(n-2)^2(n-4)}\ (n > 4).$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{4}{n-6}\sqrt{2(n-4)}\ (n > 6), \quad \pi_2(X) = 12\frac{5n-22}{(n-6)(n-8)}\ (n > 9).$$

Везе са другим расподелама

1. Ако $X\ :\ \chi^2(n)$, тада $\dfrac{n\sigma^2}{X}\ :\ IS\chi^2(n, \sigma^2)$.
2. $IS\chi^2(n, \sigma^2) = IG2\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{n\sigma^2}{2}\right)$.

59

КОШИЈЕВА РАСПОДЕЛА C

(стандардна)

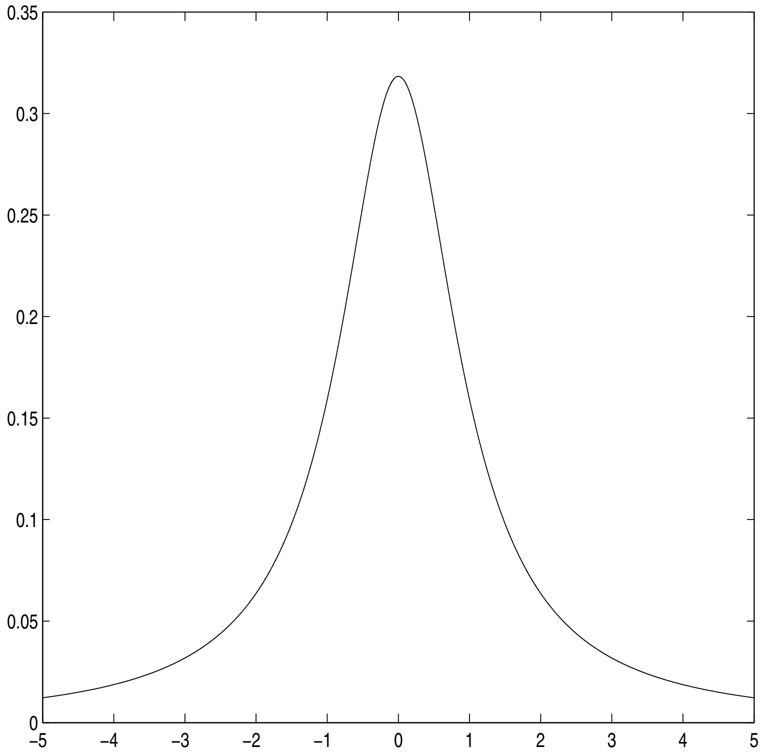
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in R.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, \quad x \in R.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = e^{-|t|}.$$

Моменти

С обзиром да $g(x) \sim \dfrac{1}{\pi x^2}$ за $|x| \to +\infty$, не постоје коначни моменти реда $r \geq 1$, а постоје за $r < 1$.

Нека својства

1. Квартили су $Q_1 = -1$ и $Q_3 = 1$.
2. Ако $X : C$, тада $\frac{1}{2}\left(X - \frac{1}{X}\right) : C$.

Везе са другим расподелама

1. Ако $X : U(-\pi/2, \pi/2)$, тада $\tan X : C$.
2. Ако $X : U(0, 1)$, тада $\tan \pi(X - 1/2) : C$.

Напомена

Расподела се зове по великом француском математичару Кошију (Augustin Luis Cauchy, 1789-1857).

60

КОШИЈЕВА РАСПОДЕЛА $CZ1$

(засечена на $(0,\infty)$)

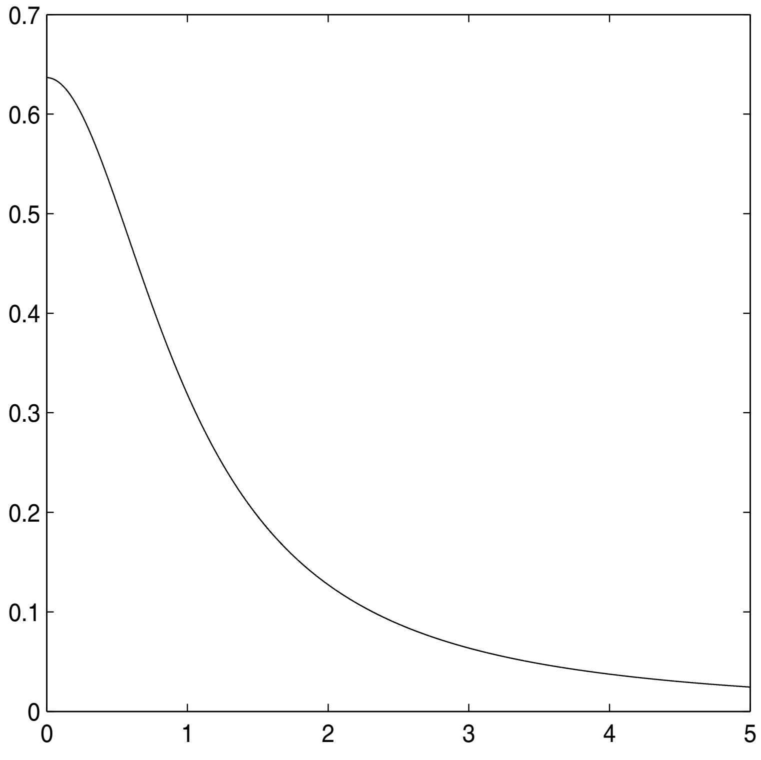
Густина

$$g(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



61

КОШИЈЕВА РАСПОДЕЛА $CZ2(T)$

(засечена на $[-T, T]$)

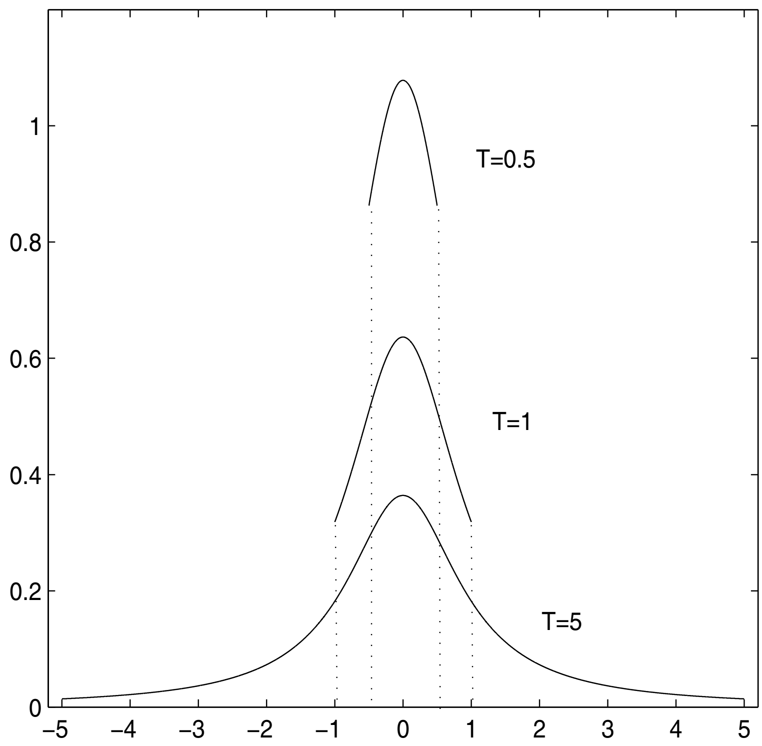
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\arctan T} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad -T \le x \le T.$$

Параметри

T - параметар локације.

График густине



62

КОШИЈЕВА РАСПОДЕЛА $C_1(a)$

(једнопараметарска)

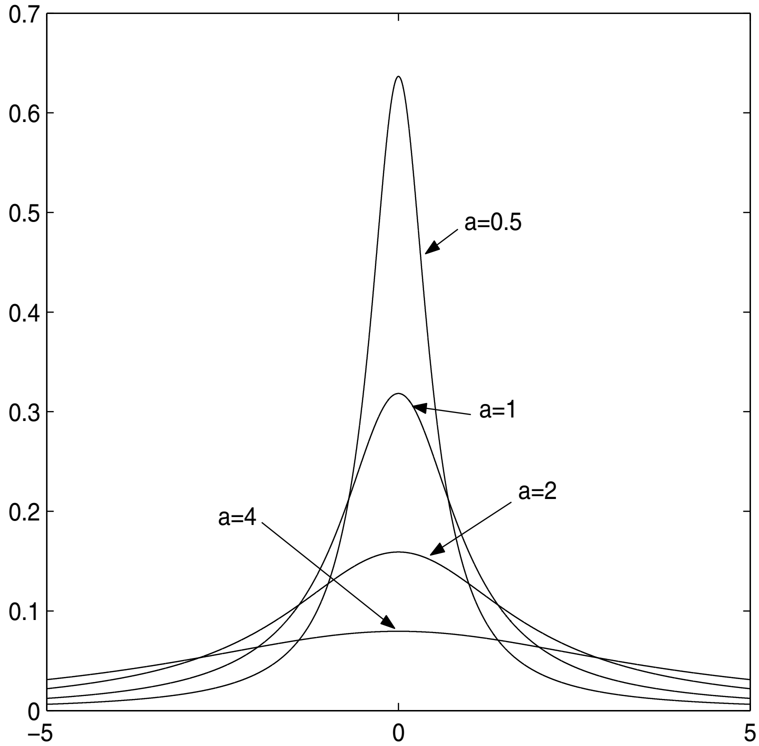
Густина

$$g(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Параметри

a – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a}, \quad x \in R.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

Нема дефинисане коефицијенте.

Функција веродостојности

$$L = \frac{a^n}{\pi} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a^2 + x_i^2}.$$

$$\ln L = n \ln a - n \ln \pi - \sum_{i=1}^{n} \ln(a^2 + X_j^2).$$

Оцене параметара

Оцена за a методом максималне веродостојности се добија из једначине

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{a}^2}{\hat{a}^2 + x_i^2} = \frac{n}{2}.$$

Нека својства

1. Густина расподеле је симетрична у односу на $x = 0$.
2. Ако је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ прост случајан узорак из $C_1(a)$, онда и $\overline{X}$ има $C_1(a)$ расподелу.
3. Ако су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне величине, при чему $X_i \ : \ C_1(a_i)$, тада $X_1 + \cdots + X_n \ : \ C_1(a_1 + \cdots + a_n)$.
4. Ако $X \ : \ C_1(1)$, онда $\dfrac{1}{X} \ : \ C_1(1)$.
5. Ако $X \ : \ c_1(a)$, тада $-X \ : \ C_1(a)$.

Везе са другим расподелама

1. $C_1(1) = C$.
2. $C_1(a) = C_2(0, a) = C_4(0, a, 2, 1)$
3. Ако $X \ : \ C$, тада $aX \ : \ C_1(a)$ за $a > 0$.

4. Ако $X, Y : N(0,1)$ и ако су X и Y независне, тада $Y/X : C(1)$.
5. Ако $X : U[-\pi/2, \pi/2]$, тада $tg\, X : C(1)$,

Напомена

Расподела је специјалан случај Пирсонове расподеле тип VII (ПИР7).

63

КОШИЈЕВА РАСПОДЕЛА $C_2(a,b)$

(двопараметарска)

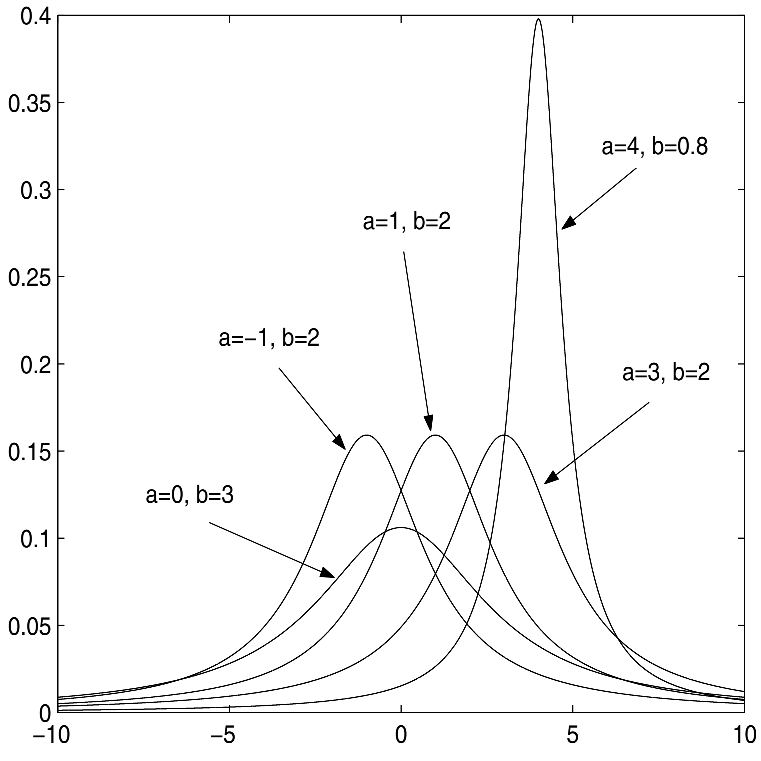
Густина

$$g(x) = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{1}{b^2 + (x-a)^2}, \quad x \in R.$$

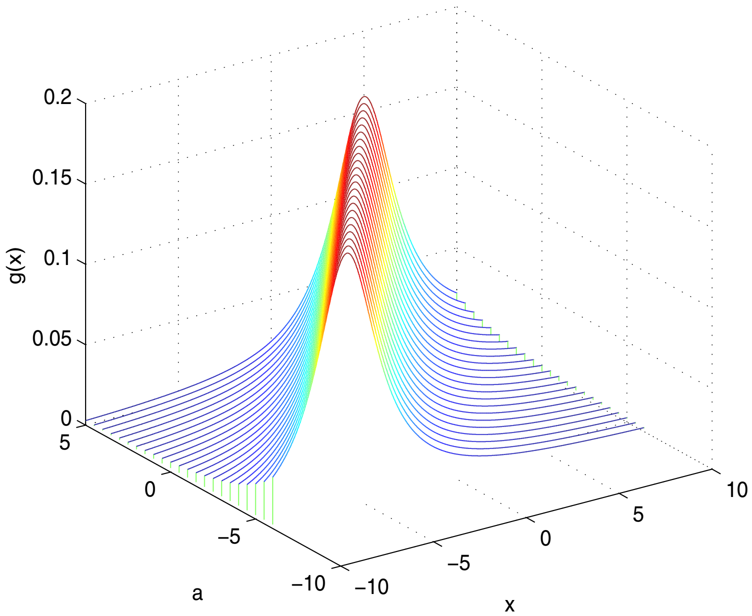
Параметри

a – параметар локације, b – параметар скалирања.

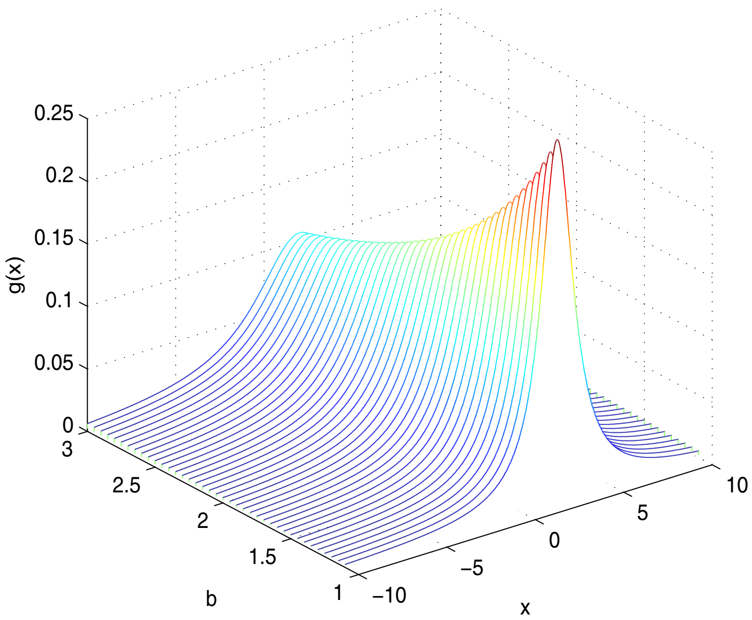
График густине



На следећој слици су приказани графици густина у случају кад је параметар b фиксиран, док се параметар a мења.



На следећој слици су приказани графици густина у случају кад је параметар a фиксиран, док се параметар b мења.



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x-a}{b}, \quad x \in R.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = e^{ta-b|t|}.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = a.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

Нема дефинисане коефицијенте.

Функција веродостојности

$$L = \frac{b^n}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{b^2+(X_j-a)^2},$$

$$\ln L = n(\ln b - \ln\pi) - \sum_{j=1}^{n}\ln(b^2+(X_j-a)^2),$$

$$\frac{\partial \ln L}{b} = \frac{n}{b} - \sum_{j=1}^{n}\frac{2b}{b^2+(X_j-a)^2}, \qquad \frac{\partial \ln L}{a} = \sum_{j=1}^{n}\frac{2(X_j-a)}{b^2+(X_j-a)^2}.$$

Оцене параметара

Оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ методом максималне веродостојности се добијају из система једначина

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\widehat{b}^2}{\widehat{b}^2+(X_j-\widehat{a})^2} = \frac{n}{2}, \qquad \sum_{j=1}^{n}\frac{X_j-\widehat{a}}{\widehat{b}^2+(X_j-\widehat{a})^2} = 0.$$

Нека својства

1. $Q_1 = a-b, \quad Q_3 = a+b.$
2. Густина расподеле је симетрична у односу на $x=a$.
3. Ако $X : C_2(a,b)$, тада $\alpha+\beta X : C_2(\alpha+\beta a, |\beta|b)$.

4. Ако је $X_1, \dots, X_n$ прост случајан узорак из $C_2(a,b)$, онда $\overline{X} \,:\, C_2(a,b)$ и $S_n \,:\, C_2(na, nb)$

5. Ако $X_j \,:\, C_2(a_j, b_j)$ и ако су X_j међусобно независне, тада
$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \,:\, C_2(a_1 + \cdots + a_n, b_1 + \cdots + b_n).$$

6. Ако $X_j \,:\, C_2(a,b)$ и ако су X_j међусобно независне, тада
$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n \,:\, C_2((\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)a, (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)b).$$

Везе са другим расподелама

1. $C_2(0,1) = C$.
2. $C_2(0,a) = C_1(a)$.
3. $C_2(a,b) = C_4(a,b,2,1)$.
4. Ако $X \,:\, C_1(\lambda)$, тада $a + bX \,:\, C_2(a, \lambda b)$.
5. Ако $X \,:\, C_1(b)$, тада $X - a \,:\, C_2(a,b)$.
6. Ако $X \,:\, N(0,1)$ и $Y \,:\, N(0,1)$, тада $X/Y \,:\, C(0,1)$.

Генерисање

Ако је u случајан број из расподеле $U(-1/2, 1/2)$, тада је $x = a + b\tan(\pi u)$ случајан број из расподеле $C_2(a,b)$

64

КОШИЈЕВА РАСПОДЕЛА $C_4(a, b, c, d)$

(четворопараметарска)

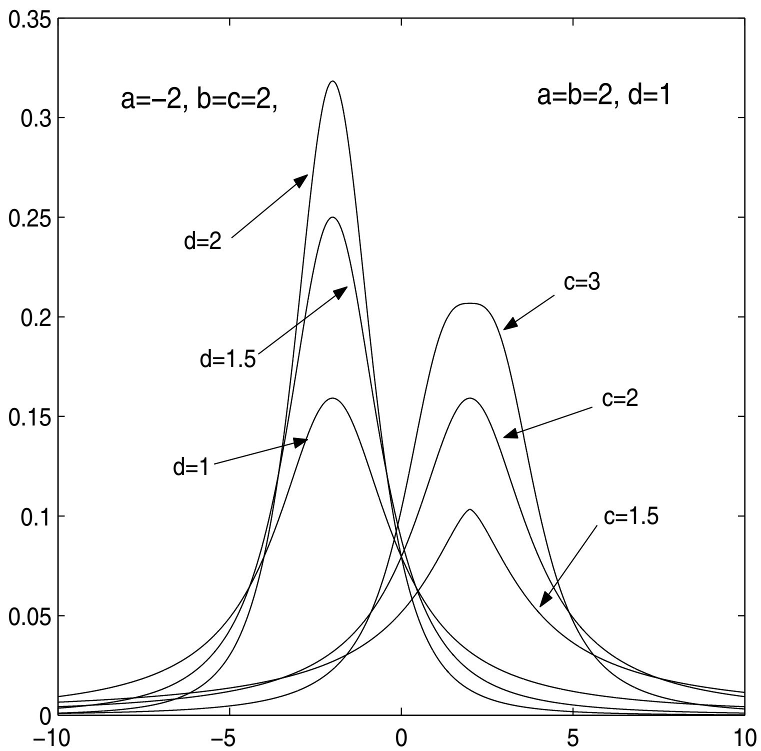
Густина

$$g(x) = \frac{c\Gamma(d)}{2b\Gamma(1/c)\Gamma(d-1/c)} \cdot \left(1 + \left|\frac{x-a}{b}\right|^c\right)^{-d}, \ x \in R.$$

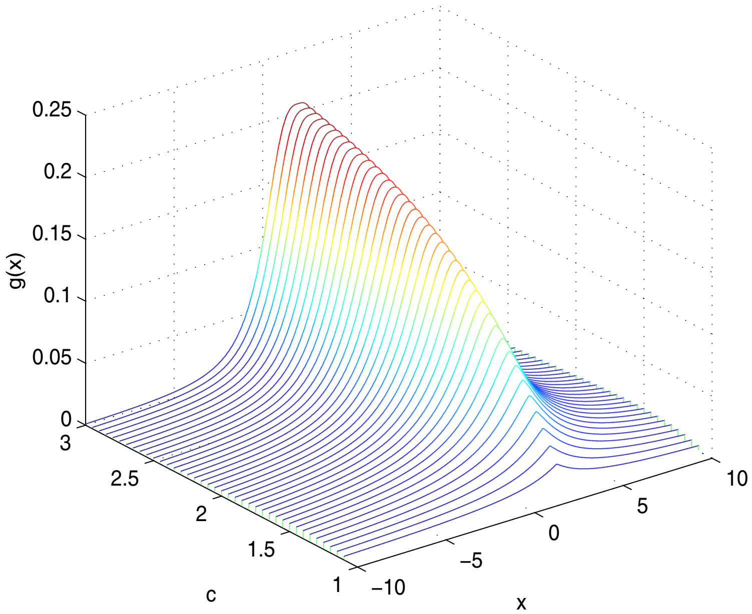
Параметри

a ($a \in R$) - параметар локације, b ($b > 0$) - параметар скалирања, c, d ($c, d > 0$, $cd > 1$) - параметри облика.

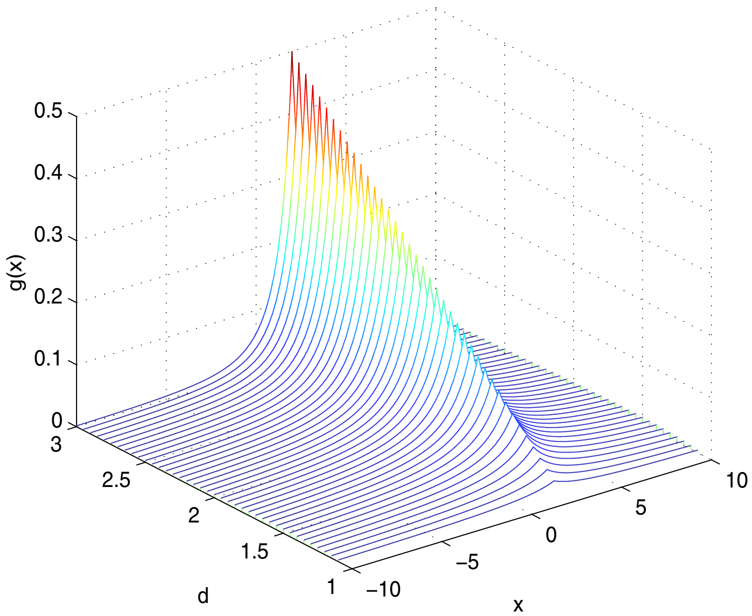
График густине



На следећој слици су приказани графици густина у случају кад је $a = b = 2$ и $d = 1$, док се параметар c мења у интервалу $[1,3]$.



На следећој слици су приказани графици густина у случају кад је $a = b = 2$ и $c = 1$, док се параметар d мења у интервалу $[1,3]$.



65

КОСИНУС РАСПОДЕЛА $COS1(a, b)$

(двопараметарска)

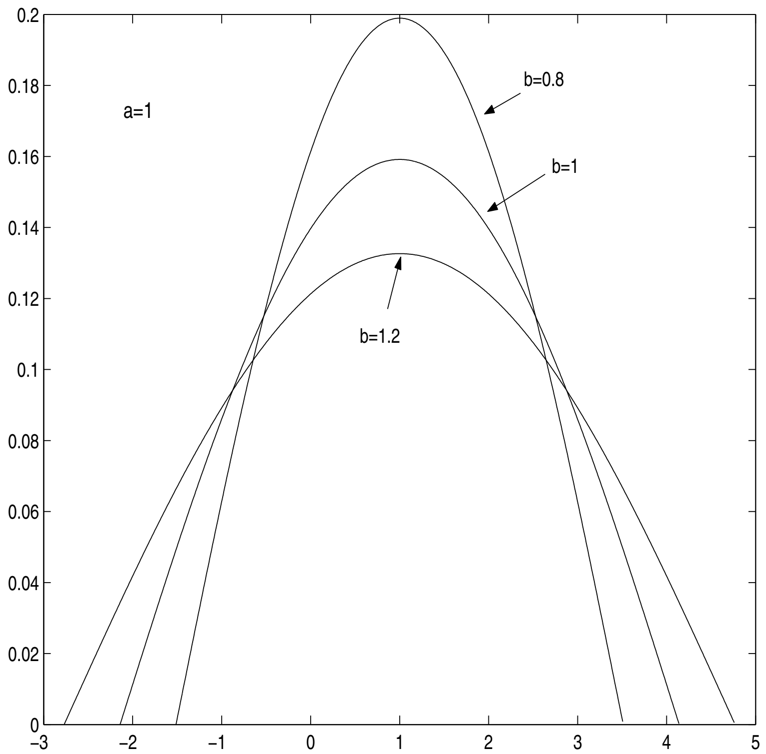
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2\pi b} \cos \frac{x-a}{2b}, \qquad a - b\pi \leq x \leq a + b\pi.$$

Параметри

a, b $(a \in R, b > 0)$ – параметри локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x-a}{b} + \sin\frac{x-a}{b}\right), \quad a - b\pi \le x \le a + b\pi.$$

Моменти

$$m_1 = a, \quad D(X) = \left(\frac{\pi^2}{3}\right) b^2.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = -\frac{6}{5}\frac{\pi^4 - 90}{(\pi^2-6)^2} \approx -0.5938.$$

Нека својства

1. $Mo(X) = Me(X) = a$.
2. Квартили су $Q_1 = a - 0.8317b$, $Q_3 = a + 0.8317b$.

Примена

Понекад се користи се као апроксимација за нормалну расподелу.

66

КОСИНУС РАСПОДЕЛА $COS2(a, b)$

(на интервалу $[a, b]$)

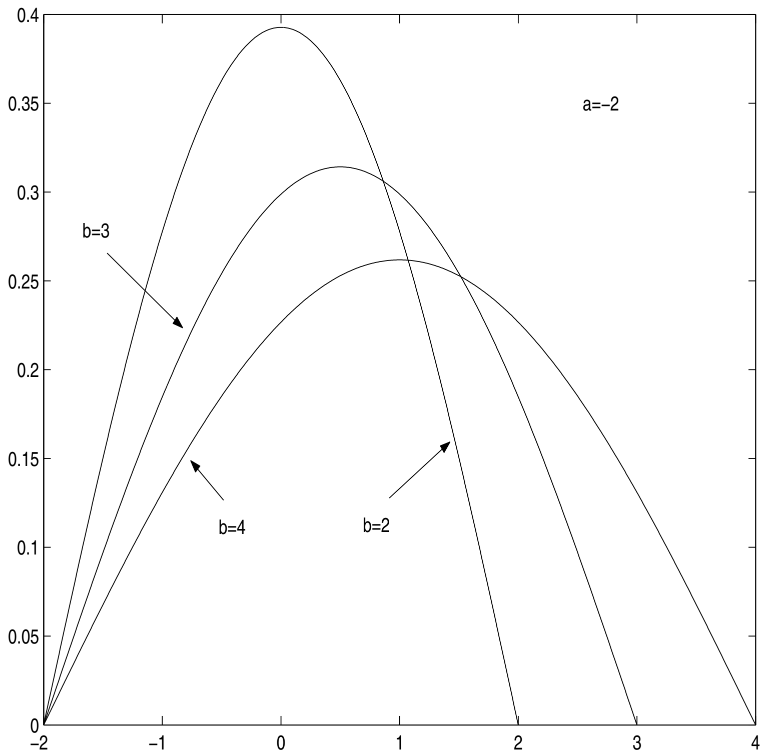
Густина

$$g(x) = \frac{\pi}{2(b-a)} \cos \frac{(2x-a-b)\pi}{2(b-a)}, \quad x \in [a, b].$$

Параметри

a, b $(a, b \in R, a < b)$ – најмања и највећа вредност случајне променљиве.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{(2x-a-b)\pi}{2(b-a)}\right), \quad x \in [a,b].$$

Моменти

$$m_1 = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{\pi^2-8}{4\pi^2}(b-a)^2.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Напомена

Функција густине може да се запише и у облику

$$g(x) = \frac{1}{2d}\cos\frac{x-c}{d},$$

где је $c = \dfrac{a+b}{2}$ и $d = \dfrac{b-a}{\pi}$.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = a+b\arcsin u$ случајан број из $COS2(a,b)$ расподеле.

67

КОСИНУС РАСПОДЕЛА $COS3(a, b)$

(двопараметарска)

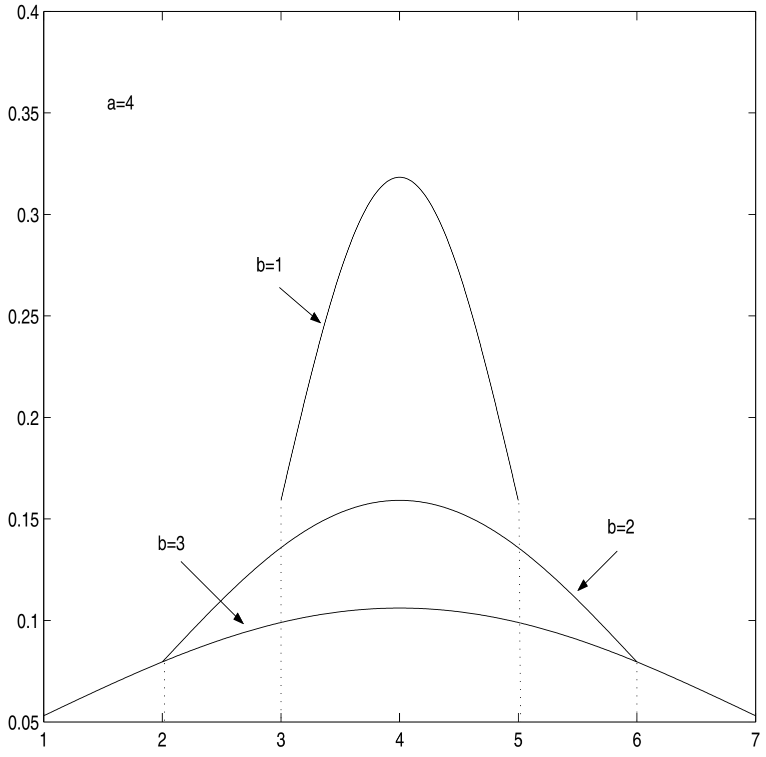
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2\pi b}\left(1 + \cos\left(\frac{x-a}{2b}\pi\right)\right), \quad a - b \le x \le a + b.$$

Параметри

a, b $(a \in R, b > 0)$ – параметри локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x-a}{b} + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{x-a}{b}\pi\right)\right), \quad a-b \le x \le a+b.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{\pi^2 \sin(bt)}{bt(\pi^2 - b^2t^2)} e^{iat}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = \frac{\pi^2\, sh(bt)}{bt(\pi^2 + b^2t^2)} e^{at}, \quad t \in R.$$

Моменти

$$m_1 = a, \quad D(X) = b^2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\right).$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = a.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = \frac{6}{5} \cdot \frac{90 - \pi^4}{(\pi^2 - 6)^2} \approx -0.5938.$$

68

КУМАРАСВАМИЈЕВА РАСПОДЕЛА $KM(a,b)$

(двопараметарска)

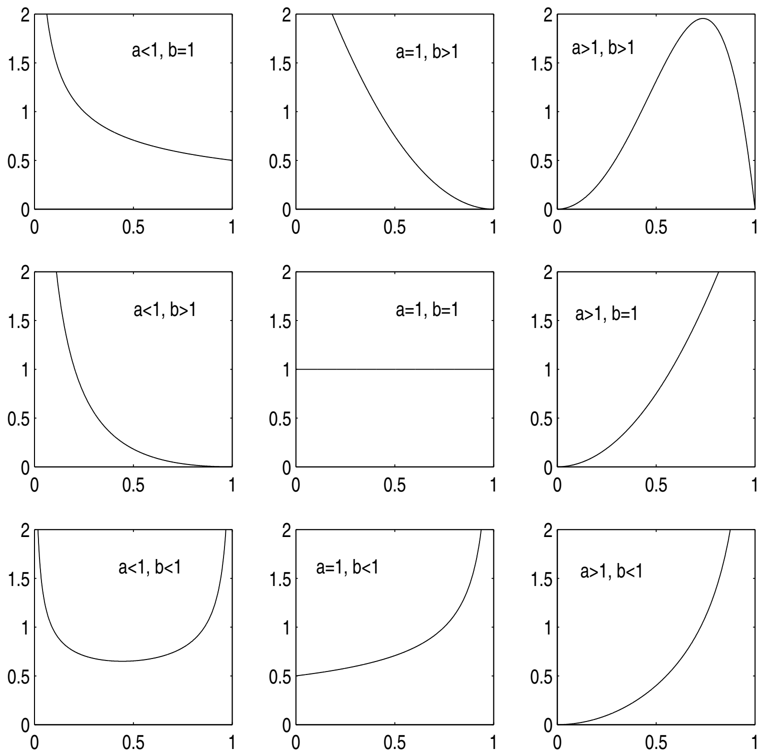
Густина

$$g(x) = abx^{a-1}(1-x^a)^{b-1}, \quad x \in (0,1).$$

Параметри

a, b $(a, b > 0)$ – параметри облика.

График густине



Ако је бар један од параметара мањи од 1, график густине има одговарајуће вертикалне асимптоте.

Функција расподеле

$$F(x) = 1 - (1 - x^a)^b, \quad x \in (0,1).$$

Моменти

$$m_r = \frac{b\Gamma(b)\Gamma\left(1+\dfrac{r}{a}\right)}{\Gamma\left(1+b+\dfrac{r}{a}\right)}, \quad r > 0.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \left(\frac{a-1}{ab-1}\right)^{1/a}, \quad Me(X) = \left(1 - \frac{1}{2^{1/b}}\right)^{1/a}.$$

Напомене

1. Расподелу је увео Кумарасвами (Poondi Kumaraswamy) 1980. године.

2. Функција густине ове расподеле има више облика, попут бета расподеле, али је много једноставнија.

69

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $L_1(\lambda)$

(једнопараметарска)

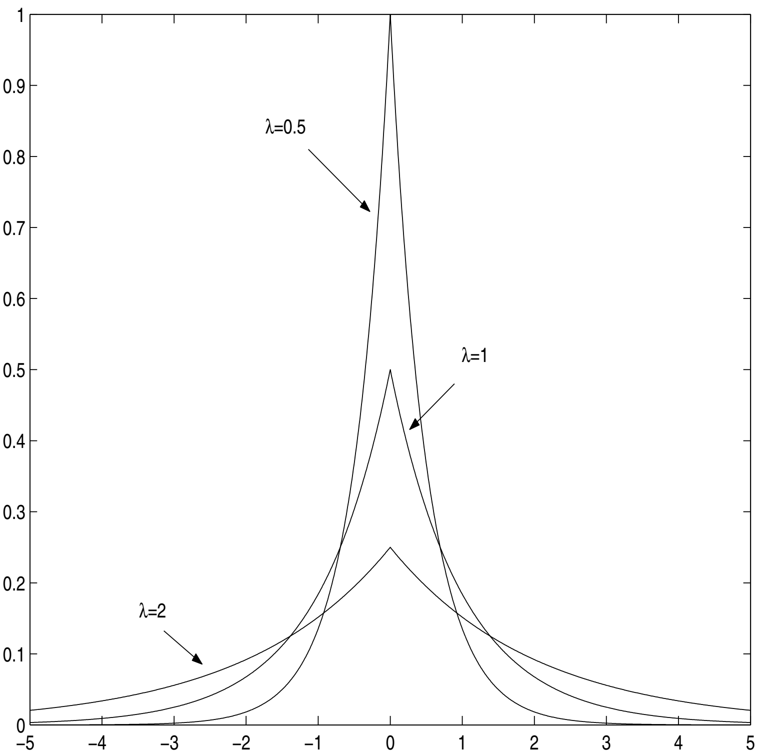
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\dfrac{|x|}{\lambda}}, \qquad x \in R.$$

Параметри

λ ($\lambda > 0$) – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x/\lambda}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x/\lambda}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Моменти

$$m_{2k+1} = 0, \quad m_{2k} = \lambda^{2k} \cdot (2k)!, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Специјално:

$$m_2 = D(X) = 2\lambda^2, \quad m_4 = \mu_4 = 24\lambda^4.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = 0.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = 3.$$

Оцене параметара

Оцена за λ методом максималне веродостојности је

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i|,$$

а оцена методом момената је

$$\widetilde{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

Везе са другим расподелама

1. $L_(\lambda) = L_2(\lambda, 0)$.
2. X и $|X|$ имају истовремено $L_1(\lambda)$ расподелу.
3. Ако $X, Y \ : \ L(\lambda)$ и ако су X и Y независне случајне промењиве, тада $|X|/|Y| \ : \ F(2, 2)$.
4. Ако $X, Y \ : \ E_1(a)$, тада $X - Y \ : \ L_1(?)$,

5. Ако $X_1, X_2, X_3, X_4 \ : \ N(0,1)$ и ако су X_1, X_2, X_3 и X_4 независне случајне величине, тада

$$X_1X_2 + X_3X_4 \ : \ L_1(2), \quad X_1X_2 - X_3X_4 \ : \ L_(2).$$

Напомене

1. Расподелу је 1774. године увео француски математичар Лаплас (Pierre Simon Laplace, 1749-1827) .

2. Користи се и назив *двострана експоненцијална расподела* .

3. $L_1(1)$ је стандардна Лапласова расподела.

70

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $L_2(\lambda, a)$

(двопараметарска)

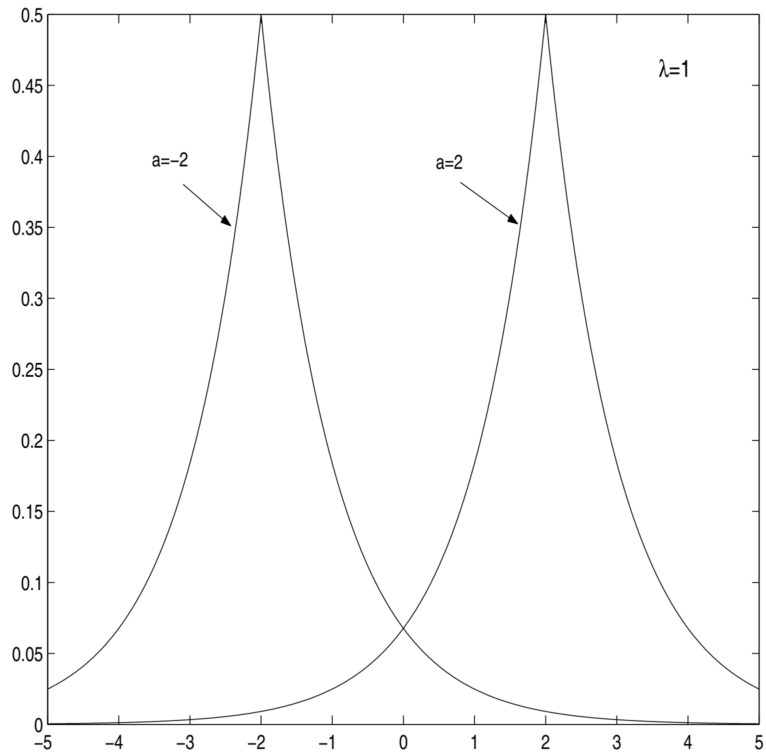
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\dfrac{|x-a|}{\lambda}}, \quad x \in R.$$

Параметри

λ $(\lambda > 0)$ – параметар скалирања, a $(a \in R)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{(x-a)/\lambda}, & x \leq a \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-(x-a)/\lambda}, & x > a. \end{cases}$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+\lambda^2 t^2} e^{ait}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = 1 - \lambda^2 t^2 e^{at}, \quad |t| < \frac{1}{\lambda}.$$

Моменти

$$\mu_{2k+1} = 0, \quad \mu_{2k} = \lambda^{2k} \cdot (2k)!, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Специјално:

$$\mu_2 = 2\lambda^2, \quad m_4 = \mu_4 = 24\lambda^4.$$

Веза између момената и централних момената је

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} m_i a^{k-i}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = 3.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{a}$ за непознате параметре λ и a су

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \widehat{a}|, \quad \widehat{a} = Me(X).$$

Ако је $X_1', X_2', \dots, X_n'$ статистика поретка, тада је

$$\widehat{a} = X_{k+1}' \ (n = 2k+1), \quad \widehat{a} = \frac{X_k' + X_{k+1}'}{2} \ (n = 2k).$$

Оцена за a је иста и ако је познат параметар λ, а ако је параметар a познат, тада је

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - a|.$$

Метода момената

Оцене $\widetilde{a}$ и $\widetilde{\lambda}$ параметара a и λ су:

$$\widetilde{a} = Me(X), \quad \widetilde{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widetilde{a})^2}.$$

Друге оцене

Користе се и неке друге оцене, на пример:

$$a^* = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}, \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a^*)^2}.$$

Везе са другим расподелама

1. $L_(\lambda, 0) = L_1(\lambda)$,
2. Ако $X : L_2(\lambda, a)$, тада $|X - a| : E_1(\lambda)$.
3. Ако $X : L_2(\lambda, a)$, тада $|X - a| : \dfrac{\lambda}{2}\chi^2(2)$.
4. Расподела је специјалан случај тропараметарске Вејбулове двостране расподеле, $L_2(\lambda, a) = WD(1, \lambda, a)$,
5. Расподела је специјалан случај гама расподеле, $L_2(\lambda, a) = G_4(1, \lambda, a, 1)$,
6. Расподела је специјалан случај асиметричне Лапласове расподеле, $L_2(\lambda, a) = LA2(\lambda, 1/2, a)$.

Напомене

1. Расподела је добила име по француском математичару Лапласу (Pierre Simon Laplace, 1749-1827).
2. Ако се за параметре узму очекивање m и стандардна девијација σ, тада је

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x-m|}, \quad x \in R.$$

Генерисање

Ако су u_1 и u_2 независни случајни бројеви из расподеле $U(0,1)$, тада је

$$x = \begin{cases} a + \lambda \ln u_2, & u_{\geq} 1/2 \\ a - \lambda \ln u_2, & u_1 > 1/2 \end{cases}$$

случајан број из $L(\lambda, a)$ расподеле.

Случајан број из $L(\lambda, 0)$ расподеле може да се добије и као разлика два независна случајна броја из $E_1(1/\lambda)$ расподеле, а случајан број из $L_2(1,0)$ расподеле може да се добије и као количник два независна случајна броја из $U(0,1)$ расподеле.

71

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $LA1(a, \lambda_1, \lambda_2)$

(асиметрична)

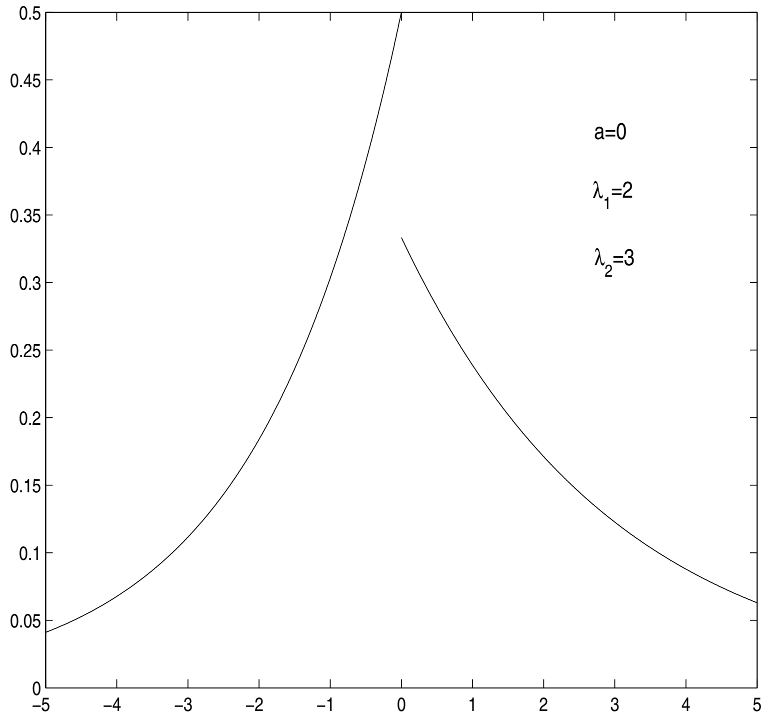
Густина

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\lambda_1} \exp\left\{-\dfrac{|x-a|}{\lambda_1}\right\}, & x < a \\ \dfrac{1}{2\lambda_2} \exp\left\{-\dfrac{|x-a|}{\lambda_2}\right\}, & x \geq a. \end{cases}$$

Параметри

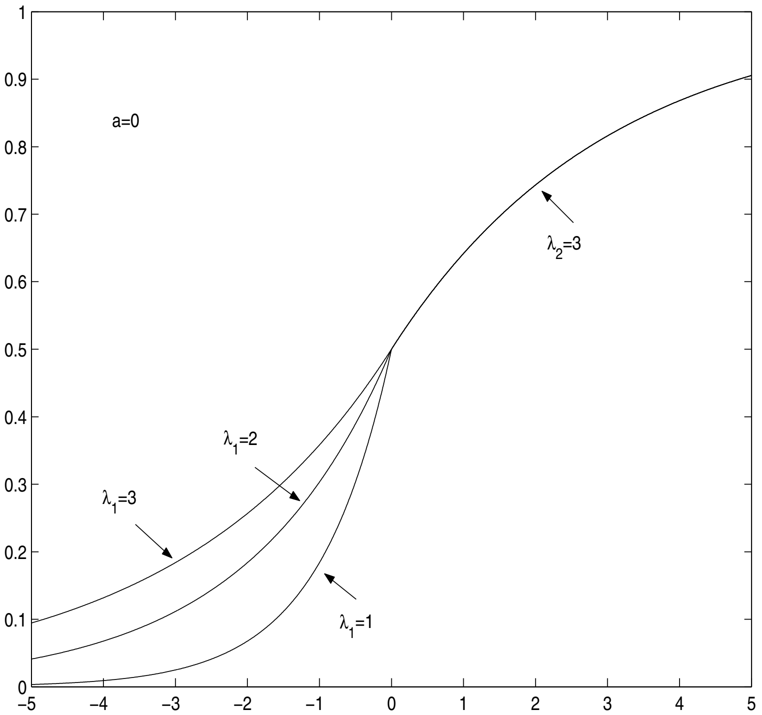
a $(a \in R)$ – параметар локације,
λ_1, λ_2 $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_2 \neq \lambda_1)$ – параметри скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{(x-a)/\lambda_1}, & x \le a \\ 1 - \dfrac{1}{2} e^{-(x-a)/\lambda_2}, & x > a. \end{cases}$$



72

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $LA2(\lambda, p, a)$

(асиметрична)

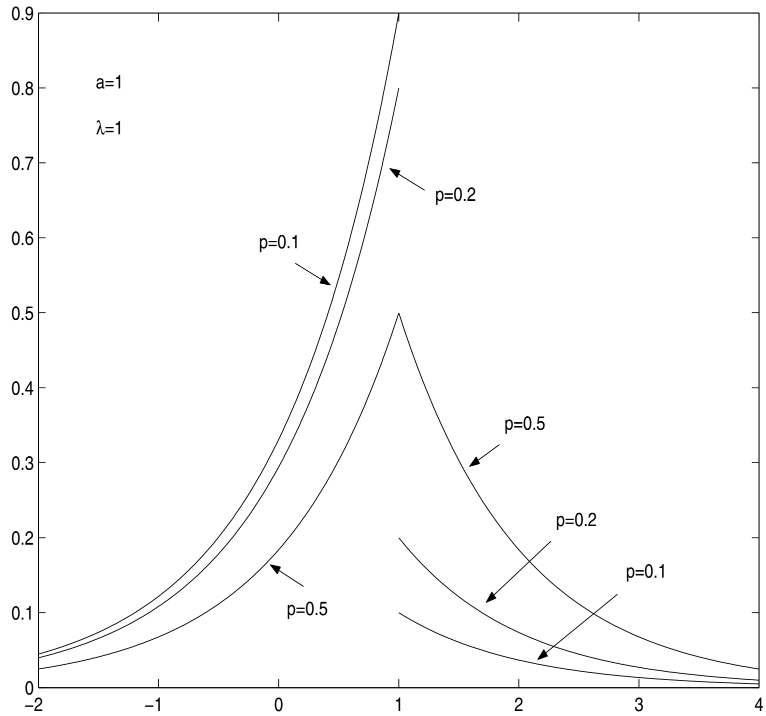
Густина

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-p}{\lambda} \exp\left\{-\dfrac{|x-a|}{\lambda}\right\}, & x \le a \\ \dfrac{p}{\lambda} \exp\left\{-\dfrac{|x-a|}{\lambda}\right\}, & x > a. \end{cases}$$

Параметри

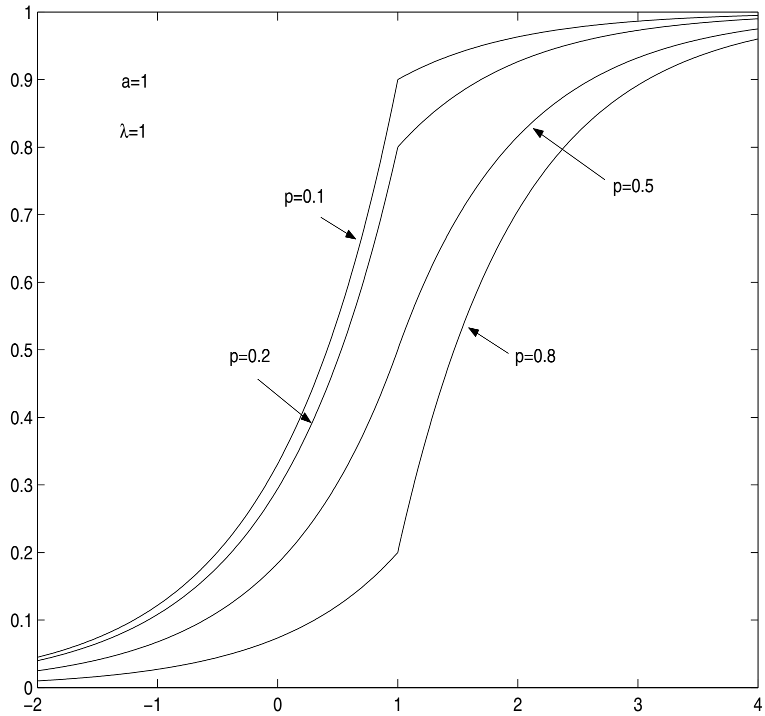
λ ($\lambda > 0$) – параметар скалирања, p ($0 < p < 1$) – параметар облика, a ($a \in R$) – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} (1-p)\cdot \exp\left\{-\dfrac{a-x}{\lambda}\right\}, & x \le a \\ 1 - p\cdot \exp\left\{-\dfrac{x-a}{\lambda}\right\}, & x > a. \end{cases}$$



Везе са другим расподелама

$LA2(\lambda, 1/2, a) = L_2(\lambda, a)$.

73

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $LA3(\lambda, a)$

(асиметрична)

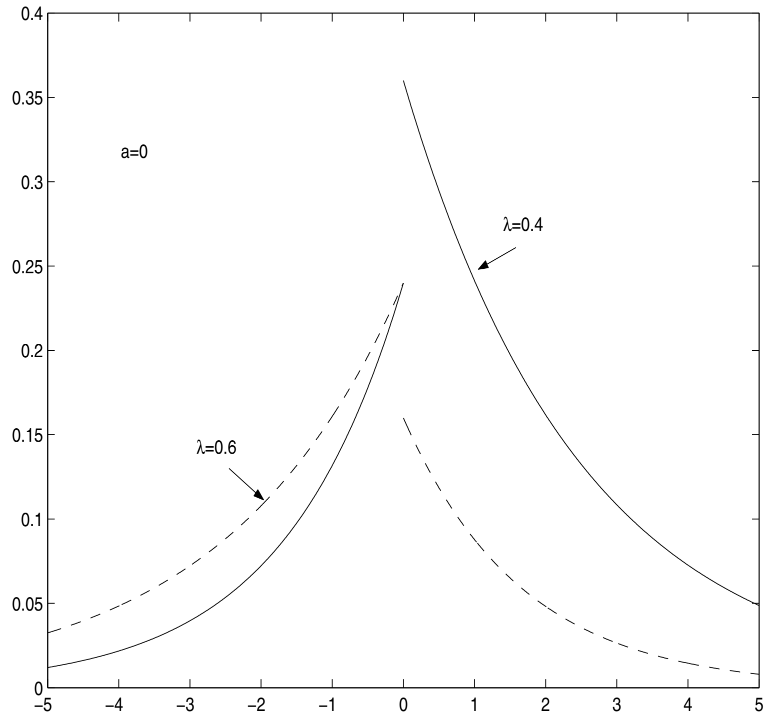
Густина

$$g(x) = \lambda(1-\lambda) \begin{cases} e^{(1-\lambda)(x-a)}, & x \leq a \\ e^{\lambda(a-x)}, & x > a. \end{cases}$$

Параметри

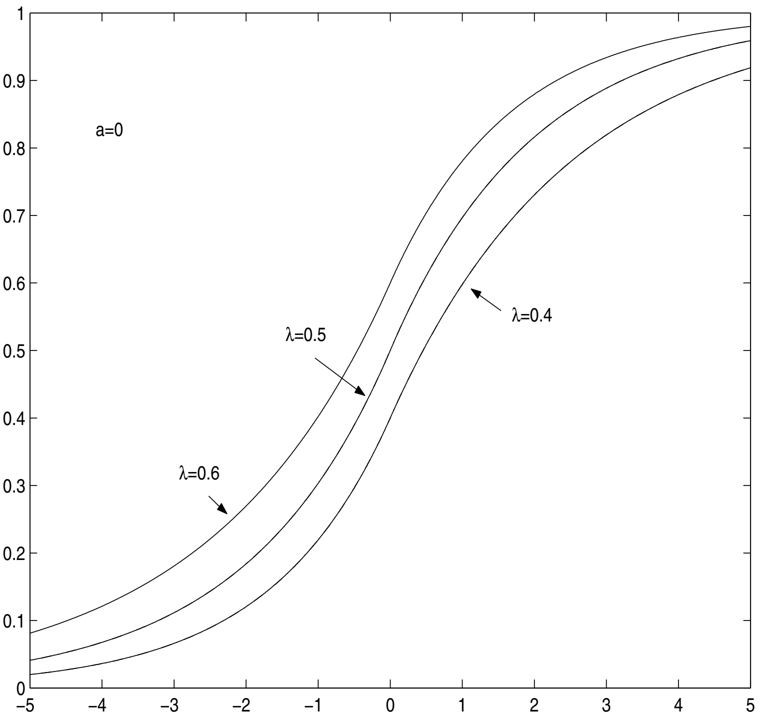
λ $(0 < \lambda < 1)$ – параметар скалирања, a $(a \in R)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} \lambda e^{(1-\lambda)(x-a)}, & x \leq a \\ 1-(1-\lambda)e^{\lambda(a-x)}, & x > a. \end{cases}$$



74

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $LA4(\lambda, p, a)$

(асиметрична)

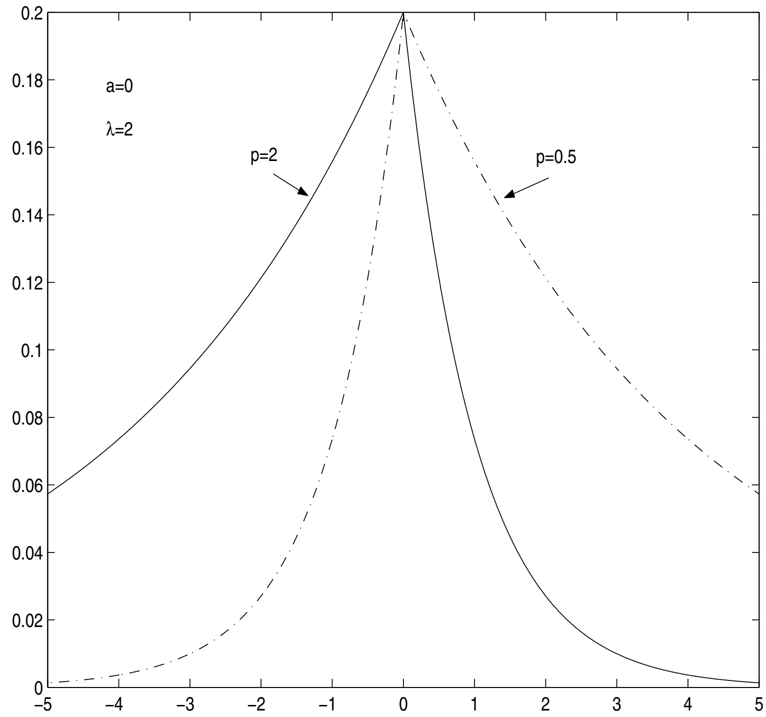
Густина

$$g(x) = \frac{p}{\lambda(1+p^2)} \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{x-a}{\lambda p}\right\}, & x \le a \\ \exp\left\{\dfrac{p(a-x)}{\lambda}\right\}, & x > a. \end{cases}$$

Параметри

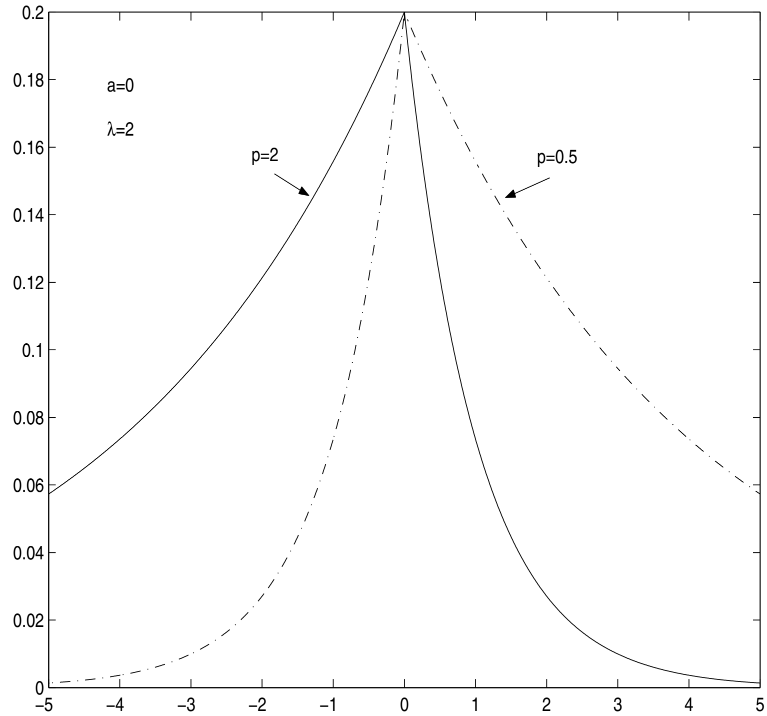
λ ($\lambda > 0$) – параметар скалирања, p ($p > 0$) – параметар облика, a ($a \in R$) – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{1+p^2} \begin{cases} p^2 \exp\left\{\dfrac{x-a}{\lambda p}\right\}, & x \le a \\ 1 + p^2 - \exp\left\{\dfrac{p(a-x)}{\lambda}\right\}, & x > a. \end{cases}$$



Примена

Финансије.

75

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $LA5(\lambda, p)$

(асиметрична)

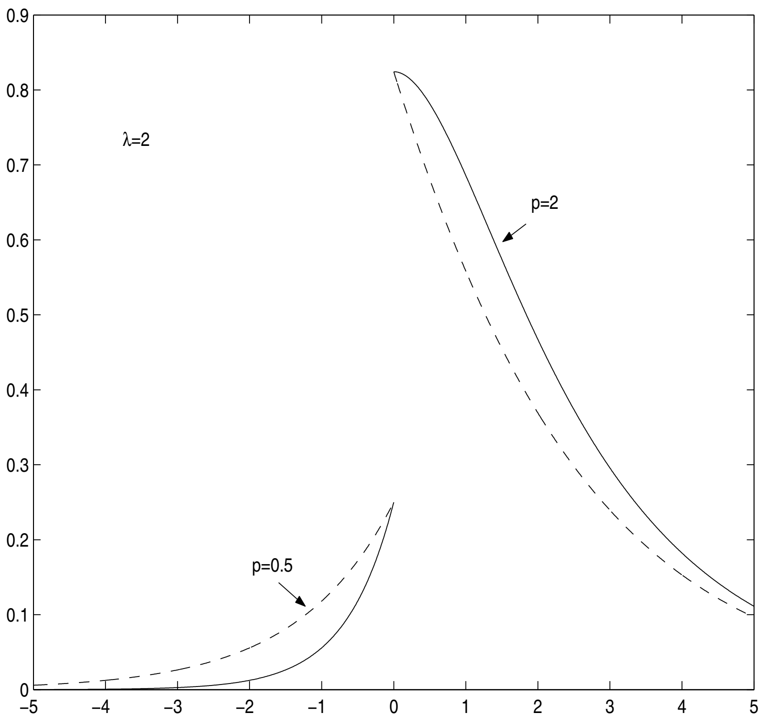
Густина

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\lambda} \exp\left\{\dfrac{(1+p)x}{\lambda}\right\}, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \exp\left\{1 - \dfrac{1}{2} e^{-px/\lambda}\right\}, & x > 0. \end{cases}$$

Параметри

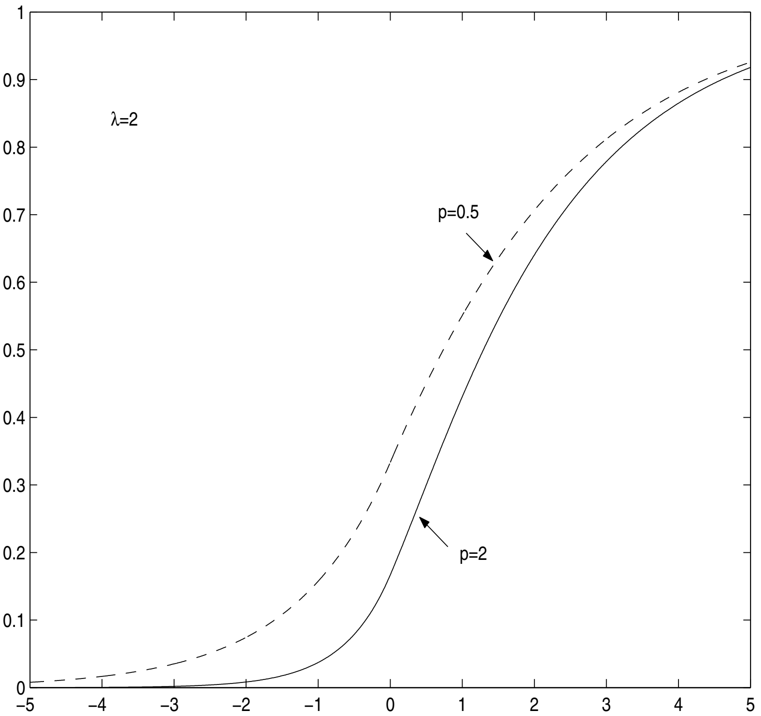
λ ($\lambda > 0$) – параметар скалирања, p ($p > 0$) – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1+p)} \exp\left\{\dfrac{(1+p)x}{\lambda}\right\}, & x \le 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2(1+p)} e^{-px/\lambda}\right) e^{-x/\lambda}, & x > 0. \end{cases}$$



76

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $LZ1(\lambda, a, b)$

(засечена на $[a, b]$)

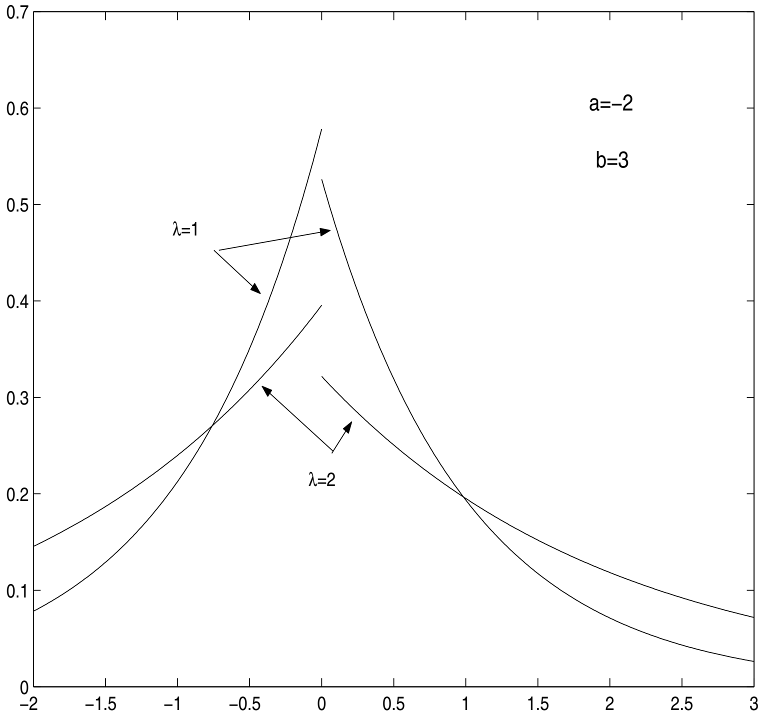
Густина

$$g(x) = \begin{cases} \left(1 - e^{a/\lambda}\right)^{-1} \cdot \dfrac{1}{2\lambda} e^{x/\lambda}, & a \leq x \leq 0 \\ \left(1 - e^{-b/\lambda}\right)^{-1} \cdot \dfrac{1}{2\lambda} e^{-x/\lambda}, & 0 \leq x \leq b. \end{cases}$$

Параметри

λ $(\lambda > 0)$ – параметар скалирања,
a $(a < 0)$, b $(b >)$ – параметри локације.

График густине



77

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $LZ2(\lambda, a, b)$

(засечена на $[a, b]$)

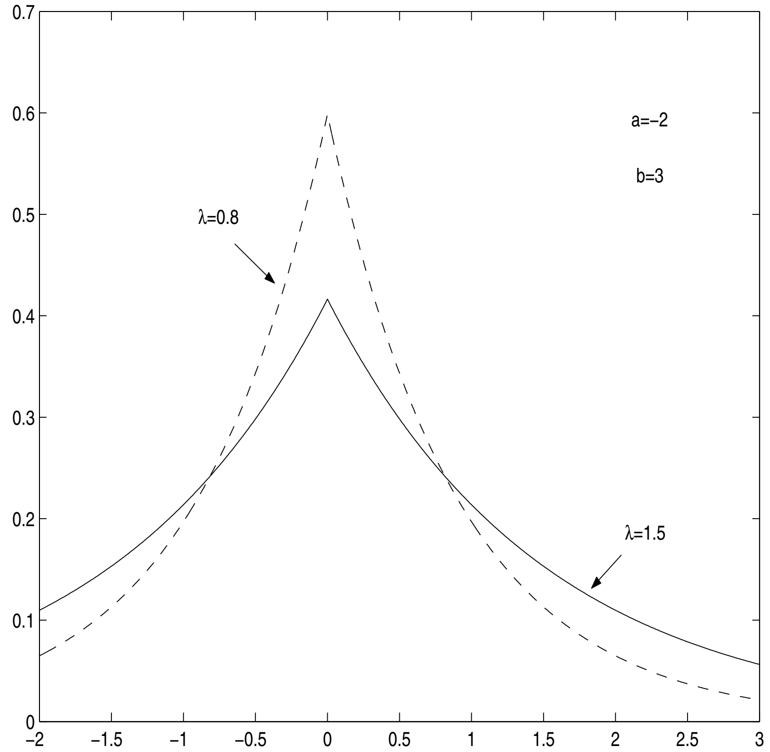
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\lambda(2 - e^{a/\lambda} - e^{-b/\lambda})} e^{-\dfrac{|x|}{\lambda}}, \quad 0 \le x \le b.$$

Параметри

λ $(\lambda > 0)$ – параметар скалирања,
a $(a < 0)$, b $(b >)$ – параметри локације.

График густине



Функција веродостојности

$$L = \frac{1}{\lambda^n (2 - e^{a/\lambda} - e^{-b/\lambda})^n} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |X_i| \right\},$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} |X_i| - \frac{n}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} \frac{ae^{a/\lambda} - be^{-b/\lambda}}{2 - e^{a/\lambda} - e^{-b/\lambda}}.$$

Оцене параметара

Оцена $\widehat{\lambda}$ за λ по методи максималне веродостојности добија се из једначине

$$(T - n\widehat{\lambda}) \left(2 - e^{a/\widehat{\lambda}} - e^{-b/\widehat{\lambda}}\right) = n \left(ae^{a/\widehat{\lambda}} - be^{-b/\widehat{\lambda}}\right),$$

где је $T = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

78

ЛАПЛАСОВА РАСПОДЕЛА $LU(\lambda, p, a)$

(уопштена)

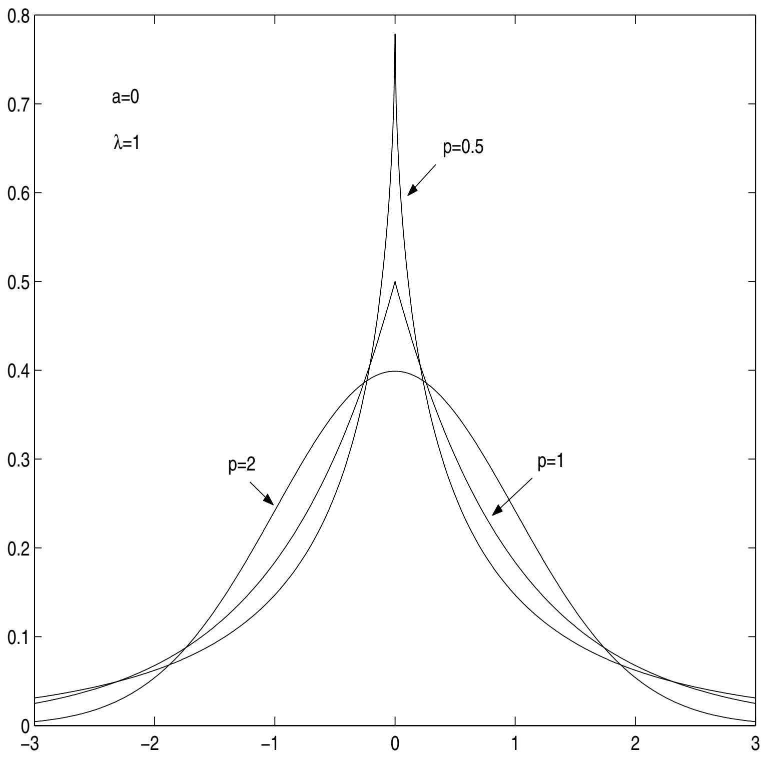
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2p^{1/p}\lambda\Gamma(1+1/p)} \exp\left\{-\frac{|x-a|^p}{p\lambda}\right\}, \quad x \in R.$$

Параметри

λ $(\lambda > 0)$ – параметар скалирања, p $(p > 0)$ – параметар облика, a $(a \in R)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{2\Gamma(1/p)} \begin{cases} \Gamma\left(\frac{1}{p}, \frac{(a-x)^p}{p\lambda}\right), & x \leq a \\ \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) + \gamma\left(\frac{1}{p}, \frac{(x-a)^p}{p\lambda}\right), & x > a, \end{cases}$$

где су $\Gamma(\cdot,\cdot)$ и $\gamma(\cdot,\cdot)$ непотпуне гама функције (погледати Додатак).

Напомене

1. Расподелу је увео Subbotin 1923. године.
2. Користи се и назив *експоненцијална степена расподела*.

79

ЛЕВИЈЕВА РАСПОДЕЛА $LV(a)$)

(једнопараметарска)

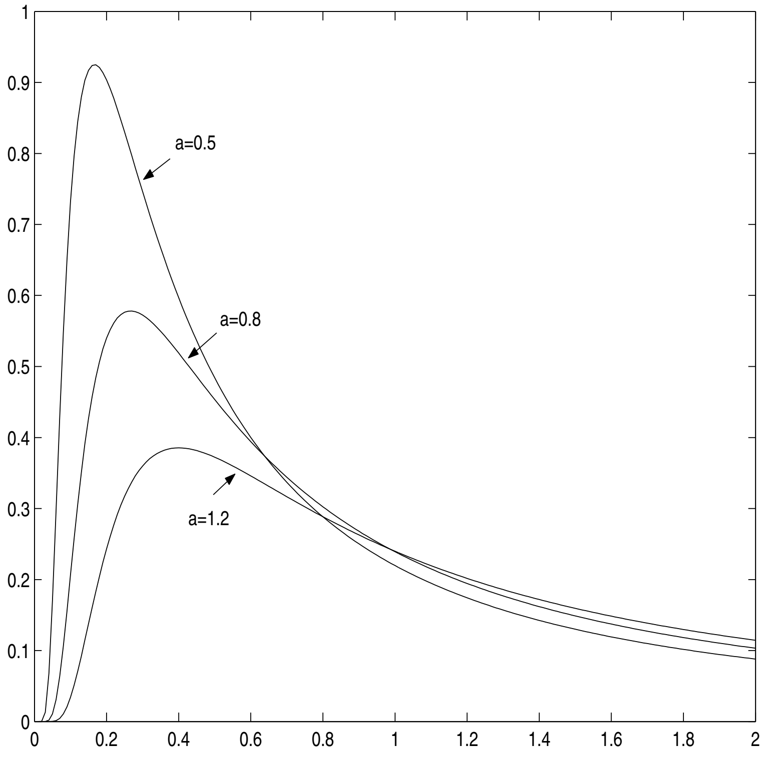
Густина

$$g(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} x^{-3/2} e^{-a/2x}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{a}{2x}}\right) - \frac{1}{2}, \quad x \geq 0.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = e^{-\sqrt{-2iat}}.$$

Везе са другим расподелама

1. Расподела је специјалан случај α-стабилних расподела.
2. $LV(a) = IG2(1/2, a/2)$.

Напомене

1. Расподелу је увео Леви (Paul Pierre Levy, 1886-1971).
2. За функцију густине важи $g(x) \sim \sqrt{\frac{a}{2\pi}} x^{-3/2}$ када $x \to \infty$.

80

ЛОГАРИТАМСКА РАСПОДЕЛА $LOG1(a, b)$

(двопараметарска)

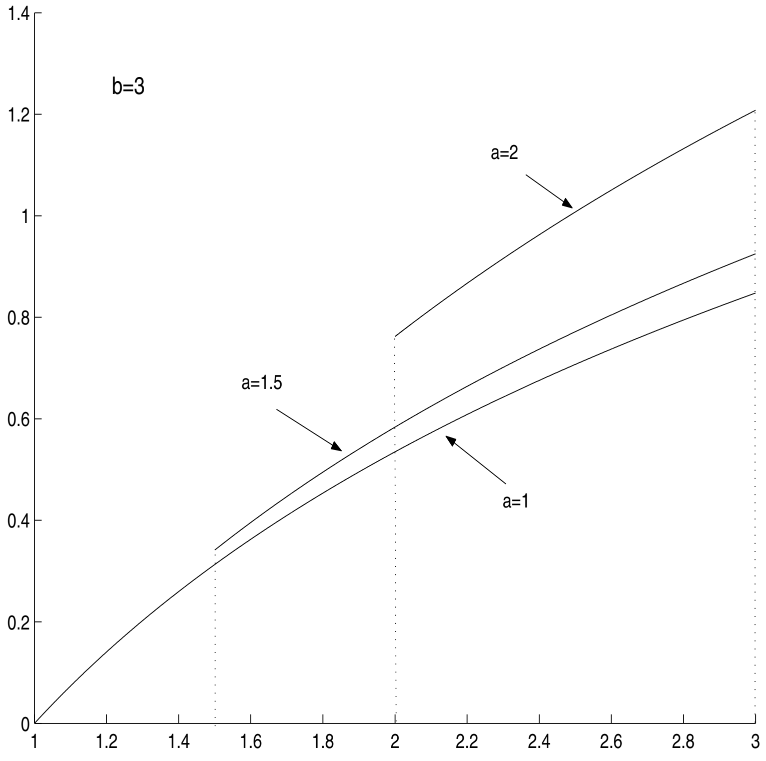
Густина

$$g(x) = \frac{\ln x}{b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1)}, \quad x \in [a, b].$$

Параметри

a, b $(0 < a < b)$ – параметри локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{a(1-\ln a) - x(1-\ln x)}{a(1-\ln a) - b(1-\ln b)}, \quad x \in [a,b].$$

Моменти

$$m_k = \frac{a^{k+1}(1-(k+1)\ln a) - b^{k+1}(1-(k+1)\ln b)}{(k+1)^2(a(1-\ln a) - b(1-\ln b))}, \quad k \in N.$$

81

ЛОГАРИТАМСКА РАСПОДЕЛА $LOG2(a, b)$

(двопараметарска)

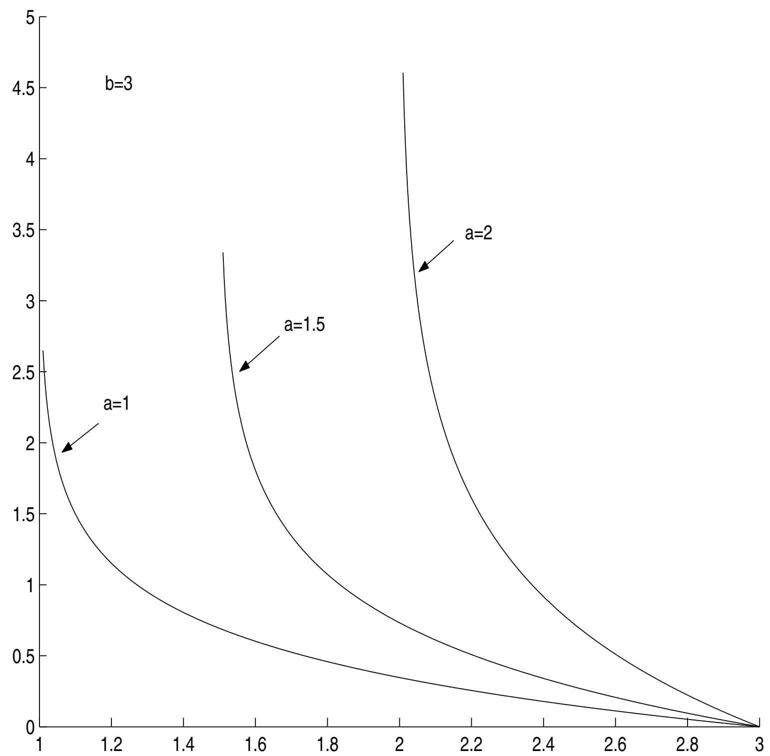
Густина

$$g(x) = -\frac{1}{b-a} \ln \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in (a, b].$$

Параметри

a, b $(a, b \in R,\ a > b)$ – параметри локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}\left(1 - \ln\frac{x-a}{b-a}\right), \quad x \in [a,b].$$

Моменти

$$m_1 = a + \frac{1}{4}(b-a), \quad D(X) = \frac{7}{144}(b-a)^2.$$

Генерисање

Ако су u_1 и u_2 независни случајни бројеви из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = a + bu_1u_2$ случајан број из $LOG2(a,b)$ расподеле.

82

ЛОГАРИТАМСКА РАСПОДЕЛА $LOG3(a,b)$

(двопараметарска, двострана)

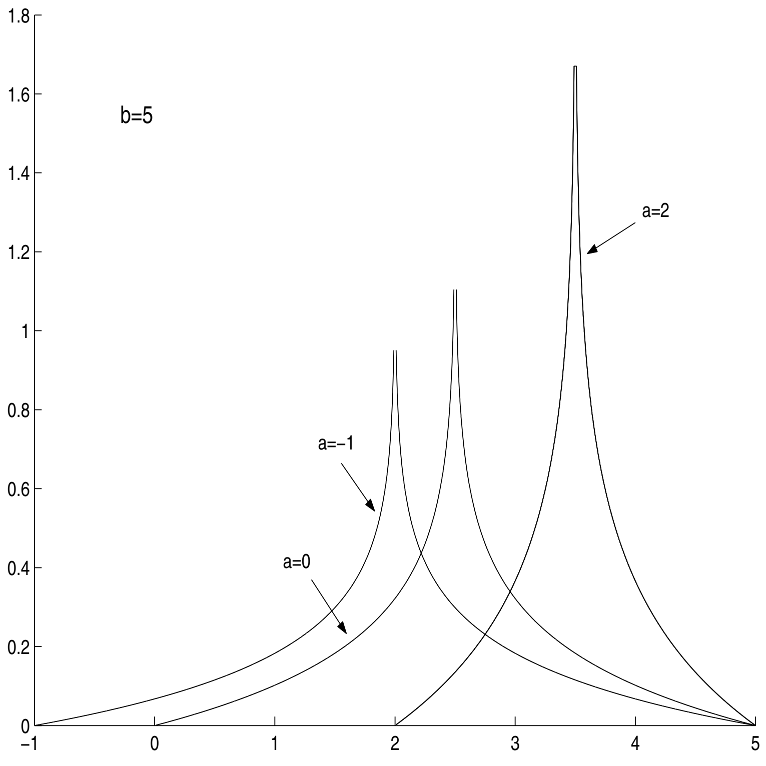
Густина

$$g(x) = -\frac{1}{b-a}\ln\frac{|2x-a-b|}{b-a}, \quad x \in [a,(a+b)/2) \cup (a+b)/2, b].$$

Параметри

a, b $(a, b \in R,\ a < b)$ – параметри локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{|2x-a-b|}{2(b-a)}\left(1 - \ln\dfrac{|2x-a-b|}{b-a}\right), & a \leq x < \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{|2x-a-b|}{2(b-a)}\left(1 - \ln\dfrac{|2x-a-b|}{b-a}\right), & \dfrac{a+b}{2} > x \leq b. \end{cases}$$

Моменти

$$m_1 = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{a^2}{36}.$$

83

ЛОГ - ГАМА РАСПОДЕЛА $LGG1(a,b,c)$

(тропараметарска)

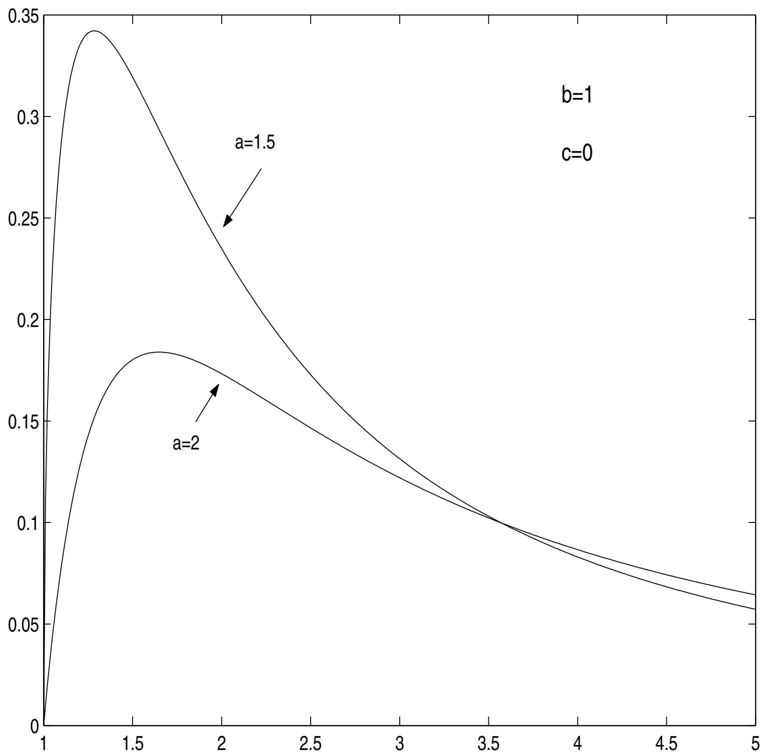
Густина

$$g(x) = \frac{1}{x|b|\Gamma(a)} \left(\frac{\ln x - c}{b} \right)^{a-1} \exp\left\{ \frac{c - \ln x}{b} \right\}, \quad x \geq e^c.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања, c $(c \in R)$ – параметар локације.

График густине



Моменти

$$m_r = e^{rc}(1-rb)^{-a}, \quad 1-rb>0.$$

Специјално,

$$m_1 = e^{c}(1-b)^{-a}, \quad m_2 = e^{2c}(1-2b)^{-a}, \quad m_3 = e^{3c}(1-3b)^{-a}, \quad m_4 = e^{4t}(1-4b)^{-a}.$$

Централни моменти μ_2 и μ_3 су дати са

$$\mu_2 = k_2 e^{2c}, \quad \mu_3 = k_3 e^{3c},$$

где је

$$k_2 = (1-2b)^{-a} - (1-b)^{-2a}, \quad k_3 = (1-3b)^{-a} - 3((1-2b)(1-a))^{-a} + 2(1-b)^{-3a}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{k_3}{k_2^{3/2}}, \quad \pi_2(X) = \frac{k_4}{k_2^2} - 3,$$

где је

$$k_4 = (1-4b)^{-a} - 4((1-3b)(1-b))^{-a} + 6((1-2b)(1-b))^{-a} - 3(1-b)^{-4a}.$$

Функција веродостојности

$$L = \frac{\prod_{k=1}^{n}(\ln X_k - c)^{a-1}}{b^a G^n(a)\prod_{k=1}^{n} X_k} \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{n}(\ln X_k - c)\right\},$$

$$\begin{aligned}\ln L &= (a-1)\sum_{k=1}^{n}\ln(\ln X_k - c) - \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{n}\ln X_k + \frac{nc}{b}\\ &\quad - \ln(X_1X_2\cdots X_n) - an\ln b - n\ln G(a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \sum_{k=1}^{n}\ln(\ln X_k - c) - n\ln b - n\psi(a),\\ \frac{\partial \ln L}{\partial b} &= \frac{1}{b^2}\sum_{k=1}^{n}\ln X_k - \frac{nc}{b^2} - \frac{an}{b},\\ \frac{\partial \ln L}{\partial c} &= (a-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{\ln X_k - c} + \frac{n}{b},\end{aligned}$$

где је ψ дигама функција (видети Додатак).

Оцене параметара

Оцене $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ и $\widehat{c}$ за a, b и c по методи максималне веродостојности добијају се решавањем система једначина

$$\begin{aligned}
\widehat{a}\widehat{b}+\widehat{c} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln X_k,\\
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\ln X_k-\widehat{c}}\right) &= \frac{1}{(\widehat{a}-1)\widehat{b}},\\
\psi(\widehat{a})+\ln\widehat{b} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(\ln X_k-\widehat{c}).
\end{aligned}$$

Везе са другим расподелама

1. $X\ :\ LGG1(a,b,c)$ ако и само ако $\ln X\ :\ G_3(a,b,c)$

84

ЛОГ - ГАМА РАСПОДЕЛА $LGG2(a,b,c)$

(тропараметарска)

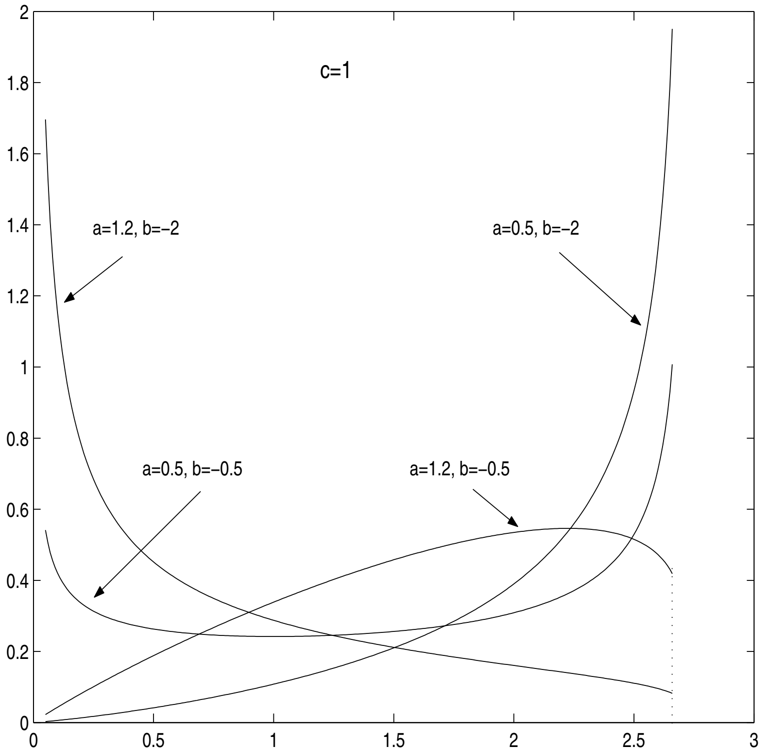
Густина

$$g(x) = \frac{1}{x|b|\Gamma(a)}\left(\frac{\ln x - c}{b}\right)^{a-1} \exp\left\{\frac{c - \ln x}{b}\right\}, \quad 0 < x < e^c.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b < 0)$ – параметар скалирања,
c $(c \in R)$ – параметар локације.

График густине



85

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА LG

(стандардна)

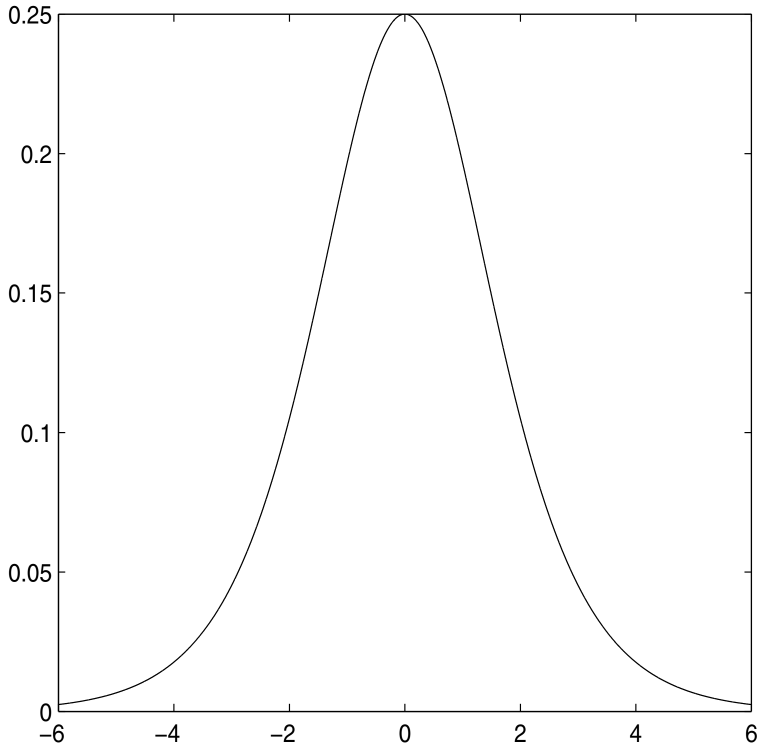
Густина

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad x \in R.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})}, \quad x \in R.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \Gamma(1+it)\Gamma(1-it) = \frac{\pi t}{sh\,\pi t}.$$

Моменти

За централне моменте важи

$$\mu_{2k+1} = 0, \quad \mu_{2k} = 6(2^{2k}-1)B_{2k}, \quad k \in N,$$

где је B_{2k} ознака за $2k$-ти Бернулијев број.
Специјално, $\mu_2 = D(X) = \frac{\pi^2}{3}$.

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = 0.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = 1.2.$$

Нека својства

1. $Q_1 = -\ln 3, \quad Q_3 = \ln 3.$
2. За g и F важи

$$g(x) = F(x)(1-F(x)), \quad x = \ln\frac{F(x)}{1-F(x)}.$$

Везе са другим расподелама

1. Ако $X \,:\, U(0,1)$, тада $\ln\frac{X}{1-X} \,:\, LG.$
2. АКо $X, Y \,:\, GU$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $X - Y \,:\, LG.$

3. Ако $X_i \ : \ L_1(1)$ за $i \in N$, тада $\prod_{j=1}^{\infty} \frac{X_j}{j} \ : \ LG$.

Примена

Економија, демографија.

Напомене

1. Расподелу је увео Verhulst (1838-1845) бавећи се проблемима демографије.

2. Густина расподеле може да се запише и у облику

$$g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad g(x) = \frac{1}{4} sech^2 \frac{x}{2}.$$

3. Расподела је у литератури на енглеском језику позната и као *sech squared distribution.*

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = \ln \frac{u}{1-u}$ случајан број из LG расподеле.

86

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LGZ1$

(засечена с леве стране)

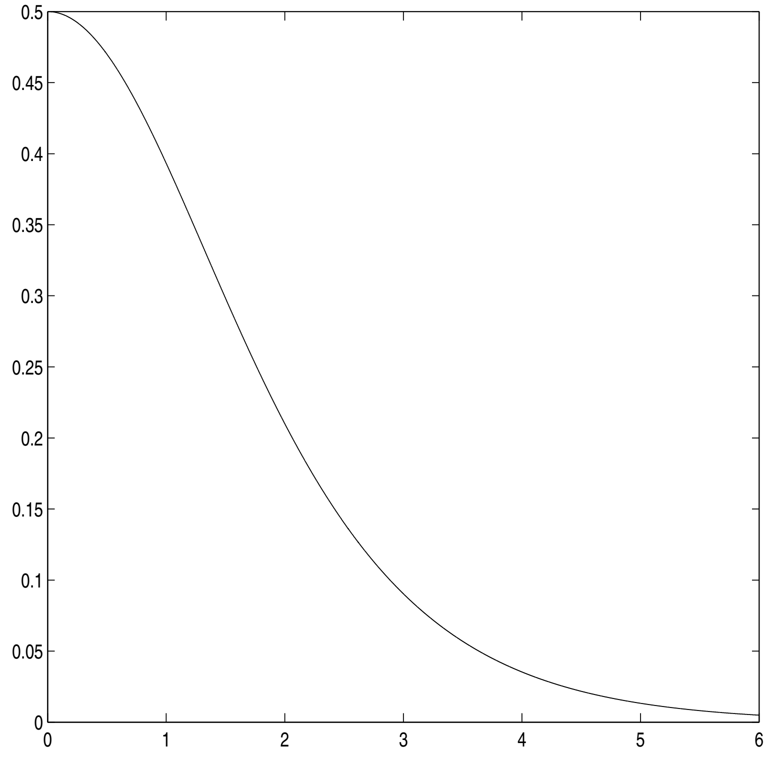
Густина

$$g(x) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

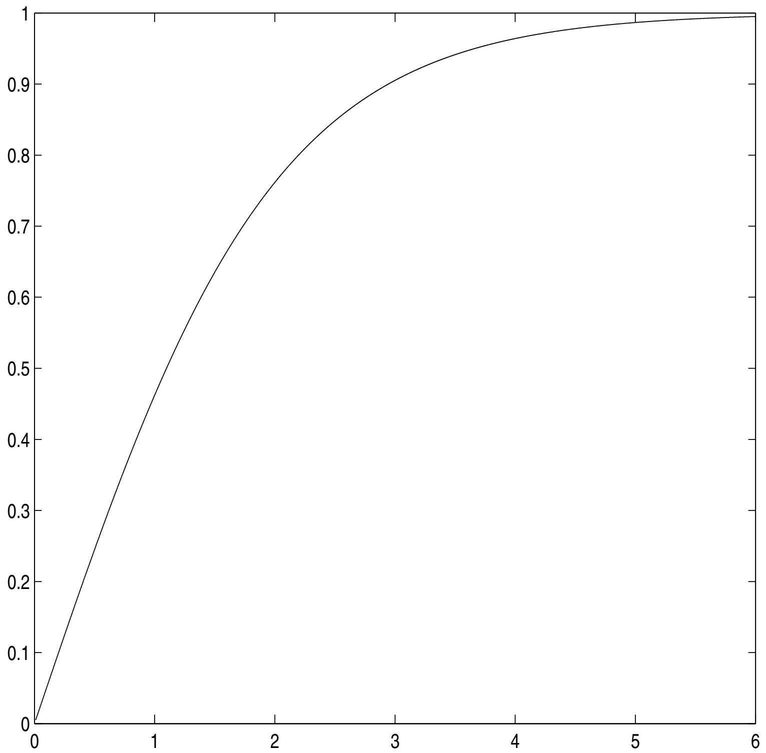
Нема параметара.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad x \geq 0.$$



Примена

Економија, демографија.

Напомена

Расподела је у литератури на енглеском језику позната и као *half logistic distribution*.

87

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LGZ2(a)$

(засечена са обе стране, симетрична)

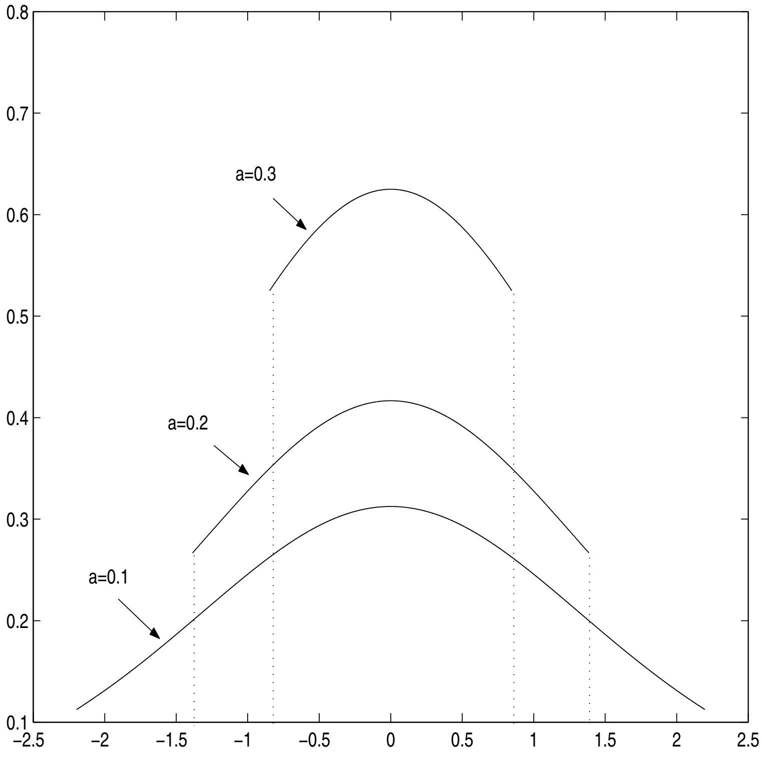
Густина

$$g(x) = \frac{1}{1-2a} \cdot \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad -\log\frac{1-a}{a} \le x \le \log\frac{1-a}{a}.$$

Параметри

a $(0 < a < 1)$ – параметар локације.

График густине



88

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LGZ3(a,b)$

(засечена са обе стране)

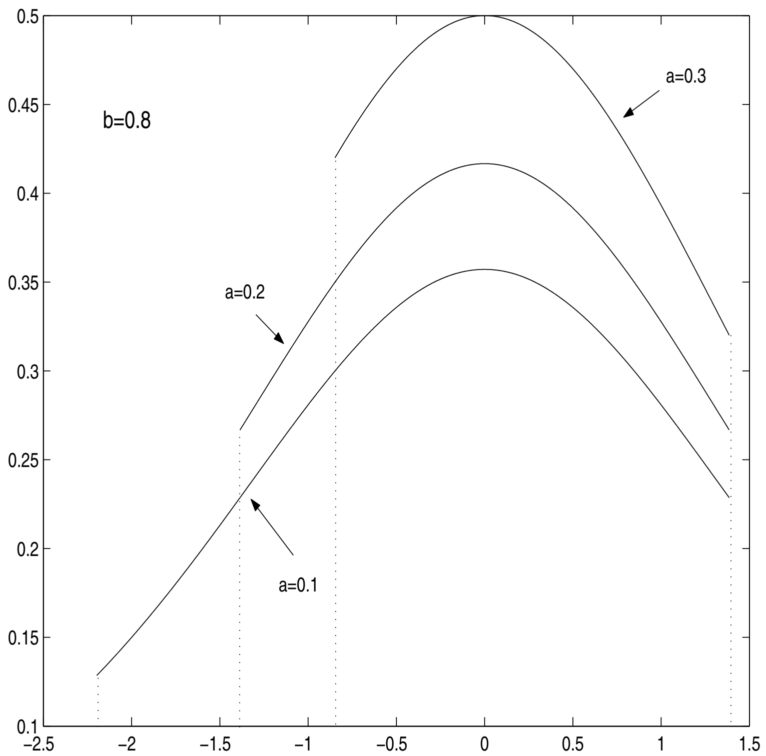
Густина

$$g(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad \log\frac{a}{1-a} \le x \le \log\frac{b}{1-b}.$$

Параметри

a, b $(0 < a, b < 1)$ – параметри локације.

График густине



Напомена

Густина расподеле може да се параметризује и тако да параметри буду крајеви интервала дефинисаности. У том случају

$$g(x) = \frac{(1+e^{\beta})(1+e^{\alpha})}{e^{\beta}-e^{\alpha}} \cdot \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad \alpha < x < \beta,$$

где су α и β параметри локације. За $\alpha = 0$ и $\beta = \infty$ добија се расподела $LGZ1$.

89

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LGS(a,b)$

(двопараметарска)

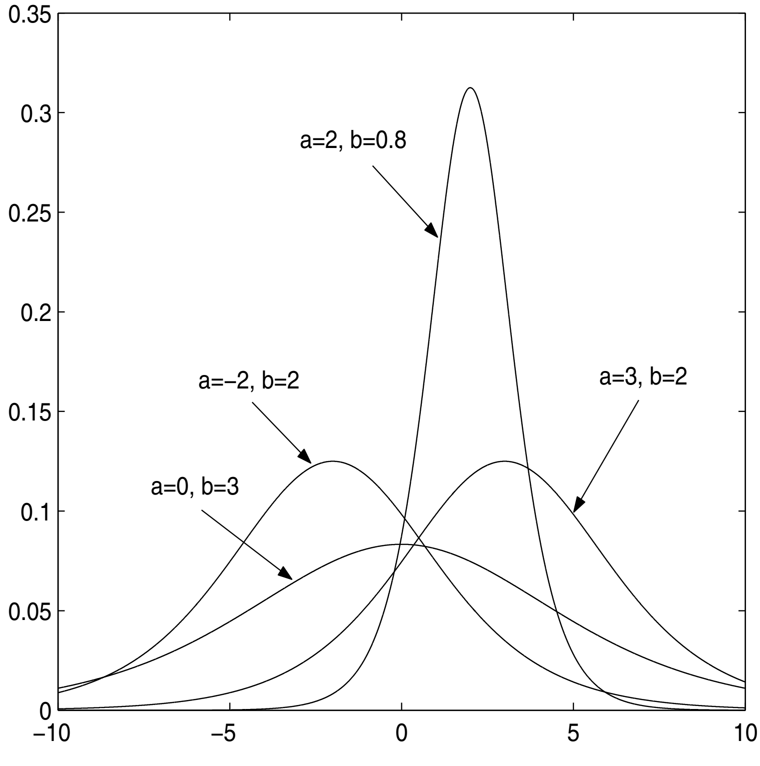
Густина

$$g(x) = \frac{\exp\left\{-\dfrac{x-a}{b}\right\}}{b\left(1+\exp\left\{-\dfrac{x-a}{b}\right\}\right)^2}, \quad x \in R.$$

Параметри

a $(a \in R)$ – параметар локације, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{1+\exp\left\{\frac{a-x}{b}\right\}}, \quad x \in R.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = itbe^{ita}\Gamma(itb)\Gamma(1-itb) = e^{iat}\frac{itb\pi}{\sin \pi itb}.$$

Моменти

$$m_1 = a, m_2 = a^2 + \frac{b^2\pi}{3}.$$

Централни моменти

$$\mu_2 = \frac{b^2\pi^2}{3}, \quad \mu_4 = \frac{7b^4\pi^4}{15}, \quad \mu_6 = \frac{31b^6\pi^6}{11}, \mu_{2k-1} = 0, \ k \in N.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = a.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = 1.2.$$

Оцене параметара

Оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ по методи максималне веродостојности добијају се решавањем система

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\exp\left\{\dfrac{X_i-\widehat{a}}{\widehat{b}}\right\}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{X_i-\widehat{a}}{\widehat{b}}\cdot\frac{1-\exp\left\{\dfrac{X_i-\widehat{a}}{\widehat{b}}\right\}}{1-\exp\left\{\dfrac{X_i-\widehat{a}}{\widehat{b}}\right\}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}.$$

За велико n је

$$D(\widehat{a}) \approx \frac{9\sigma^2}{n\pi^2} \approx 0.91189\frac{\sigma^2}{n}, \quad \widehat{b} \approx \frac{\sqrt{3}}{n\pi}\frac{9\sigma^2}{3+\pi^2} \approx 0.38578\frac{\sigma^2}{n}.$$

Оцене $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ по методи момената дате су са

$$\widetilde{a} = \overline{X}_n, \quad \widetilde{b} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{n}}.$$

Нека својства

1. $Q_1 = a - b\ln 3, \quad Q_3 = a + b\ln 3.$

2. $C_V(X) = \dfrac{\pi b}{\sqrt{3}a}.$

3. Густина расподеле је симетрична у односу на $x = a$.

4. Ако $X : LGS(a,b)$, тада $\dfrac{X-a}{b} : LG(0,1)$.

Везе са другим расподелама

1. Ако $X : U(0,1)$, тада $a + b\ln\dfrac{X}{1-X} : LGS(a,b)$.

2. Ако $X : E_1(1)$, тада $a - b\ln(e^X - 1) : LGS(a,b)$.

Примена

Економија (моделирање расподеле дохотка), демографиј, медицина.

Напомене

1. Расподелу је 1800. године увео Верхалст (Pierre Francois Verhulst, 1804-1849).

2. За густина g користе се и други облици:

$$g(x) = \frac{\exp\left\{\dfrac{x-a}{b}\right\}}{b\left(1+\exp\left\{\dfrac{x-a}{b}\right\}\right)^2} = \frac{1}{4b}sech^2\frac{x-a}{2b}.$$

3. За F се користе и облици:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{1+\exp\left\{\dfrac{x-a}{b}\right\}} = \frac{\exp\left\{\dfrac{x-a}{b}\right\}}{1+\exp\left\{\dfrac{x-a}{b}\right\}} = \frac{1}{2}\left(1 + tanh\,\frac{x-a}{2b}\right).$$

4. Расподела је у литератури на енглеском позната и као *sech squared distribution*.

5. Расподела се користи као апроксимација за разне симетричне расподеле.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = a + b\ln\dfrac{u}{1-u}$ случајан број из расподеле $LGS(a,b)$.

90

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LGZ(a,b)$

(засечена, двопараметарска)

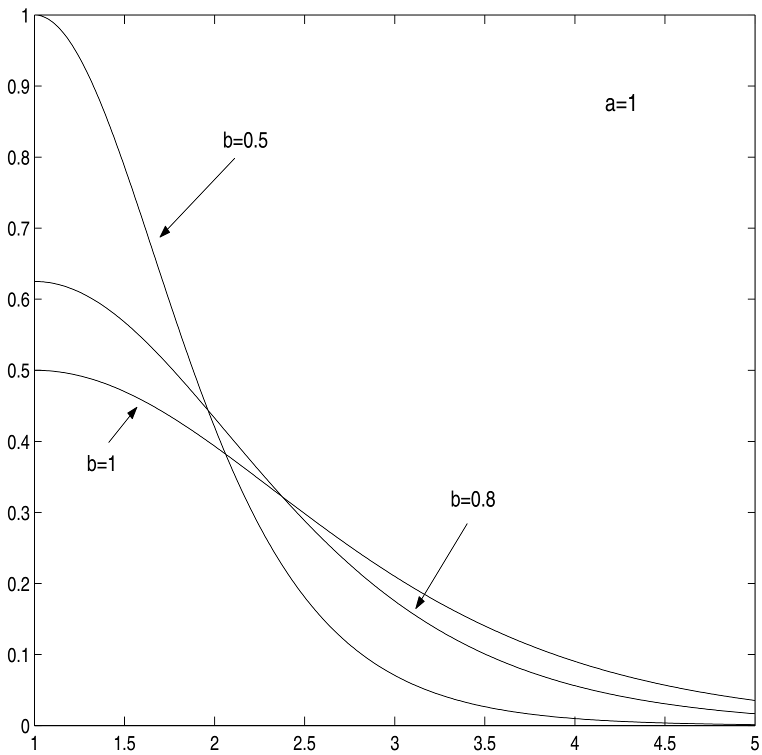
Густина

$$g(x) = \frac{2\exp\left\{-\dfrac{x-a}{b}\right\}}{b\left(1+\exp\left\{-\dfrac{x-a}{b}\right\}\right)^2}, \quad x \geq a.$$

Параметри

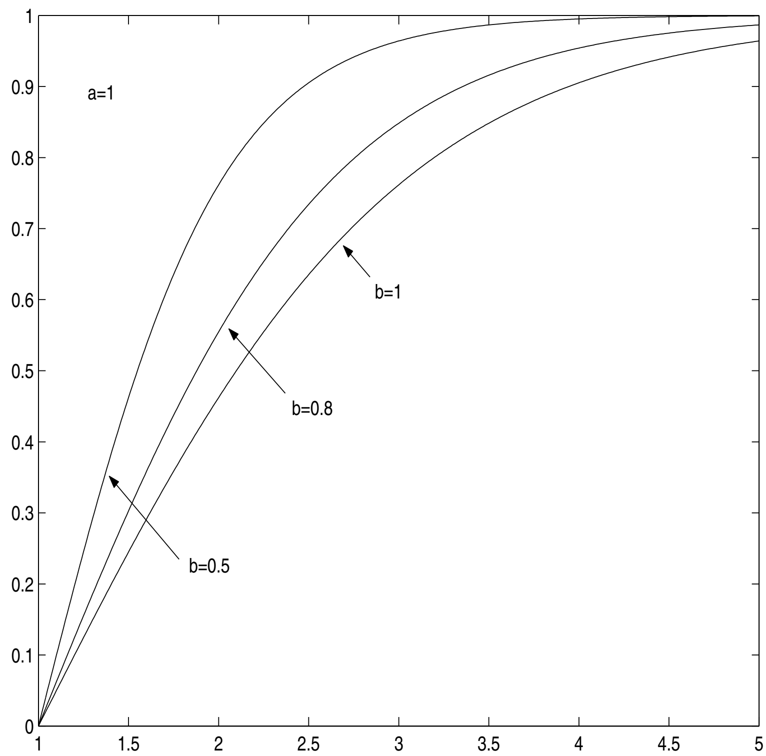
a ($a \in R$) – параметар локације, b ($b > 0$) – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1 - \exp\left\{\dfrac{a-x}{b}\right\}}{1 + \exp\left\{\dfrac{a-x}{b}\right\}}, \quad x \geq a.$$



91

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LG1(a)$

(једнопараметарска)

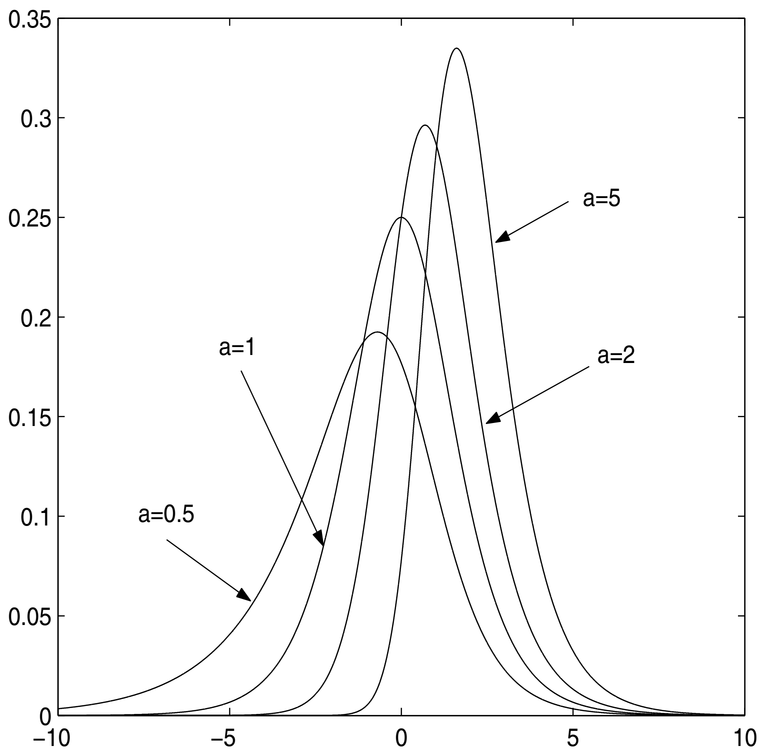
Густина

$$g(x) = \frac{ae^{-x}}{(1+e^{-x})^{a+1}}, \quad x \in R.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^a}, \quad x \in R.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(1-it)\Gamma(a+it)}{\gamma(a)}.$$

Нека својства

1. Функција расподеле је решење диференцијалне једначине
$$(1+e^{-x})F' - ae^{-x}F = 0.$$
2. Расподела је негативно асиметрична за $a < 1$ и позитивно асиметрична за $a > 1$.

Везе са другим расподелама

1. $LG1(1) = LG$.
2. Ако $X : B(1,b)$, тада $ln\dfrac{X}{1-X} : LG1(b)$.
3. Ако $X : F(2,2a)$, тада $-\ln\dfrac{X}{a} : LG1(a)$.
4. Ако $X : GU$, а $Y : GU(a)$, тада $X - Y : LG1(a)$.
5. Ако $X : PAR1(a,b)$, тада $-\ln\left(\dfrac{X}{b} - 1\right) : LG1(a)$.
6. Ако $X : LG1(a)$ тада се $-aX$ понаша као случајна променљива са расподелом $E(1)$ за $a \approx 0$.
7. Ако $X : LG1(a)$ тада се, за a довољно велико, $X - \ln a$ понаша као случајна променљива са расподелом GU.

Примена

Економија, демографија.

92

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LG2(a)$

(једнопараметарска)

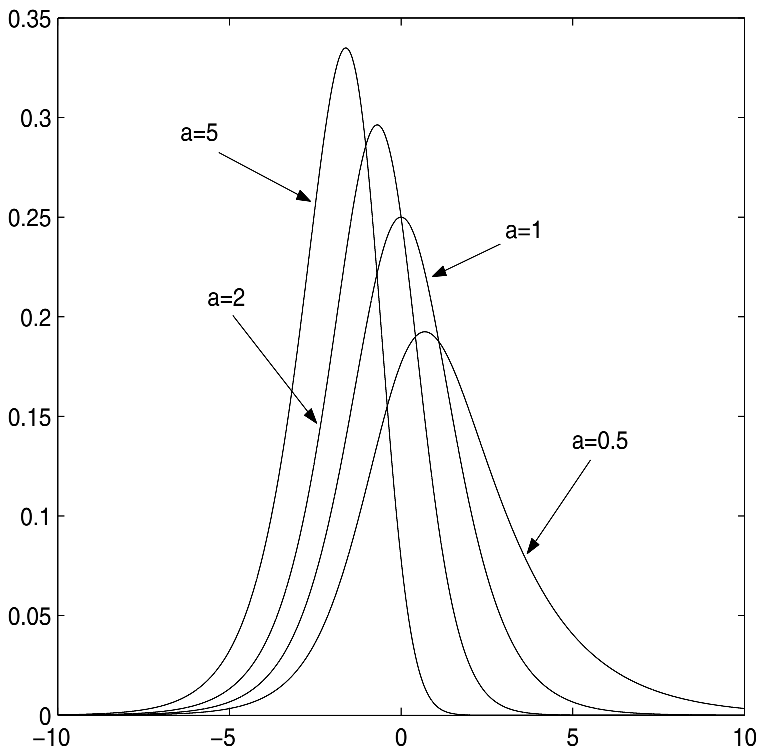
Густина

$$g(x) = \frac{ae^{-ax}}{(1+e^{-x})^{a+1}}, \quad x \in R.$$

Параметри

a ($a > 0$) – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \frac{e^{-ax}}{(1+e^{-x})^a}.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(1+it)\Gamma(a+it)}{\Gamma(a)}.$$

Везе са другим расподелама

1. Ако $X : LG1(a)$, тада $-X : LG2(a)$.
2. $LG2(1) = LG$.

Напомена

Расподела је Позната и као уопштена логистичка расподела типа II.

93

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LG3(a)$

(једнопараметарска)

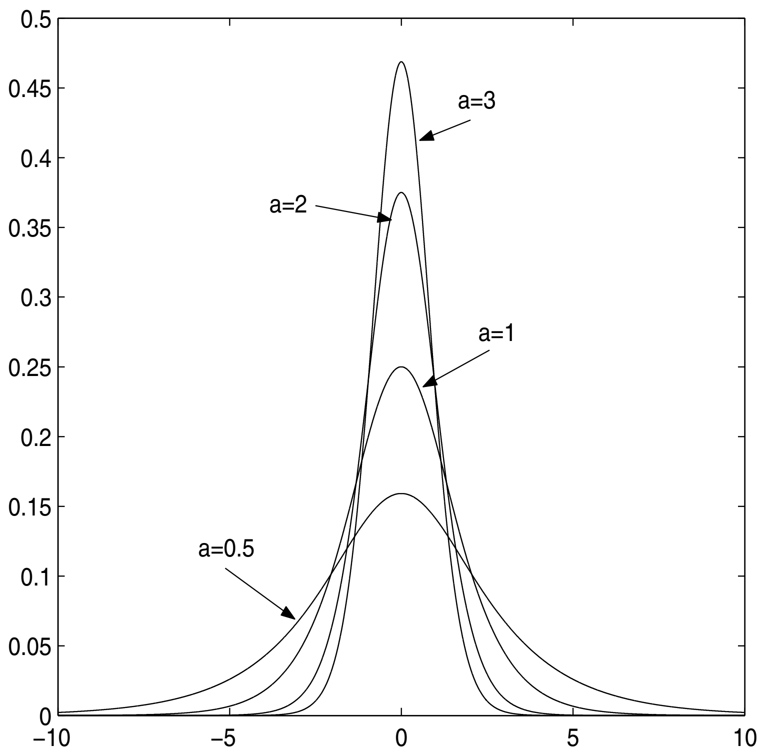
Густина

$$g(x) = \frac{1}{B(a,a)} \cdot \frac{e^{-ax}}{(1+e^{-x})^{2a}}, \quad x \in R.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(a-it)\Gamma(a+it)}{(\Gamma(a))^2}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = \frac{\Gamma(a-t)\Gamma(a+t)}{(\Gamma(a))^2}, \quad |t| < a.$$

Моменти

$$m_1 = 0, \quad D(X) = 2\psi'(a),$$

где је ψ дигама функција (видети Додатак).

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = \frac{\psi'''}{2(\psi'(a))^2}.$$

Нека својства

1. Густина расподела је симетрична у односу на $x = 0$.
2. Расподела има 'дебље' крајеве од крајева нормалне расподеле.

Везе са другим расподелама

1. $LG3(1) = LG$.
2. Ако $X \ : \ LG3$, тада за велико a случајна промењлива $\sqrt{\frac{2}{a}}X$ има приближно $N(0,1)$ расподелу.

94

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LG4(a,b)$

(двопараметарска)

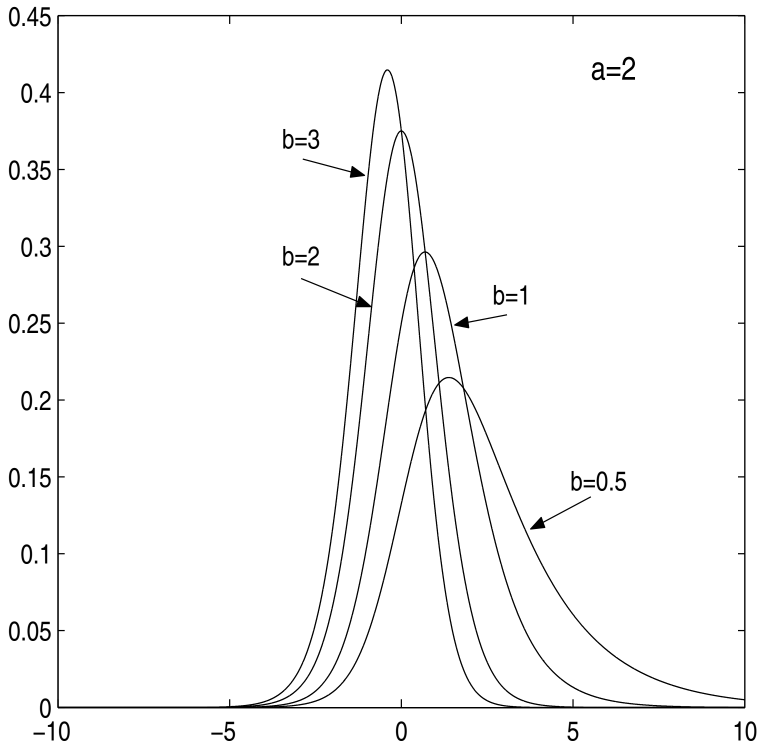
Густина

$$g(x) = \frac{1}{B(a,b)} \cdot \frac{e^{-bx}}{(1+e^{-x})^{a+b}}, \quad x \in R.$$

Параметри

a, b $(a, b > 0)$ – параметри облика.

График густине



Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(a+it)\Gamma(b-it)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = \frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b-t)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad -a < t < b.$$

Моменти

$$m_1 = \psi(a) - \psi(b), \quad D = \psi'(a) + \psi'(b),$$

где је ψ дигама функција (видети Додатак А).

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{\psi''(a) - \psi''(b)}{(\psi'(a) + \psi'(b))^{3/2}}, \quad \pi_2(X) = \frac{\psi'''(a) + \psi'''(b)}{(\psi'(a) + \psi'(b))^2}.$$

Нека својства

1. За $a < b$ расподела је десно асиметрична, за $a < b$ је лево асиметрична, а за $a = b$ је симетрична.
2. Ако $X \ : \ LG4(a,b)$, тада $-X \ : \ LG4(b,a)$.

Везе са другим расподелама

1. $LG4(1,1) = LG$.
2. $LG4(a,1) = LG1(a)$.
3. $LG4(1,a) = LG2(a)$.
4. $LG4(a,a) = LG3(a)$.
5. Ако $X \ : \ B_(a,b)$, тада $\ln \dfrac{X}{1-X} \ : \ LG4(a,b)$.
6. Ако $\dfrac{b}{a}e^X \ : \ F(2a,2b)$, тада $X \ : \ LG4(a,b)$.
7. Ако $X, Y \ : \ LGG1(a,b)$, тада $X - Y \ : \ LG4(a,b)$.

8. Ако $X : LG4(a, b)$, тада за $a \to \infty$ важи $X \xrightarrow{D} Y$, где је $Y : LN$.

9. Ако $X : LG4(1, b)$, тада за $b \to \infty$ важи $X \xrightarrow{D} Y$, где је $Y : W$.

Напомене

1. Расподела је у литератури на енглеском позната и као *exponential generalized beta of the second type.*

2. Расподела је позната и као уопштена логистичка расподела типа IV.

95

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LG5(a)$

(једнопараметарска)

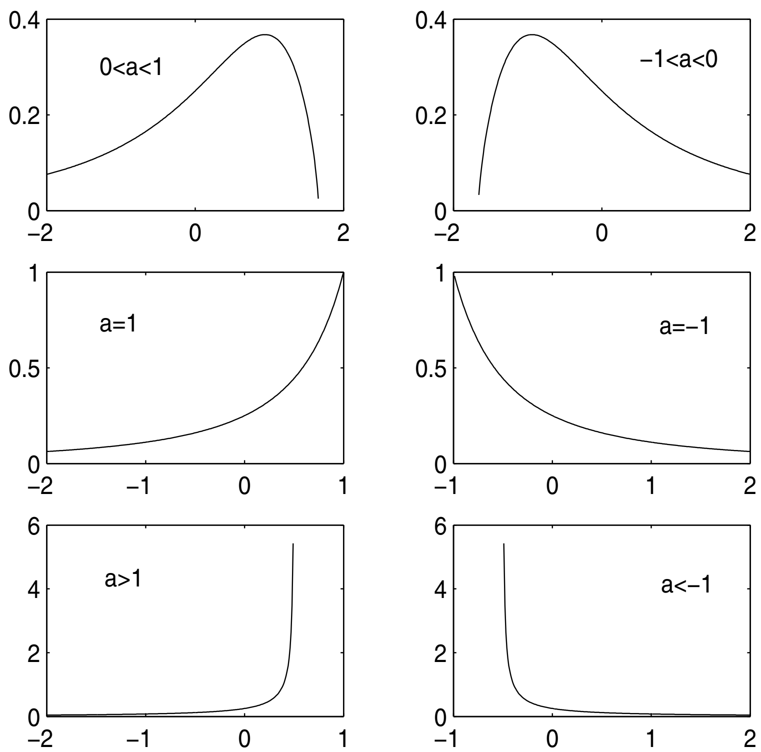
Густина

$$g(x) = \frac{(1-ax)^{1/a-1}}{(1+(1+e^{-x})^{1/a})^2}, \quad \begin{array}{c} x \leq \dfrac{1}{a} \text{ за } a > 0 \\ x \geq \dfrac{1}{a}, \text{ za } a < 0 \end{array}.$$

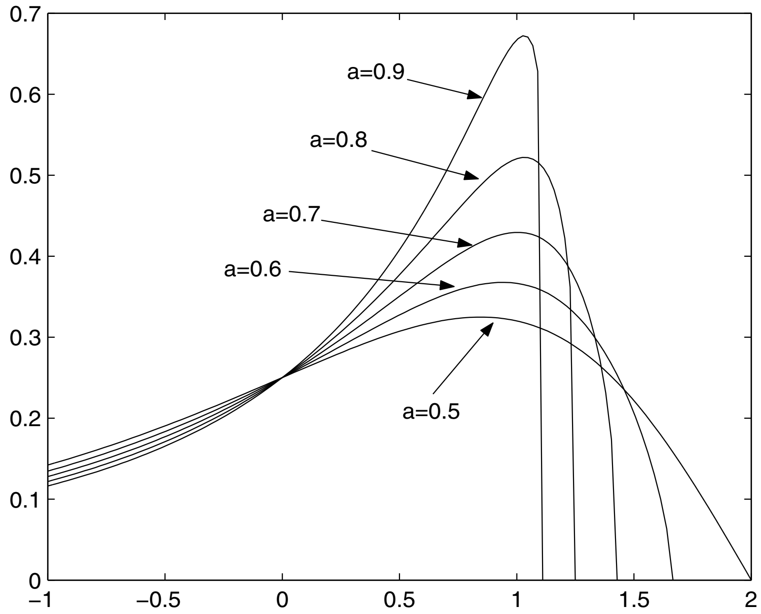
Параметри

a $(a \neq 0)$ – параметар облика.

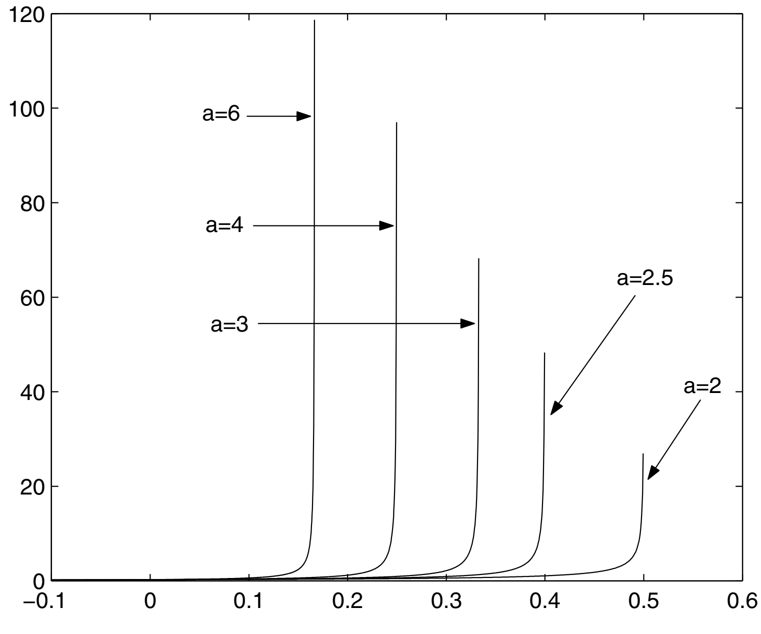
График густине



Следећа слика приказује функције густине за различите вредности параметра a у случају $0 < a < 1$.



Следећа слика приказује функције густине за различите вредности параметра a у случају $a > 1$.



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{1 + (1 - ax)^{1/a}}, \quad x \in R.$$

Везе са другим расподелама

1. За $a \to 0$ добија се расподела LG.

2. Ако $X : LG5(a)$ $(a > 0)$, онда $-X : LG5(-a)$.

96

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LG5Z1(a)$

(засечена, једнопараметарска)

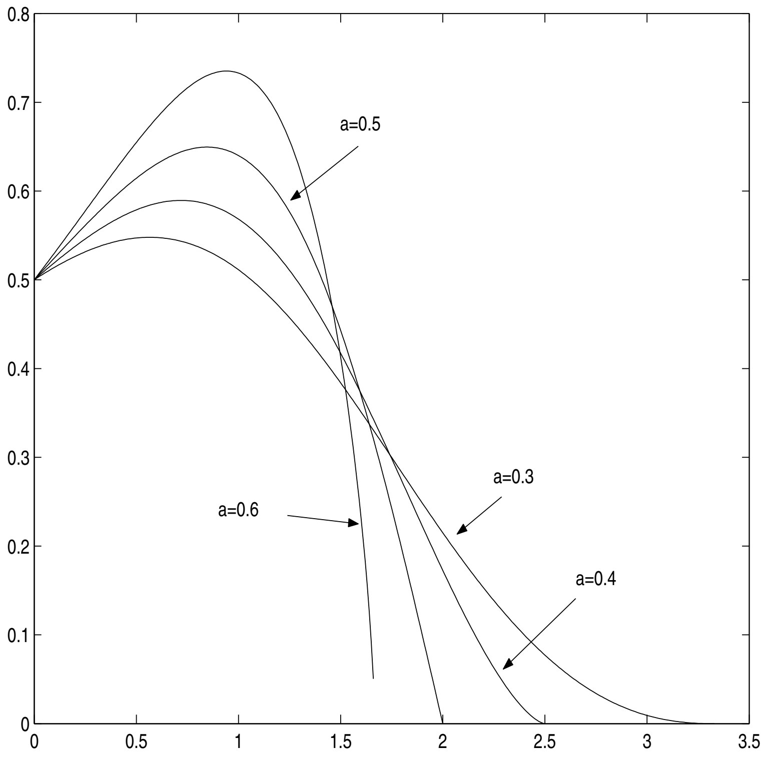
Густина

$$g(x) = \frac{2(1-ax)^{1/a-1}}{(1+(1-ax)^{1/a})^2}, \quad 0 \le x \le \frac{1}{a}.$$

Параметри

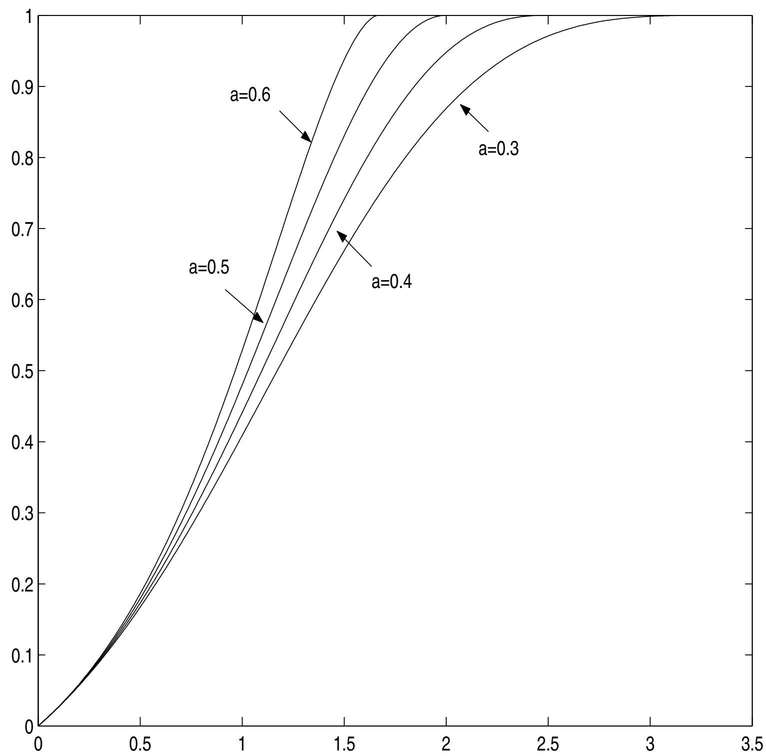
a ($a > 0$) – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1-(1-ax)^{1/a}}{1+(1-ax)^{1/a}}, \quad x \in [0, 1/a].$$



Везе са другим расподелама

За $a \to 0$ добија се расподела $LGZ1$.

97

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LG5Z2(a, b, c)$

(засечена, тропараметарска)

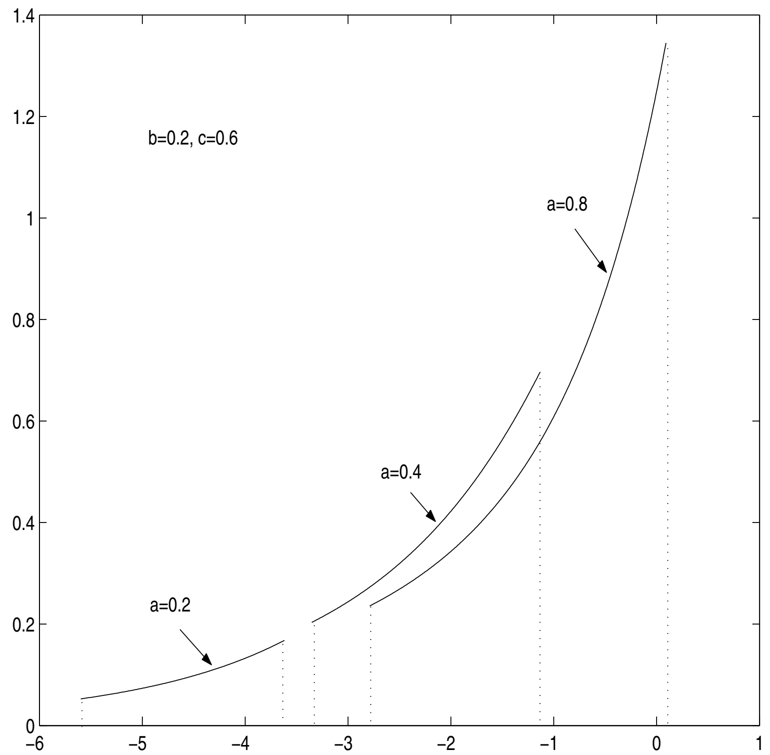
Густина

$$g(x) = \frac{(1-ax)^{1/a-1}}{(c-b)(1+(1-ax)^{1/a})^2}, \ 1 - \frac{1}{a}\left(\frac{1-b}{b}\right)^a \le x \le 1 - \frac{1}{a}\left(\frac{1-c}{c}\right)^a.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b, c $(0 < b, c < 1, \ b < c)$ – параметри локације.

График густине



98

ЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LG5Z3(a,b)$

(засечена, двопараметарска)

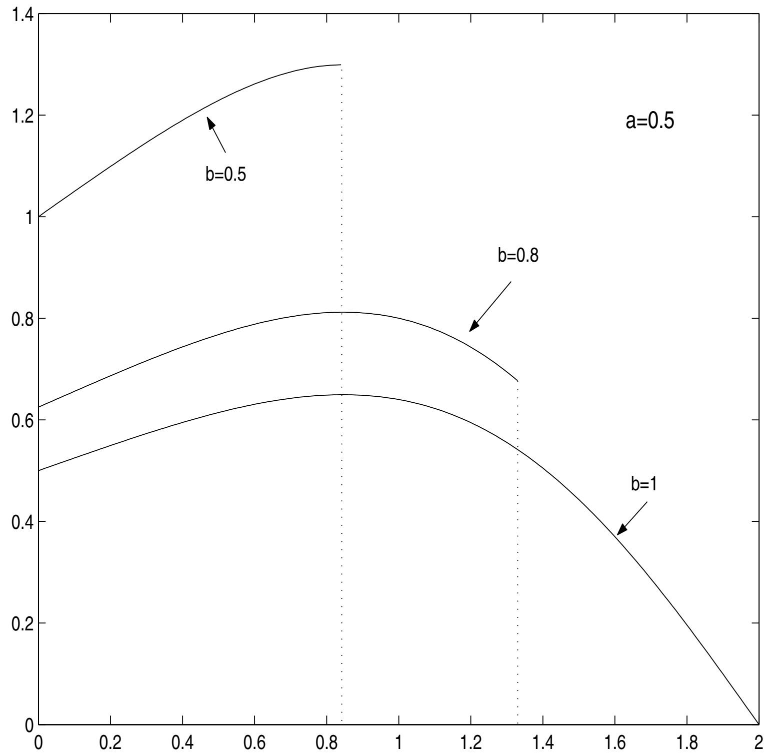
Густина

$$g(x) = \frac{2(1-ax)^{1/a-1}}{b(1+(1-ax)^{1/a})^2}, \quad 0 \le x \le \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^a.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b \in (-1, 1])$ – параметар локације.

График густине



99

ЛОГ-КОШИЈЕВА РАСПОДЕЛА $LK(a,b)$

(двопараметарска)

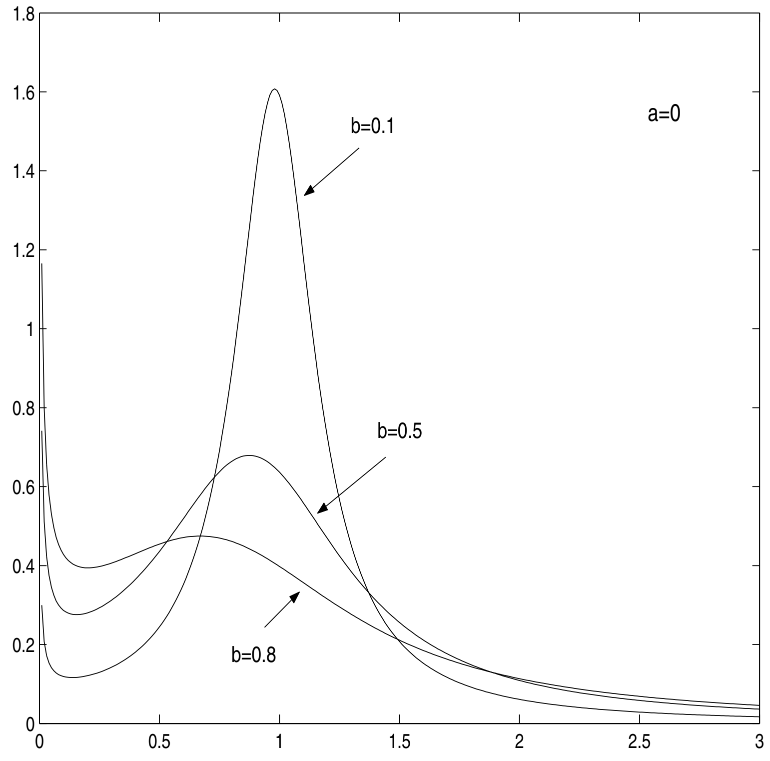
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\pi x} \cdot \frac{b}{b^2 + (\log x - a)^2}, \quad x > 0.$$

Параметри

a ($a \in R$) – параметар локације, b ($b > 0$) – параметар облика.

График густине



100

ЛОГЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LLG1(a)$

(једнопараметарска)

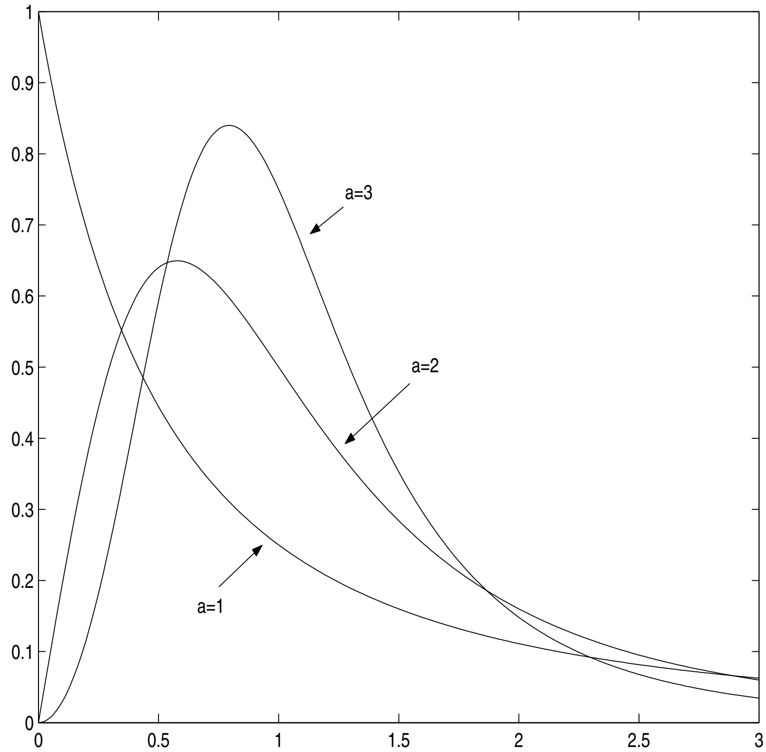
Густина

$$g(x) = \frac{ax^{a-1}}{(1+x^a)^2}, \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



101

ЛОГЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LLG2(a,b)$

(двопараметарска)

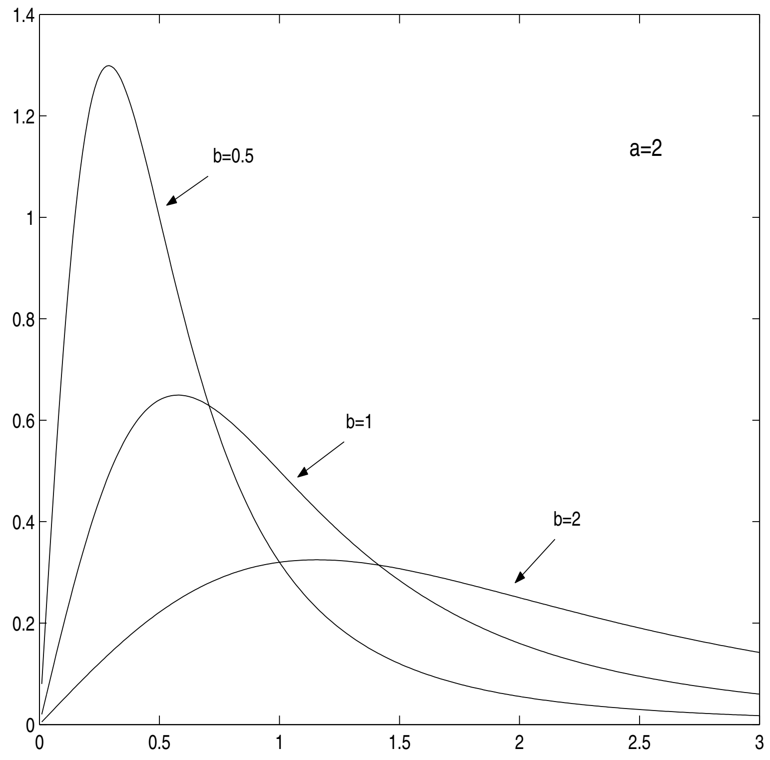
Густина

$$g(x) = \frac{ax^{a-1}}{b^a\left(1+\left(\frac{x}{b}\right)^a\right)^2}, \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



102

ЛОГЛОГИСТИЧКА РАСПОДЕЛА $LLG3(a, b, c)$

(тропараметарска)

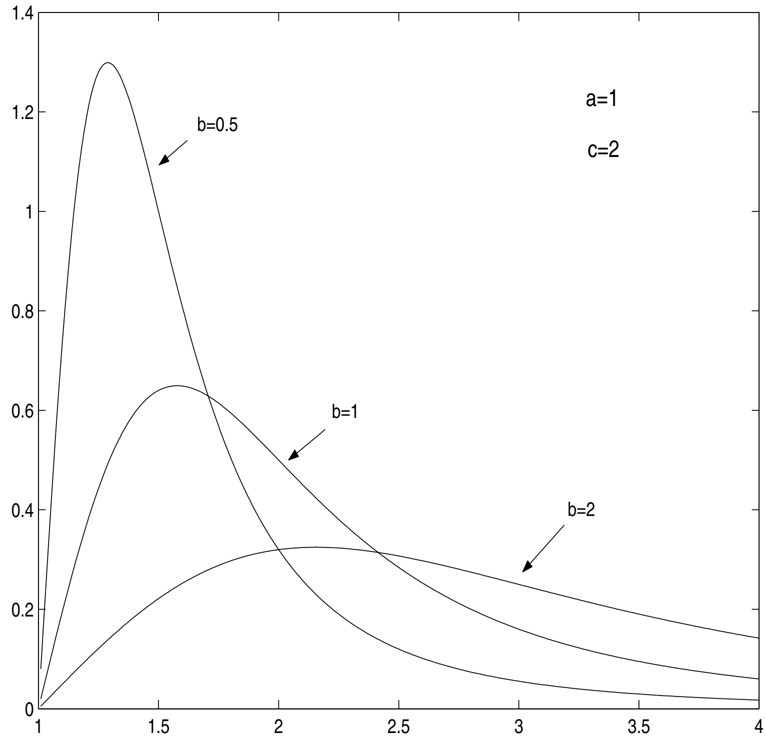
Густина

$$g(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x-c}{b}\right)^{a-1}\left(1+\left(\frac{x-c}{b}\right)^{a}\right)^{-2}, \quad x > c.$$

Параметри

a $(a \in R)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања,
c $(c > 0)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(1 + \left(\frac{x-c}{b}\right)^{-a}\right)^{-1}, \quad x > c.$$

Моменти

$$m_1 = c + b\left(\frac{\pi}{a}\csc\frac{\pi}{a}\right), \quad D(X) = b^2\left(\frac{2\pi}{a}\csc\frac{2\pi}{a} - \left(\frac{\pi}{a}\csc\frac{\pi}{a}\right)^2\right).$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = c + b\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{1/a}, \quad Me(X) = c + b.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2\pi^2\csc^3\frac{\pi}{a} - 6a\pi\csc\frac{\pi}{a}\csc\frac{2\pi}{a} + 3a^2\csc\frac{3\pi}{a}}{\sqrt{\pi}\left(2a\csc\frac{2\pi}{a} - \pi\csc^2\frac{\pi}{a}\right)^{3/2}}, \quad \pi_2(X) = \frac{A}{\pi B^2} - 3,$$

где је

$$A = -3\pi^3\csc^4\frac{\pi}{a} - 12a^2\pi\csc\frac{\pi}{a}\csc\frac{3\pi}{a} + 4a^3\csc\frac{4\pi}{a} + 6a\pi^2\csc^3\frac{\pi}{a}\csc\frac{\pi}{a},$$

$$B = \pi\csc^2\frac{\pi}{a} - 2a\csc\frac{2\pi}{a}$$

и где је $csc\, t = 1/\sin t$.

Нека својства

1. Моменат реда k постоји само за $k < a$.
2. $Q_1 = c + \dfrac{b}{3^{1/a}}, \quad Q_3 = c + b3^{1/a}$.

Везе са другим расподелама

1. $LGG3(a, b, 0) = LGG2(a, b)$.
2. $LGG3(a, 1, 0) = LGG1(a)$.

103

ЛОГНОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $LN_2(m, \sigma^2)$

(двопараметарска)

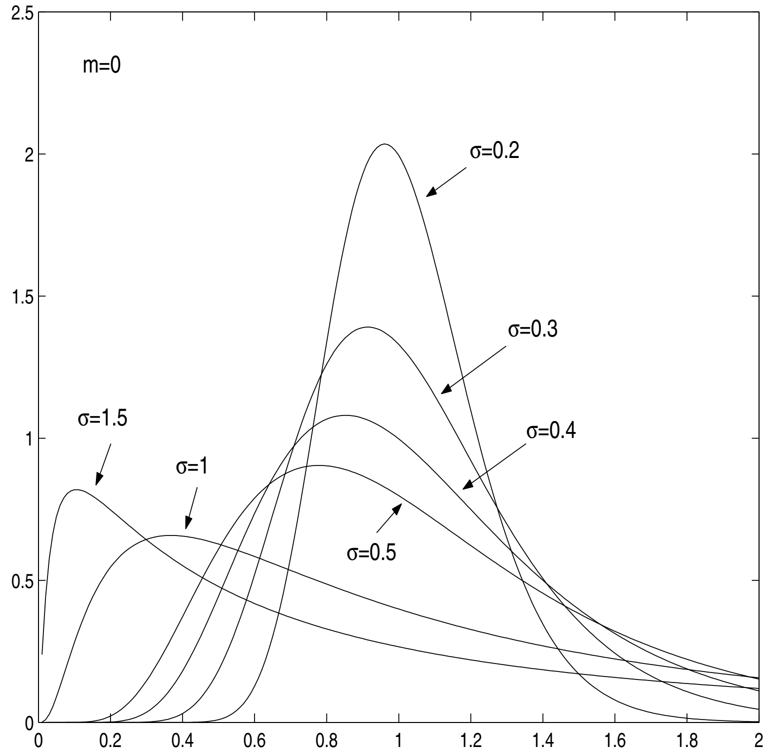
Густина

$$g(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x > 0.$$

Параметри

m ($m \in R$) – параметар облика, σ ($\sigma > 0$) – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{z^2}{2}\right), & z \geq 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{z^2}{2}\right), & z < 0, \end{cases}$$

где је $z = \dfrac{\ln x - m}{\sigma}$, а P непотпуна гама функција (видети Додатак).

Ентропија

$$H(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2).$$

Моменти

$$m_r = e^{rm + r^2\sigma^2/2}, \quad r \in N.$$

Ако је $\omega = e^{\sigma^2}$, тада је

$$\mu_r = e^{rm}\omega^{r/2}\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\omega^{(r-j)(r-j+1)/2}.$$

Специјално,

$$\mu_1 = e^m\omega^{1/2}, \quad \mu_2 = e^{2m}\omega(\omega-1), \quad \mu_3 = e^{3m}\omega^{3/2}(\omega-1)^2(\omega+2),$$
$$\mu_4 = e^{4m}\omega^2(\omega-1)^2(\omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3).$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \frac{e^m}{\omega}, \quad Me(X) = e^m,$$

при чену важи $Mo(X) < Me(X) < m_1$.

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = (\omega-1)^{1/2}(\omega+2), \quad \pi_2(X) = \omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 6.$$

Функција веродостојности

$$L = \frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}X_1X_2\cdots X_n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(\ln X_k - m)^2\right\}.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене $\widehat{m}$ и $\widehat{\sigma}$ за непознате параметр m и σ дате су са

$$\widehat{m} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln X_k, \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\ln X_k - \widehat{m})^2 .$$

Оцена $\widehat{m}$ је непристрасна и ефикасна, при чему је

$$D(\widehat{m}) = \frac{1}{n} e^{2m}\omega(\omega - 1),$$

а оцена $\widehat{\sigma}^2$ је асимптотски непристрасна, при чему

$$E(\widehat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \to \sigma^2, \ n \to \infty.$$

Оцена за m је иста и ако је параметар σ познат и има иста својства.

Ако је параметар m познат, оцена за σ је дата са

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\ln X_k - m)^2$$

и она је непристрасна, сатабилна и ефикасна.

Метода момената

Ако је

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad M_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2,$$

оцене $\widetilde{m}$ и $\widetilde{\sigma}$ по методи момената дате су са

$$\widetilde{m} = \ln \frac{M_1^1}{\sqrt{M_2}}, \quad \widetilde{\sigma}^2 = \ln \frac{M_2}{M_1^2}.$$

Ове оцене су асимптотски непристрасне и стабилне. Дисперзије оцена су

$$D(\widetilde{m}) = \frac{1}{4n}(\gamma^4 + 4\gamma^3 - 2\gamma^2 + 4\gamma), \quad D(\widetilde{\sigma}^2) = \frac{1}{n}(\gamma^4 + 4\gamma^3 + 2\gamma^2),$$

где је $\gamma = \omega - 1$.

Нека својства

1. Пошто је $\pi_1(X) > 0$ и $\pi_2(X) > 0$, расподела је позитивно асиметрична и има 'дебеле' крајеве.

2. Ако $X \ : \ LN_2(m, \sigma^2)$, тада $e^a X^b \ : \ LN_2(a + bm, b^2\sigma^2)$

3. Ако су $X_1, \dots, X_n$ независне случајне променљиве са $LN_2(m, \sigma^2)$ расподелом, тада $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln X_k \,:\, N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, односно
$$\sqrt[n]{X_1 \cdots X_n} \,:\, LN_2\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

4. Ако $X_i \,:\, LN_2(m, \sigma_k^2)$ $(k = 1, \dots, n)$ и ако су $X_1, \dots, X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$X_1 X_2 \cdots X_n \,:\, LN_2\left(nm, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2\right).$$

Везе са другим расподелама

1. $LN_2(m, \sigma^2) = LN_3(m, \sigma^2, 0)$.
2. Ако $X \,:\, LN_2(m, \sigma^2)$, тада $\ln X \,:\, N(m, \sigma)$ и обрнуто.
3. Ако $X \,:\, LN_2(m, \sigma^2)$, тада $\frac{\ln X - m}{\sigma} \,:\, N(0, 1)$ и обрнуто.

Примена

Климатологија, економија, телекомуникације, контрола квалитета, геологија, медицина, биохемија, метеорологоја, климатологија.

Генерисање

Случајан број x из логнормалне расподеле може да се добије са $x = e^z$, где је z случајан број из нормалне расподеле.

104

ЛОГНОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $LN_3(m, \sigma^2, c)$

(тропараметарска)

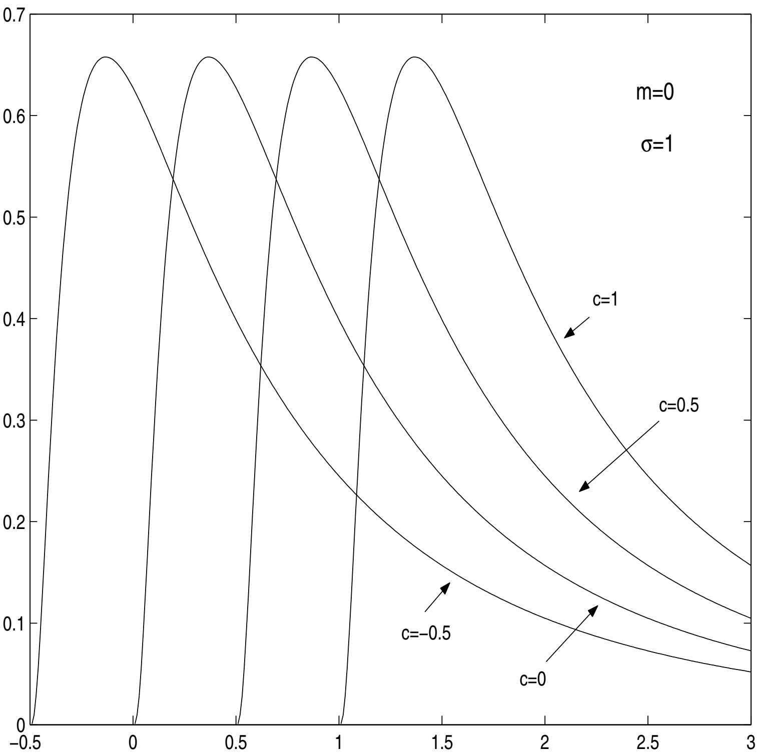
Густина

$$g(x) = \frac{1}{(x-c)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x-c) - m}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad x > c.$$

Параметри

m $(m \in R)$ – параметар облика, σ $(\sigma > 0)$ – параметар скалирања,
c $(c \in R)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \Phi(\ln(x - c)),$$

где је Φ функција расподеле за $N(m, \sigma^2)$.

Моменти

$$m_r(X) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} c^{r-k} e^{km + k^2\sigma^2/2}, \quad r \in N.$$

Специјално,

$$m_1(X) = c + e^m\sqrt{\omega}, \quad m_2(X) = c^2 + e^{2m} + 2ce^m\sqrt{\omega}, \quad D(X) = e^{2m}\omega(\omega - 1),$$

где је $\omega = e^{\sigma^2}$.

Модус и медијана

$$Mo(X) = c + e^{m-\sigma^2}, \quad Me(X) = c + e^m.$$

Функција веродостојности

$$L = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k - c} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} (\ln(X_k - c) - m)^2\right\},$$

$$\ln L = -n \ln\sigma - n \ln\sqrt{2\pi} - \sum_{k=1}^{n} \ln(X_k - c) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (\ln(X_k - c) - m)^2.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

– Ако је параметар c познат, онда су оцене за m и σ дате са

$$\widehat{m} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(X_k - c), \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\ln(X_k - c) - \widehat{m})^2.$$

– Ако је параметар c непознат, оцене се могу добити из система

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial c} = 0,$$

где је

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial m} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(\ln(X_k-c)-m),\\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{k=1}^{n}(\ln(X_k-c)-m)^2,\\ \frac{\partial \ln L}{\partial m} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k-c}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(X_k-c)-m}{X_k-c}.\end{aligned}$$

Метода момената

Оцене се добијају из система

$$\begin{aligned} c+e^m\sqrt{\omega} &= \overline{X},\\ e^{2m}\omega(\omega-1) &= \overline{S}_n^2,\\ (\omega+2)\sqrt{\omega-1} &= C_3,\end{aligned}$$

где је

$$C_3=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(X_k-c)-\overline{X})^3.$$

Ако је $\widetilde{\omega}$ решење треће једначине, онда је

$$\widetilde{m}=\frac{1}{2}\ln\frac{\overline{S}_n^2}{\widetilde{w}(\widetilde{\omega}-1)},\quad \widetilde{c}=\overline{X}-\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}-1)}}.$$

Везе са другим расподелама

1. $LN_3(m,\sigma^2,0)=LN_2(m,\sigma^2)$.
2. Ако $X\ :\ LN_2(m,\sigma^2)$, тада $X+c\ :\ LN_3(m,\sigma^2,c)$.
3. Ако $X\ :\ LN_3(m,\sigma^2,c)$, тада $\ln(X-c)\ :\ N(m,\sigma^2)$.

Примена

Климатологија, економија, телекомуникације, контрола квалитета, геологија, медицина, биохемија, метеорологија, хидрологија.

Генерисање

Ако је z случајан број из $N(m,\sigma^2)$ расподеле, тада је $x=c+e^z$ случајан број из $LN_3(m\sigma^2,c)$ расподеле.

105

ЛОГНОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $LN_4(m, \sigma^2, c, \lambda)$

(четворопараметарска)

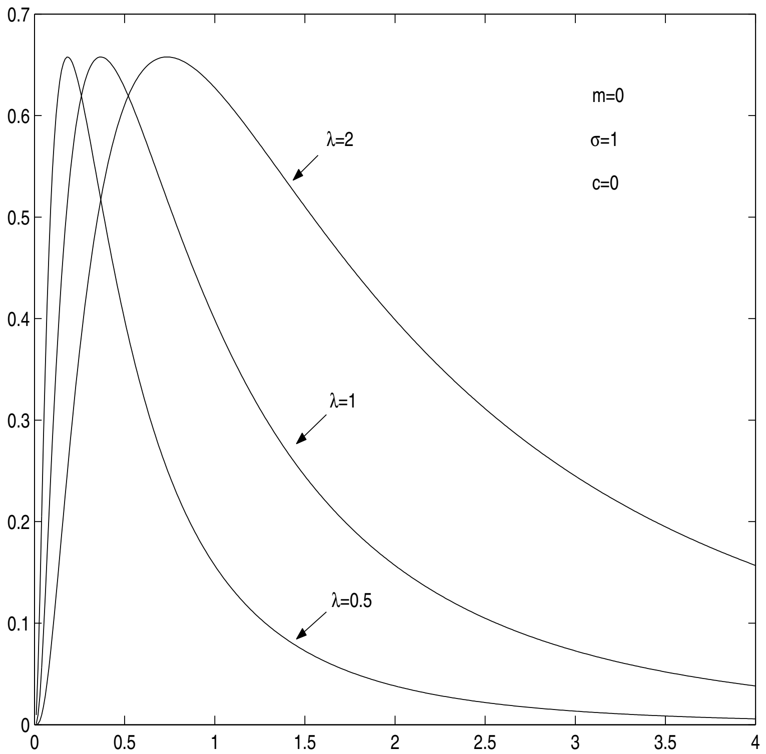
Густина

$$g(x) = \frac{\lambda}{(x-c)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\log\frac{x-c}{\lambda} - m\right)^2\right\}, \quad x > c.$$

Параметри

m $(m \in R)$ – параметар облика, σ, λ $(\sigma, \lambda > 0)$ – параметри скалирања,
c $(c \in R)$ – параметар локације.

График густине



Везе са другим расподелама

1. $LN_4(m, \sigma^2, 0, 1) = LN_2(m, \sigma^2)$.
2. $LN_4(m, \sigma^2, c, 1) = LN_3(m, \sigma^2, c)$.
3. Ако $\ln\left(\dfrac{X-c}{\lambda}\right) : N(m, \sigma^2)$, тада $X : LN_4(m, \sigma^2, c, \lambda)$.

106

ЛОГНОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $LNU(m,\sigma^2,a)$

(уопштена, тропараметарска)

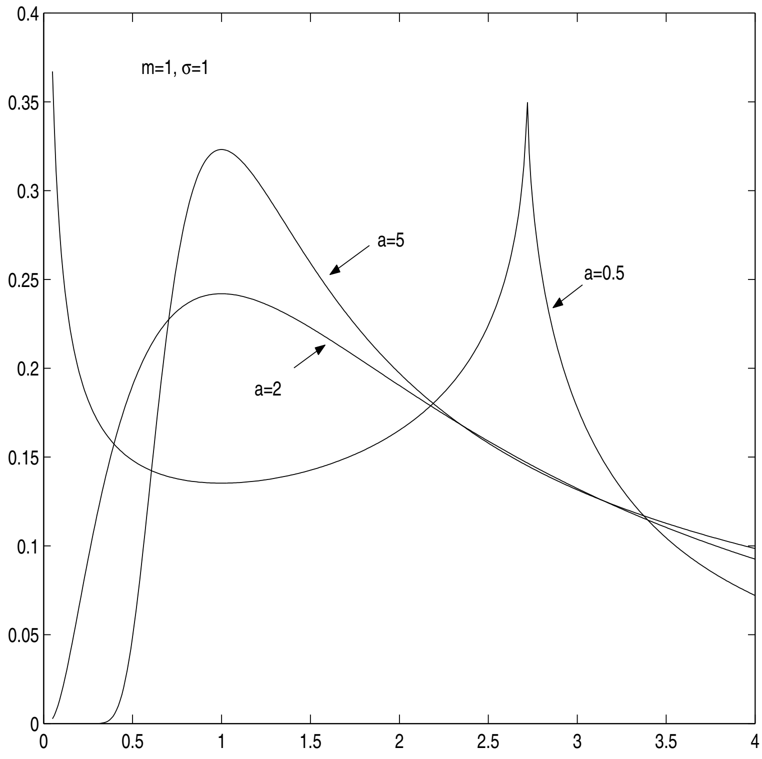
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2xa^{1/a}\sigma\Gamma\left(1+1/a\right)} \exp\left\{-\frac{1}{a\sigma^a}|\log x - m|^a\right\}, \quad x>0.$$

Параметри

m $(m \in R)$ – параметар облика, σ $(\sigma>0)$ – параметар скалирања, a $(a>0)$ – параметар облика.

График густине



107

МАКСВЕЛОВА РАСПОДЕЛА $MAX(a)$

(једнопараметарска)

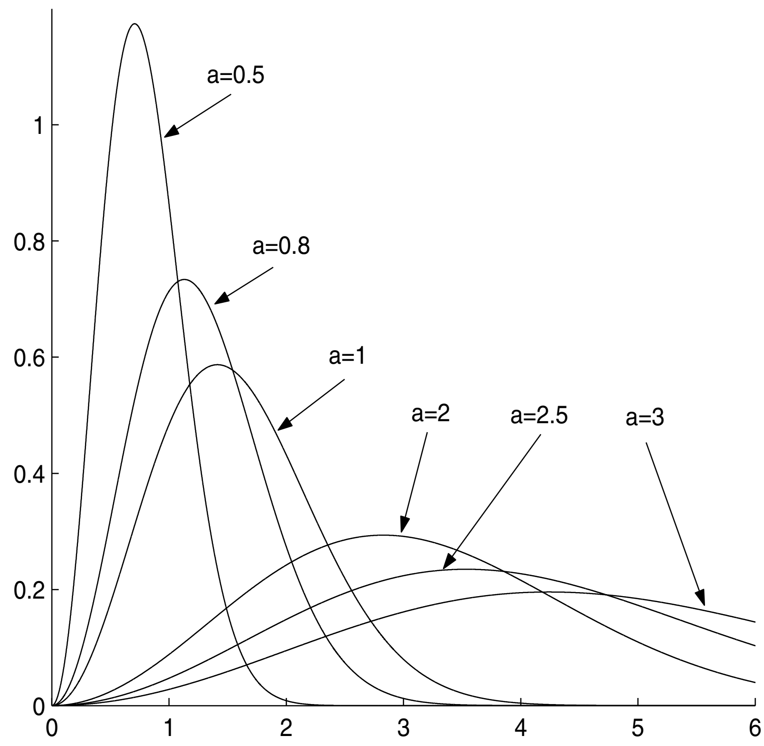
Густина

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{a^3}\exp\left\{-\frac{x^2}{2a^2}\right\}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = P\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{2a^2}\right), \quad x \geq 0.$$

Моменти

$$m_r = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k k! a^r, & r = 2k-1, \\ (r+1)!! a^r, & r = 2k. \end{cases}$$

Специјално,

$$m_1 = a\sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 1.596a, \quad D(X) = a^2\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \approx 0.6735a^2,$$

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} a^3 \left(\frac{16}{\pi} - 5\right) \approx 0.1483a^3, \quad \mu_4 = a^4\left(15 - \frac{8}{\pi}\right) \approx 12.4535a^4.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) \approx 1.414a, \quad Me(X) \approx 1.538a.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{16/\pi - 5}{(3 - 8/\pi)^{3/2}} \approx 0.48569, \quad \pi_2(X) = \frac{15 - 8/\pi}{(3 - 8/\pi)^2} - 3 \approx 0.10818.$$

Нека својства

1. $Q_1 \approx 1.10115\, a, \quad Q_3 \approx 2.02691\, a.$
2. Расподела је позитивно асиметрична.

Везе са другим расподелама

1. $MAX(a) = \chi(6, 0, a)$
2. Ако $X : MAX(a)$, тада $\frac{X^2}{2a^2} : G(3/2)$.

Примена

Физика (кинетичка теорија).

Напомене

1. Користе се и следећи облици за густину расподеле

$$g(x) = \frac{4}{b^3\sqrt{\pi}} x^2 \exp\left\{-\frac{x^2}{b^2}\right\}, \quad g(x) = \frac{4c^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-c^2x^2},$$

   при чему је $b = a\sqrt{2}$ и $c = \dfrac{1}{a\sqrt{2}}$.

2. Расподела је добила име по шкотском физичару Максвелу (James Clerk Maxwell, 1831-1879).

3. Ако је $v = (v_x, v_y, v_z)$ вектор брзине чија свака компонента има $N(0, \sigma^2)$ расподелу, тада $|v|^2/\sigma^2$ има $\chi^2(3)$ расподелу, а $|v|$ има $MAX(\sigma)$ расподелу.

Генерисање

Постоји више могућности.

1. Из једнакости $F(x) = y$ следи да је $P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{x^2}{2a^2}\right) = y$, па је

$$x = a\sqrt{2P^{-1}\left(\frac{3}{2}, y\right)},$$

   где је P^{-1} инверзна функција непотпуне гама функције.

2. Случајан број x из $MAX(a)$ расподеле може да се добије са

$$x = \frac{1}{a}\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2},$$

   где су z_1, z_2, z_3 независни случајни бројеви из $N(0, 1)$ расподеле.

3. Случајан број x из $MAX(a)$ расподеле може да се добије са $x = z^2/2a^2$, где је z случајан број из $G_1(3/2)$ расподеле.

108

МОЈАЛОВА РАСПОДЕЛА *MO*

(Стандардна)

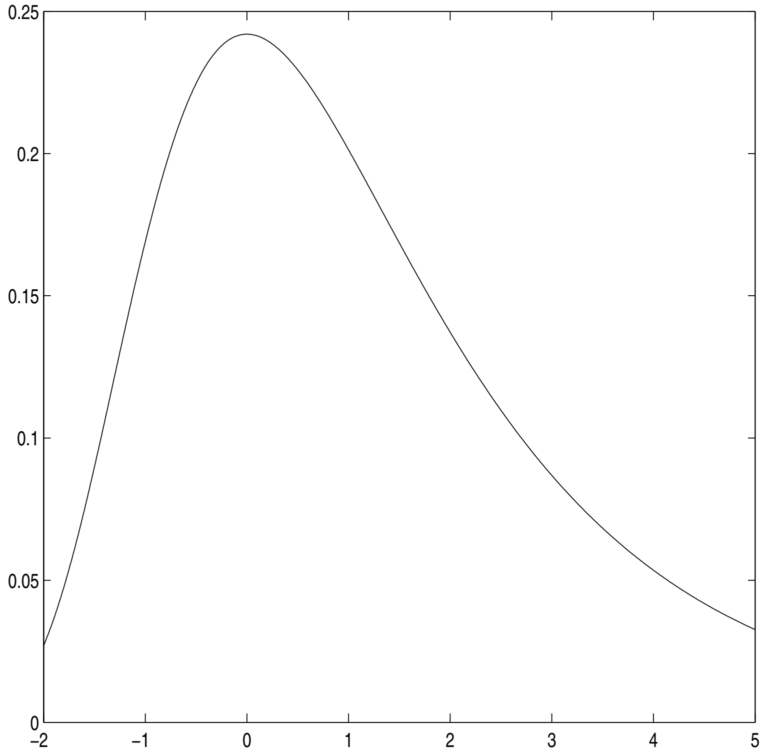
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x + e^{-x})\right\}, \quad x \in R.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - P\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{-x}}{2}\right), \quad x \in R.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{2^{-it}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2} - it\right).$$

Моменти

$$m_1 = \ln 2 + \gamma \approx 1.27036, \quad \mu_2 = \frac{\pi^2}{2} \approx 4.9348, \quad \mu_4 = \frac{7}{4}\pi^4 \approx 170.4659.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{28\sqrt{2}}{\pi^3}\zeta(3) \approx 1.53514, \quad \pi_2(X) = 4.$$

Примена

Физика, хемија.

Напомена

Распоелу је увео Мојал (J. E. Moyal) 1955. године проучавајући проблем јонизације.

Генерисање

Из $F(x) = y$ следи

$$1 - P\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{-x}}{2}\right) = y,$$

па случајан број из MO расподеле може да се добије са

$$x = -\ln(2P^{-1}(1/2, 1 - y)),$$

где је P^{-1} инверзна функцијанепотпуне гама функције.

109

НАКАГАМИЈЕВА РАСПОДЕЛА $NK(a,b,c)$

(тропараметарска)

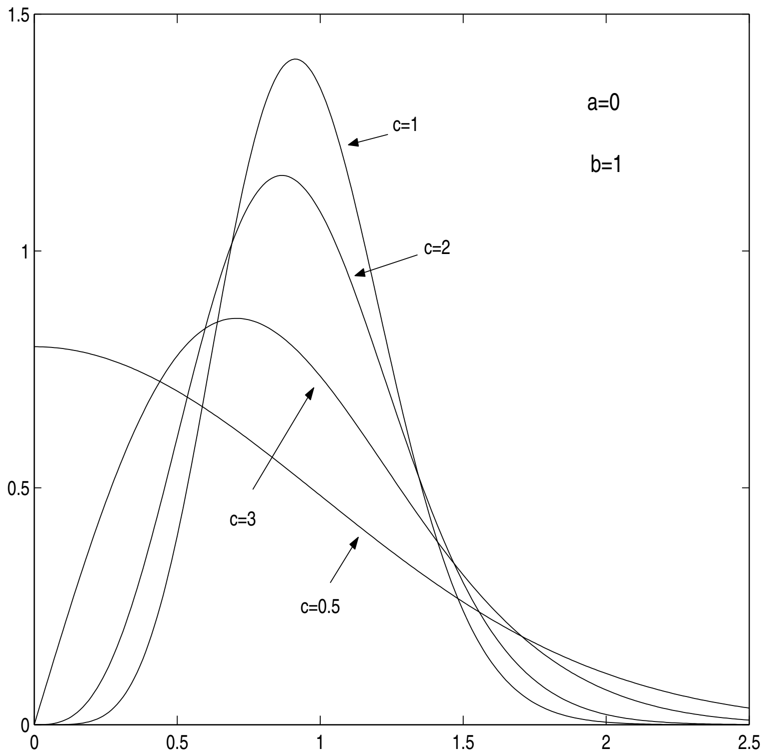
Густина

$$g(x)=\frac{2c^c}{b\Gamma(c)}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{2c-1}exp\left\{-c\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right\},\quad x>a.$$

Параметри

a $(a\in R)$ – параметар локације, b $(b>0)$ – параметар скалирања, c $(c>0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \Gamma\left(c, c\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right), \quad x > a.$$

Моменти

$$m_1 = a + b\frac{\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{c}\Gamma(c)}, \quad D(X) = b^2 - \frac{b^2\Gamma^2\left(c+\frac{1}{2}\right)}{c\Gamma^2(c)}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2\Gamma^3\left(c+\frac{1}{2}\right) + \Gamma^2(c)\left(\Gamma\left(c+\frac{3}{2}\right) - 3c\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma^3(c)\left(c - \dfrac{c^2\Gamma^2\left(c+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(c+1)}\right)^{3/2}},$$

$$\pi_2(X) = \frac{-6\Gamma^4\left(c+\frac{1}{2}\right) - 3c^2\Gamma^4(c) + \Gamma^3(c)\Gamma(c+2) + 2^{3-4c}(4c-1)\pi\Gamma^2(2c)}{\left(\Gamma^2\left(c+\frac{1}{2}\right) - c\Gamma^2(c)\right)^2}.$$

110

НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $N(0,1)$

(стандардна)

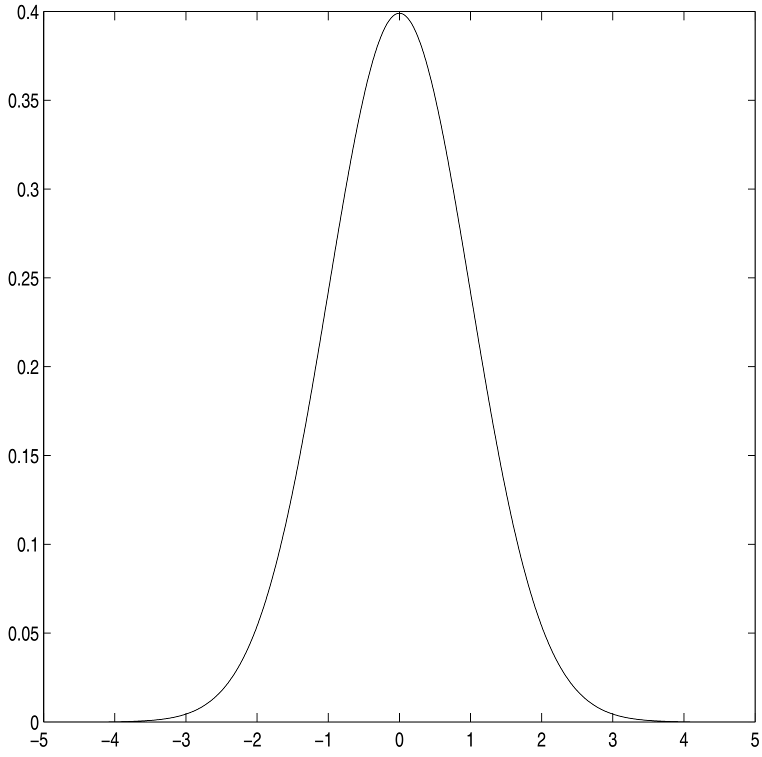
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}, \quad x \in R.$$

Параметри

Нема параметара.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{er}f\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad x \in R,$$

где је $\mathrm{er}f$ функција грешке (видети Додатак). Уобичајена ознака за функцију расподеле стандарне нормалне расподеле је Φ.

Ентропија

$$H(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = e^{-t^2/2}.$$

Моменти

$$m_r = \begin{cases} (2k-1)!!, & r = 2k \\ 0, & r = 2k-1 \end{cases}, \quad k \in N.$$

Специјално,

$$m_2 = 1, \quad m_4 = 3, \quad D(X) = 1.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \pi_2(X) = 0.$$

Нека својства

1. Густина расподеле је симетрична у односу на $x = 0$.
2. Максимум функције густине је $g(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.3989$.
3. Превојне тачке функције густине су $x = -1$ и $x = 1$.
4. Расподела има 'танке' крајеве. На пример,

$$P\{|X| > 2\} \approx 0.0455, \quad P\{|X| > 3\} \approx 0.0027, \quad P\{|X| > 4|\} \approx 0.000063.$$

5. За $x \to \infty$ вази

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

или прецизније

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \le 1-\Phi(x) \le \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

6. Ако $X, Y : N(0,1)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада
$$\frac{2XY}{\sqrt{X^2+Y^2}} : N(0,1), \quad \frac{X^2-Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}} : N(0,1).$$

Везе са другим расподелама

1. Ако $X_1,\ldots,X_n : N(m,\sigma^2)$, тада $\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} : N(0,1)$.

2. Ако $X : N(0,1)$, тада $X^2 : G_3(1/2, 2, 0)$.

3. Ако $X, Y : N(0,1)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада
$$\frac{X^2+Y^2}{2} : E(1), \quad \frac{X}{Y} : C(1), \quad \frac{X^2}{Y^2} : F(1,1).$$

4. Ако $X, Y : N(0,1)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $\dfrac{X^2}{X^2+Y^2} : AS2$.

5. Ако $X_1, X_2, X_3, X_4 : N(0,1)$ и ако су X_1, X_2, X_3, X_4 независне случајне променљиве, тада
$$\frac{X_1^2+X_2^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2} : U(0,1).$$

6. Ако $X_1,\ldots,X_n : N(0,1)$ и ако су $X_1,\ldots,X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2 : \chi^2(n).$$

7. Ако $X_1,\ldots,X_n : N(0,1)$ и ако су $X_1,\ldots,X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$\frac{X_1^2}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2} : B_2\left(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2}\right).$$

8. Ако $X_1,\ldots,X_n : N(0,1)$ и ако су $X_1,\ldots,X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$\sqrt{(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)} : \chi(n).$$

9. Ако $X, X_1, \ldots, X_n \ : \ N(0,1)$ и ако су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне промењљиве, тада

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)}} \ : \ t(n).$$

Напомена

1. Расподела се зове и Гаусова стандардна расподела по великом немачком математичару Гаусу (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855).

2. График густине има звонасти облик.

Генерисање

Постоји више различитих метода за генерисање случајног броја из $N(0,1)$ расподеле. На пример,

1. Ако је u_n збир n случајних бројева из $U(0,1)$ расподеле и ако је

$$x_n = \frac{u_n - n/2}{\sqrt{n/12}},$$

тада на основу централне граничне теореме следи да је број x_n из расподеле која је приближно нормална за велике врдности n. У пракси је чак довољно узети $n > 12$.

2. Ако су u и v случајни бројеви из $U(0,1)$ расподеле, тада су бројеви x и y, дати са

$$x = \sqrt{-2\ln u}\sin 2\pi v, \quad y = \sqrt{-2\ln u}\cos 2\pi v,$$

независни случајни бројеви из $N(0,1)$ расподеле.

3. Нека су u и v случајни бројеви из $U(-1,1)$ расподеле и нека је

$$w = u^2 + v^2, \quad z = \sqrt{-2\frac{\ln w}{w}}.$$

Ако је $w \leq 1$, тада су uz и vz независни случајни бројеви из $N(0,1)$ расподеле. У противном ($w > 1$), генерисати поново u и v.

111

НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $N(m,\sigma^2)$

(двопараметарска)

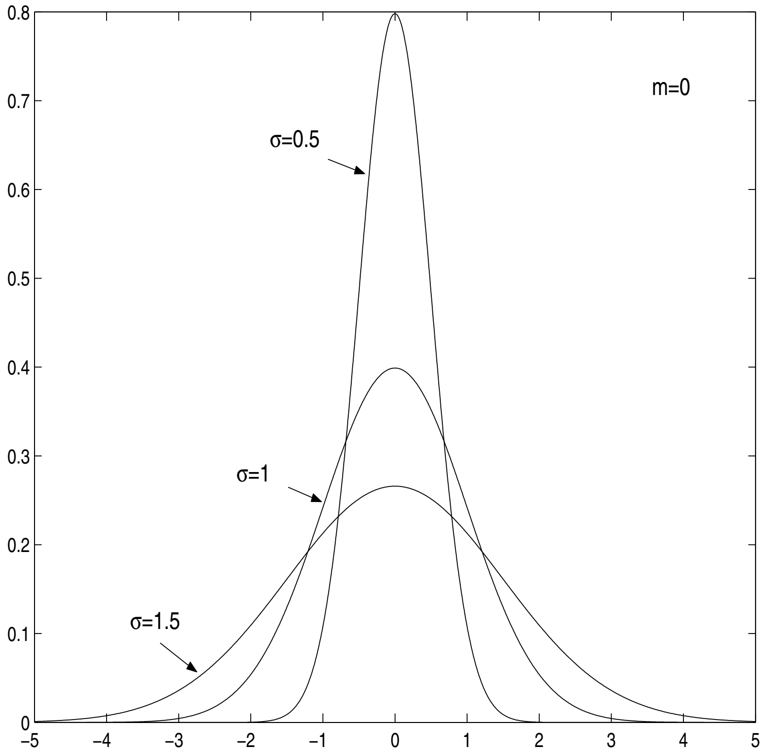
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \in R.$$

Параметри

m $(m \in R)$ – параметар локације, σ $(\sigma > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{er}f\,\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad x \in R,$$

где је Φ функција расподеле стандардне нормалне расподеле $N(0,1)$.

Ентропија

$$H(X) = \frac{1}{2} + \ln(\sigma\sqrt{2\pi}).$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \exp\left\{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = \exp\left\{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}.$$

Моменти

$$m_r = \sum_{j=0}^{r} m^j \sigma^{r-j} \alpha_{r-j}, \quad r \in N,$$

где је α_k момената реда k стандардне нормалне расподеле $N(0,1)$. Специјално,

$$m_1 = m, \quad m_2 = m^2 + \sigma^2, \quad m_3 = m^3 + 3m\sigma^2, \quad m_4 = m^4 + 6m^2\sigma^2 + 3\sigma^4.$$

Важи и

$$E|X|^r = \begin{cases} (r-1)!!\sigma^r, & r = 2k, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}2^r r!\sigma^r, & r = 2k+1, \end{cases} \qquad k \in N.$$

За централне моменте важи

$$\mu_r = \sigma^r \alpha_r, \quad r \in N,$$

као и

$$E|X-m|^r = \frac{\sigma^r}{\sqrt{\pi}} 2^{r/2} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right), \quad r > -1.$$

Специјално,

$$\mu_2 = D(X) = \sigma^2, \quad \mu_4 = 3\sigma^4.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = m.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \pi_2(X) = 0.$$

Функција веродостојности

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - m)^2}{2\sigma^2}\right\},$$
$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - m)^2}{2\sigma^2}.$$

Оцене параметара

Како је

$$\frac{\partial}{\partial m}\ln L = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m),$$
$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2}\ln L = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(C_i - m)^2,$$

оцене $\widehat{m}$ и $\widehat{\sigma^2}$ за m и σ^2, по методи максималне веродостјности, дате су са

$$\widehat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2.$$

Према томе, узорачка средина је оцена за m и она је непристрасна, а узорачка дисперзија је оцена за σ^2 и она је пристрасна. Уместо оцене $\widehat{\sigma^2}$ може да се узме оцена $\widetilde{\sigma^2}$ која је једнака модификованој узорачкој средини и која је непристрасна.

Одговарајуће оцене $\widehat{\sigma}$ и $\widetilde{\sigma}$ парамнетра σ су дате са $\widehat{\sigma} = S_n$ и $\widetilde{\sigma} = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}S_n$, при чему је прва пристрасна,

$$E(S) = \frac{\sqrt{2/n}\,\Gamma\,(n/2)}{\Gamma\,(n/2 - 1/2)}\sigma,$$

а друга непристрасна.
Ако је параметар m познат, оцена за σ^2 је узорачка дисперзија D_n^2. За оцену параметра m може да се користи и узорачка медијана која је такође непристрасна оцена са дисперзијом $\dfrac{\pi\sigma^2}{2n}$.

Нека својства

1. Густина расподеле је симетрична у односу на $x = m$.
2. Максимум густине је $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
3. $Q_1 = a - 0.6745\sigma, \quad Q_3 = a + 0.6745\sigma.$
4. Превојне тачке густине су $x = m + \sigma$ и $x = m - \sigma$.
5. Ако $X \ : \ N(m, \sigma^2)$, тада је $P\{|X - m| < 3\sigma\} \approx 0.997$. Ова чињеница је позната као 'правило 3σ'.
6. Од свих расподела са средњом вредношћу m и дисперзијом σ^2, највећу ентропију има нормална расподела $N(m, \sigma^2)$.
7. Нормална расподела припада класи стабилних расподела, а самим тим и класи бесконачно дељивих расподела.
8. Ако $X : N(m, \sigma^2)$, тада $aX + b : N(am + b, a^2\sigma^2)$.
9. Ако $X_1, \dots, X_n \ : \ N(m, \sigma^2)$ и ако су $X_1, \dots, X_n$ независне случајне променљиве, тада $\overline{X}_n \ : \ N(m, \sigma^2/n)$, а $\overline{X}_n$ и S_n^2 су независне величине.
10. Ако $X_i : N(m_i, \sigma_i^2)$ за $i = 1, \dots, n$ и ако су $X_1, \dots, X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$X_1 + \cdots + X_n \ : \ N(m_1 + \cdots + m_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2).$$
11. $X_i \ : \ N(m_i, \sigma_i^2)$ за $i = 1, \dots, n$ и ако су $X_1, \dots, X_n$ независне случајне променљиве, тада су случајне променљиве Y и Z дате са
$$Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k, \quad Z = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k$$
независне ако и само ако је $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a a_k b_k \sigma_k^2 = 0$. На пример, ако $X_1, X_2 \ :$ $N(m, \sigma^2)$ и ако су X_1 и X_2 независне променљиве, тада су и $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ независне случајне променљиве, при чему важи и обрнуто тврђење (Бернштајнова теорема).

Везе са другим расподелама

1. Ако $X_i : N(m, \sigma^2)$ за $i = 1, \dots, n$ и ако су $X_1, \dots, X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$\frac{D_n^2}{\sigma^2} \ : \ \chi^2(n), \quad \frac{S_n^2}{\sigma^2} \ : \ \chi^2(n-1), \quad \frac{\overline{X}_n - n}{S_n}\sqrt{n-1} \ : \ t(n-1).$$

2. Ако $X, Y\ :\ N(0,\sigma^2)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $\sqrt{X^2+Y^2}\ :\ R_1(\sigma)$.

3. Ако $X\ :\ N(0,\sigma_1^2)$, $Y\ :\ N(0,\sigma_2^2)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $X/Y\ :\ N(0,\sigma_1^2/\sigma_2^2)$, а случајна променљива XY има расподелу чија је густина дата са

$$g(x) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\pi}K_0\left(\frac{|x|}{\sigma_1\sigma_2}\right), \quad x \in R,$$

где је K_0 модификована Беселова функција (видети Додатак).

4. Ако $X\ :\ N(m,\sigma^2)$, тада $e^X\ :\ LN_2(m,\sigma)$.

5. Ако $X_1,\dots,X_n\ :\ N(m,\sigma^2)$ и ако су $X_1,\dots,X_n$ независне случајне променљиве, тада

$$(X_1-m)^2+(X_2-m)^2+\cdots+(X_n-m)^2\ :\ G_2\left(\frac{n}{2},2\sigma^2\right).$$

Напомене

1. Други назив за нормалну расподелу је *Гаусова расподела* иако је расподелу први увео и користио у апроксимацији биномне расподеле енглески математичар Муавр (Abraham de Moivre, 1667-1754) још 1733. године. Користе се и називи *Гаусов закон*, Гаус-Лапласова расподела, *други Лапласов закон*.

2. Грешке при мерењу неке величине често имају нормалну расподелу.

3. За проверу хипотезе да дато обележје има нормалну расподелу користе се разни тестови, као што су Kolmogorov-Smirnov, Liliiiefors, Anderson-Darling, Ryan-Joiner, Shapiro-Wilk, Jarque-Bera, normal probability plot (rankit plot).

4. Значај нормалне расподеле је и у томе што добро апроксимира неке друге расподеле, како непрекидне, тако и дискретне. За случај апроксимације биномне расподеле нормалном, одговарајуће услове и тврђење даје Муавр-Лапласова теорема.

5. Нормална расподела, под одређеним условима, добро апроксимира и збир великог броја независних случајних променљивих са истом расподелом. Постоји више тврђења која се на то односе и свако од њих носи назив *централна гранична теорема*.

Генерисање

Ако је x случајан број из $N(0,1)$ расподеле, тада је $y = m + \sigma x$ случајн број из $N(m,\sigma^2)$ расподеле.

112

НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $NZ(m, \sigma^2, T_1, T_2)$

(засечена на $[T_1, T_2]$)

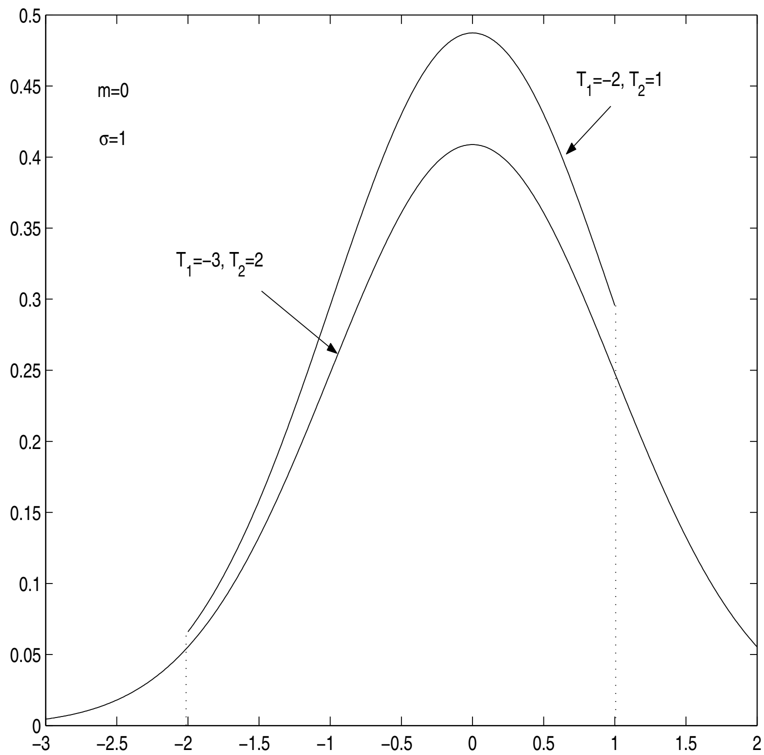
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{T_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{T_1 - m}{\sigma}\right)} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad T_1 \le x \le T_2.$$

Параметри

m, T_1, T_2 $(m, T_1, T_2 \in R,\ T_1 < m < T_2)$ – параметри локације
σ $(\sigma > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



113

НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $NZD(m,\sigma^2,T)$

$\big($засечена на $(-\infty,T]\big)$

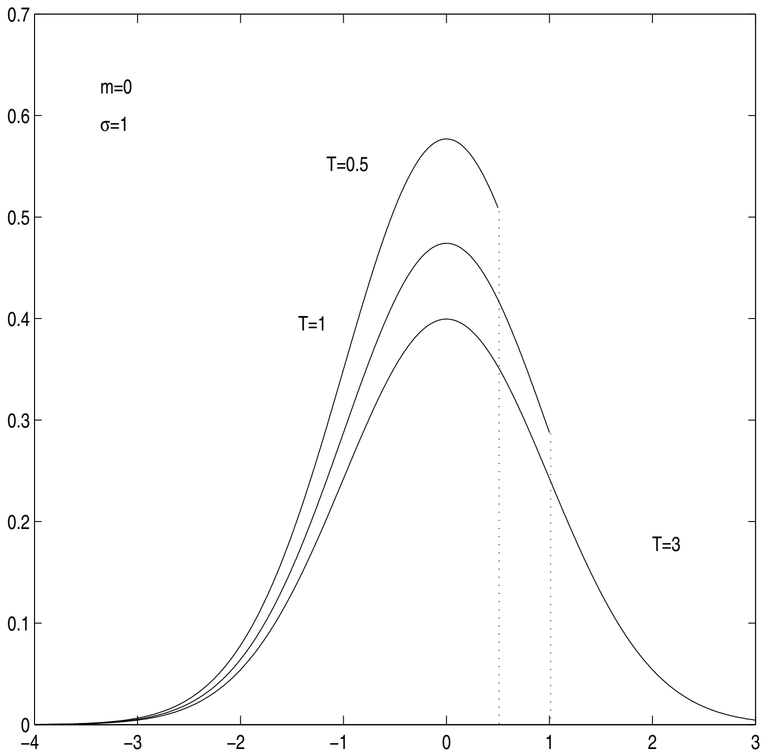
Густина

$$g(x) = \frac{1}{\Phi\left(\dfrac{T-m}{\sigma}\right)} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \leq T.$$

Параметри

m,T $(m,T \in R, m < T)$ – параметри локације,
σ $(\sigma > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



114

НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $NZL(m,\sigma^2,T)$

(засечена на $[T,+\infty)$)

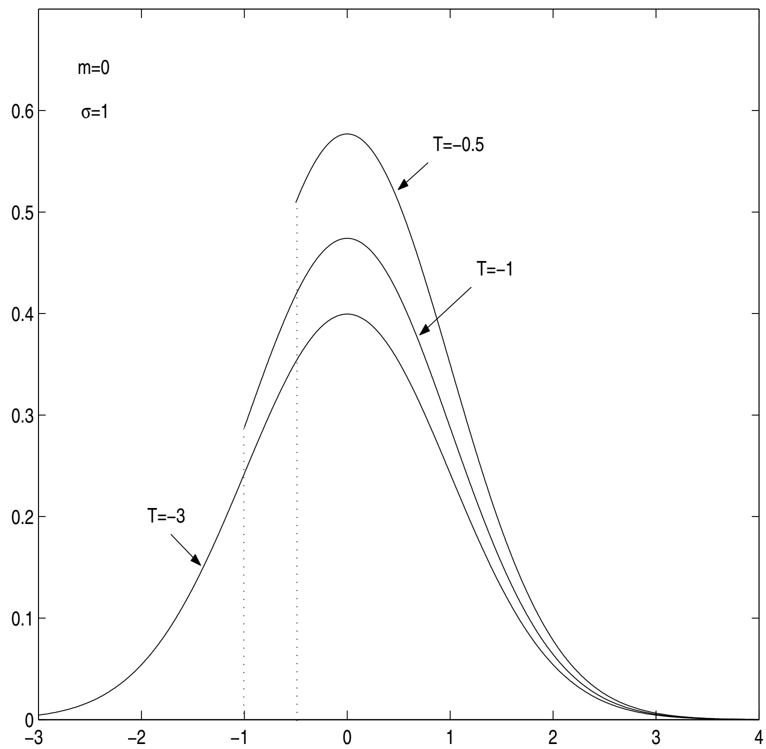
Густина

$$g(x)=\frac{1}{1-\Phi\left(\dfrac{T-m}{\sigma}\right)}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right\},\qquad x\geq T.$$

Параметри

m,T $(m,T\in R,\ T<m)$ – параметри локације,
σ $(\sigma>0)$ – параметар скалирања.

График густине



115

НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА $NP(m, \sigma^2)$

(пресавијена, засечена на $[m, +\infty)$)

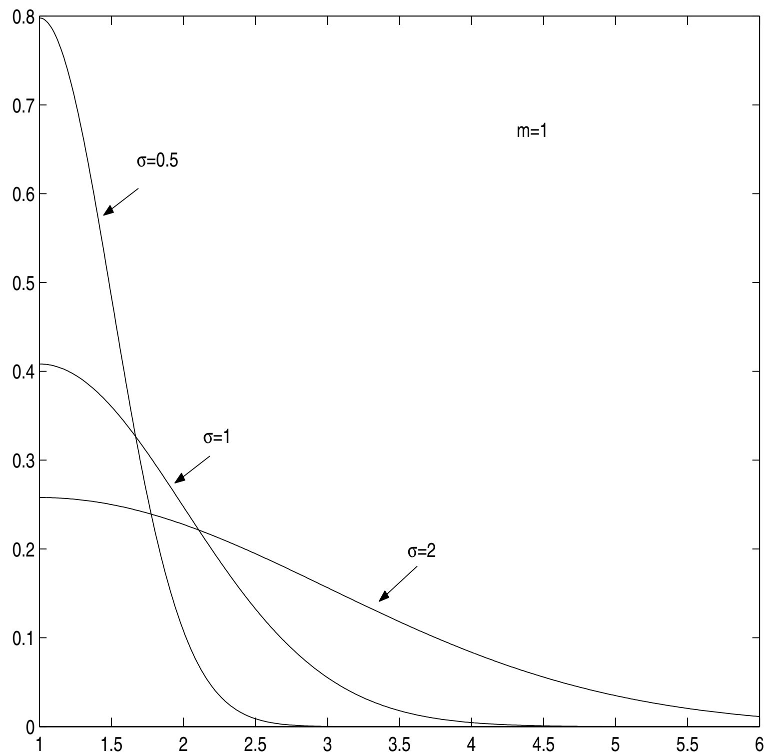
Густина

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \geq m.$$

Параметри

m $(m \in R)$ – параметар локације,
σ $(\sigma > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = a\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad x \geq m.$$

Моменти

$$m_1 = m + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \approx m + 0.798\sigma, \quad \mu_2 = D(X) = \frac{\pi-2}{\pi}\sigma^2 \approx 0.363\sigma^2.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = m, \quad Me(X) \approx m + 0.6745\sigma.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{(\pi-2)^{3/2}} \approx 0.9953, \quad \pi_2(X) = \frac{8(\pi-3)}{(\pi-2)^2} \approx 0.869.$$

Оцене параметара

Ако је параметар m познат, оцена $\widehat{\sigma}^2$ за σ^2, по методи максималне веродостојности, је узорачка дисперзија D_n^2.

Везе са другим расподелама

1. $NP(m,\sigma^2) = NZL(m,\sigma^2,m)$.
2. Ако $X : N(0,1)$, тада $m + \sigma|X| : NP(m,\sigma^2)$.
3. Ако $X_1,\ldots,X_n : NP(m,\sigma^2)$ и ако су $X_1,\ldots,X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$(X_1-m)^2 + (X_2-m)^2 + \cdots + (X_n-m)^2 : G_2\left(\frac{n}{2}, 2\sigma^2\right).$$

Напомене

1. Иако је распоела специјалан случај засечене расподеле са леве стране, она има посебно име. У литератури на енглеском позната је као folded normal distribution или half normal distribution.
2. За $m=0$ расподела је позната и као error function distribution, а њена функција расподеле је функција грешке erf.

116

ПАРЕТОВА РАСПОДЕЛА $PAR(a)$

(стандардна, једнопараметарска)

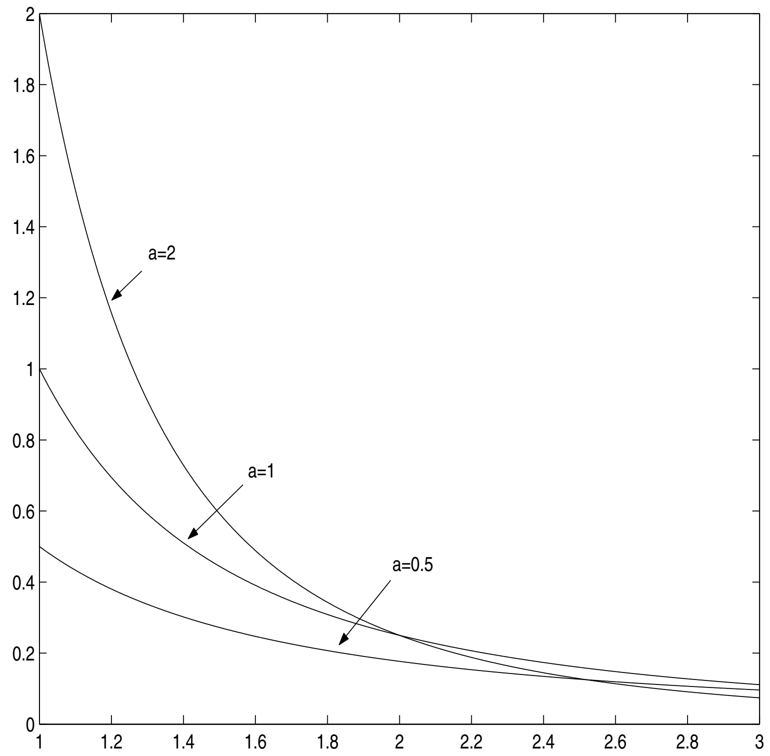
Густина

$$g(x) = \frac{a}{x^{a+1}}, \quad x \geq 1.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^a}, \quad x \geq 1.$$

Моменти

$$m_1 = \frac{a}{a-1}\ (a > 1), \quad D(X) = \left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a-1}\right)^2,\ (a > 2).$$

Модус, медијана и квантили

$$Mo(X) = 1, \quad Me(X) = 2^{1/a}.$$

Оцене параметара

Оцена $\widehat{a}$ непознатог параметра a, по методи максималне веродостојности, дата је са

$$\widehat{a} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

Нека својства

За g и F важи једнакост $\dfrac{g(x)}{1 - F(x)} = \dfrac{a}{x}$.

Напомене

1. Расподела је добила име по италијанском економисти и математичару Парету (Wilfredo Pareto, 1848-1923).

2. Расподела се зове и *стандардна Паретова*. Ако се почетак транслира у нулу, тада је

   $$g(x) = \frac{a}{(1+x)^{a+1}}, \quad x \geq 0,$$

   а ако се транслира за c, тада је

   $$g(x) = \frac{a}{(x-c)^{a+1}}, \quad x \geq c + 1.$$

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = 1/u^{1/a}$ случајан број из $P_1(a)$ расподеле.

117

ПАРЕТОВА РАСПОДЕЛА $PAR2(a, b)$

(двопараметарска)

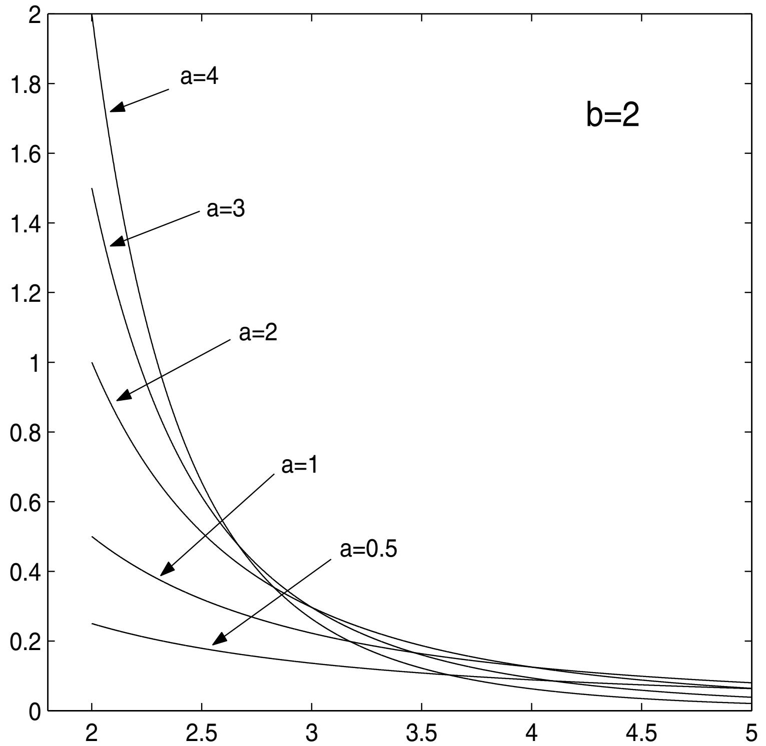
Густина

$$g(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad x \geq b.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a, \quad x \geq b.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = a(-ibt)^a \Gamma(-a, -ibt).$$

Моменти

$$m_r = \frac{ab^r}{a-r} \ (a > r), \quad \mu_2 = D(X) = \frac{b^2 a}{(a-2)(a-1)^2} \ (a > 2),$$

$$\mu_3 = \frac{2a(a+1)b^3}{(a-1)^3(a-2)(a-3)} \ (a > 3), \quad \mu_4 = \frac{3a(3a^3+a+2)b^4}{(a-1)^4(a-2)(a-3)(a-4)} \ (a > 4).$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = b, \quad Me(X) = b2^{1/a}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2(a+1)}{a-3}\sqrt{\frac{a-2}{a}}, \quad \pi_2(X) = 6\frac{a^3+a^2-6a-2}{a(a-3)(a-4)}.$$

Функција веродостојности

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{ab^a}{X_i^{a+1}} = a^n b^{an} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i^{a+1}}.$$

$$\ln L = n \ln a + an \ln b - (a+1)\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ по методи максималне веродостојности су

$$\widehat{a} = n\left(\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{\widehat{b}}\right)^{-1}, \quad \widehat{b} = X_{\min},$$

при чему важи

$$\frac{2na}{\widehat{a}} \ : \ \chi^2(2n-2),$$

а $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ су међусобно независне оцене.

Ако је параметар b познат, тада је

$$\hat{a} = n\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{X_i}{b}\right)^{-1},$$

при чему је

$$E\hat{a} = \frac{n}{n-1}a, \quad D(\hat{a}) = \frac{n^2a^2}{(n-1)^2(n-2)},$$

као и

$$\frac{2na}{\hat{a}} \ : \ \chi^2(2n).$$

Метода момената

Оцене $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ по методи момената

$$\widetilde{a} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\widehat{a}, \quad \widetilde{b} = \left(1 - \frac{1}{(n-1)\hat{a}}\right)\widehat{b},$$

су непристрасне и стабилне, при чему је

$$D(\widetilde{a}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 D(\widehat{a}), \quad D(\widetilde{b}) = \frac{b^2}{a(n-1)(na-2)}, \quad n > \frac{2}{a}.$$

Нека својства

1. Расподела је асиметрична удесно.

2. $Q_1 = b\left(\frac{4}{3}\right)^{1/a}, \quad Q_3 = 4^{1/a}b.$

3. $\pi_1(X) \to 2$ и $\pi_2(X) \to 6$ кад $a \to \infty$.

Везе са другим расподелама

1. Расподела је специјалан случај Пирсонове расподеле типа VI ($PIR6$)

2. $PAR2(a,1) = PAR(a)$.

3. $PAR2(a,b) = PAR4(a,b,b,1)$.

4. Ако $X \ : \ E(1)$, тада $be^{X/a} \ : \ PAR2(a,b)$.

5. Ако $X \ : \ PAR2(a,b)$, тада $2a\ln\frac{X}{b} \ : \ \chi^2(2)$.

Примена

Економија (анализа дохотка), астрономија (величина метеорита), метеорологија (брзина ветра), лингвистика, енергетика (резерве нафте на нафтоносним пољима).

Напомене

1. Расподелу је увео Парето (Wilfredo Marquis Pareto, 1848-1923) бавећи се проблемима у економији.

2. Расподела се зове и *Паретова расподела друге врсте*. Ако се почетак транслира у нулу, тада је

$$g(x) = \frac{ab^a}{(b+x)^{a+1}}, \quad x \geq 0,$$

а ако се транслира за c, тада је

$$g(x) = \frac{ab^a}{(x+b-c)^{a+1}}, \quad x \geq b+c.$$

Генерисање

Ако је $F(x) = y$, тада је $x = \dfrac{b}{(1-y)^{1/a}}$, па се низ случајних бројева са x Паретовом расподелом $PAR2(a,b)$ генерише помоћу низа случајних бројева y са униформном расподелом $U(0,1)$.

118

ПАРЕТОВА РАСПОДЕЛА $PARZ(a, b, c)$

(тропараметарска, засечена на $[b, c]$)

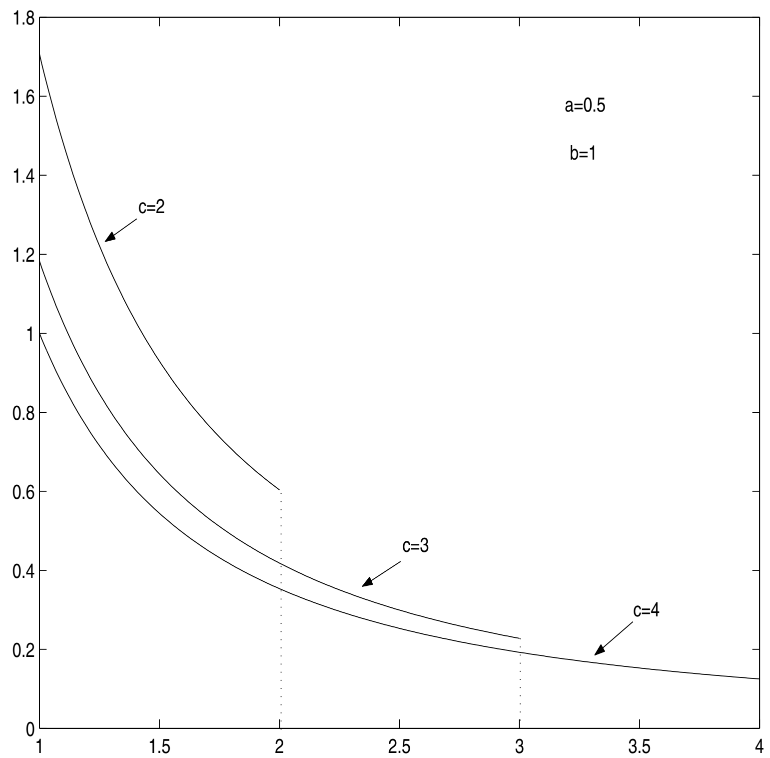
Густина

$$g(x) = \frac{a}{b}\left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^{a}\right)^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)^{a+1}, \quad b \leq x \leq c.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b, c $(b, c \in R)$ – параметри локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^a\right)^{-1} \left(1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a\right), \quad b \leq x \leq c.$$

Оцене параметара

Оцена $\widehat{a}$ максималне веродостојности за непознати паранетар a, кад су параметри b и c познати, добија се из једначине

$$\frac{1}{\widehat{a}} + \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^{\widehat{a}} \ln \frac{b}{c}}{1 - \left(\frac{b}{c}\right)^{\widehat{a}}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \ln b.$$

Примена

Расподела нафтних поља.

119

ПАРЕТОВА РАСПОДЕЛА $PAR3(a,b,c)$

(тропараметарска)

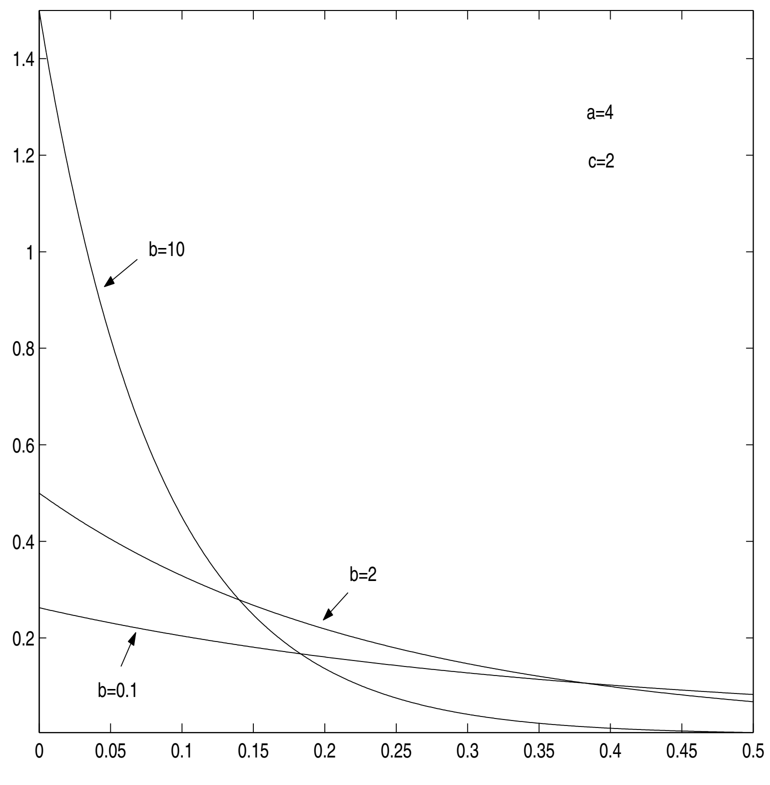
Густина

$$g(x) = \frac{a + bc + bx}{(x+c)^{a+1}} ce^{-bx}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

a, c $(a > 0, c > 0)$ – параметри облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



120

ПАРЕТОВА РАСПОДЕЛА $PAR4(a, b, c, d)$

(четворопараметарска)

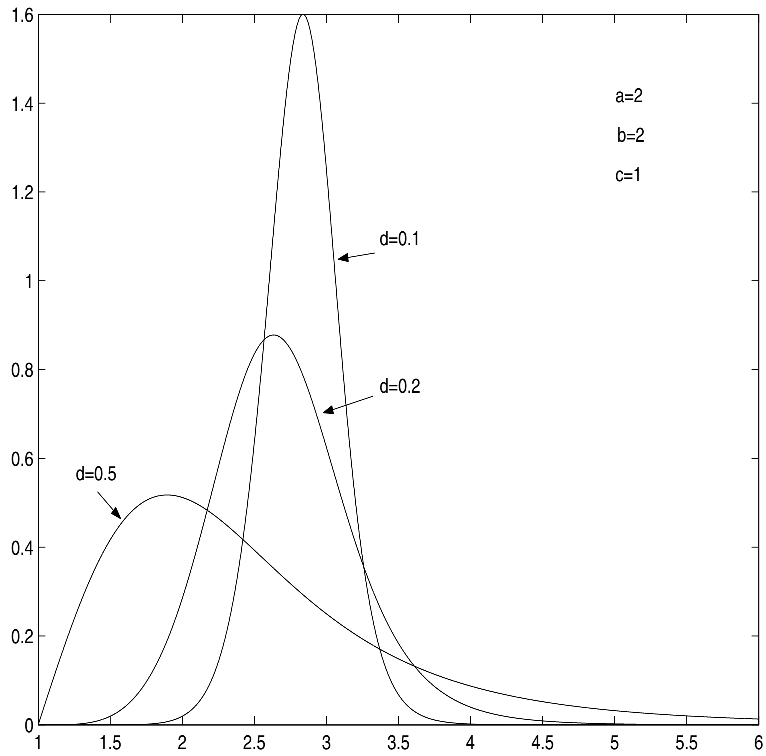
Густина

$$g(x) = \frac{a}{bd} \cdot \left(\frac{x-c}{b}\right)^{1/d-1} \cdot \left(1 + \left(\frac{x-c}{b}\right)^{1/d}\right)^{-a-1}, \quad x \geq c.$$

Параметри

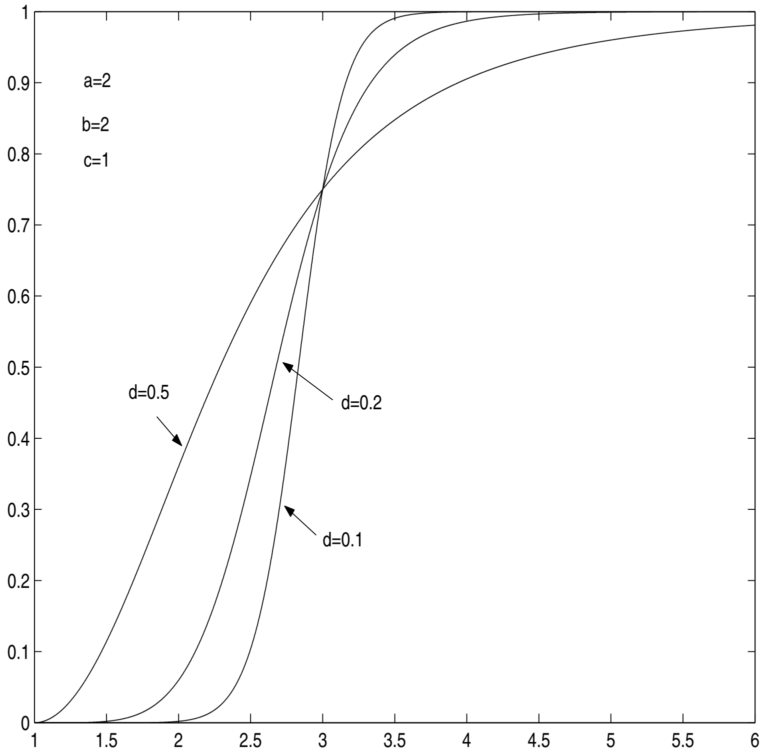
a, d $(a, d > 0)$ – параметри облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања, c $(c > 0)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x-c}{b}\right)^{1/d}\right)^{-a}, \quad x \geq c.$$



Везе са другим расподелама

1. $PAR4(a, 1, 1, 1) = PAR(a)$.

2. $PAR4(a, b, b, 1) = PAR2(a, b)$.

121

ПАРЕТОВА РАСПОДЕЛА $PARU1(a,b)$

(уопштена, двопараметарска)

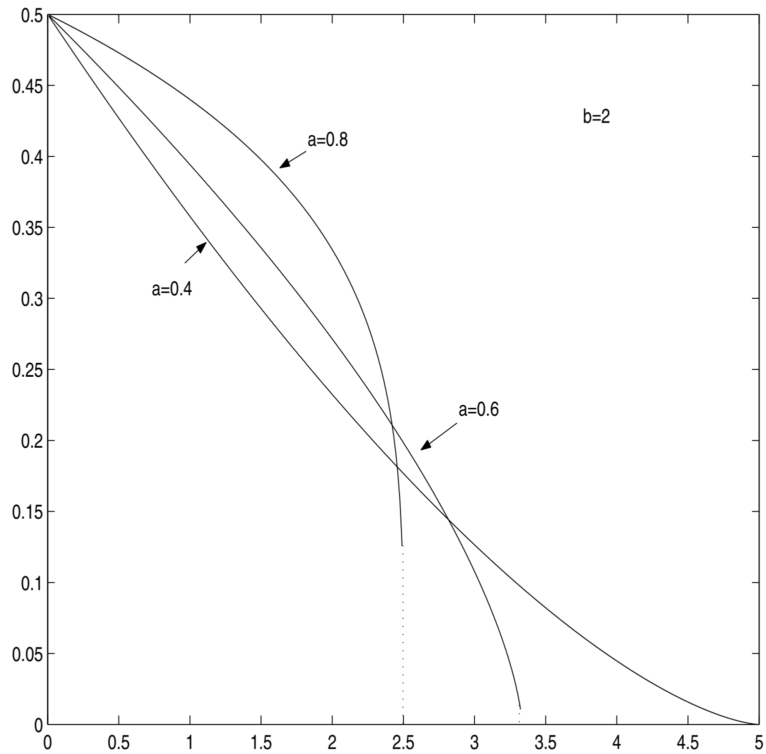
Густина

$$g(x) = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{ax}{b}\right)^{1/a-1}, \qquad \begin{array}{c} x > 0 \text{ за } a < 0 \\ 0 < x < \dfrac{b}{a} \text{ за } a > 0 \end{array}.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{ax}{b}\right)^{1/a}, \qquad \begin{array}{c} x > 0 \text{ за } a < 0 \\ 0 < x < \dfrac{b}{a} \text{ за } a > 0 \end{array}.$$

Моменти

$$m_1 = \frac{b}{1+a}, \qquad \mu_2 = \frac{b^2}{(1+a)^2(1+2a)}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2(1-a)}{1+3a}\sqrt{1+2a}, \qquad \pi_2(X) = \frac{3(1+3a)(3-a+2a^2)}{(1+3a)(1+4a)}.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ по методи максималне веродостојности се добијају из једнакости

$$\left(1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\widehat{a}}{\widehat{b}}X_i\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{\widehat{a}}{\widehat{b}}\right)^{-1}\right) = 1,$$

$$\widehat{a} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\widehat{a}}{\widehat{b}}X_i\right).$$

За $a < 1/2$ оцене су конзистентне, асимптотски нормалне и асимптотски ефикасне.

Метода момената

Оцене $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ по методи момената дате су са

$$\widetilde{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}^2}{S^2} - 1\right), \quad \widetilde{b} = \frac{1}{2}\overline{X}\left(\frac{\overline{X}^2}{S^2} + 1\right).$$

Нека својства

За g и F важи

$$\frac{g(x)}{1 - F(x)} = \frac{1}{b - ax}.$$

Везе са другим расподелама

1. $PARU1(1, b) = U(0, b)$.
2. Ако $X \,:\, PARU1(a, b)$, тада $-\dfrac{1}{a}\ln\left(1 - \dfrac{aX}{b}\right) \,:\, E_1(1)$.

Примена

Анализа екстремних вредности случајних низова, нарочито у хидрологији.

122

ПАРЕТОВА РАСПОДЕЛА $PARU2(a,b,c,d)$

(уопштена, четворопараметарска)

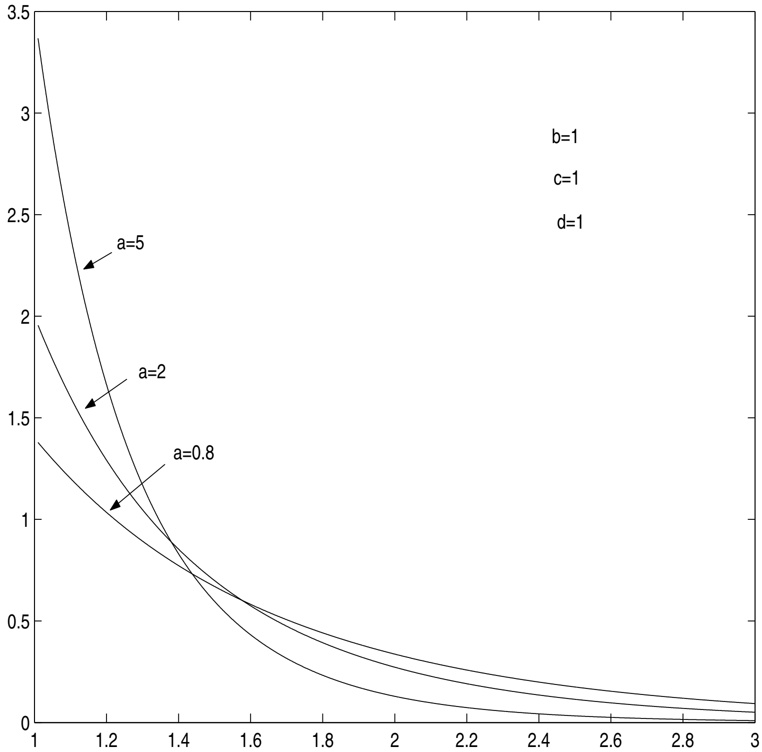
Густина

$$g(x) = \frac{a+bc+bx}{x+c}\left(\frac{d+c}{x+c}\right)^a e^{-b(x-d)}, \quad x \geq d.$$

Параметри

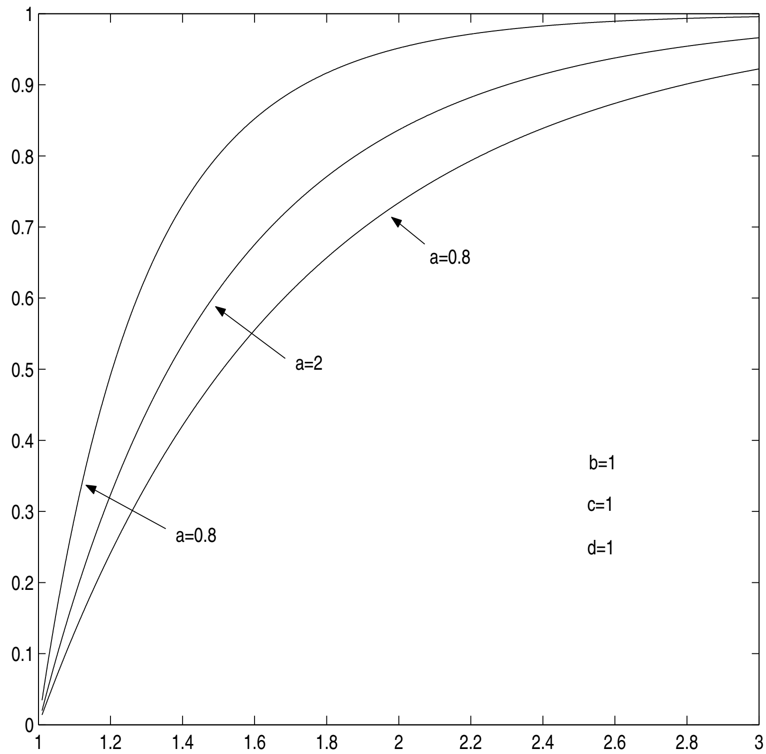
a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања,
c, d $(c, d > 0)$ – параметри локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \left(\frac{d+c}{x+c}\right)^a e^{-b(x-d)}, \quad x \geq d.$$



Напомена

Расподелу је увео Мартић Љубо 1965. године.

123

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR1(a,b,c)$

(тип I, тропараметарска)

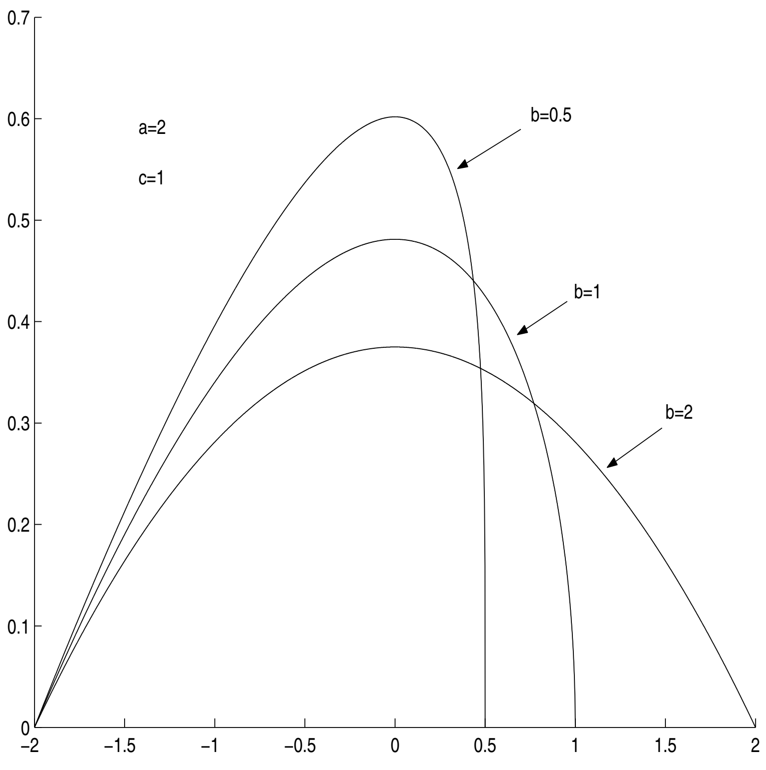
Густина

$$g(x) = K \cdot \left(1+\frac{x}{a}\right)^{c} \left(1-\frac{x}{b}\right)^{bc/a}, \quad -a \le x \le b.$$

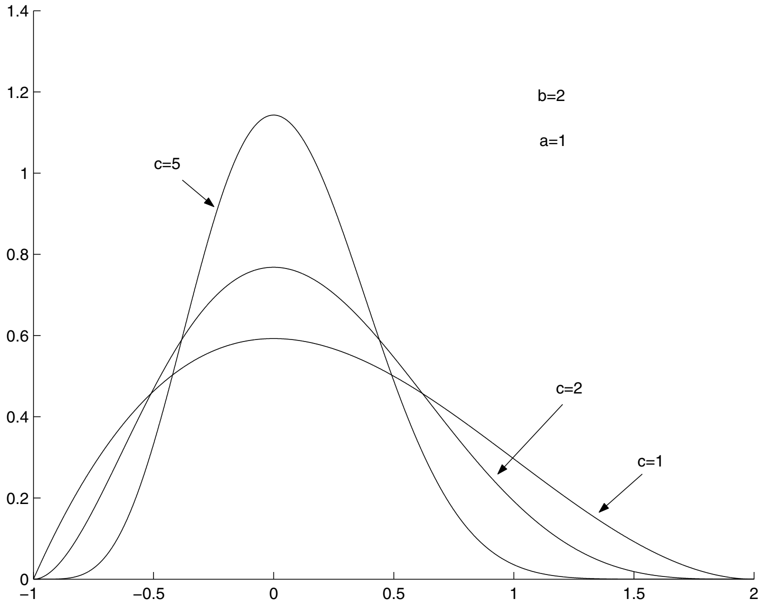
Параметри

a, b, c $(c, bc/a \ge -1)$ – параметри облика.

График густине



На следећој слици се види утицај параметра c.



Напомена

У функцији густине K је нормирајућа константа.

124

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR2(a,b)$

(тип II, двопараметарска)

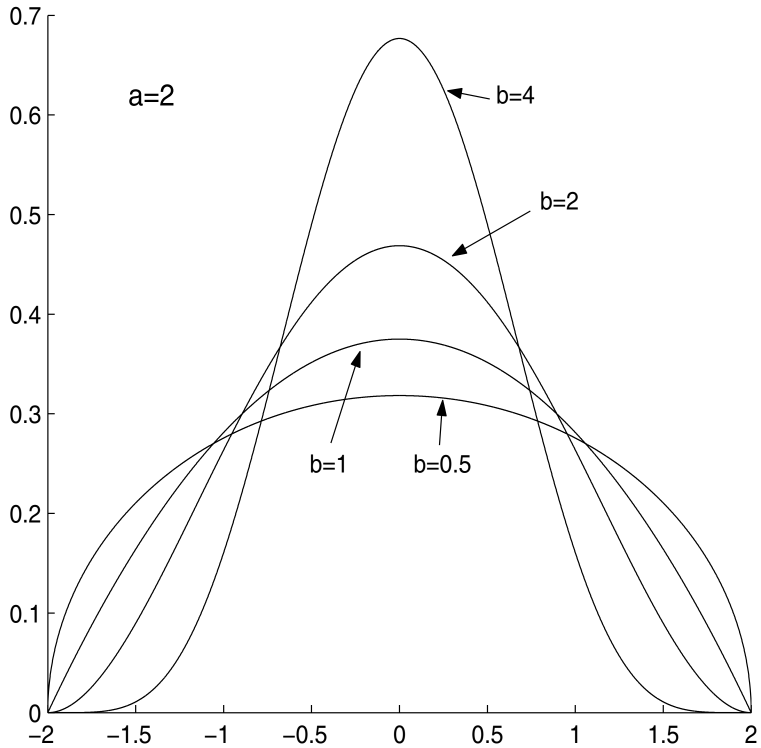
Густина

$$g(x) = K \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^b . \quad -1 \le x \le a.$$

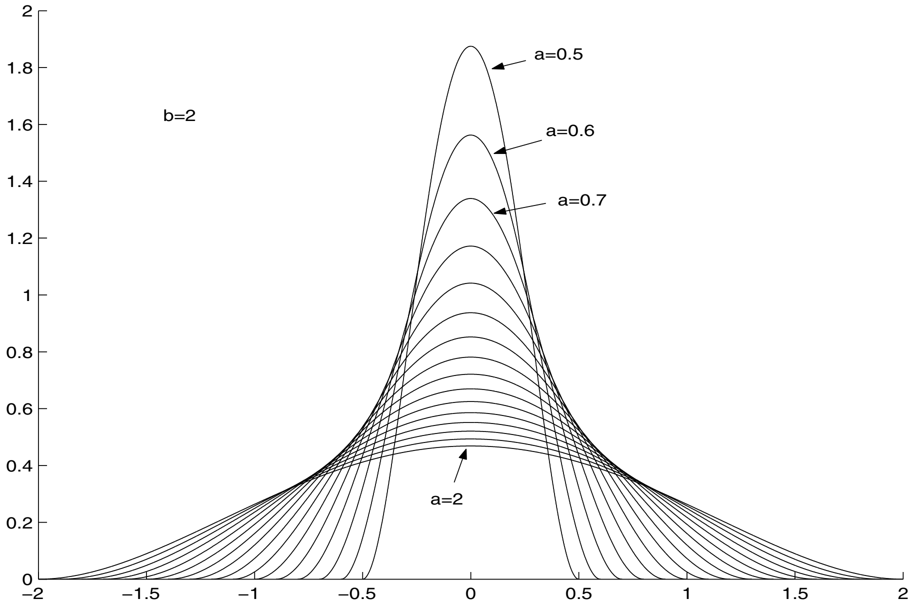
Параметри

b ($b \ge -1$) – параметар облика, a ($a > 0$) – параметар скалирања.

График густине



На следећој слици се види утицај параметра облика.



Напомена

У функцији густине K је нормирајућа константа.

125

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR3(a,b)$

(тип III, двопараметарска)

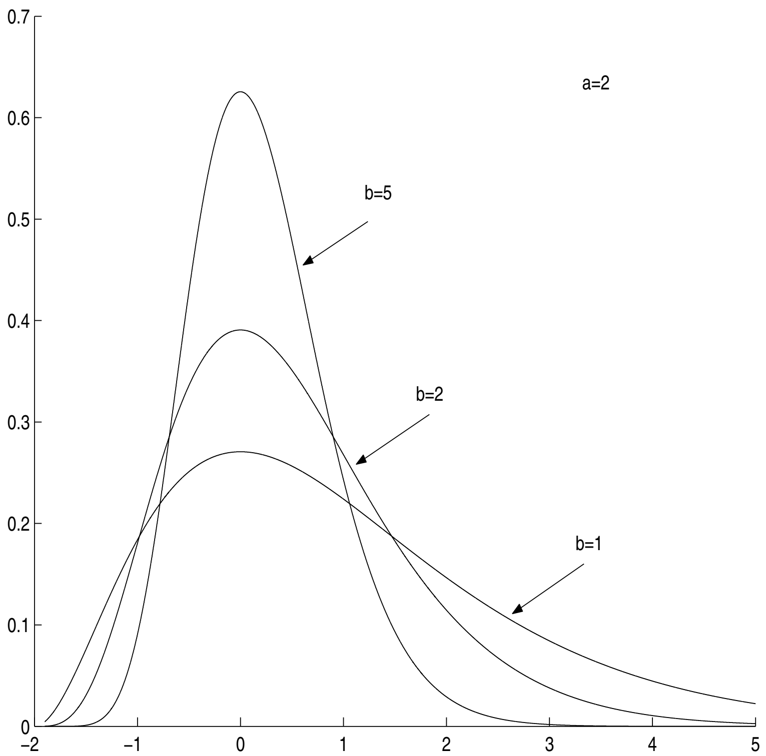
Густина

$$g(x) = K \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{ab} e^{-bx}, \quad -a \leq x < \infty.$$

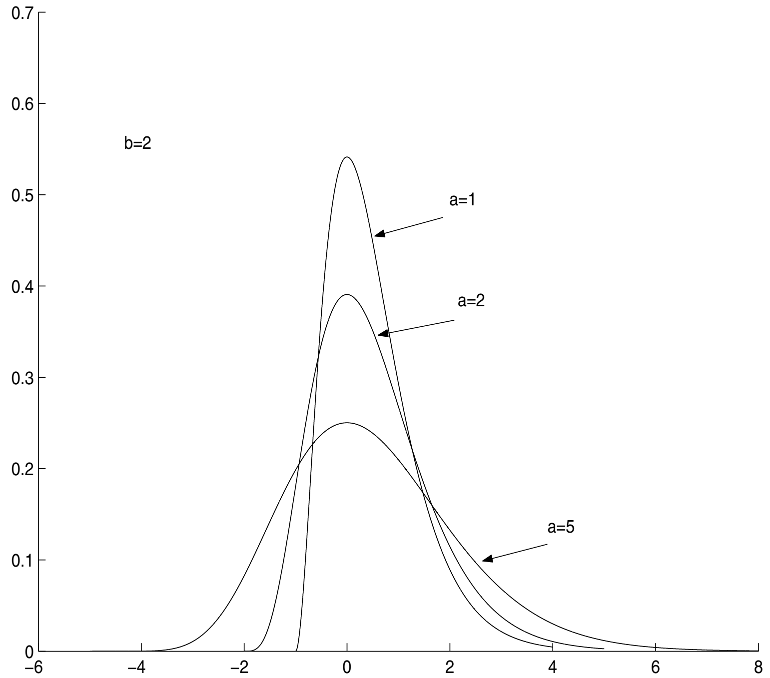
Параметри

a, b $(a, b > 0)$ – параметри облика.

График густине



На следећој слици се види утицај параметра a.



Напомена

У функцији густине K је нормирајућа константа.

126

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR4(a,b,c)$

(тип IV, тропараметарска)

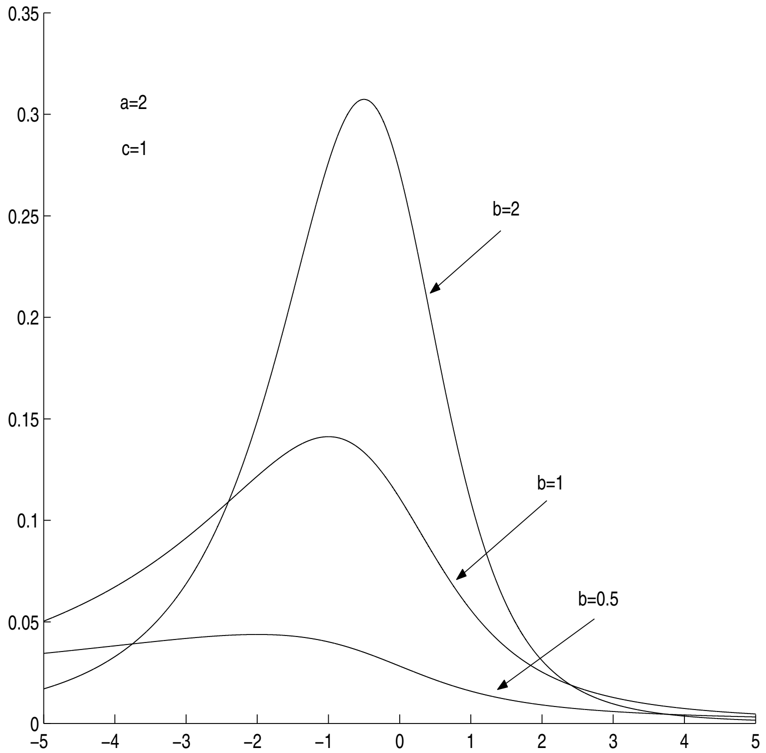
Густина

$$g(x) = K \cdot \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-b} \cdot \exp\left\{-c \cdot \arctan\frac{x}{a}\right\}, \quad x \in R.$$

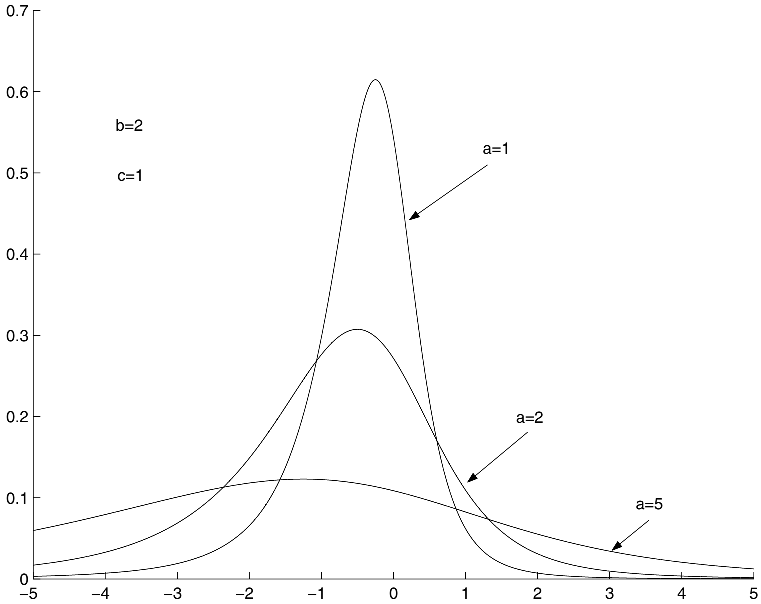
Параметри

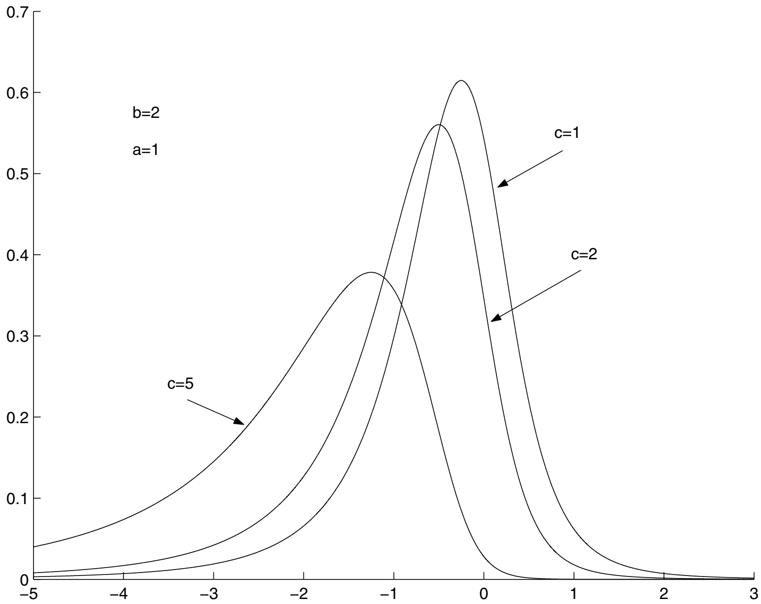
b, c $(b, c > 0)$ – параметри облика, a $(a > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



На следеће две слике се види утицај параметара a и c.





Напомена

У функцији густине K је нормирајућа константа.

127

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR5(a,b)$

(тип V, двопараметарска)

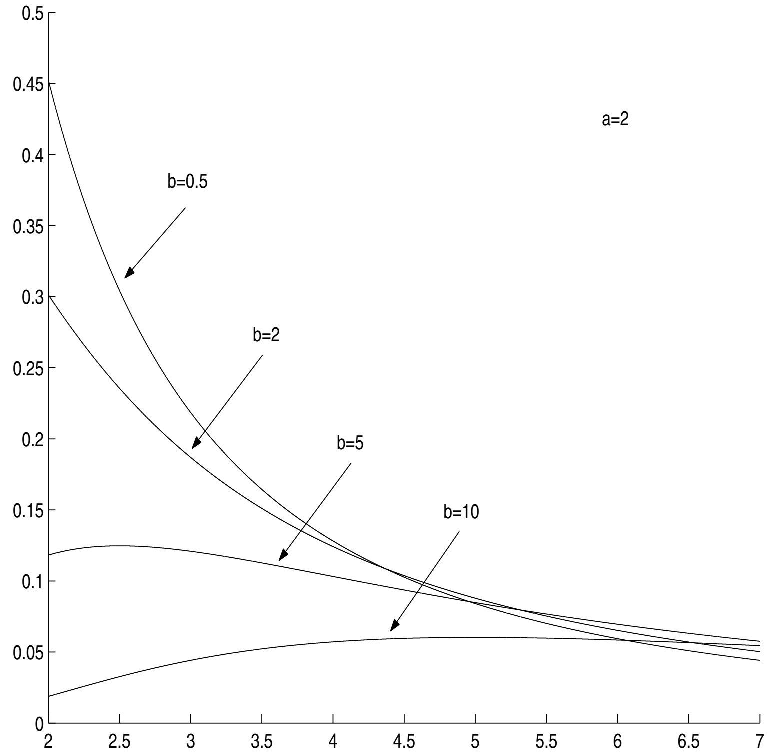
Густина

$$g(x) = K \cdot x^{-a} e^{-b/x}, \quad x \geq 0.$$

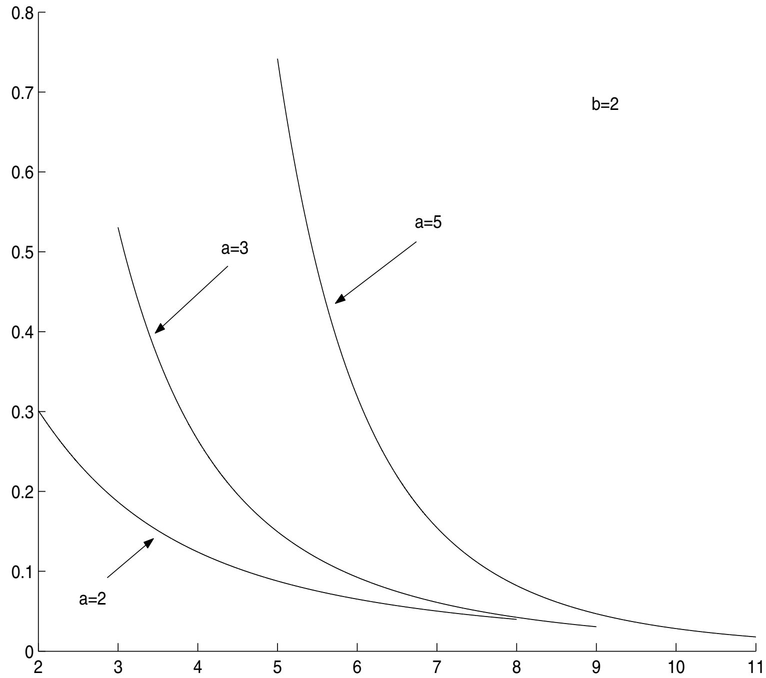
Параметри

a $(a > 1)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



На следећој слици се види утицај параметра a.



Напомена

У функцији густине K је нормирајућа константа.

128

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR6(a,b,c)$

(тип VI, тропараметарска)

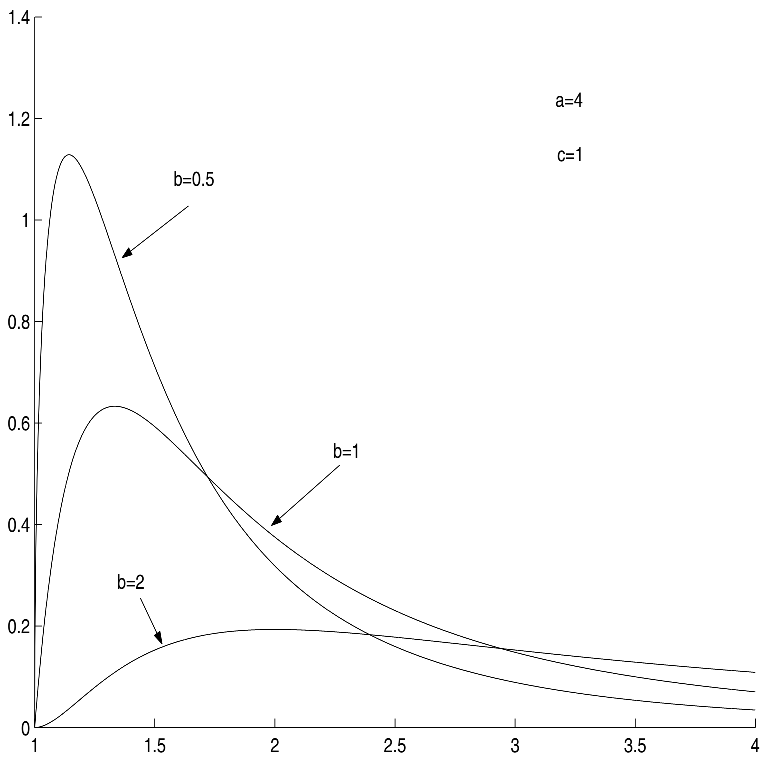
Густина

$$g(x) = K \cdot x^{-a}(x-c)^b, \quad x \geq c.$$

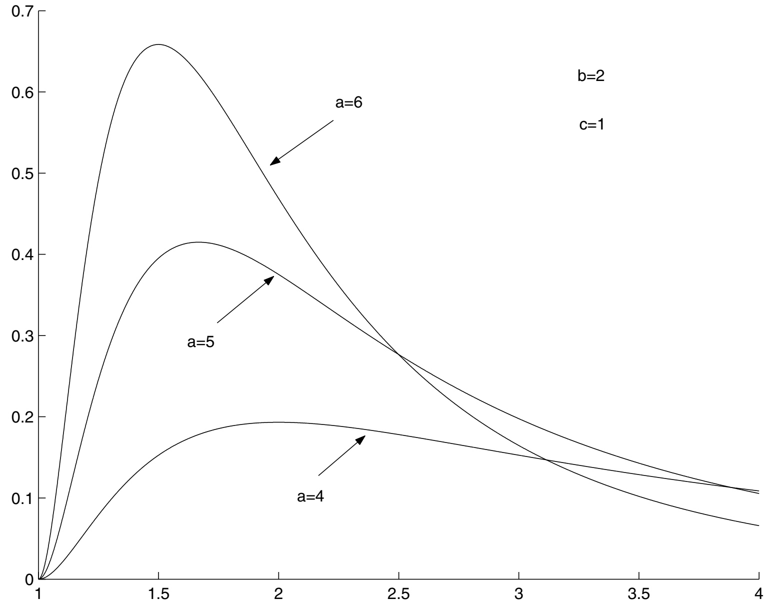
Параметри

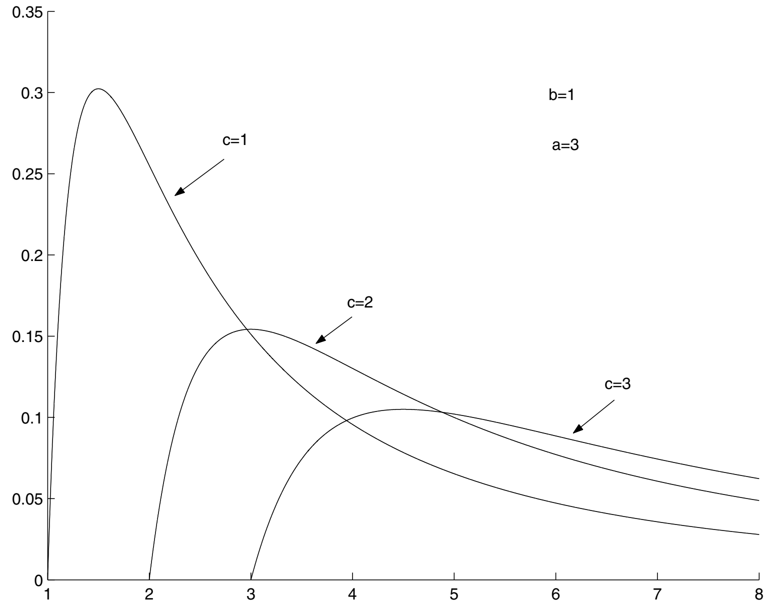
a, b $(b > 0, a > b+1)$ – параметри облика, c $(c \in R)$ – параметар локације.

График густине



На следеће две слике се види утицај параметара a и c.





Напомена

У функцији густине K је нормирајућа константа.

129

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR7(a,b)$

(тип VII, двопараметарска)

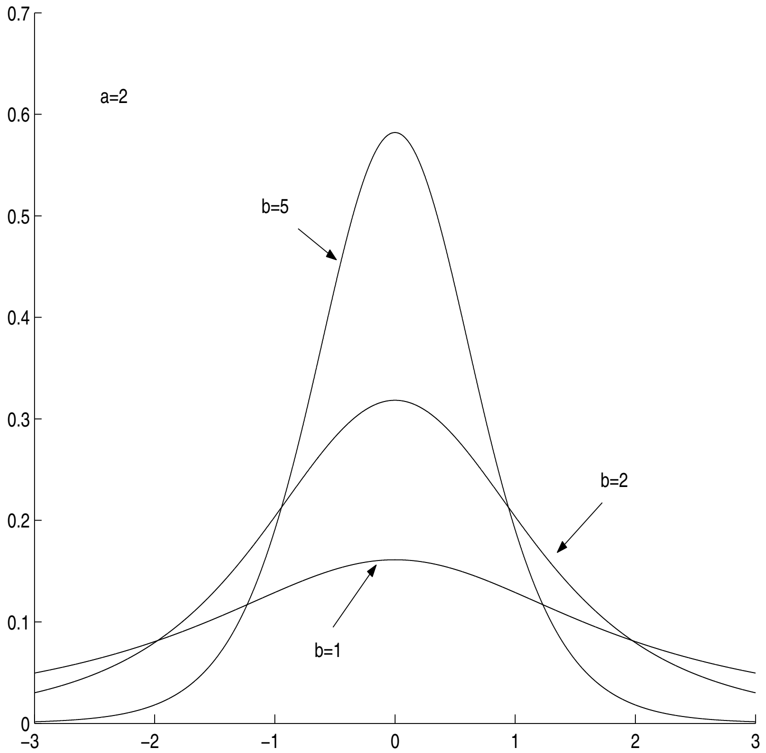
Густина

$$g(x) = K \cdot \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^b. \quad x \in R.$$

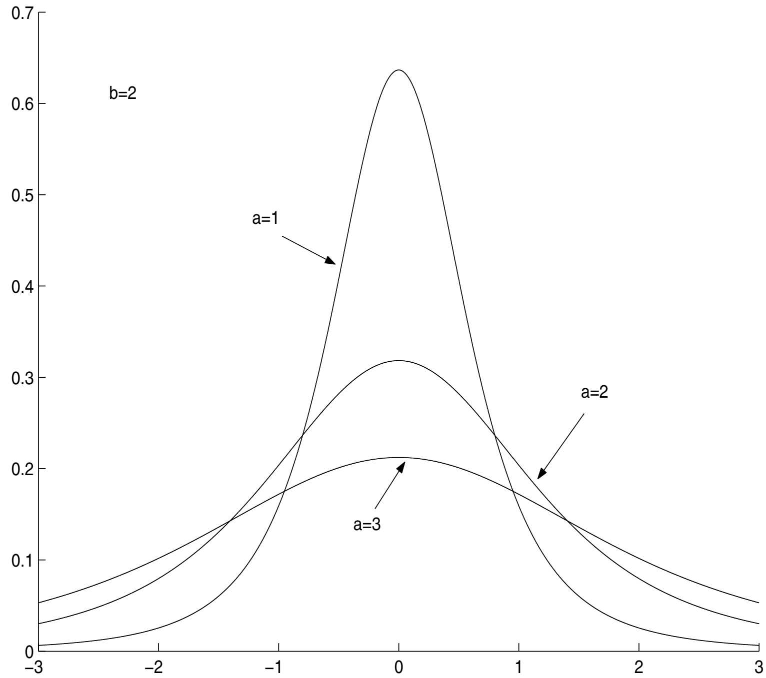
Параметри

a ($a \in R$) – параметар скалирања, b ($b > 1/2$) – параметар облика.

График густине



На следећој слици се види утицај параметра a.



Напомена

У функцији густине K је нормирајућа константа.

130

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR8(a,b)$

(тип $VIII$, двопараметарска)

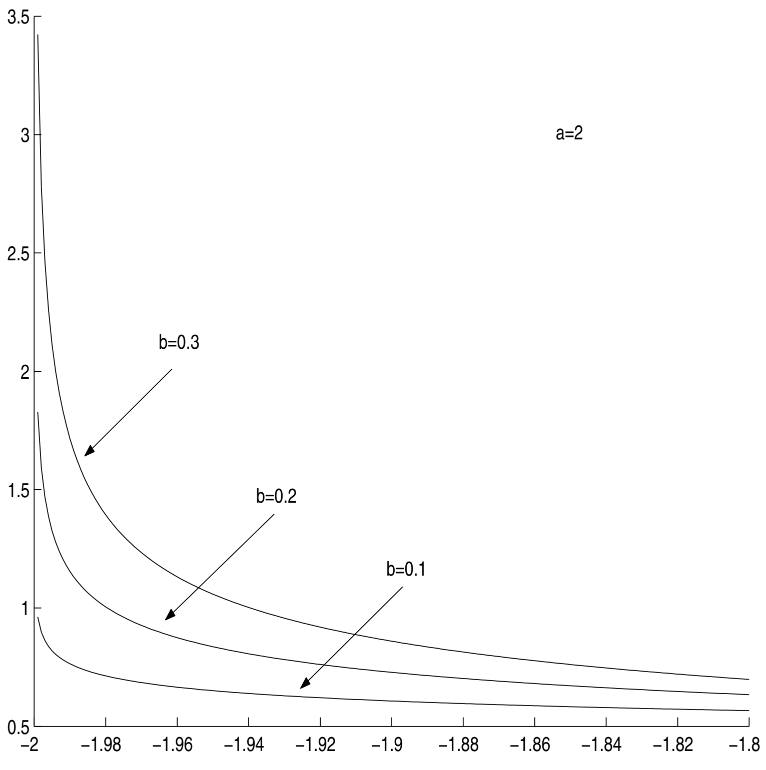
Густина

$$g(x) = K \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-b}, \quad -a \leq x \leq 0.$$

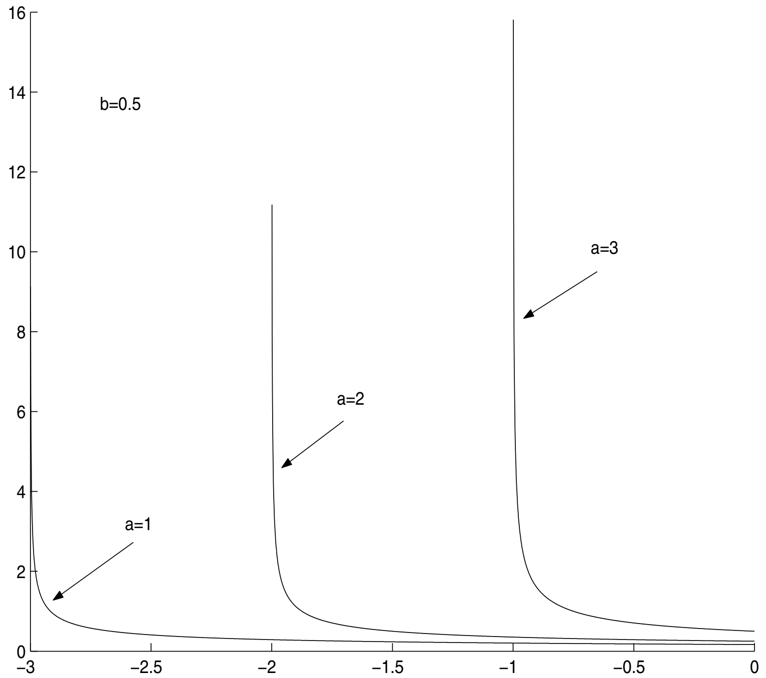
Параметри

a $(a > 0)$ – параметар скалирања, b $(0 \leq b \leq 1)$ – параметар облика.

График густине



НА следећој слици се види утицај параметра A.



Напомене

У функцији густине K је нормирајућа константа.

131

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR9(a,b)$

(тип IX, двопараметарска)

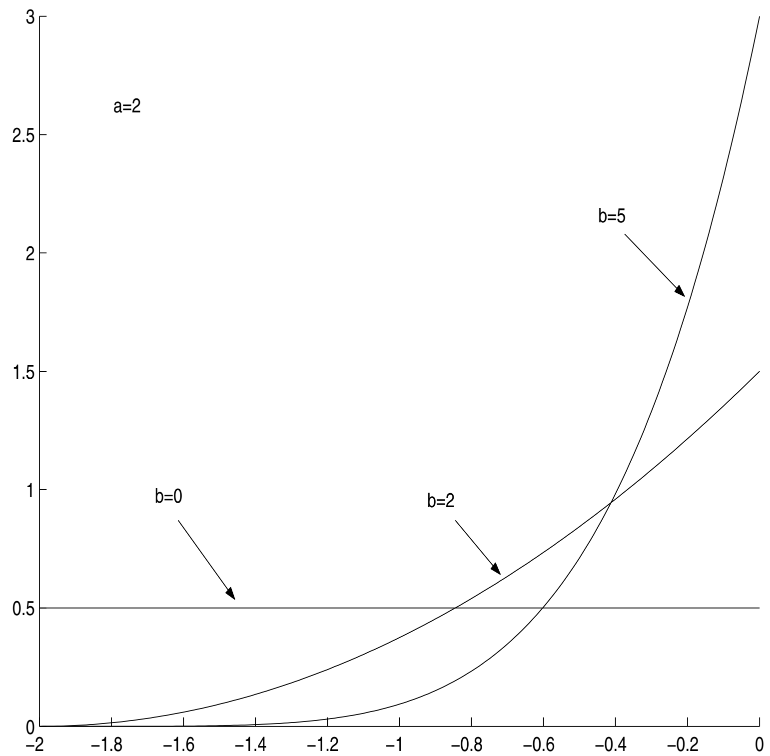
Густина

$$g(x) = K \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)^b, \quad -a \le x \le 0.$$

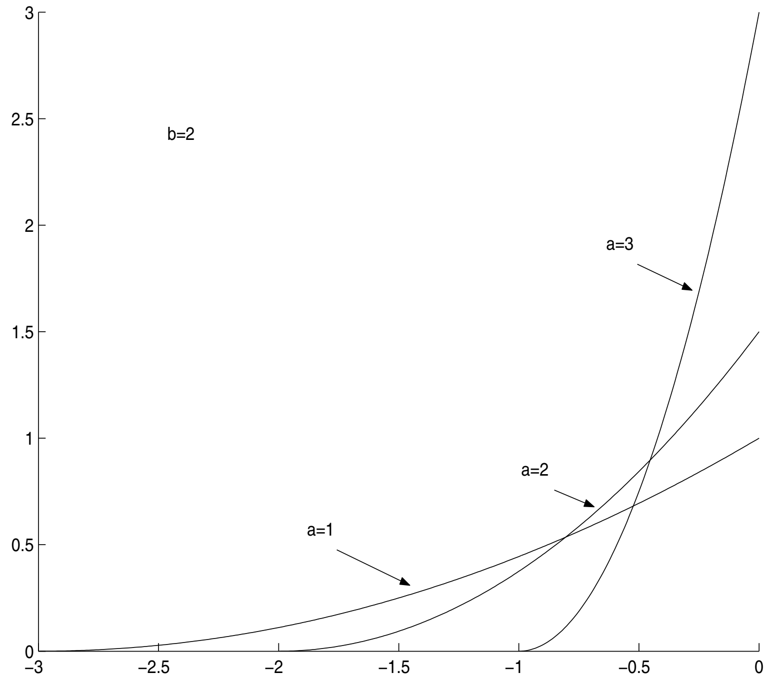
Параметри

a $(a > 0)$ – параметар скалирања, b $(b > -1)$ – параметар облика.

График густине



На следећој слици се види утицај парамтера a.



Напомена

У функцији густине K је нормирајућа константа.

132

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR11(a,b)$

(тип XI, двопараметарска)

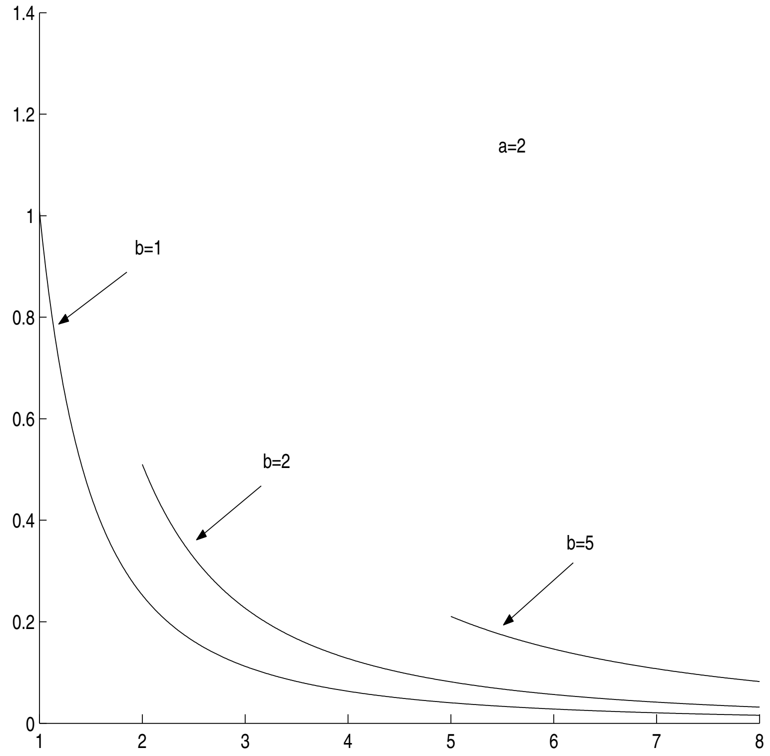
Густина

$$g(x) = (a-1)b^{a-1}x^{-a}, \quad b \le x < \infty.$$

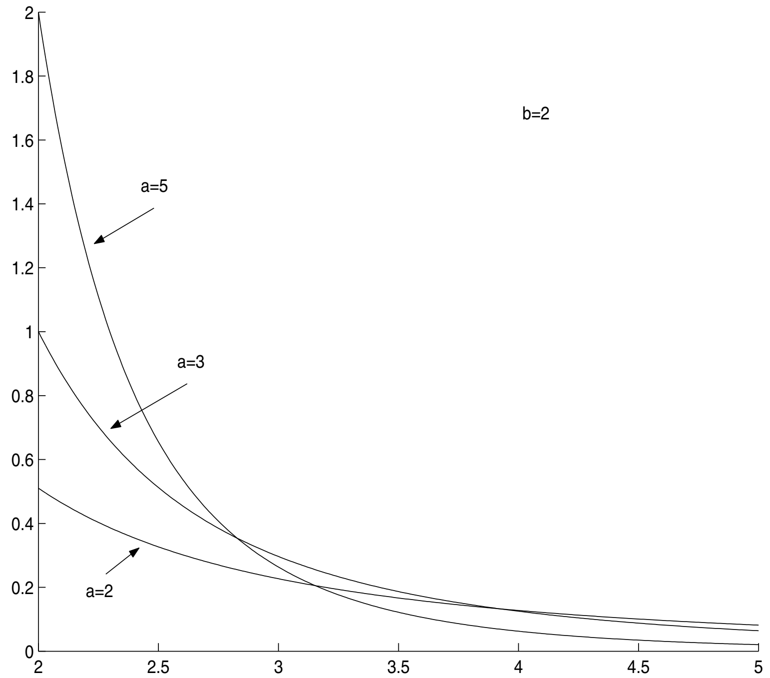
Параметри

a $(a > 1)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар локације.

График густине



На следећој слици се види утицај параметра a.



Напомена

У функцији густине K је нормирајућа константа.

133

ПИРСОНОВА РАСПОДЕЛА $PIR12(a, b, c)$

(тип XII, тропараметарска)

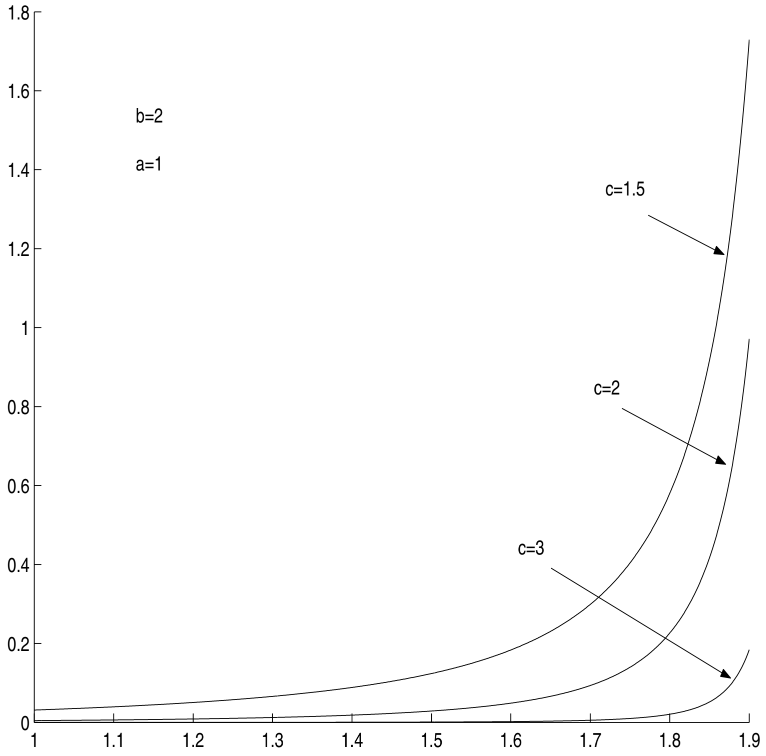
Густина

$$g(x) = K \cdot \left(\frac{1 + x/a}{1 - x/b}\right)^c, \quad -a \le x \le b.$$

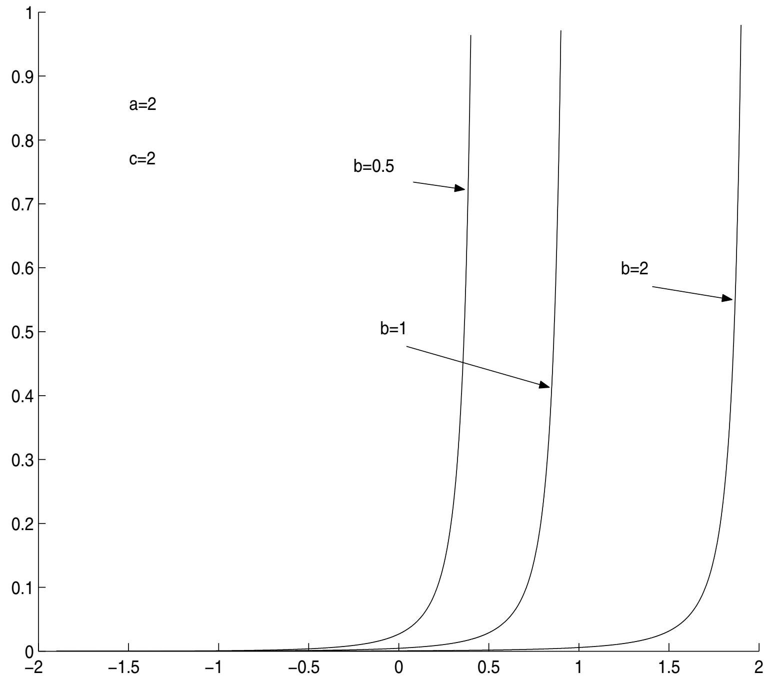
Параметри

a, b $(a, b > 0)$ – параметри скалирања, c $(|c| > 1)$ – параметар облика.

График густине



На следећој слици се види утицај параметра b.



Напомене

У функцији густине K је нормирајућа константа.

134

РЕЛЕЈЕВА РАСПОДЕЛА $R_1(\sigma)$

(једнопараметарска)

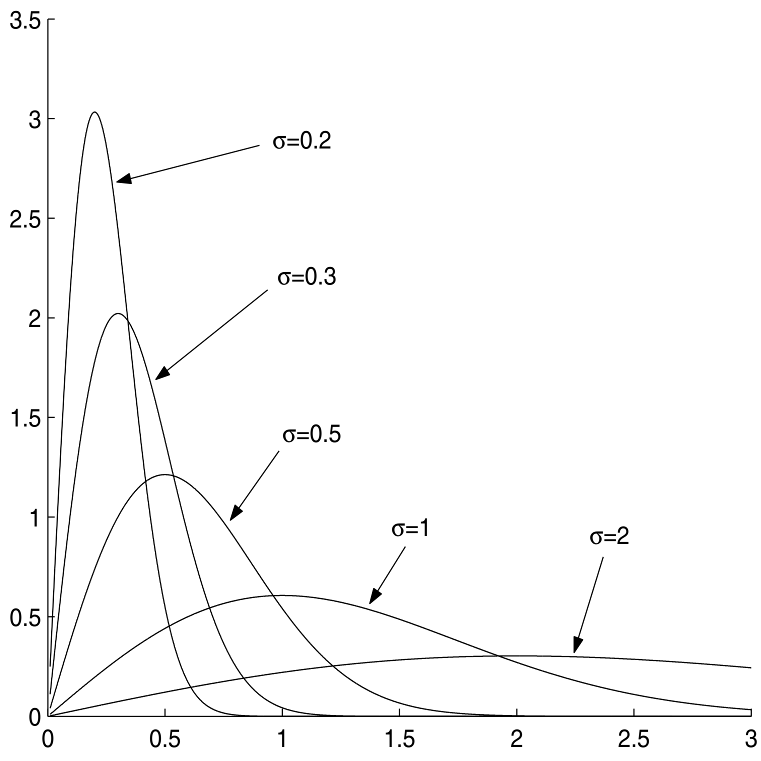
Густина

$$g(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

σ ($\sigma > 0$) - скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \geq 0.$$

Карактеристична функција

Моменти

$$m_r = 2^{r/2}\sigma^r\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}r!!\sigma^r, & r = 2k-1 \\ 2^k k!\sigma^{2k}, & r = 2k \end{cases}, \quad k \in N.$$

Специјално,

$$m_1 = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.25\sigma, \quad m_2 = 2\sigma^2, \quad m_3 = 3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 3.76\sigma^3, \quad m_4 = 8\sigma^4,$$

$$D(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 \approx 0.43\sigma^2, \quad \mu_3 = (\pi-3)\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 0.178\sigma^3,$$

$$\mu_4 = \frac{32-3\pi^2}{4}\sigma^4 \approx 0.598\sigma^4.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \sigma, \quad Me(X) = \sigma\sqrt{\ln 4} \approx 1.17741\sigma.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}} \approx 0.63, \quad \pi_2(X) = -\frac{6\pi^2-24\pi+16}{(4-\pi)^2} \approx 0.25.$$

Оцене параметара

Оцена $\widehat{\sigma}$ за непознати параметар σ по методи максималне веродостојности је

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$

За оцену $\widetilde{\sigma}$ добијену методом момената,

$$\widetilde{\sigma} = \overline{X}_n\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

важи $\frac{2n}{\sigma^2}\widetilde{\sigma}^2 \,:\, \chi^2(2n)$.

Нека својства

1. $Q_1 = \sigma\sqrt{-2\ln\frac{3}{4}} \approx 0.75853\sigma$, $Q_3 = \sigma\sqrt{2\ln 4} \approx 1.66511\sigma$.

2. $C_V = \sqrt{4\pi - 1} \approx 3.41$.

Везе са другим расподелама

1. Ако $X \,:\, R(\sigma)$, тада $\frac{X^2}{2\sigma^2} \,:\, E_1(1)$.

2. Ако $X \,:\, R(\sigma)$, тада $\frac{X^2}{\sigma^2} \,:\, \chi^2(2)$.

3. $R(a) = \chi(0, a, 2)$.

4. Ако $X, Y \,:\, N(0, \sigma^2)$и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $\sqrt{X^2 + Y^2} \,:\, R(\sigma)$.

5. Ако $X_1, \ldots, X_n \,:\, R_1(\sigma^2)$ и ако су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне променљиве, тада
$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \,:\, G_2(n, 2\sigma_2).$$

Примена

Метеорологија, хидрологија, економија.

Напомене

1. Расподела је добила име по енглеском физичару Релеју (Lord Rayleigh, 1842-1919), иначе добитнику Нобелове награде из области физике 1904. године.

2. Расподела $R_1(1)$ је стандардна Релејева расподела.

3. Постоје и друге параметризације густине, на пример,
$$g(x) = \frac{2x}{\lambda}e^{-x^2/\lambda}, \quad \lambda > 0,$$
при чему је $\lambda = 2\sigma^2$, или
$$g(x) = \frac{2x}{b^2}e^{-x^2/b^2}, \quad b > 0,$$
при чему је $b = \sqrt{2}\sigma$, или
$$g(x) = 2axe^{-ax^2}, \quad a > 0,$$
при чему је $a = \frac{1}{2\sigma^2}$.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = \sigma\sqrt{-2\ln u}$ случајан број из $R(\sigma)$ расподеле.

Још једна могућност за генерисање случајног броја x из $R(\sigma)$ расподеле је $x = \frac{1}{\sigma}\sqrt{y^2 + z^2}$, где су y и z независни случајни бројеви из $N(0,1)$ расподеле.

135

РЕЛЕЈЕВА РАСПОДЕЛА $R_2(c,\sigma)$

(двопараметарска)

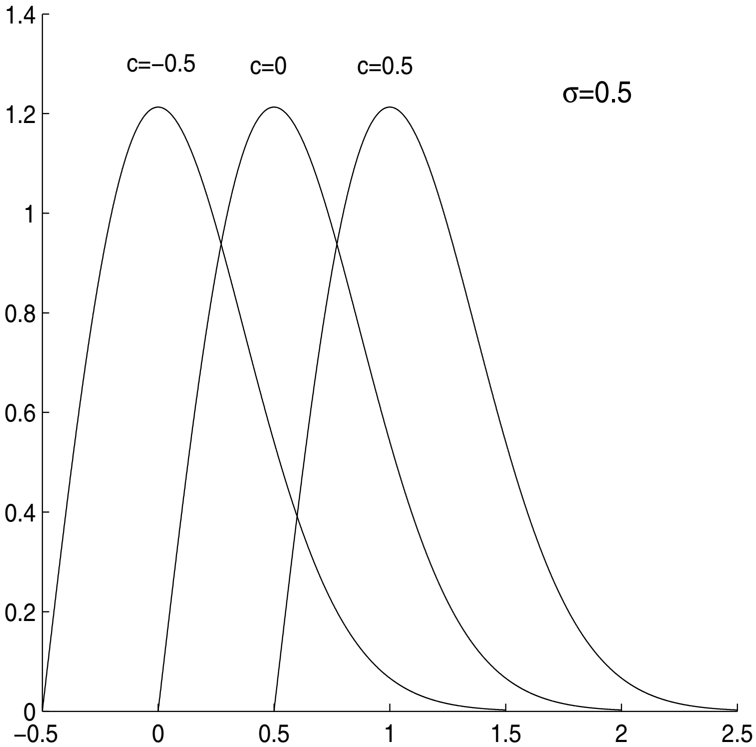
Густина

$$g(x) = \frac{x-c}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \geq c.$$

Параметри

c ($c \in R$) – параметар локације, σ ($\sigma > 0$) – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \geq c.$$

Моменти

$$m_1 = c + \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx c + 1.253314\sigma, \quad D(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 \approx 0.42904\sigma^2.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = c + \sigma, \quad Me(X) = c + \sigma\sqrt{\ln 4} \approx c + 1.17741\sigma.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}} \approx 0.63, \quad \pi_2(X) = -\frac{6\pi^2 - 24\pi + 16}{(\pi-4)^2} \approx 0.25.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене за σ и c за непознате параметре σ и c добијају се из система

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{c})^2},$$

$$\frac{n(\overline{X}_n - \widehat{c})}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i - \widehat{c}}} - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{c})^2 = 0.$$

Метода момената

Оцене $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{c}$ по методи момената дате су са

$$\widetilde{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}, \quad \widetilde{c} = \overline{X}_n - \widetilde{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Везе са другим расподелама

1. $R_2(0,\sigma) = R_1(\sigma)$.
2. Ако $X : R_2(c,\sigma)$, тада $(X-c)^2 : E_1(2\sigma^2)$.
3. $R_2(c,\sigma) = W_2(2\sigma, 2, c)$.

Напомена

Постоје и друге параметризације густине, као што су

$$g(x) = \frac{2(x-c)}{\lambda^2} \exp\left\{ -\left(\frac{x-c}{\lambda}\right)^2 \right\},$$

при чему је $\lambda = 2\sigma$,

$$g(x) = \frac{\pi(x-c)}{2a^2} \exp\left\{ -\pi\left(\frac{x-c}{2a}\right)^2 \right\},$$

при чему је $a = \sigma\sqrt{\pi}$.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = c+\sigma\sqrt{-2\ln u}$ случајан број из $R_2(c,\sigma)$ расподеле.

136

РЕЛЕЈЕВА РАСПОДЕЛА $RD(c,\sigma)$

(двострана, двопараметарска)

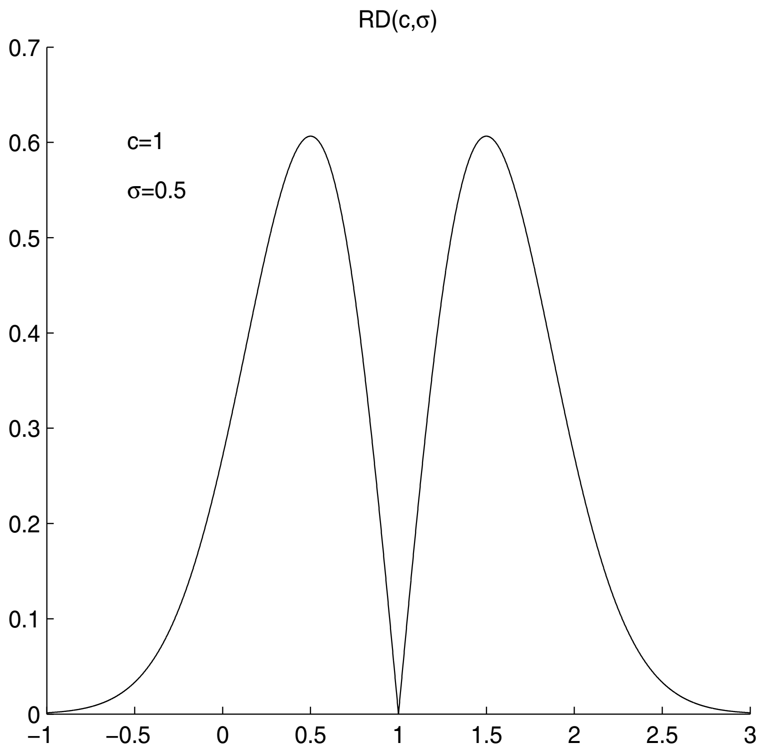
Густина

$$g(x) = \frac{|x-c|}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \in R.$$

Параметри

c ($c \in R$) – параметар локације, σ ($\sigma > 0$) – параметар скалирања.

График густине



137

РАЈСОВА РАСПОДЕЛА $RC(a,b)$

(двопараметарска)

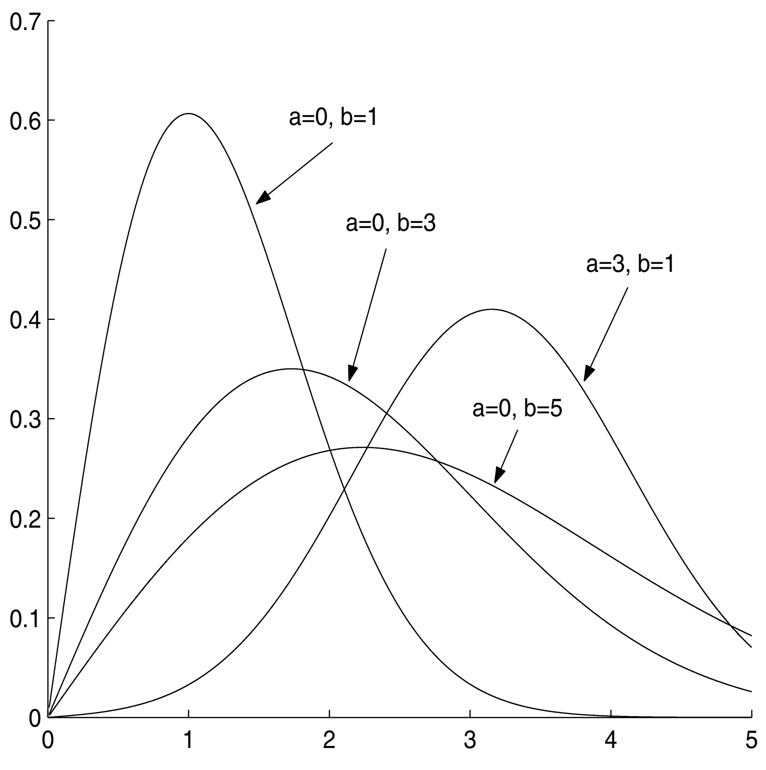
Густина

$$g(x) = \frac{x}{b} e^{-\dfrac{x^2+a^2}{2b}} I_0\left(\frac{x|a|}{b}\right), \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a \in R)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања.

График густине



Моменти

$$m_r = b^{r/4} 2^{r/2} \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) L_{r/2}\left(-\frac{a^2}{2b}\right),$$

где је $L_\nu(z)$ уопштен Лагеров полином (видети Додатак А).
Специјално,

$$m_1 = \sqrt{\frac{b\pi}{2}} L_{1/2}\left(-\frac{a^2}{2b}\right), \quad m_2 = 2b + a^2, \quad m_3 = 3\sqrt{\frac{b^3\pi}{2}} L_{3/2}\left(-\frac{a^2}{2b}\right),$$

$$m_4 = 8b^2 + 8ba^2 + a^4, \quad m_5 = 15b\sqrt{\frac{b\pi}{2}} L_{5/2}\left(-\frac{a^2}{2b}\right),$$

$$D(X) = 2b + a^2 - \frac{\pi b}{2} L_{1/2}^2\left(-\frac{a^2}{2b}\right).$$

Везе са другим расподелама

1. $RC(0, b) = R_1(b)$.

2. $RC(0, b) = R_2(0, b)$.

Погледати

Релејева расподела

138

СТЕПЕНА РАСПОДЕЛА $S(a)$

(једнопараметарска)

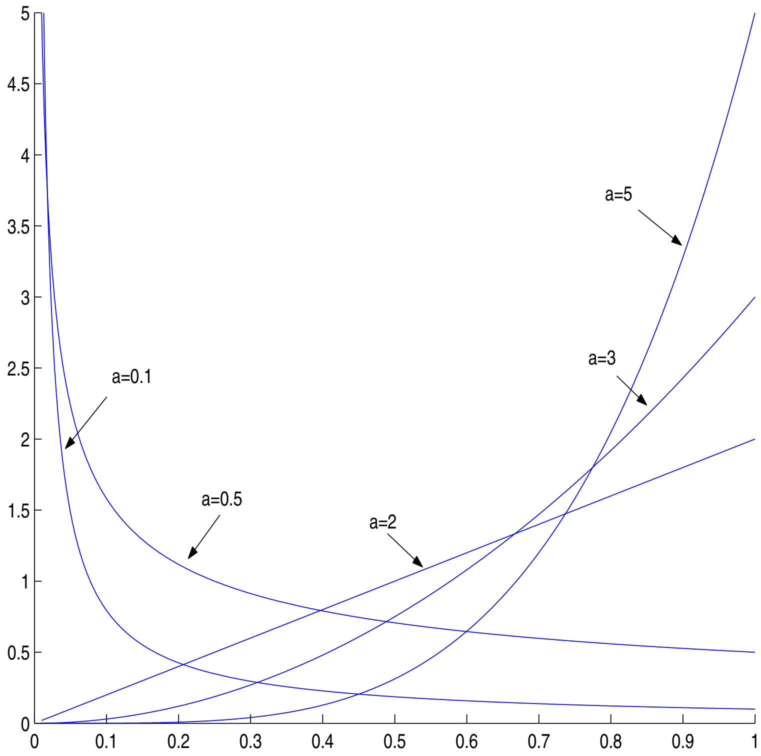
Густина

$$g(x) = ax^{a-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = x^a, \quad 0 \le x \le 1.$$

Моменти

$$m_1 = \frac{a}{a+1}, \quad D(X) = \frac{a}{(a+1)^2(a+2)}.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ 1, & a \ge 1 \end{cases}, \quad Me(X) = 2^{-1/a}.$$

Оцене параметара

За оцену $\widehat{a}$ по методи максималне веродостојности

$$\widehat{a} = -\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^{-1}$$

важи $D(\widehat{a}) \sim a^2/n$ за $n \to \infty$, а за оцену $\widetilde{a}$ по методи момената

$$\widetilde{a} = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$$

важи

$$D(\widetilde{a}) \sim \frac{a(a+1)^2}{a+2}\frac{1}{n}, \quad n \to \infty.$$

Везе са другим расподелама

1. $S(1) = U(0,1)$.
2. Ако $X : S(a)$, тада $\frac{1}{X} : PAR(a)$.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = u^{1/a}$ случајан број из $ST(a)$ расподеле.

139

СТУДЕНТОВА РАСПОДЕЛА $t(n)$

(једнопараметарска)

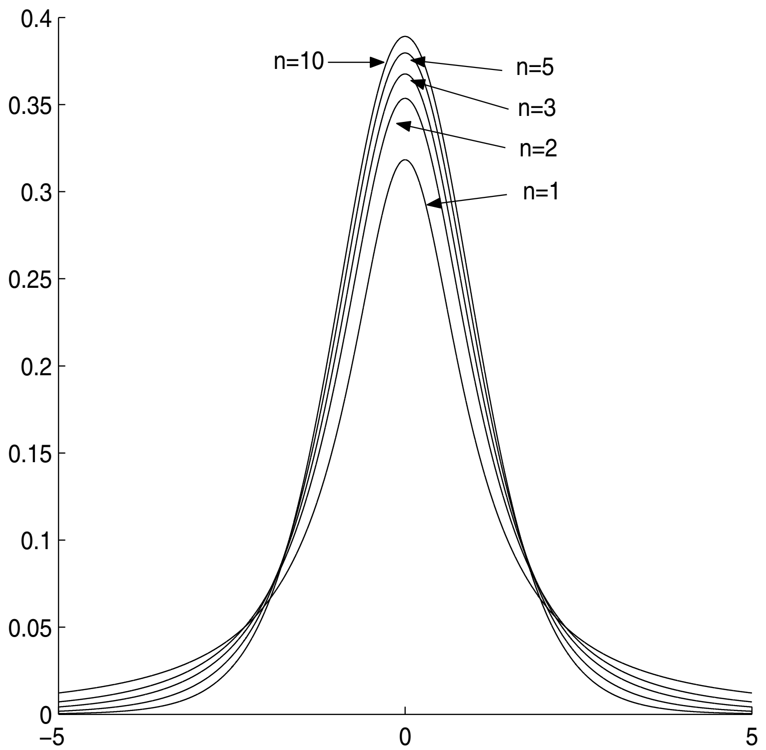
Густина

$$g(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad x \in R.$$

Параметри

n $(n \in N)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

За $t \leq 0$ je

$$F(x) = \frac{1}{2} IB\left(\frac{n}{n+x^2}, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

а за $t > 0$ je

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} IB\left(\frac{n}{n+x^2}, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Моменти

$$m_{2k-1} = 0, \quad m_{2k} = \mu_{2k} = n^k \frac{(2k-1)!!}{(n-2k)(n-2k+2)\cdots(n-2)}.$$

Специјално,

$$m_1 = 0, \quad D(X) = \frac{n}{n-2}, \ (n > 2).$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = 0.$$

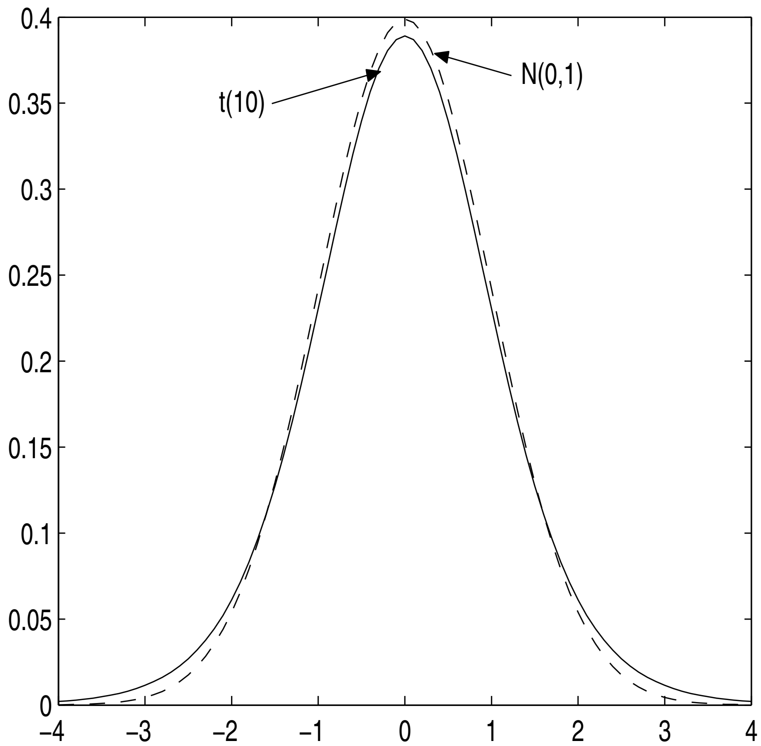
Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = \frac{6}{n-4}.$$

Везе са другим расподелама

1. $F(1, n) = t^2(n)$.
2. Ако $X \ : \ N(0,1)$ и $Y \ : \ \chi^2(n)$ и ако су X и Y нзависне случајне величине, тада $\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \ : \ t(n)$.
3. Ако $X, Y \ : \ \chi^2(n)$ и ако су X и Y независне случајне величине, тада $\dfrac{\sqrt{n}}{2} \cdot \dfrac{X_Y}{\sqrt{XY}} \ : \ t(n)$.
4. Ако $X \ : \ t(n)$, тада $\dfrac{1}{1+X^2/n} \ : \ B_2(1/2, 1/2)$.
5. Ако $X, Y \ : \ F(n,n)$ и ако су X и Y независне случајне величине, тада
$$\frac{\sqrt{n}}{2}\left(X - \frac{1}{Y}\right) \ : \ t(n).$$

6. За велико n расподела $t(n)$ може да се апроксимира са $N(0,1)$. На следећој слици је дата густина за $t(10)$ и за $N(0,1)$.



7. Ако је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ узорак из $N(m, \sigma^2)$ расподеле, тада
$$\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1} \ : \ t(n-1).$$

8. Ако је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ прост узорак из $N(m_1, \sigma^2)$ расподеле и ако је $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ узорак из $N(m_2, \sigma^2)$ расподеле, тада
$$\frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_k - (m_1 - m_2)}{\sqrt{n\overline{S}_n^2(X) + k\overline{S}_k^2(Y)}}\sqrt{\frac{nk}{n+k}(n+k-2)} \ : \ t(n+k-2).$$

Напомене

1. Расподелу је увео енглески хемичар и статистичар Госет (William Sealey Gosset, 1876-1937) који се представљао под псеудонимом Студент.

2. Распоела је специјалан случај Пирсонове расподеле тип VII (ПИР7).

3. За расподелу $t(2)$ je

$$g(x) = \frac{1}{(2+x^2)^{3/2}}, \quad F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right), \quad x \in R.$$

Генерисање

Ако je y случајан број из $N(0,1)$ расподеле и z случајан број из $\chi^2(n)$ расподеле, тада je $x = \sqrt{\frac{n}{z}}y$ случајан број из $t(n)$ расподеле.

140

СТУДЕНТОВА РАСПОДЕЛА $t(n, a, b)$

(тропараметарска)

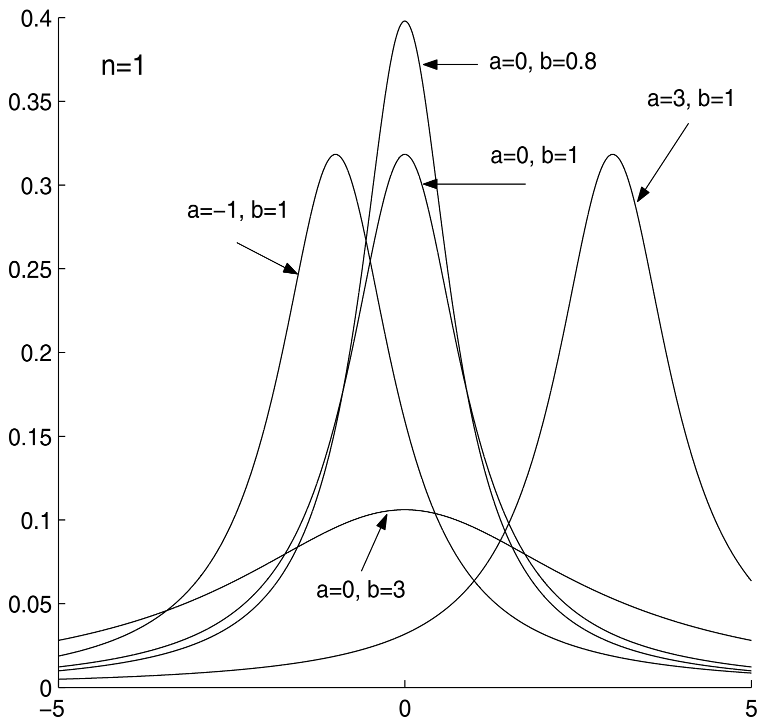
Густина

$$g(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{b\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)^{-(n+1)/2}, \quad x \in R.$$

Параметри

n ($n \in N$) – параметар облика, a ($a \in R$) – параметар локације, b ($b > 0$) – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

Ако је $t = \dfrac{x-a}{b}$, тада је за $t \leq 0$

$$F(x) = \frac{1}{2} IB\left(\frac{n}{n+t^2}, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

а за $t > 0$ је

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} IB\left(\frac{n}{n+t^2}, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Моменти

$$m_1 = 0, \quad D(X) = \frac{n}{n-2} b^2, \ (n > 2).$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = 0.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = \frac{6}{n-4}.$$

Нека својства

1. Густина је симетрична у односу на $x = a$.
2. Моменат реда k постоји за $k < n$.

Везе са другим расподелама

1. $t(n, 0, 1) = t(n)$.
2. $t(n, 0, 1) = t^*(n, 0)$.

141

СТУДЕНТОВА РАСПОДЕЛА $t^*(n, c)$

(двопараметарска, нецентрална)

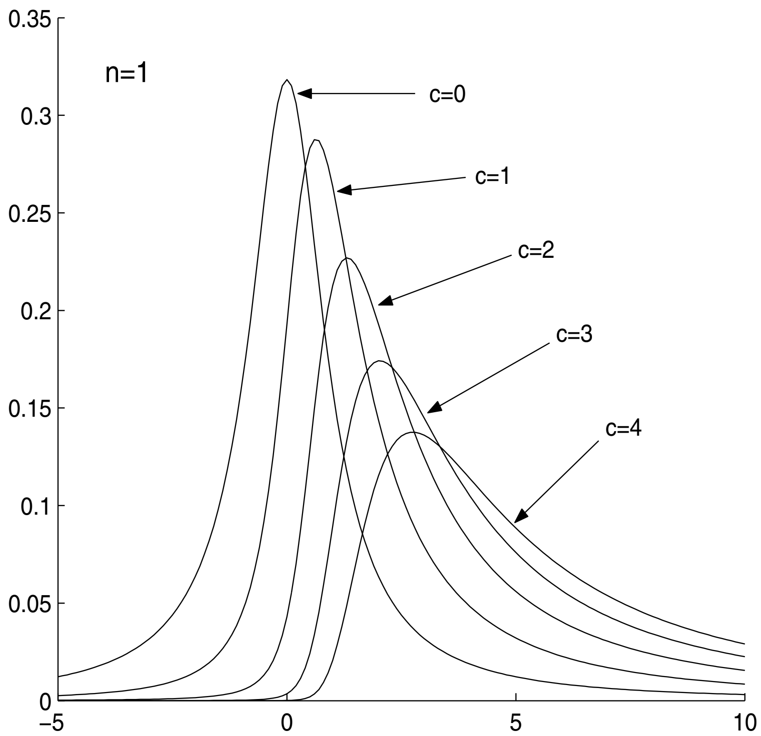
Густина

$$g(x) = \frac{e^{-c^2/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c\sqrt{2})^k}{k!} \frac{x^k}{n^{(k+1)/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right)}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{(n+k+1)/2}}, \quad x \in R.$$

Параметри

n $(n \in N)$ – параметар облика, c $(c \geq 0)$ – параметар нецентралности.

График густине



Функција расподеле

За $x \leq 0$ je

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-c^2/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-c\sqrt{2})^k}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) IB\left(\frac{n}{n+x^2}, \frac{n}{2}, \frac{k+1}{2}\right),$$

а за $x > 0$ je

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2}\frac{e^{-c^2/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-c\sqrt{2})^k}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) IB\left(\frac{n}{n+x^2}, \frac{n}{2}, \frac{k+1}{2}\right).$$

Моменти

$$m_1 = \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}c, \quad D(X) = \frac{n}{n-2}(1+c^2) - m_1^2, \ (n > 2).$$

Везе са другим расподелама

1. $t^*(n, 0) = t(n)$.
2. Ако $X \ : \ N(c, 1)$ и $Y \ : \ \chi^2(n)$ и ако су X и Y независне, тада

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \ : \ t^*(n, c).$$

Напомена

Густина може да се запише и у облику

$$g(x) = \frac{n^{n/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{e^{-c^2/2}}{(n+x^2)^{(n+1)/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right)\frac{c^k}{k!}\left(\frac{2x^2}{n+x^2}\right)^{k/2}.$$

142

ТРОУГАОНА РАСПОДЕЛА $TR(a,b,c)$

(тропараметарска)

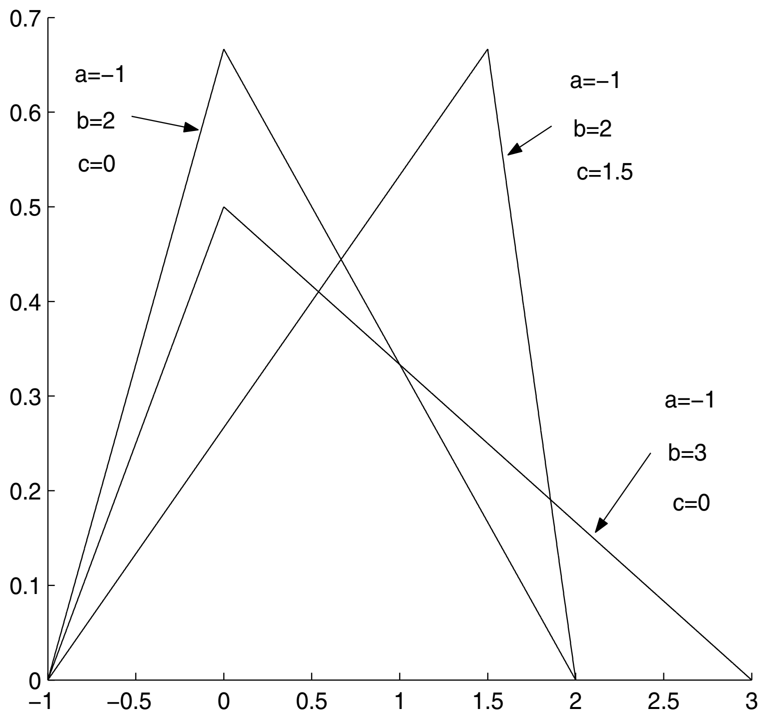
Густина

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \le x \le c \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c \le x \le b. \end{cases}$$

Параметри

a, b $(a, b \in R)$, $(b > a)$ – параметри локације, c $(c \in [a, b])$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & a\le x\le c\\[2mm] 1-\dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)}, & c\le x\le b.\end{cases}$$

Ентропија

$$H(X)=\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{b-a}{2}\right).$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t)=-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{(b-c)e^{iat}-(b-a)e^{itc}+(c-a)e^{ibt}}{(b-a)(c-a)(b-c)}.$$

Генератриса момената

$$M(t)=-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{(b-c)e^{at}-(b-a)e^{tc}+(c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)}.$$

Моменти

$$m_1=\frac{1}{3}(a+b+c),\quad m_2=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc),$$

$$m_3=\frac{1}{10}(a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+abc),$$

$$\mu_2=\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc),\quad \mu_3=\frac{1}{270}(a+b-2c)(a+c-2b)(b+c-2a),$$

$$\mu_4=\frac{1}{135}(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^2.$$

Модус и медијана

$$Mo(X)=c,\quad Me(X)=\begin{cases}a+\dfrac{\sqrt{(b-a)(c-a)}}{\sqrt{2}}, & c\ge\dfrac{b-a}{2}\\[2mm] b-\dfrac{\sqrt{(b-a)(b-c)}}{\sqrt{2}}, & c\le\dfrac{b-a}{2}.\end{cases}$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{(a+b-2c)(2a-b-c)(a-2b+c)}{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^{3/2}}, \quad \pi_2(X) = 2.4.$$

Напомене

1. За $a = -b$ и $c = 0$ расподела је некада кори71ена за анализу грешака, што је касније преузела Гаусова расподела.

2. Расподела је позната и као *Симпсонова расподела*.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је

$$x = \begin{cases} a + \sqrt{(b-a)(c-a)u}, & u \le \dfrac{c-a}{b-a} \\ b - \sqrt{(b-a)(b-c)(1-u)}, & u > \dfrac{c-a}{b-a} \end{cases}$$

случајан број из $TR(a,b,c)$ расподеле.

143

УНИФОРМНА РАСПОДЕЛА $U(a,b)$

(двопараметарска)

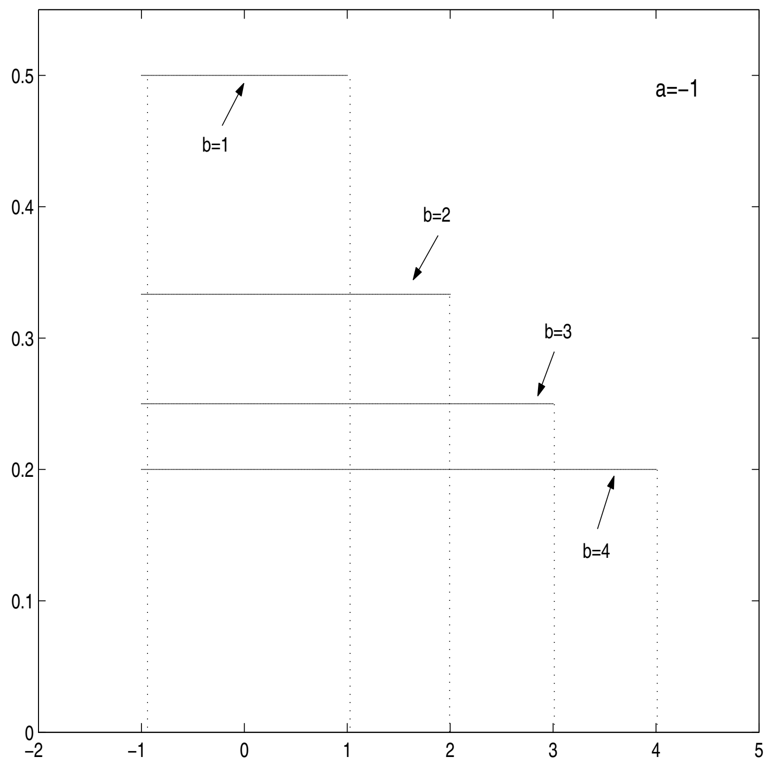
Густина

$$g(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b].$$

Параметри

a, b $(a < b)$ – параметри локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a,b].$$

Ентропија

$$H(X) = \ln(b-a).$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}.$$

Моменти

$$m_r = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{b-a}.$$

Специјално,

$$m_1 = \frac{a+b}{2}, \quad m_2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Централни моменти

$$\mu_{2k-1} = 0, \quad \mu_{2k} = \frac{1}{2k+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2k}, \quad k \in N$$

Специјално,

$$\mu_2 = D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \mu_4 = \frac{(b-a)^4}{80}.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) \text{ – није јединствен}, \quad Me(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = -1.2.$$

Оцене параметара

Метода максималне веродостојности

Оцене $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ непознатих параметара a и b су

$$\widehat{a} = X_{\min}, \quad \widehat{b} = X_{\max},$$

при чему је

$$E(\widehat{a}) = \frac{na+b}{n+1}, \quad E(\widehat{b}) = \frac{a+nb}{n+1}, \quad D(\widehat{a}) = D(\widehat{b}) = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Ако је $a = 0$, тада за оцену $\widehat{b} = X_{\max}$ параметра b важи

$$E(\widehat{b}) = \frac{n}{n+1}, \quad D(\widehat{b}) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)},$$

што значи да је асимптотски непристрасна и стабилна.

Метода момената

Оцене $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ по методи момената дате су са

$$\widetilde{a} = \overline{X} - S_n\sqrt{3}, \quad \widetilde{b} = \overline{X} + S_n\sqrt{3}.$$

Ако је $a = 0$, тада је

$$\widetilde{b} = X_{\min} + X_{max}$$

и важи

$$E(\widetilde{b}) = b, \quad D(\widetilde{b}) = \frac{2b^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Друге оцене

Оцене a^* и b^* дате са

$$a^* = \frac{nX_{\min} - X_{\max}}{n-1}, \quad b^* = \frac{nX_{\max} - X_{\min}}{n-1}$$

су непристрасне, а таква је и оцена $b^* = \dfrac{n+1}{n}X_{\max}$ за b у случају када је $a = 0$.

Нека својства

1. Ако $X : U(0,1)$, тада $1 - X : U(0,1)$.
2. Ако $X : U(a,b)$, тада $\dfrac{X-a}{b-a} : U(0,1)$.

Везе са другим расподелама

1. $U(0,1) = B_2(1,1)$.
2. Ако је X случајна променљива, тада $F(X) : U(0,1)$.
3. Ако $X : U(0,1)$, тада $-\dfrac{1}{\lambda}\ln X : E_1(\lambda)$.
4. Ако су $X_1, \ldots, X_n : U(0,1)$ независне случајне променљиве и ако је $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ статистика поретка, тада $X_{(k)} : B_2(k, n-k+1)$.

Примена

Генерисање случајних бројева за друге расподеле.

Напомена

$U(0,1)$ је стандардна униформна расподела.

Генерисање

Ако је u случајан број из $U(0,1)$ расподеле, тада је $x = a+(b-a)u$ случајан број из $U(a,b)$ расподеле.

144

ФИШЕРОВА РАСПОДЕЛА $F(m,n)$

(двопараметарска)

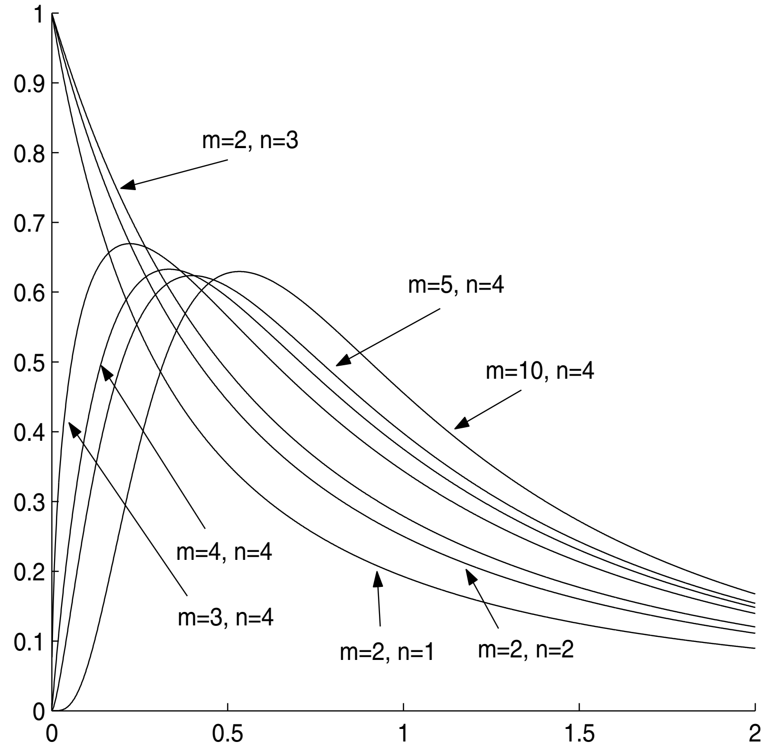
Густина

$$g(x) = \frac{\left(\dfrac{m}{n}\right)^{m/2}}{B\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{m/2-1}}{\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{m/2+n/2}}, \quad x > 0.$$

Параметри

m, n $(m, n \in N)$ – параметри облика (степени слободе).

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = I_{\frac{mx}{mx+n}}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right), \quad x \geq 0,$$

где је I_a непотпуна бета функција.

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = M\left(\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{n}{m}it\right).$$

Моменти

$$m_r = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{m(n+2)\cdots(m+2r-2)}{(n-2)(n-4)\cdots(n-2r)}, \quad r > \frac{n}{2},$$

при чему важи рекурентна веза

$$m_r = m_{r-1}\frac{n}{m}\frac{m/2+r-1}{n/2-r}, \quad m_0 = 1.$$

Специјално,

$$m_1 = \frac{n}{n-2} \ (n > 2), \quad D(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad (n > 4).$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{(2m+n-2)\sqrt{8(n-4)}}{(n-6)\sqrt{m(m+n-2)}},$$

$$\pi_2(X) = 12\frac{-16+20m-8m^2+m^3+44n-32mn+5m^2n-22n^2+5mn^2}{n(m-6)(m-8)(n+m-2)}.$$

Нека својства

1. Ако $X \, : \, F(m,n)$, тада $\dfrac{1}{X} \, : \, F(n,m)$.

2. За $m \leq 2$ густина расподеле има максимум у $x = 0$, а за $m > 2$ је $Mo(X) = \dfrac{n(m-2)}{m(n+2)}$.

Везе са другим расподелама

1. $F(1,n) = t^2(n)$.

2. Ако $X : \chi^2(m)$ и $Y : \chi^2(n)$, тада $\dfrac{n}{m}\dfrac{X}{Y} : F(m,n)$.

3. Ако $X : F(m,n)$, тада $\dfrac{mX}{n+mX} : B_2\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)$.

4. Ако $X : F(m,n)$, тада $\dfrac{m}{n}X : BP(m,n)$.

5. Ако $X, Y : L_1(a)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $|X/Y| : F_(2,2)$.

6. Ако $X : G_2(m_1,n_1)$ и $Y : G_2(m_2,n_2)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $\dfrac{m_2n_2X}{m_1n_1Y} : F(2m_1,2m_2)$.

7. Ако $X : F(n,n)$, тада $\dfrac{\sqrt{n}}{2}\left(\sqrt{X}-\dfrac{1}{\sqrt{X}}\right) : t(n)$.

8. $X_i : N(a,\sigma^2)$ за $i=1,\dots,m$ и $Y_j : N(b,\sigma^2)$ за $j=1,\dots,n$ и ако су $X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n$ независне случајне променљиве, тада

$$\frac{\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(X_i-a)^2}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(Y_j-b)^2} : F(m,n), \qquad \frac{\dfrac{1}{m-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2}{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2} : F(m-1,n-1).$$

9. $F(m,n) \sim \frac{1}{m}\chi^2(m), \ (n\to\infty)$.

10. Ако $: F(m,n)$ и ако је

$$Y=\frac{\sqrt{2n-1}\dfrac{m}{n}X-\sqrt{2m-1}}{\sqrt{1+\dfrac{m}{n}X}}, \quad Z=\frac{X^{1/3}\left(1-\dfrac{2}{9n}\right)-\left(1-\dfrac{2}{9m}\right)}{\sqrt{\dfrac{2}{9m}+X^{2/3}\dfrac{2}{9n}}},$$

тада Y и Z имају приближно нормалну расподелеу $N(0,1)$.

Примена

Анализа варијансе, тестирање хипотеза о једнакости дисперзија.

Напомене

1. Расподела је добила име по енглеском статистичару и генетичару Фишеру (Ronald Aylmer Fisher, 1890-1962), а често се користи и назив F-расподела.

2. У литератури на енглеском језику расподела је позната и као Snedecor distribution по америчком статистичару Снедекору (George Waddel Snedecor, 1881-1974) или као Fisher-Snedecor distribution или као variance-ratio distribution.

3. Функција густине може да се запише и у облику

$$g(x) = \frac{1}{xB(m/2,n/2)} \left(\frac{mx}{mx+n}\right)^{m/2} \left(1-\frac{mx}{mx+n}\right)^{n/2}$$

или

$$g(x) = \frac{1}{xB(m/2,n/2)} \sqrt{\frac{n^n (mx)^m}{(mx+n)^{m+n}}}.$$

4. Расподела је дефинисана и за реалне позитивне вредности параметара.

Генерисање

Ако је y случајан број из расподеле $\chi^2(m)$ и z случајан број из расподеле $\chi^2(n)$, тада је $x = \frac{ny}{mz}$ случајан број из $F(m,n)$ расподеле.

145

ФИШЕРОВА Z РАСПОДЕЛА $FZ(m,n)$

(двопараметарска)

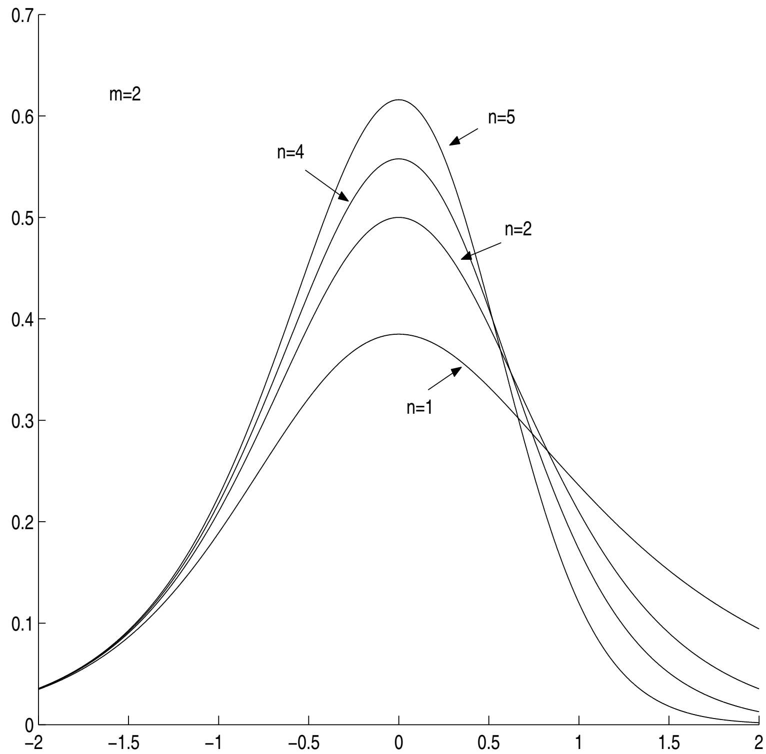
Густина

$$g(x) = \frac{2m^{m/2}n^{n/2}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{e^{mx}}{(me^{2x}+n)^{m/2+n/2}}, \quad x \in R.$$

Параметри

m, n $(m, n \in N)$ – параметри облика (степени слободе).

График густине



146

ФОН МИЗИСОВА РАСПОДЕЛА $FM(a,b)$

(двопараметарска)

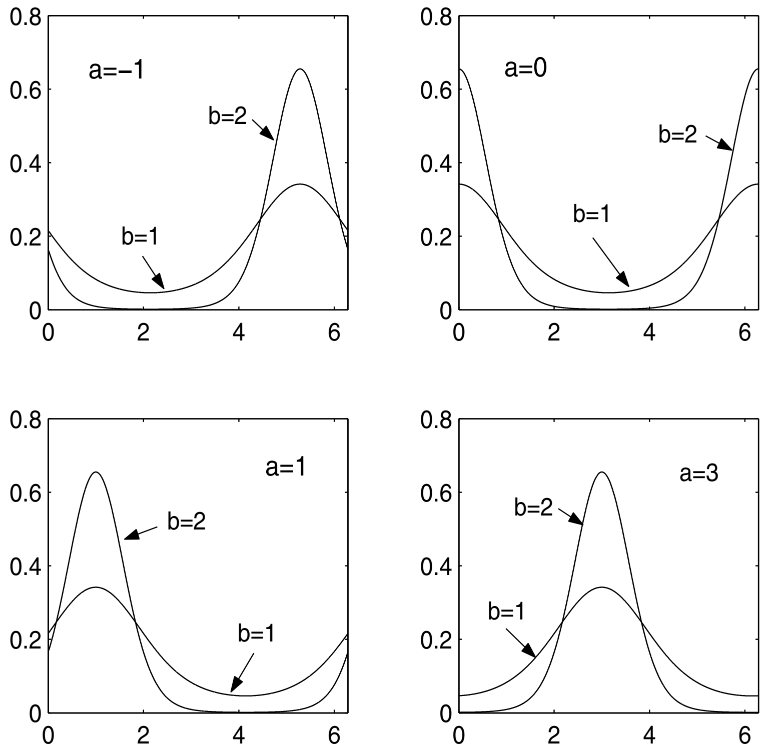
Густина

$$g(x) = \frac{e^{b\cos(x-a)}}{2\pi I_0(b)}, \quad x \in (0.2\pi],\ I_0(x)\ -\ \text{Беселова функција.}$$

Параметри

a $(0 \le a \le 2\pi)$ – параметар облика, b $(0 \le b < \infty)$ – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x)=\frac{1}{2\pi I_0(b)}\left(xI_0(b)+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{I_j(b)x\sin(j(x-a))}{j}\right),\quad x\in(0,2\pi],$$

где је I_j Беселова функција.

Моменти

$$m_1=a,\quad D(X)=1-\frac{I_a(b)}{I_0(b)},$$

где је I_a Беселова функција.

Напомене

1. Расподелу је увео аустријски математичар Фон Мизис (Richard von Mises, 1883-1953) 1918. године радећи на моделирању цикличних података.

2. Расподела је позната и као *циркуларна нормална*.

147

ФОН МИЗИСОВА РАСПОДЕЛА $FMB(a,b)$

(бимодална, двопараметарска)

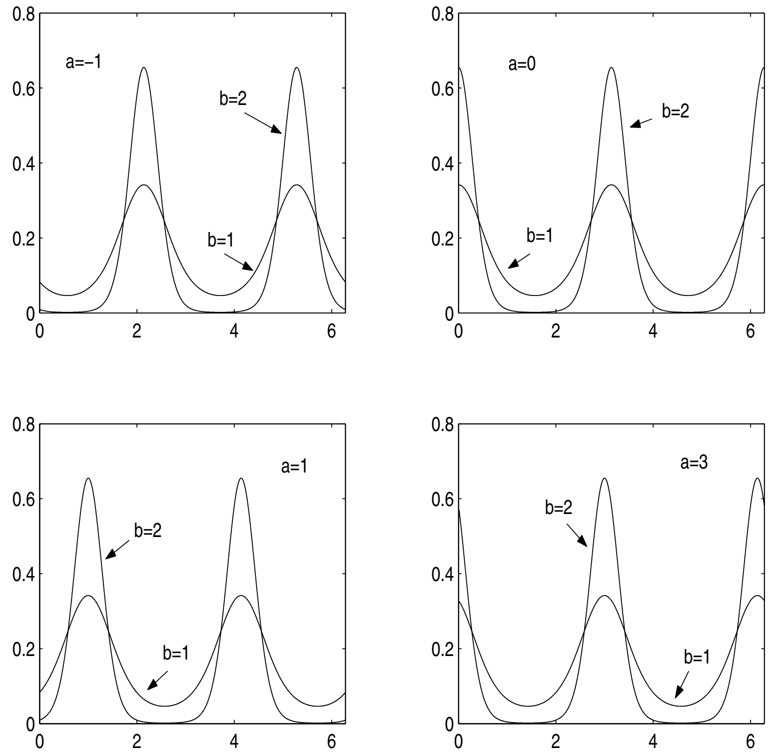
Густина

$$g(x) = \frac{e^{b\cos 2(x-a)}}{2\pi I_0(b)}, \quad x \in (0.2\pi],\ I_0(x)\ -\ \text{Беселова функција.}$$

Параметри

a $(0 \leq a \leq 2\pi)$ – параметар облика, b $(0 \leq b < \infty)$ – параметар скалирања.

График густине



148

ХЕЛМЕРТОВА РАСПОДЕЛА $H(n)$

(двопараметарска)

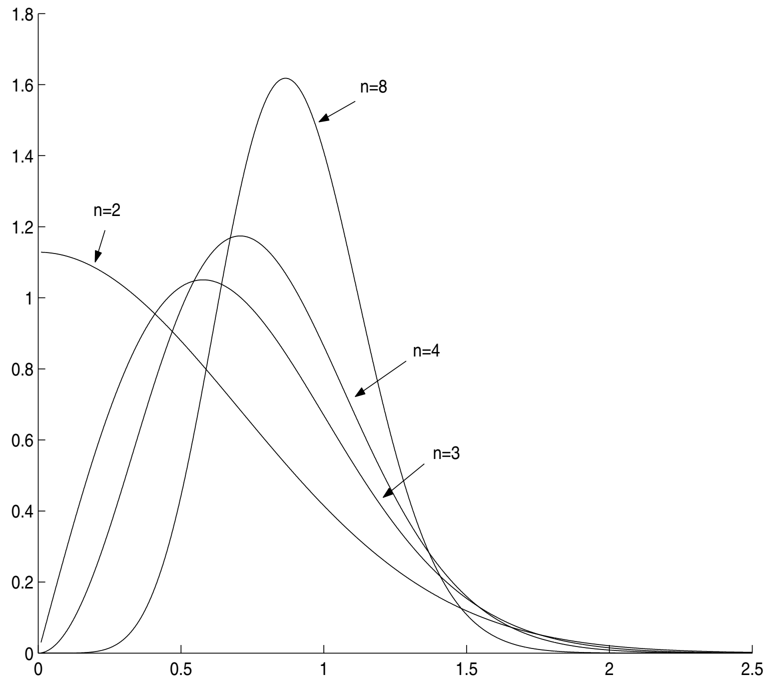
Густина

$$g(x) = \frac{n^{n/2-1/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{n/2-3/2}} \cdot x^{n-2} \cdot e^{-nx^2/2}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

n $(n \in N, n \neq 1)$ – параметар облика (број степени слободе).

График густине



149

ХИ РАСПОДЕЛА $\chi_1(a)$

(једнопараметарска)

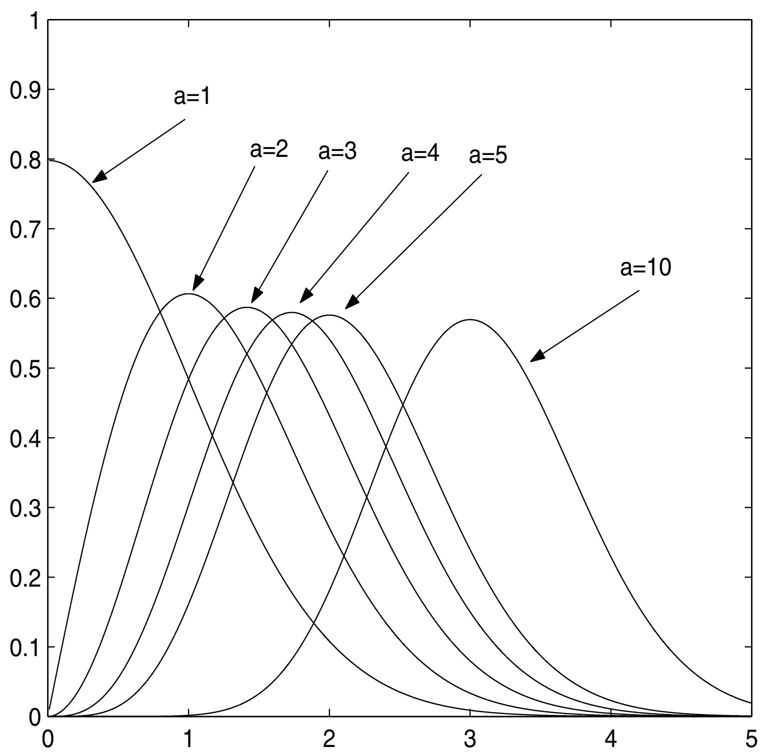
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2^{a/2-1}\Gamma(a/2)} x^{a-1} e^{-x^2/2}, \quad x > 0.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = P\left(\frac{a}{2}, \frac{x^2}{2}\right), \quad x > 0.$$

Ентропија

$$H(X) = \ln\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}(a - \ln 2 - (a-1)\psi\left(\frac{a}{2}\right).$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(a/2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}ti)^k}{k!}\Gamma\left(\frac{a+k}{2}\right).$$

Генератриса момената

$$M(t) = t\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)M\left(\frac{a+1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{t^2}{2}\right).$$

Моменти

$$m_r(X) = \frac{2^{r/2}\Gamma\left(\frac{a+r}{2}\right)}{\Gamma(a/2)}, \quad r \in N.$$

Специјално,

$$m_1(X) = \sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(a/2)}, \quad m_2 = a, \quad m_3 = (a+1)m_1, \quad D(X) = a - 2\frac{\Gamma^2\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma^2(a/2)}.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \sqrt{a-1}, \quad Me(X) \approx \sqrt{a - \frac{2}{3}}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{m_1}{\sigma^3}(1 - 2\sigma^2), \quad \pi_2(X) = \frac{2}{\sigma^2} - \frac{m_1}{\sigma}\pi_1(X) - 2,$$

где је $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Везе са другим расподелама

1. Ако $X : \chi^2(a)$, онда $\sqrt{X} : \chi(a)$.
2. Ако су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независне случајне величине са $N(0,1)$ расподелом, онда $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i} : \chi(n)$.
3. $\chi(1) = NZL(0,1,0)$.
4. $\chi(2) = R(1)$.
5. $\chi(3) = MAX(1)$.

150

ХИ РАСПОДЕЛА $\chi_2(a,b)$

(двопараметарска)

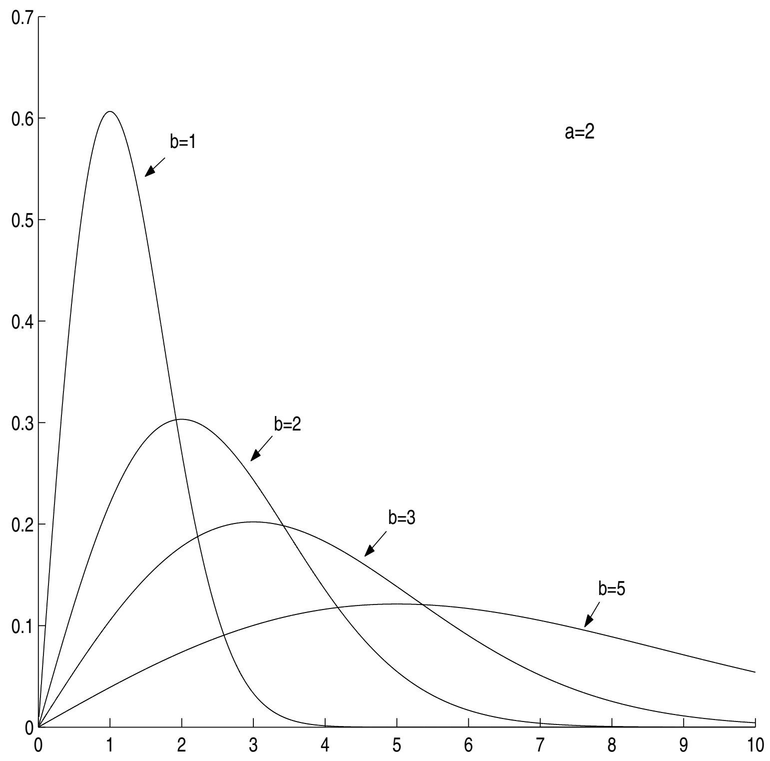
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2^{a/2-1} b^a \Gamma(n/2)} x^{a/2-1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2}\right\}, \quad x > 0.$$

Параметри

a ($a > 0$) – параметар облика, b ($b > 0$) – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = P\left(\frac{a}{2}, \frac{x^2}{2b^2}\right), \quad x > 0.$$

Моменти

$$m_r = 2^{r/2} b^r \frac{\Gamma\left(\dfrac{r+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{a}{2}\right)}, \quad r > -a.$$

Специјално,

$$m_1(X) = \sqrt{2} b \frac{\Gamma\left(\dfrac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{a}{2}\right)}, \quad D(X) = ab^2 - 2b^2 \frac{\Gamma^2\left(\dfrac{a+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{a}{2}\right)}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\dfrac{a}{2}\right)} \frac{4\Gamma^3\left(\dfrac{a+1}{2}\right) + \Gamma^2\left(\dfrac{a}{2}\right)\left(2\Gamma\left(\dfrac{a+3}{2}\right) - 3a\Gamma\left(\dfrac{a+1}{2}\right)\right)}{\Gamma^3\left(\dfrac{a}{2}\right)\left(a - \dfrac{2\Gamma^2\left(\dfrac{a+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{a}{2}\right)}\right)^{3/2}},$$

$$\pi_2(X) = \frac{A+B}{\left(a\Gamma^2\left(\dfrac{a}{2}\right) - 2\Gamma^2\left(\dfrac{a+1}{2}\right)\right)^2},$$

где је

$$\begin{aligned} A &= 2a(a-1)\Gamma^4\left(\frac{a}{2}\right) - 24\Gamma^4\left(\frac{a+1}{2}\right), \\ B &= 8\Gamma^2\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(3a\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) - 2\Gamma\left(\frac{a+3}{2}.\right)\right) \end{aligned}$$

Оцене параметара

Ако је параметар a познат, оцена $\widehat{b}$ по методи максималне веродостојности за параметар b дата је са

$$\widehat{b} = \left(\frac{1}{na}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2}.$$

Везе са другим расподелама

1. $\chi_2(1, b) = NZL(0, b, 0)$.

2. $\chi_2(2, b) = R_2(0, b)$

3. $\chi_3(3, b) = MAX(b)$.

4. Ако $X : \chi_2(n, 1)$, тяда $X^2 : \chi^2(n)$.

5. Ако $X : \chi_2(a, b)$, тада $X^2 : G_2(a/2, 2b^2)$.

6. Ако $X_i : \chi_2(a, b)$ и ако су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне променљиве, тада $X_1^2 + \cdots + X_n^2 : G_2(na/2, 2b^2)$.

151

ХИ РАСПОДЕЛА $\chi_3(a, b, c)$

(тропараметарска)

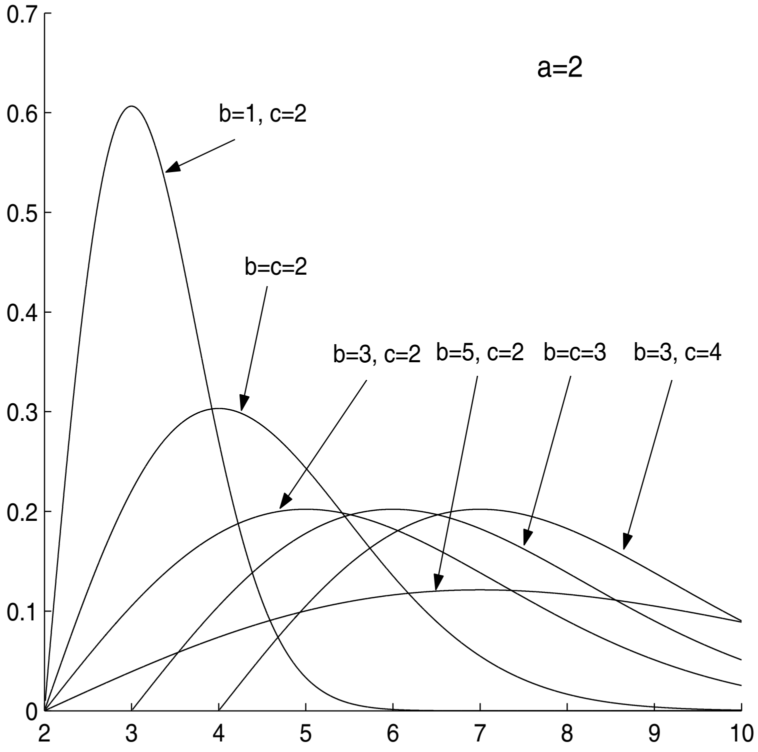
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2^{a/2-1} b\Gamma(n/2)} \left(\frac{x-c}{b}\right)^{a/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{b}\right)^2\right\}, \quad x > c.$$

Параметри

a $(a > 0)$ – параметар облика, b $(b > 0)$ – параметар скалирања,
c $(c \in R)$ – параметар локације.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = P\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{b}\right)^2\right), \quad x > c.$$

Моменти

$$m_1(X) = c + \sqrt{2}b\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(a/2)}, \quad D(X) = ab^2 - 2b^2\frac{\Gamma^2\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma^2(a/2)}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{4\Gamma^3\left(\frac{a+1}{2}\right) + \Gamma^2\left(\frac{a}{2}\right)\left(2\Gamma\left(\frac{a+3}{2}\right) - 3a\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\right)}{\Gamma^3\left(\frac{a}{2}\right)\left(a - \frac{2\Gamma^2\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{a}{2}\right)}\right)^{3/2}},$$

$$\pi_2(X) = \frac{A+B}{\left(a\Gamma^2\left(\frac{a}{2}\right) - 2\Gamma^2\left(\frac{a+1}{2}\right)\right)^2},$$

где је

$$\begin{aligned} A &= 2a(a-1)\Gamma^4\left(\frac{a}{2}\right) - 24\Gamma^4\left(\frac{a+1}{2}\right), \\ B &= 8\Gamma^2\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(3a\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) - 2\Gamma\left(\frac{a+3}{2}.\right)\right) \end{aligned}$$

Везе са другим расподелама

1. $\chi_3(a, b, 0) = \chi_2(a, b)$.
2. $\chi_3(a, 1, 0) = \chi_1(a)$.
3. $\chi_3(1, b, c) = NZL(0, b, c)$.
4. $\chi_3(2, b, 0) = R(b)$.
5. $\chi_3(3, b, 0) = MAX(b)$.

152

ХИ РАСПОДЕЛА $\chi^*(n,a)$

(нецентрална)

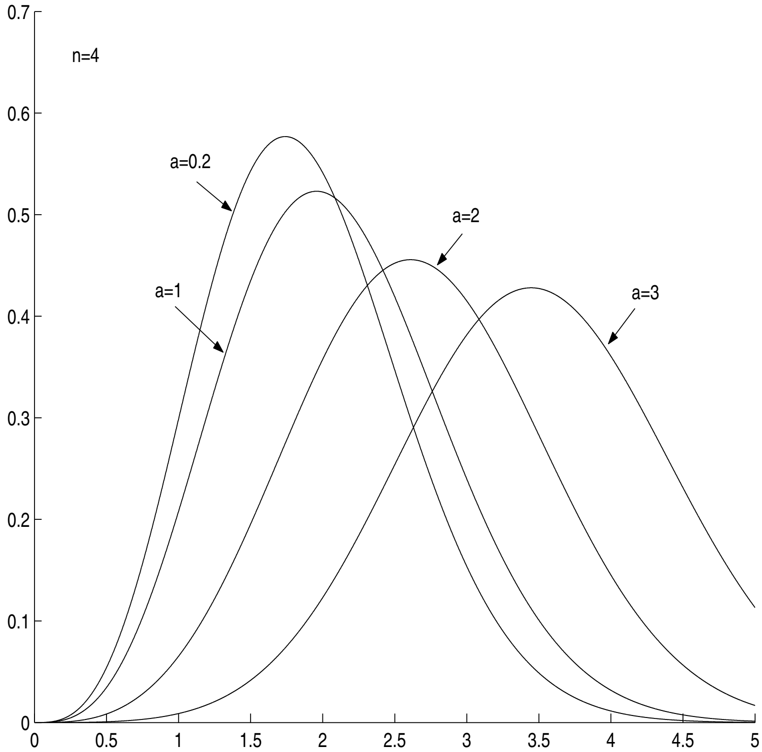
Густина

$$g(x) = \frac{x^{n/2}}{a^{n/2-1}} \exp\left\{-\frac{x^2+a^2}{2}\right\} I_{n/2-1}(ax), \quad x \geq 0.$$

Параметри

n ($n \in N$) – параметар облика (број степени слободе),
a ($a > 0$) – параметар нецентралности.

График густине



Моменти

$$m_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} L_{1/2}^{n/2-1}(-a^2/2), \quad m_2 = n + a^2 \quad m_3 = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} L_{3/2}^{n/2-1}(-a^2/2),$$

$$m_4 = (n + a^2)^2 + 2(n + 2a^2), \quad D(X) = n + a^2 - n_1^2,$$

где је $L_k^c(z)$ уопштени Лагеров полином.

Везе са другим расподелама

1. $\chi(n, 0) = \chi(n)$.

2. Ако $X_i \;:\; N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ и ако су $X_1, X_2, \dots, X_k$ независне случајне променљиве, тада

$$\sqrt{\frac{X_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{X_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{X_k^2}{\sigma_k^2}} \;:\; \chi(k, a),$$

где је $a = \sqrt{\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}}$.

153

ХИ КВАДРАТ РАСПОДЕЛА $\chi^2(n)$

(једнопараметарска)

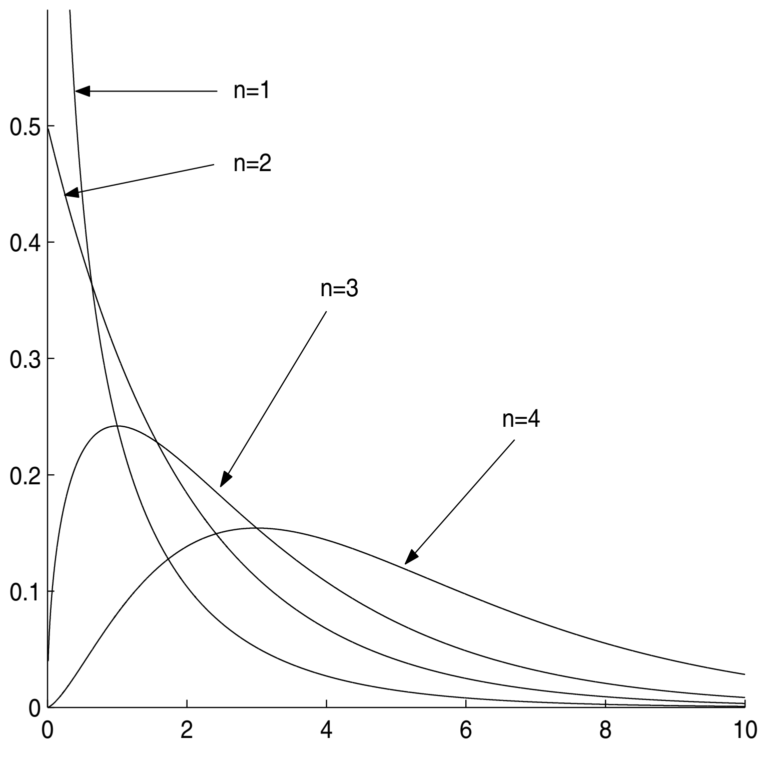
Густина

$$g(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0.$$

Параметри

n $(n \in N)$ – параметар облика (број степени слободе).

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = 1 - \frac{\Gamma(n/2, x/2)}{\Gamma(n/2)} = P\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = (1 - 2it)^{-n/2}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = (1 - 2t)^{-n/2}, \quad t < 1/2.$$

Моменти

$$m_r = \frac{2^r \Gamma(r + n/2)}{\Gamma(n/2)} = n(n+2)\cdots(n+2(r-1)), \quad r \in N.$$

Специјално,

$$m_1 = n, \quad m_2 = n(n+2), \quad m_3 = n(n+2)(n+4),$$

$$\mu_2 = 2n, \quad \mu_3 = 8n, \quad \mu_4 = 48n + 12n^2,$$

$$\mu_5 = 32n(5n+12), \quad \mu_6 = 40n(3n^2 + 52n + 96).$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = \begin{cases} 0, & n \leq 2 \\ n-2, & n > 2 \end{cases}, \quad Me(X) \approx n - \frac{2}{3} + \frac{4}{27n} - \frac{8}{729n^2}.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = \sqrt{\frac{8}{n}}, \quad \pi_2(X) = \frac{12}{n}.$$

Нека својства

Ако $X : \chi^2(m)$ и $Y : \chi^2(n)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $X + Y : \chi^2(m+n)$.

Везе са другим расподелама

1. $\chi^2(2) = E_1(2)$.

2. $\chi^2(n) = \Gamma_2(n/2, 2)$.
3. Ако $X \,:\, \chi^2(n)$, тада $\sqrt{X} \,:\, \chi(n)$.
4. Ако су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независне случајне величине са $N(0,1)$ расподелом, тада
$$X_1^2 + X_2^2 \cdots + X_n^2 \,:\, \chi^2(n).$$
5. Ако $X_i \,:\, \chi^2(n_i)$ $(i = 1, 2 \ldots, k)$ и ако су $X_1, X_2, \ldots X_k$ независне, тада
$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \,:\, \chi^2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k).$$
6. Ако $X \,:\, \chi^2(n)$, онда $\sqrt{2X} \approx N(\sqrt{2n-1}, 1)$ када $n \to \infty$.
7. Ако $X \,:\, \chi^2(n)$, онда $\sqrt[3]{\dfrac{X}{n}} \approx N\left(1 - \dfrac{2}{9n}, \dfrac{2}{9n}\right)$ када $n \to \infty$.
8. Ако $X \,:\, \chi^2(n)$, онда $\dfrac{X-n}{\sqrt{2n}} \approx N(0,1)$ када $n \to \infty$.
9. Ако су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне величине са $N(m, \sigma^2)$, тада
$$\left(\frac{X_1 - m}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - m}{\sigma}\right)^2 \,:\, \chi^2(n),$$
$$\left(\frac{X_1 - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 \,:\, \chi^2(n-1).$$
10. Ако $X \,:\, \chi^2(m)$ и $Y \,:\, \chi^2(n)$ и ако су X и Y независне, тада
$$\frac{X/m}{Y/n} \,:\, F(m, n).$$

Примена

Тестирање статистичких хипотеза.

Напомене

1. Функција g је фунција густине и ако целобројни параметар n заменимо позитивним реалним параметром.

2. Расподелу је увео Еби (Ernst Carl Abbe, 1840-9005) 1863. године. Независно од њега расподелу су увели и Хелмерт (Friedrich Robert Helmert, 1843-1917) 1875. године и Карл Пирсон (Karl Pearson, 1856-1936) 1900. године.

Генерисање

Случајан број из $\chi^2(n)$ расподеле се може добити као збир квадрата n случајних бројева из $N(0,1)$ расподеле.

154

ХИ КВАДРАТ РАСПОДЕЛА $\chi^{2*}(n,a)$

(двопараметарска, нецентрална)

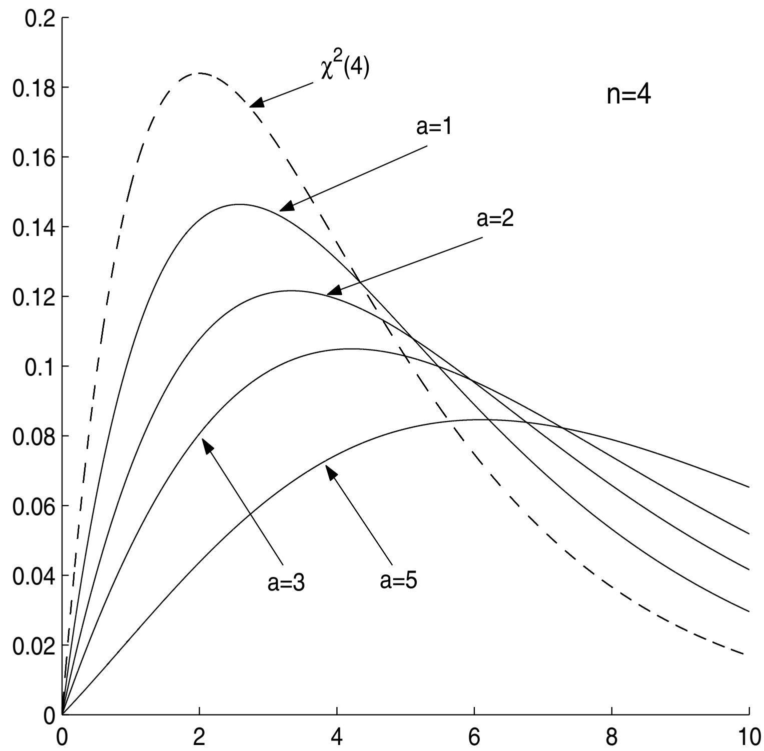
Густина

$$g(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{n/2-1}e^{-(x+a)/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{(2k)!}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)},\quad x\geq 0.$$

Параметри

n ($n\in N$) – параметар облика (број степени слободе),
a ($a>0$) – параметар нецентралности.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = e^{-a/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{2^k k!} P\left(\frac{n}{2} + k, \frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

Карактеристична функција

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}} \exp\left\{\frac{ita}{1-2it}\right\}.$$

Генератриса момената

$$M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}} \exp\left\{\frac{at}{1-2t}\right\}, \quad t \in R.$$

Моменти

$$\mu_2 = 2(n+2a), \quad \mu_3 = 8(n+3a), \quad \mu_4 = 48(n+4a) + 12(n+2a)^2,$$

$$\mu_5 = 384(n+5a) + 160(n+2a)(n+3a),$$

$$\mu_6 = 3840(n+6a) + 1440(n+2a)(n+4a) + 640(n+3a)^2 + 120(n+2a)^3.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 8 \cdot \frac{n+3a}{(2(n+2a))^{3/2}}, \quad \pi_2(X) = 12 \cdot \frac{n+4a}{(n+2a)^2}.$$

Везе са другим расподелама

1. $\chi^2(n,0) = \chi^2(n)$.

2. Ако су X_i независне случајне променљиве са $N(m_i,1)$ расподелом ($i = 1,2,\ldots,n$), тада
$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \; : \; \chi^2(n, m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2).$$

3. Ако $X \; : \; \chi^2(m,a)$ и $Y \; : \; \chi^2(n,b)$ и ако су X и Y независне случајне променљиве, тада $X + Y \; : \; \chi^2(m+n, a+b)$.

4. Ако $X \; : \; \chi^2(n,a)$, тада $\dfrac{n+2a}{n+a} X \; : \; \chi^2\left(\dfrac{(n+a)^2}{n+2a}\right)$.

Напомена

Функција густине може да се запише и у облику

$$f(x) = \frac{x^{n/4-1/2}}{2a^{n/4-1/2}} e^{-a/2-x/2} I_{n/2-1}(\sqrt{a}x),$$

где је $I_k(z)$ Беселова функција прве врсте.

Генерисање

Случајан број из $\chi^2(n,a)$ расподеле може да се добије као збир квадрата n случајних бројева из $N(\sqrt{a/n},1)$ расподеле.

155

ХИПЕРБОЛИЧКИ СЕКАНТ РАСПОДЕЛА $HS(a,b)$

(двопараметарска)

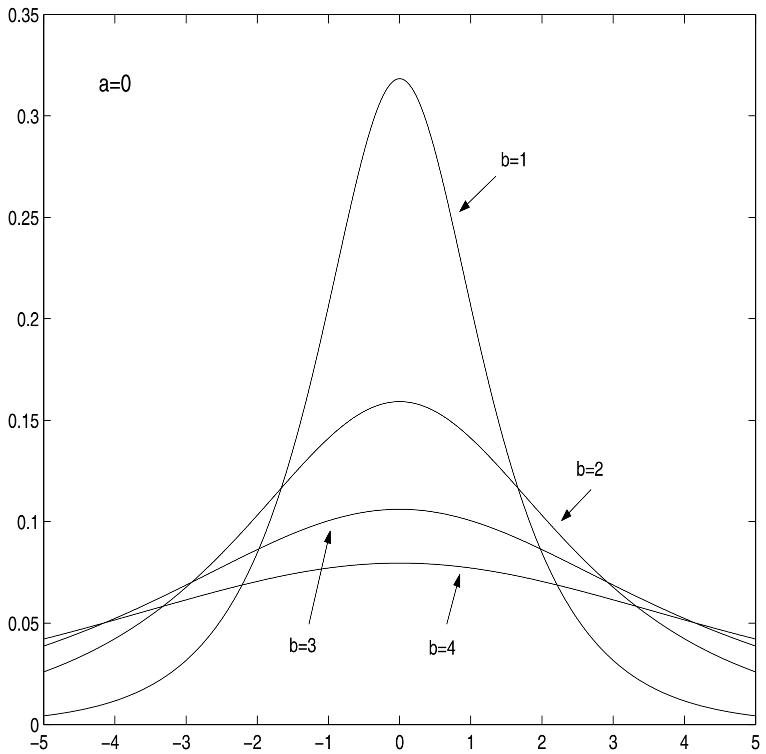
Густина

$$g(x) = \frac{1}{b\pi} \cdot sech\frac{x-a}{b}, \quad x \in R.$$

Параметри

a ($a \in R$) – параметар локације, b ($b > 0$) – параметар скалирања.

График густине



Функција расподеле

$$F(x) = \frac{2}{\pi} atan \left(\exp \left\{ \frac{x-a}{b} \right\} \right), \quad x \in R.$$

Моменти

$$m_1 = a, \quad \mu_2 = D(X) = \frac{1}{4} b^2 \pi^2.$$

Модус и медијана

$$Mo(X) = Me(X) = a.$$

Коефицијенти асиметрије и спљоштености

$$\pi_1(X) = 0, \quad \pi_2(X) = 2.$$

Нека својства

Квартили расподеле су

$$Q_1 = a - b \log(1 + \sqrt{2}), \quad Q_3 = a + b \log(1 + \sqrt{2}).$$

Додатак - специјалне функције

У дефиницији неких расподела се користе *гама* и *бета* функције, као и неке друге специјалне функције. Овде су дате дефиниције и кратак преглед својстава тих функција.

1 Гама функција

Гама функција је дефинисана са

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

где је z комплексан број чији је реалан део већи од нуле. Ово је Ојлерова [1] интегрална форма гама функције. Она се може представити и у облику граничне вредности

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z,$$

као и у облику бесконачног производа

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

где је $\gamma \approx 0.5772156649$ Ојлерова константа.

За гама функцију важи рекурентна релација $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Специјално, $\Gamma(n+1) = n!$.

Апроксимација за гама функцију се може добити из Стирлингове [2] формуле

$$\Gamma(z) = z^z e^{-z} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \cdots\right)$$

која важи за $|\arg z| < \pi$ и $|z| \to \infty$. Специјални случај је позната Стирлингова формула за апроксимацију факторијел

$$n! \approx n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}.$$

За $z = x > 0$ вредности гама функције су реалне и позитивне,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt > 0, \quad x > 0.$$

[1] Leonhard Euler (1707-1783) - швајцарски натематичар који је објавио преко 900 радова и чије име носи једна улица у Паризу и један кратер на месецу

[2] James Stirling (1692-1770) - енглески математичар, Њутнов ученик

Из једнакости

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

и једнакости $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ добијамо, на пример,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{105}{16}\sqrt{\pi}.$$

2 Дигама функција

Дигама или ψ функција је извод логаритма гама функције

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d\Gamma(z)}{dz}.$$

Функција може да се представи у облику бесконачног реда

$$\psi(z+1)=-\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right),$$

где је γ Ојлерова константа. Специјално,

$$\psi(n)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},$$

$$\psi\left(n+1/2\right)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}.$$

Иiз ових једнакости добијамо, на пример,

$$\psi(1)=-\gamma,\quad \psi(2)=1-\gamma,\quad \psi(3)=\frac{3}{2}-\gamma,\quad \psi(4)=\frac{11}{6}-\gamma,$$

$$\psi\left(\frac{3}{2}\right)=\psi\left(\frac{1}{2}\right)+2,\quad \psi\left(\frac{5}{2}\right)=\psi\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{3},\quad \psi\left(\frac{7}{2}\right)=\psi\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{46}{15},$$

где је $\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2$.

Ако је потребан извод гама функције, може се користити једнакост

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz}=\Gamma(z)\cdot\psi(z).$$

3 Полигама функције

Полигама функције су виши изводи дигама функције ψ, односно функције $\ln\Gamma$. Тако је

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\psi(z) = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\ln\Gamma(z), \quad n \in N.$$

Полигама функције могу да се представе у облику бесконачног реда

$$\psi^{(n)} = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^{n+1}}.$$

Често се користе једнакости

$$\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1),$$

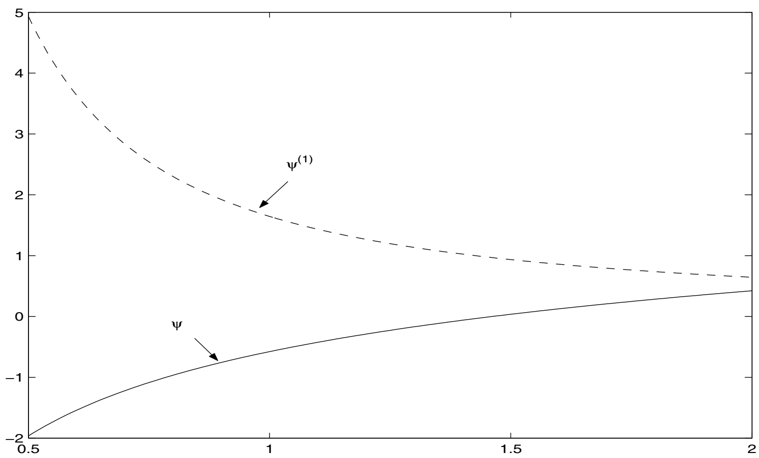
$$\psi^{(n)}(1/2) = (2^{n+1}-1)\psi^{(n)}(1) = (1-)^{n+1} n!(2^{n+1}-1)\zeta(n+1),$$

где је ζ Риманова зета функција.

У случају $n = 1$ функција $\psi^{(1)}$ се зове *тригама* функција. За њу је

$$\psi^{(1)}(1) = \zeta(2) \approx 1.645, \quad \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} \approx 4.935.$$

На следећој слици су приказани графици функција дигама и тригама за реалне аргументе из скупа $[0.5, 2]$.



4 Непотпуне гама функције

Непотпуне гама функције $\gamma(a,x)$, $\Gamma(a,x)$, $P(a,x)$ и $Q(a,x)$ дефинисане су са

$$\gamma(a,x) = \int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt, \quad \Gamma(a,x) = \int_x^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt,$$

$$P(a,x) = \frac{\gamma(a,x)}{\Gamma(a)}, \quad Q(a,x) = 1 - P(a,x)$$

за комплексан број a чији је реалан део већи од нуле. У применама се најче71е користе реални целобројни аргументи.

Очигледно је

$$\Gamma(a) = \gamma(a,x) + \Gamma(a,x),$$

а важе и следеће рекурентне релације:

$$\gamma(a+1,x) = a\gamma(a,x) - x^a e^{-x},$$

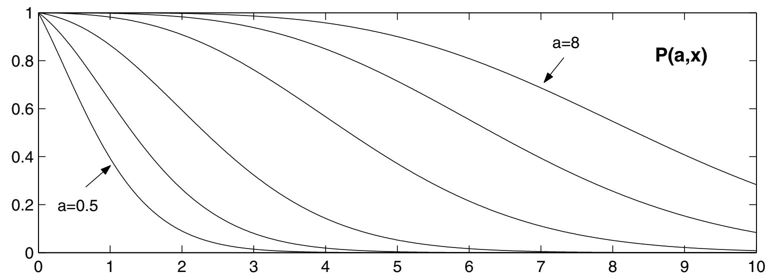
$$\Gamma(a+1,x) = a\Gamma(a,x) - x^a e^{-x},$$

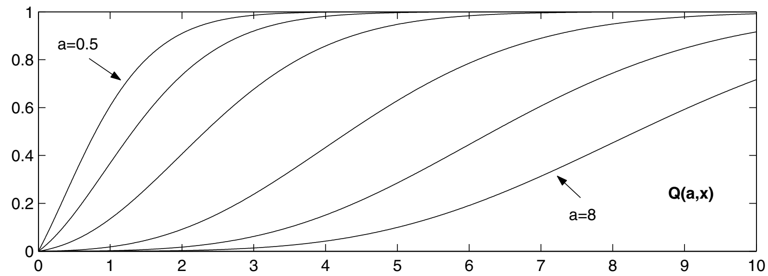
$$P(a+1,x) = P(a,x) - \frac{x^a e^{-x}}{a\Gamma(a)}.$$

Функције $\gamma(a,x)$ може да се представи бесконачним редом

$$\gamma(a,x) = e^{-x} x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+n+1)} x^n.$$

На следеће две слике дати су графици непотуних гама функцуија P и Q за неколико вредности a (0.5, 1., 2., 4., 6., 8.).





5 Бета функција

Бета функција $B(a,b)$ је дефинисана са

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt, \quad a > 0, b > 0.$$

Сменом $x = \dfrac{t}{1-t}$ видимо да функција $B(a,b)$ може да се представи и на следећи начин

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{a+b}}.$$

Једнакост

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

даје везу између гама и бета функције.

6 Непотпуне бета функције

Непотпуне бета функција $B_x(a,b)$ и $I_x(a,b)$ су дефинисане са

$$B_x(a,b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, \quad I_x(a,b) = \frac{B_x(a,b)}{B(a,b)}.$$

За функцију B_x важ1 једнакост

$$B_x(a,b) = B_1(b,a) - B_{1-x}(b,a).$$

Функција I_x се користи у изразима за функцију расподеле, на пример Фишерове и Студентове расподеле.

7 Функције грешке

Функција $\mathrm{e}rf : C \to C$ дефинисана са

$$\mathrm{e}rf\, z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

је *функција грешке* (енг. error function) или *функција вероватноће*, а њен комплемент је функција $\mathrm{e}rfc$ дефинисана са

$$\mathrm{e}rfc(z) = 1 - \mathrm{e}rf(z)$$

за коју важи

$$\mathrm{e}rfc(z) = \frac{1}{\pi} e^{-z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+1/2)}{z^{2k+1}}.$$

У вези са расподелама ове функције се користе са реалним аргументом, $z = x \in R$. За $x \geq 0$ фукција $\mathrm{e}rf$ је функција расподеле за нормалну стандардну расподелу засечену на $[0, \infty)$, чија је густина

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \geq 0.$$

Веза са функцијом расподеле стандардне нормалне расподеле је

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}rf\, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\, \mathrm{e}rfc\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Ако $X\ :\ N(0,1)$, тада је

$$P\{|X| \le x\} = \mathrm{e}rf\,\frac{x}{\sqrt{2}}, \quad x > 0.$$

Функција erf може да се изрази преко непотпуне гама функције

$$\mathrm{e}rf\,x = P\left(\frac{1}{2}, x^2\right), \quad x \ge 0.$$

8 Риманова зета функција

Функција $\zeta : R \to R$ дефинисана са

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad x > 1$$

је Риманова[3] зета функција. Она може да се представи и на следећи начин

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

За неке целобројне аргументе вредности функција су:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Често се уместо $\zeta(n)$ пише ζ_n. За парне аргументе важи

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}|B_{2n}}{(2n)!}, \quad n \in N,$$

где су B_{2n} Бернулијеви[4] бројеви који су дефинисани једнакошћу

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

На пример, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, а важи и једнакост

$$B_{2n} = 2(-1)^{n+1}(2n)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^{2n}},$$

док је $B_{2n+1} = 0$ за $n \in N$.

[3] Georg Friedrich Bernard Riemann (1826-1866) - немачки математичар који се сматра једним од твораца модерне математике

[4] Jacob Bernoulli (1655-1705) - швајцарски математичар који је открио биномну расподелу

9 Беселове функције прве врсте

Функција $J_a : C \to C$ дефинисана са

$$J_a(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(a+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad a \in R$$

је *Беселова*[5] *функција прве врсте*. За целобројне вредности параметра a постоје разне рекурентне везе, на пример,

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z),$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z),$$

$$J_{n+1}(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_n'(z).$$

Беселова функција J_a је једно решење диференцијалне једначине

$$z^2 y''(z) + zy' + (z^2 - a^2)y(z) = 0.$$

Функција $I_a : C \to C$ дефинисана са

$$I_a(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(a+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad a \in R$$

је *модификована Беселова функција прве врсте*. Специјално, за $x \in R$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}, \quad I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Једнакост

$$I_a(z) = i^a J_a(iz),$$

даје везу између функција I_a и J_a, а за целобројне вредности параметра a постоје рекурентне везе, аналогне везама за Беселову функцију,

$$I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} I_n(z),$$

$$I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z) = 2I_n'(z),$$

$$I_{n+1}(z) = -\frac{n}{z} I_n(z) + I_n'(z).$$

Модификована Беселова функција J_a је једно решење диференцијалне једначине

$$z^2 y''(z) + zy' - (z^2 + a^2)y(z) = 0.$$

[5] Vilhelm Bessel (1784-1846)

10 Беселове функције друге врсте

Функција $N_a : C \to C$ дефинисана са

$$N_a(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin a\pi}(J_a(z)\cos a\pi - J_{-a}(z)), & a \notin Z \\ \dfrac{1}{\sin a\pi}(J_a(z)\cos a\pi - J_{-a}(z)), & a \in Z \end{cases}$$

је *Беселова функција друге врсте*, а функлција $K_a : C \to C$ дефинисана са

$$K_a(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{-a}(z) - I_a(z)}{\sin a\pi}, & a \notin Z \\ \dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{c\to a}\dfrac{I_{-c}(z) - I_c(z)}{\sin c\pi}, & a \in Z \end{cases}$$

је *модификована Беселова функција друге врсте*.

11 Хипергеометријска функција M

Постоји више хипергеометријских функција које се дефинишу помоћу степених редова или као решења неких линеарних диференцијалних једначина другог реда са функционалним коефицијентима.

Нека је $(a)_n$ ознака за производ $a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$, где је $a \in C$ и $n \in N$. Хипергеометријска функција $M(a, b; \cdot)$ дефинише се са

$$M(a, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \cdot \frac{x^n}{n!}, \quad a \neq 0, -1, -2, \dots$$

и она је једно решење једначине

$$xy''(x) + (b - x)y'(x) - ay(x) = 0.$$

Како је $(a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, то је

$$M(a, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Функција M може да се представи и интегралом

$$M(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(ba)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1}(1-t)^{b-a-1} dt,$$

а важи и једнакост

$$M(a, b; x) = e^x M(b - a, b, -x).$$

За изводе функције M важи

$$M^{(n)}(a, b; x) = \frac{(a)_n}{(b)_n} M(a + n, b + n; x).$$

Многе математичке функције могу да се изразе помоћу функције M. На пример,

$$e^x = M(a,a;x), \quad \gamma(a,x) = \frac{x^a}{a}M(a,a+1,-x),$$

$$I_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n M\left(n+\frac{1}{2}, 2n+1, 2x\right).$$

У литератури на енглеском језику ова хипергеометријска функција се зове и Kummer confluent hypergeometric function и означава са F или ${}_1F_1$.

12 Лагерови полиноми

Полином L_n дефинисан са

$$L_n(x) = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!}$$

је *Лагеров*[6] *полином*. Ма пример,

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1-x, \quad L_2(x) = 2-4x+x^2, \quad L_3(x) = 6-18x+9x^2-x^3.$$

Полином L_n је решење диференцијалне једначине

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0,$$

а важи и рекурентна веза

$$L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0.$$

Параметар n (степен полинома) се може уопштити на реалну вредност, при чему је $L_a(x) = M(-a,1,x)$ за $a \in R$. Специјално,

$$L_{1/2}(x) = M\left(-\frac{1}{2},1,x\right) = e^{x/2}(1-x)I_0\left(\frac{-x}{2}\right) - e^{x/2}xI_1\left(\frac{-x}{2}\right).$$

Полином L_n^c дефинисан са

$$L_n^c(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\Gamma(c+n+1)}{\Gamma(c+k+1)}\,x^k$$

је *уопштени Лагеров полином*. Специјални случајеви су, на пример,

$$L_0^n(x) = 1, \quad L_n^{-n}(x) = (-1)^n x^n, \quad n \in N.$$

Полином L_n^c је решење диференцијалне једначине

$$xy'' + (c+1-x)y' + ny = 0.$$

[6] E?? Laguerre (?-?) - француски математичар

ЛИТЕРАТУРА

[1] AbouRizk, S. M. and Halpin, D. W. (1992). Statistical properties of construction duration data, *Journal of Construction Engineering and Managment*, **118**, 525-544.

[2] Ahmed, M. I., Sinclair, C. D. and Werritty, A. (1988). Log-logistic flood frequency analysis, *Journal of Hydrology*, **98**, 205-224.

[3] Aitchison, J. and Shein, S. M. (1980). Logistic normal distributions: some properties and uses, *Biometrika*, **67**, 261-272.

[4] Asrabadi, B. R. (1990). Estimation in the Pareto distribution, *Metrika*, **37**, 100-205.

[5] Bean, S. T. and Somerville, P. N. (1980). Some new worldwide cloud cover models. Proceedings of the First International Conference on Statistical Climatology, Ed. Ikeida S., 279-305, Elsevier Scientific Publishing Company.

[6] Biondini, R. (1976). *Journal of Applied Meteorology*, **15**, 205-224

[7] Boxian, W., Yu, H. and Jing D. (1991). The method of lower bound to estimate the parameters of a Pearson type III distribution. *Hydrological Sciences*, **36**, 271-280.

[8] Bridges, T. C. and Haan, C. T. (1972). Reliability of precipitation probabilities estimated from the gamma distribution, *Mounthly Weather Review*, **100**, 607-611.

[9] Bushiand, T. A. (1978). Some remarks on the use of daily rainfall models, *Journal of Hydrology*, **36**, 295-308.

[10] Chang, Y., Han, R. L., Pearson, C. L., Runyan, M. R., Ranade, M. B. and Gentry, J. W. (1988). Applications of the log beta distribution to the evolution of aerosol growth, *Journal of Aerosol Science*, **19**, 879-882.

[11] Davidson, R. R. (1980). Some properties of a family of generalized logistic distributions, in *Statistical Climatology, Developments in Atmospheric Science*, Ed. by S. Ikeda, Elsevier Scientific Publishing Company.

[12] Davison, A. C. and Smith, R. L. (1990). Models for exceedances over high thresholds. *J. R. statist. Soc. B*, **52**, 393-442.

[13] Econopouly, T. W., Davis, D. R. and Woolhiser, D. A. (1990). Parameter transferability for a daily rainfall disaggregation model, *Journal of Hydrology*, **118**, 209-228.

[14] Ellingwood, B. and Redfield, R. K. (1984). Probability models for annual extreme water equivalent ground snow, *Monthly Weather Review*, **112**, 1153-1159.

[15] Evans, M. A. and Gross, S. D. (1994). Burr distribution tables for a approximation p - values and critical values by maching skewness and kurtosis, *Pakistan Journal of Statistics*, **10**, 547-573.

[16] Ferrer, J. and Ardiles, L. (1993). Frequency analysis of daily rainfall annual maximum series in Spain, Seminaire annuel, UNESCO.

[17] Folks, J. L. and Chhikara, R. S. (1978). The inverse Gaussian distribution and its statistical application - a review, *J. R. Statist. Soc. B*, **40**, 263-289.

[18] Golenko-Ginzburg, D. (1988). The distribution of activity time in PERT, *Journal of the Operational Research Society*, **39**, 767-771.

[19] Graham, V. A. and Hollands, K. G. T. (1990). Method to generate synthetic hourly solar radiation globally, *Solar Energy*, **44**, 333-341.

[20] Green, J. R. (1964). A model for rainfall occurrence, ??, 345-353.

[21] Griffitis, G. A. (1989). A theoretically based Wakeby distribution for annual flood series, *Hudrological Sciences*, **34**, 231-247.

[22] Gunasekara, T. A. G. and Cunnane, C. (1991). Expected probabilities of exceedance for non-normal flood distributions, *Journal of Hydrology*, **128**, 101-113.

[23] Haktanir, T. and Sezen, N. (1990). Sutability of two-parameter gamma and three-parameter beta distributions as synthetic unit hydrographs in Anatolia. *Hydrological Science - Journal - des Sciences Hydrologiques*, **35**, 2, 167-184.

[24] Hoshi, K. and Leeyavanija, U. (1986). A new approach to parameter estimations of gamma-type distributions, *Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering*, **4**, 79-95.

[25] Janc, N (?). Statistička obrada jakih kiša na području Beograda, Republički hidrometeorološki zavod SR Srbije, Beograd.

[26] Janc, N (?). Statistical characteristics of storm winds in Belgrade, Republički hidrometeorološki zavod SR Srbije, Beograd.

[27] Јевремовић, В., Малишић, Ј. (2002). *Статистичке методе у метеорологији и инжењерству*, Савезни хидрометоролошки завод, Београд.

[28] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions*, Vol.1, John Wiley & Sons, New York.

[29] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, Vol.2, John Wiley & Sons, New York.

[30] Katsoulis, B. D. (1993). A survey on the Assessment of wind energy potential in Greece, *Theoretical and Applied Climatology*, **47**, 51-63.

[31] Koppes, L. J. and Grover, N. B. (1992). Relationship between size of parent at cell division and relative size of progeny in Escherichia Coli, *Archives of Microbiology*, **157**, 402-405.

[32] Lauritzen, S. L., Thommesen, C. and Andersen, J. B. (1990). A stochastic model in mobile communicatin, *Stochastic Processes and Their Applications*, **36**, 165-172.

[33] Lavergnat, J. and Gole, P. (1998). A stochastic raindrop time distribution model, *Journal of Applied Meteorology*, **37**, 805-818.

[34] Lowery, M. D. and Nash, J. E. (1970). A comparison of methods of fitting the double exponential distribution, *Journal of Hydrology*, **10**, 259-275.

[35] Magnussen, S. (1992). A distribution model for heritability, *Genome*, **35**, 931-938.

[36] Малишић J., Ункашевић, M. (1997). *Статистичке расподеле у климатологији*, Универзитет у Београду.

[37] McNally, R. J. (1990). Maximum likelihood estimation of the parameters of the prior distributions of three variables that strongly influence reproductive performance in cows, *Biometrics*, **46**, 501-514.

[38] Mielke, P. W. (???). Convenient beta distribution likelihood techniques for describing and comparing meteorological data. Department of Statistics, Colorado State University.

[39] Mielke, P. W. and Johnson, E. S. (1973). Three parameter kappa distribution maximum likelihood estimates and likelihood ratio tests. *Mounthly Weather Review*, **101**, 701-707.

[40] Milyutin, E. R. and Yaromenko, Yu. I. (1991). Statistical characteristics of atmospheric transparency index over titled routes, *Meteorologiya i Gidrologiya*, **12**, 72-76.

[41] Mitrinović, D. S. (1972). *Uvod u specijalne fukcije*, Gradjevinska knjiga, Beograd.

[42] Младеновић, П. (1995). *Вероватноћа и Статистика*, Веста, Математички факултет, Београд.

[43] Mooley, D. A. and Rao, G. A. (1971). Distribution function for seasonal and annual rainfall over India, *mwr*, **99**, 796-799.

[44] Naghettini, M., Potter, K. W. and Illangasekare, T. (1996). Estimating the upper tail of flood-peak frequency distributions using hydrometeorological information, *Water Resources Research*, **32**, 1729-1740.

[45] Pearson, K. (1895). Mathematical contribution to the theory of evolution. II. Skew variation in homogeneous material, *Philosophical Transactions of the Royal society of London, A*, **186**, 343-414.

[46] Phein, H. N. and Hira, M. A. (1983). Log Pearson type 3 distribution: parmeter estimation, *Journal of Hydrology*, **64**, 25-37.

[47] Roldan-Canas, J., Garcia-Guzman, A. and Losada-Villasante, A. (1982). A stochastic model for wind occurence, *jam*, **21**, 740-744.

[48] Runyan, M. R., Pearson, C. L., Wang, C. C., Han, R., Plunkett, S., Kaplan, C. and Gentry, J. W. (1988). The use of the log beta distribution to characterize atmospheric aerosols, *Lecture Notes in Physics*, 309, Berlin, Springer Verlag, 65-68.

[49] Sakamoto, C. M. (1973). Application of the Poisson and negative binomial models to thunderstorm and hail days probabilities in nevada, *Mounthly Weather Review*, **101**, 350-355.

[50] Schickedanz, P. T. and Krause, G. F. (1970). A test for the scale parameters of two gamma distributions using the generalized likelihood ratio, *Journal of Applied Meteorology*, **??**, 13-16.

[51] Simpson, J. (1972). Use of the gamma distribution in single-cloud rainfall analysis, *Monthly Weather Review*, **100**, 309-311.

[52] Спасов, П, Зеленхасић, Е. и Маричић, М. (?). Екстремне вредности сушних периода током вегетационе сезоне у Београду и околини, Републички хидрометеоролошки завод СР Србије, Београд.

[53] Stedinger, J. R. (1980). Fitting log normal distributions to hydrologic data, *Water Resources Research*, **16**, 481-490.

[54] Suzuki, E. (1980). Asummarized review of theoretical distributions fitted to climatic factors and Markov chains models of weather sequences, with some examples. Proceedings of the First International Conference on Statistical Climatology, Ed. Ikeida S., 1-20, Elsevier Scientific Publishing Company.

[55] Tuller, S. E. and Brett, A. C. (1984). The characteristics of wind velocity that favor the fitting of a Weibull distribution in wind speed analysis, *Journal of Climate and Applied Meteorology*, **23**, 124-134.

[56] Undsey, S. R., Wood, G. R. and Woollons, R. C. (1997). Modelling the diameter distribution of forest stands using the Burr distribution, *Journal of Applied Statistics*, **23**, 609-619.

[57] Van Dingenan, R., Raes, F. and Vanmarcke, H. (1987). Application of the log beta distribution for aerosol size distribution, *Journal of Aerosol Science*, **18**, 663-666.

[58] Вукмировић, В. (1990). *Анализа вероватноће појаве хидролошких величина* , Научна књига, Београд.

[59] Wang, Q. J. (1990). Unbiased estimation of probability weighted moments and partial probability weighted moments from systematic and historical flood information and their application to estimating the GEV distribution, *Journal of Hydrology*, **120**, 115-124.

[60] Wiley, J. A., Herschokoru, S. J. and Padiau, N. S. (1989). Heterogenity in the probability of HIV transmission per sexual contact: the case of male-to-female transmission in penile-vaginal intercourse, *Statistics in Medicine*, **8**, 93-102.

[61] Wilks, D. S. (1989). Rainfall intensity, the Weibull distribution and estimation of daily surface runoff, *Journal of Applied Meteorology*, **28**, 52-58.

[62] Wilks, D. S. and Shen, K. W. (1991). Threshold relative humidity duration forecasts for plant disease prediction. *Journal of Applied Meteorology*, 463-477.

[63] Wong, R. K. W. and Chidambaram, N. (1985). Gamma size distribution and stochastic sampling errors, *Journal of Climate and Applied Meteorology*, **24**, 568-579.