

# Функционалне зависности – примери

Ненад Митић

Математички факултет  
`nenad.mitic@matf.bg.ac.rs`

# Пример 1

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  и скуп ФЗ:

$$1) A \longrightarrow BC$$

$$2) BC \longrightarrow DE$$

$$3) AEF \longrightarrow G$$

Показати да важи ФЗ

$$ACF \longrightarrow DG$$

# Пример 1 - наставак

- 4)  $AC \rightarrow BC$  (ФЗ 1 + проширење  $C$ )
- 5)  $AC \rightarrow DE$  (транзитивност - 2+4)
- 6)  $ACF \rightarrow DEF$  (ФЗ 5 + проширење  $F$ )
- 7)  $ACF \rightarrow ACDEF$  (ФЗ 6 + проширење  $AC$ )
- 8)  $ACF \rightarrow AEF$  (7, декомпозиција)
- 9)  $ACF \rightarrow G$  (транзитивност - 8+3)
- 10)  $ACF \rightarrow D$  (6, декомпозиција)
- 11)  $ACF \rightarrow DG$  (9, 10, унија )

## Пример 2

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  и скуп ФЗ:

1)  $A \longrightarrow BC$

2)  $B \longrightarrow E$

3)  $CD \longrightarrow EF$

Pokazati da važi FZ

$$AD \longrightarrow F$$

## Пример 2 - наставак

- 4)  $AD \longrightarrow BCD$  (FZ 1 + повећање D)
- 5)  $AD \longrightarrow CD$  (4, декомпозиција)
- 6)  $AD \longrightarrow EF$  (транзитивност - 5+3)
- 7)  $AD \longrightarrow F$  (6, декомпозиција)

# Пример 3

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  и скуп ФЗ:

1)  $A \longrightarrow B$

2)  $A \longrightarrow C$

3)  $CD \longrightarrow E$

4)  $CD \longrightarrow F$

5)  $B \longrightarrow E$

Показати а важе ФЗ

$$A \longrightarrow E$$

$$AD \longrightarrow F$$

$$CD \longrightarrow EF$$

# Пример 4

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ .

Показати да су следећа два скупа ФЗ:

$X$

1)  $B \longrightarrow CD$

2)  $AD \longrightarrow E$

3)  $B \longrightarrow A$

и  $Y$

4)  $B \longrightarrow CDE$

5)  $B \longrightarrow ABC$

6)  $AD \longrightarrow E$

еквивалентни

## Пример 4 - наставак

Доказ да се све ФЗ из скупа  $Y$  изводе из ФЗ из скупа  $X$ :

- 7)  $AD \longrightarrow E$  (ФЗ 2 и 6 су идентичне)
- 8)  $B \longrightarrow ACD$  (унија 1 и 2)
- 9)  $B \longrightarrow AD$  (декомпозиција FZ 8)
- 10)  $B \longrightarrow E$  (транзитивност 9+6)
- 11)  $B \longrightarrow ACDE$  (унија 8 и 10)
- 12)  $B \longrightarrow CDE$  (декомпозиција 11)
- 13)  $B \longrightarrow AC$  (декомпозиција 8)
- 14)  $B \longrightarrow ABC$  (проширење 13 са  $B$ )



## Пример 4 - наставак

Доказ да се све ФЗ из скупа  $X$  изводе из ФЗ скупа  $Y$ :

15)  $AD \longrightarrow E$  (ФЗ 6 и 2 су идентичне)

16)  $B \longrightarrow CD$  (декомпозиција 4)

17)  $B \longrightarrow A$  (декомпозиција 5)

# Пример 5

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$  и скуп Ф ФЗ:

- 1)  $A \longrightarrow B$
- 2)  $CH \longrightarrow A$
- 3)  $B \longrightarrow E$
- 4)  $BD \longrightarrow C$
- 5)  $EG \longrightarrow H$
- 6)  $DE \longrightarrow F$

Испитати да ли следеће ФЗ могу да се изведу из F:

- 7)  $BFG \longrightarrow AE$
- 8)  $ACG \longrightarrow DH$
- 9)  $CEG \longrightarrow AB$

# Пример 1

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E\}$  и скуп  $F$  ФЗ:

- 1)  $A \longrightarrow BC$
- 2)  $CD \longrightarrow E$
- 3)  $B \longrightarrow D$
- 4)  $E \longrightarrow A$

Одредити затворење  $F^+$  скупа  $F$ .

# Пример 1 - наставак

- 5)  $A \longrightarrow D$  (транзитивност 1+3)
- 6)  $A \longrightarrow DC$  (декомпозиција 1 -  $A \longrightarrow C$  , са 5)
- 7)  $A \longrightarrow E$  (транзитивност 6+2)
- 8)  $A \longrightarrow ABCDE$  ( 1,5,6,7, проширење  $A$ )
- 9)  $E \longrightarrow ABCDE$  (транзитивност - 8+4)
- 10)  $CD \longrightarrow ABCDE$  (транзитивност - 2+9)
- 11)  $BC \longrightarrow CD$  (проширење 3  $C$ )
- 12)  $BC \longrightarrow ABCDE$  (транзитивност - 11+10)

Укључујући и релације које су пројекције изведених релација

## Пример 2

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E\}$  и скуп  $F$  ФЗ:

- 1)  $A \longrightarrow B$
- 2)  $CD \longrightarrow E$
- 3)  $B \longrightarrow C$

Одредити затворење  $F^+$  скупа  $F$ .

## Пример 2 - наставак

- $CD \longrightarrow D$  (рефлексивност 2), додати у  $F^+$
- $A \longrightarrow D$  (транзитивност 1+3), додати у  $F^+$
- Из  $A \longrightarrow B$  се применом проширења добија  
 $A \longrightarrow AB; AB \longrightarrow B; AC \longrightarrow BC;$   
 $AD \longrightarrow BD; ABC \longrightarrow BC; ABD \longrightarrow BD; ACD \longrightarrow BCD$
- Из  $B \longrightarrow C$  се применом проширења добија  
 $AB \longrightarrow AC; BC \longrightarrow C; BD \longrightarrow CD; ABC \longrightarrow AC; ABD \longrightarrow ACD;$   
...
- Применити транзитивност на све парове ФЗ  $F$
- ...

# Пример 3

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E\}$  и скуп  $F$  ФЗ:

- 1)  $AB \longrightarrow C$
- 2)  $CD \longrightarrow D$
- 3)  $A \longrightarrow E$

Испитати да ли следеће ФЗ припадају  $F^+$ .

- 4)  $AB \longrightarrow D$
- 5)  $AC \longrightarrow D$
- 6)  $A \longrightarrow C$
- 7)  $A \longrightarrow B$
- 8)  $BE \longrightarrow D$

# Пример 1

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E\}$  и скуп  $F$  ФЗ:

- 1)  $A \longrightarrow B$
- 2)  $B \longrightarrow C$
- 3)  $CD \longrightarrow E$

Одредити затворење (скупа) атрибута  $\{A\}^+$



# Пример 1 - наставак

Иницијално  $\{A\}^+ = \{A\}$

- декомпозиција скупа ФЗ тако да имају само један атрибут на десној страни
- на основу 1) добија се  $\{A\}^+ = \{A, B\}$
- на основу 2) добија се  $\{A\}^+ = \{A, B, C\}$
- не постоје додатне ФЗ чија десна страна  $\not\subseteq \{A\}^+$ . Одатле  $\{A\}^+ = \{A, B, C\}$

## Пример 2

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E\}$  и скуп  $F$  ФЗ:

1)  $A \longrightarrow B$

2)  $B \longrightarrow C$

3)  $CD \longrightarrow E$

Одредити да ли ФЗ  $A \longrightarrow E$  припада затворењу  $F^+$ .

## Пример 2 - наставак

У претходном примеру је нађено да је

$$\{A\}^+ = \{A, B, C\}$$

Како  $E \notin \{A\}^+$  то се добија да  $A \longrightarrow E \notin F^+$ .

# Пример 3

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E\}$  и скуп  $F$  ФЗ:

- 1)  $A \longrightarrow BC$
- 2)  $CD \longrightarrow E$
- 3)  $B \longrightarrow D$
- 4)  $E \longrightarrow A$

Одредити затворење скупа атрибута релвар-а  $R$ .

# Пример 3 - наставак

Решење:

●  $\{A\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{B\}^+ = \{BD\}$

●  $\{C\}^+ = \{C\}$

●  $\{D\}^+ = \{D\}$

●  $\{E\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{AB\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{AC\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{AD\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{AE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{BC\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{BD\}^+ = \{BD\}$

●  $\{BE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{CD\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{CE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{DE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ABC\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ABD\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ABE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ACD\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ACE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ADE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{BCD\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{BDE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{CDE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ABCD\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ABCE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ABDE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{ACDE\}^+ = \{ABCDE\}$

●  $\{BCDE\}^+ = \{ABCDE\}$

# Пример 4

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$  и скуп  $F \Phi Z$ :

1)  $A \rightarrow B$

4)  $BD \rightarrow C$

2)  $CH \rightarrow A$

5)  $EG \rightarrow H$

3)  $B \rightarrow E$

6)  $DE \rightarrow F$

Испитати, рачунањем затворења одговарајућег скупа атрибута, да ли следеће ФЗ могу да се изведу из  $F$ :

7)  $BFG \rightarrow AE$

8)  $ACG \rightarrow DH$

9)  $CEG \rightarrow AB$

# Пример 5

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F\}$  и скуп ФЗ:

1)  $AB \longrightarrow C$

2)  $AD \longrightarrow E$

3)  $B \longrightarrow D$

4)  $AF \longrightarrow B$

5)  $B \longrightarrow E$

Одредити затворење скупа атрибута  $\{A\}^+, \{AB\}^+, \{AF\}^+$  релације  $R$ .

# Пример 6

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E\}$  и скуп ФЗ:

- 1)  $A \longrightarrow BC$
- 2)  $CD \longrightarrow E$
- 3)  $B \longrightarrow D$
- 4)  $E \longrightarrow A$

Одредити затворење скупа атрибута и навести све кандидате за кључ релације  $R$ .



# Пример 1

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F\}$  и скуп  $F$  ФЗ:

1)  $AB \longrightarrow C$

2)  $C \longrightarrow A$

3)  $BC \longrightarrow D$

4)  $ACD \longrightarrow B$

5)  $BE \longrightarrow C$

6)  $CE \longrightarrow FA$

7)  $CF \longrightarrow BD$

8)  $D \longrightarrow EF$

Одредити нередуцибилни покривач скупа  $F$  ФЗ.

# Пример 1 - наставак

Први корак: разбијање свих ФЗ код којих се на десној страни јавља више од једног атрибута.

1)  $AB \rightarrow C$

2)  $C \rightarrow A$

3)  $BC \rightarrow D$

4)  $ACD \rightarrow B$

5)  $BE \rightarrow C$

6)  $CE \rightarrow A$

7)  $CE \rightarrow F$

8)  $CF \rightarrow B$

9)  $CF \rightarrow D$

10)  $D \rightarrow E$

11)  $D \rightarrow F$

# Пример 1 - наставак

Наредни корак: уклањање ФЗ које могу да се изведу из других ФЗ

! начин:

- ФЗ 2)  $\Rightarrow$  ФЗ 6),  $\rightarrow$  ФЗ 6) може да се искључи.
- ФЗ 8)  $\Rightarrow CF \rightarrow BC$  (проширење  $C$ ) + транзитивност са 3)  $\Rightarrow CF \rightarrow D$ . Одавде следи да ФЗ 9) може да се искључи
- ФЗ 11)  $\Rightarrow ACD \rightarrow ACF$  (проширење  $AC$ ); ФЗ 8)  $\Rightarrow ACF \rightarrow AB$  (проширење  $A$ ). Према правилу транзитивности важи  $ACD \rightarrow AB$ ; одавде се декомпозицијом добија  $ACD \rightarrow B$ , одакле следи да ФЗ 4) може да се искључи

# Пример 1 - наставак

Како даље редукције нису могуће добија се следећи нередуцибилни скуп:

1)  $AB \rightarrow C$

2)  $C \rightarrow A$

3)  $BC \rightarrow D$

4)  $BE \rightarrow C$

5)  $CE \rightarrow F$

6)  $CF \rightarrow B$

7)  $D \rightarrow E$

8)  $D \rightarrow F$

# Пример 1 - наставак

II начин:

- ФЗ 2)  $\Rightarrow CD \rightarrow ACD$  (проширење  $CD$ ); заједно са ФЗ 4) + транзитивност  $\Rightarrow CD \rightarrow B \Rightarrow$  ФЗ 4) може да се замени са  $CD \rightarrow B$ .
- ФЗ 2)  $\Rightarrow$  ФЗ 6), ФЗ 6) може да се искључи
- ФЗ 2) и 9)  $\Rightarrow CF \rightarrow AD$  (композиције)  $\Rightarrow CF \rightarrow ADC$  (проширење  $C$ ); заједно са ФЗ 4) + транзитивност  $\Rightarrow CF \rightarrow B \Rightarrow$  ФЗ 8) може да се искључи

# Пример 1 - наставак

Како даље редукције нису могуће добија се следећи нередуцибилни скуп:

1)  $AB \rightarrow C$

2)  $C \rightarrow A$

3)  $BC \rightarrow D$

4)  $CD \rightarrow B$

5)  $BE \rightarrow C$

6)  $CE \rightarrow F$

7)  $CF \rightarrow D$

8)  $D \rightarrow E$

9)  $D \rightarrow F$

Сваки од ових (различитих) скупова је нередуцибилни покривач оригиналног скупа ФЗ

## Пример 2

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F\}$  и скуп ФЗ:

- 1)  $AB \longrightarrow D$
- 2)  $B \longrightarrow C$
- 3)  $AE \longrightarrow B$
- 4)  $A \longrightarrow D$
- 5)  $D \longrightarrow EF$

Одредити нередуцибилни скуп ФЗ релације  $R$ .

# Пример 2 - решење

1)  $AB \rightarrow D$

2)  $B \rightarrow C$

3)  $AE \rightarrow B$

4)  $A \rightarrow D$

5)  $D \rightarrow E$

6)  $D \rightarrow F$

Из 4) проширењем са  $B$  и декомпозицијом може да се добије 1), па је 1) вишак

Из транзитивности 4) и 5) важи  $A \rightarrow E$  па је  $E$  вишак на левој страни ФЗ 3)



# Пример 2 - решење

Остаје

1)  $B \longrightarrow C$

2)  $A \longrightarrow B$

3)  $A \longrightarrow D$

4)  $D \longrightarrow E$

5)  $D \longrightarrow F$

# Пример 3

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F\}$  и скуп ФЗ:

1)  $A \longrightarrow B$

2)  $AB \longrightarrow D$

3)  $C \longrightarrow AD$

4)  $C \longrightarrow E$

Одредити нередуцибилни скуп ФЗ релације  $R$ .

# Пример 1

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E\}$  и скуп  $F$  ФЗ:

- 1)  $A \longrightarrow BC$
- 2)  $CD \longrightarrow E$
- 3)  $B \longrightarrow D$
- 4)  $E \longrightarrow A$

Одредити кандидате за кључ релвар-а  $R$ .

Релвар  $R$  је из примера Пример 3 - део:  
одређивање затворења скупа атрибута

# Пример 1 - наставак

Затворење скупа атрибута релације  $R$  је:

- $\{A\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{B\}^+ = \{BD\}$
- $\{C\}^+ = \{C\}$
- $\{D\}^+ = \{D\}$
- $\{E\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AB\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AC\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BC\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BD\}^+ = \{BD\}$
- $\{BE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{CD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{CE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{DE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABC\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ACD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ACE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ADE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BCD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{CDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABCD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABCE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ACDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BCDE\}^+ = \{ABCDE\}$

Одавде следи да су кандидати за кључ релације  
 $A$ ,  $E$ ,  $CD$ , и  $BC$

## Пример 2

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E\}$  и скуп  $F$  ФЗ:

1)  $AB \longrightarrow C$

2)  $CD \longrightarrow E$

3)  $DE \longrightarrow B$

Да ли су  $AB$  или  $ABD$  кандидати за кључ релвар-а  $R$ ? Образложити одговор

## Пример 2 - наставак

Затворење скупа атрибута релвар-а  $R$  је:

- $\{A\}^+ = \{A\}$
- $\{B\}^+ = \{B\}$
- $\{C\}^+ = \{C\}$
- $\{D\}^+ = \{D\}$
- $\{E\}^+ = \{E\}$
- $\{AB\}^+ = \{ABC\}$
- $\{AC\}^+ = \{AC\}$
- $\{AD\}^+ = \{AD\}$
- $\{AE\}^+ = \{AE\}$
- $\{BC\}^+ = \{BC\}$
- $\{BD\}^+ = \{BD\}$
- $\{BE\}^+ = \{BE\}$
- $\{CD\}^+ = \{BCDE\}$
- $\{CE\}^+ = \{CE\}$
- $\{DE\}^+ = \{BDE\}$
- $\{ABD\}^+ = \{ABCDE\}$

Одавде следи да  $AB$  није, а  $ABD$  јесте кандидат за кључ

# Пример 3

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  и скуп ФЗ:

- 1)  $AB \longrightarrow C$
- 2)  $CD \longrightarrow E$
- 3)  $EF \longrightarrow G$
- 4)  $FG \longrightarrow E$
- 5)  $DE \longrightarrow C$
- 6)  $BC \longrightarrow A$

Да ли су  $BDF$ ,  $ACDF$ ,  $ABDFG$  или  $BDFG$  кандидати за кључ релвар-а  $R$ ? Образложити одговор

# Пример 3 - наставак

После рачунања затворења скупа атрибута релвар-а  $R$ :

- $BDF$  није јер  $\{BDF\}^+ = \{BDF\}$
- $ACDF$  није јер  $\{ACDF\}^+ = \{ACDFEG\}$
- $ABDFG$  није иако је  $\{ABDFG\}^+ = \{ABCDEFGG\}$  јер је његов подскуп такође кључ  $\{BDFG\}^+ = \{BDFGECG\}$
- $BDFG$  јесте јер  $\{BDFG\}^+ = \{ABCDEFGG\}$ . Провера да ли је неки подскуп од  $BDFG$  кључ:
  - Како се  $B, D$  и  $F$  не јављају ни у једној ФЗ на десној страни, они морају да буду део кључа
  - Како је  $\{BDF\}^+ = \{BDF\}$  то  $BDF$  није кључ
  - Одатле је  $BDFG$  минималан кључ, и на основу тога кандидат за кључ



# Нека правила

Pravila:

- 1) Ако се атрибут не јавља на *десној* страни нити једне ФЗ тада он *мора да буде део кључа*
- 2) Ако се атрибут не јавља на *левој* страни нити једне ФЗ тада он *није део кључа*
- 3) Ако се атрибут не јавља ни на *левој* ни на *десној* страни нити једне ФЗ тада он *мора да буде део кључа* (постоји тривијална ФЗ  $X \rightarrow X$ )

# Пример 4

Нека је дат релвар  $R = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$  и скуп ФЗ:

- 1)  $CD \longrightarrow A$
- 2)  $EC \longrightarrow H$
- 3)  $GHB \longrightarrow AB$
- 4)  $C \longrightarrow D$
- 5)  $EG \longrightarrow A$
- 6)  $H \longrightarrow B$
- 7)  $BE \longrightarrow CD$
- 8)  $EC \longrightarrow B$

Наћи све кандидате за кључ релвар-а  $R$ .

## Пример 4 - наставак

Применом претходних правила добија се:

- Како се атрибути  $E$ ,  $F$ , и  $G$  не јављају на десној страни ФЗ они морају да буду део кључа.
- $A$  се никада не јавља на левој страни, али се јавља на десној страни ФЗ. Одатле следи да  $A$  није део кључа.

## Пример 4 - наставак

Провера да ли је кандидат за кључ скуп добијен додавањем једног атрибута на  $EFG$

- $\{BEFG\}^+ = \{ABCDEFGH\}$ . Одатле  $BEFG$  јесте кандидат за кључ ( $BE \rightarrow CD$ ,  $EG \rightarrow A$ ,  $EC \rightarrow H$ )
- $\{CEFG\}^+ = \{ABCDEFGH\}$ . Одатле  $CEFG$  јесте кандидат за кључ ( $EG \rightarrow A$ ,  $EC \rightarrow H$ ,  $H \rightarrow B$ ,  $BE \rightarrow CD$ )
- $\{DEFG\}^+ = \{ADEFHG\}$ . Одатле  $DEFG$  није кандидат за кључ ( $EG \rightarrow A$ )
- $\{HEFG\}^+ = \{ABCDEFGH\}$ . Одатле  $HEFG$  јесте кандидат за кључ ( $EG \rightarrow A$ ,  $H \rightarrow B$ ,  $BE \rightarrow CD$ )

Додавањем осталих атрибута формирају се суперкључеви, тако да су  $BEFG$ ,  $CEFG$  и  $HEFG$  једини кандидати за кључ