Увод у СВМ-примери

Ненад Митић

Математички факултет
nenad@matf.bg.ac.rs

Пример 1

Одредити екстремне вредности функције $f(x,y)=2-x^2-2y^2$ уз ограничење $g(x,y)=x+y-1=0$

- $L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=2-x^2-2y^2-\lambda(x+y-1)$
- решење преко градијента Лагранжијана $\nabla L(x,y,\lambda)=\nabla f(x,y)-\lambda\nabla g(x,y)=0$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=-2x-\lambda=0$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=-4y-\lambda=0$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=x+y-1=0$$

- Решење: $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{3}, \lambda=\frac{-4}{3}, f=\frac{4}{3}$

Пример 2

Одредити екстремне вредности функције $f(x,y) = x + 2y$ уз ограничење $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

- $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$
- решење преко градијента Лагранжијана $\nabla L(x,y,\lambda) = \nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = 0$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2 - 2\lambda y = 0$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

- Решење: $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, y = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}, \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{4}, f_{min} = \frac{-10}{\sqrt{5}}$

Пример 3

Одредити екстремне вредности функције $f(x,y) = x^2 + y^2$ уз ограничења $g_1(x,y) = x+1 = 0, g_2(x,y) = y+1 = 0$

- $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda_1 g_1(x,y) - \lambda_2 g_2(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda_1(x+1) - \lambda_2(y+1)$
- решење преко градијента Лагранжијана $\nabla L(x,y,\lambda) = \nabla f(x,y) - \lambda_1 \nabla g_1(x,y) - \lambda_2 \nabla g_2(x,y) = 0$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 2x - \lambda_1 = 0 \qquad \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2y - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda_1} = x + 1 = 0 \qquad \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda_2} = y + 1 = 0$$

- Решење: $x = -1, y = -1, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2, f_{min} = 2$

Пример 4

Одредити екстремне вредности функције $f(x,y) = x^3 + y^2$ уз ограничења $g_1(x,y) = x^2 - 1 \geq 0$

- $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^3 + y^2 - \lambda(x^2 + 1)$
- решење преко градијента Лагранжијана $\nabla L(x,y,\lambda) = \nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = 0$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 3x^2 - 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2y = 0$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = x^2 - 1 = 0$$

  Пошто се ради са неједначинама, $\lambda \geq 0$

- Решење: $y = 0, x = \pm 1, y = -1, \lambda = \pm\frac{3}{2}$. Како $\lambda \geq 0 \Longrightarrow x = 1, y = 0, f(x,y) = 1$

Пример 5

Одредити екстремне вредности функције $f(x,y) = x^3 + y^3$ уз ограничења $g_1(x,y) = x^2 - 1 \geq 0, g_2(x,y) = y^2 - 1 \geq 0,$

- $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda_1 g_1(x,y) - \lambda_2 g_2(x,y) = x^3 + y^3 - \lambda_1(x^2 - 1) - \lambda_2(y^2 - 1)$
- решење преко градијента Лагранжијана $\nabla L(x,y,\lambda) = \nabla f(x,y) - \lambda_1 \nabla g_1(x,y) - \lambda_2 \nabla g_2(x,y) = 0$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 3x^2 - 2\lambda_1 x = 0$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 3y^2 - 2\lambda_2 y = 0$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda_1} = x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda_2} = y^2 - 1 = 0$$

Пример 5 (наставак)

Додатни услов је $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$. Решење је

$\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0$ није могуће јер тада $x = 0 \vee y = 0$ што није тачно за преостале две једначине

$$x = \pm 1, y = \pm 1, \lambda_1 = \pm\frac{3}{2}$$

$$\text{uslov} \lambda_1 \geq 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \pm\frac{3}{2} \wedge \lambda_2 \geq 0$$

$$\Longrightarrow x = 1, y = 0, f(x, y) = 2$$

Пример 6

Одредити екстремне вредности функције $f(x,y)=(x-1)^2+(y-3)^2$ уз ограничења $g_1(x,y)=2-x-y\geq 0, g_2(x,y)=y-x\geq 0$,

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda_1 g_1(x,y)-\lambda_2 g_2(x,y)=$
$(x-1)^2+(y-3)^2-\lambda_1(2-x-y)-\lambda_2(y-x)$

Решење преко градијента Лагранжијана
$\nabla L(x,y,\lambda)=\nabla f(x,y)-\lambda_1\nabla g_1(x,y)-\lambda_2\nabla g_2(x,y)=0$

Додатни услов је $\lambda_1\geq 0, \lambda_2\geq 0$.

Пример 6 (наставак)

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 2(x-1)+\lambda_1+\lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2(y-3)+\lambda_1-\lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda_1} = x+y-2 = 0$$
$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda_2} = x-y = 0$$

Решење које задовољава све услове је за $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ је

$x = 0, y = 2, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, f(x,y) = 2$

Пример 1

Нека су у дводимензионом простору дате две тачке $\overline{x_1} = (1,1)$ i $\overline{x_2} = (2,2)$ које припадају различитим класама. Одредити хиперраван која раздваја те две класе.

Према формули за дуални Лагранжов проблем:

$$L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1\lambda_1 y_1 y_1 \overline{x_1}\cdot\overline{x_1} + \lambda_1\lambda_2 y_1 y_2 \overline{x_1}\cdot\overline{x_2} + \lambda_2\lambda_1 y_2 y_1 \overline{x_2}\cdot\overline{x_1} + \lambda_2\lambda_2 y_2 y_2 \overline{x_2}\cdot\overline{x_2})$$

Тачке у различитим класама $\implies y_1 = 1, y_2 = -1$

$$L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1^2\overline{x_1}\cdot\overline{x_1} - \lambda_1\lambda_2\overline{x_1}\cdot\overline{x_2} - \lambda_2\lambda_1\overline{x_2}\cdot\overline{x_1} + \lambda_2^2\overline{x_2}\cdot\overline{x_2})$$

$$L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\overline{x_1}\cdot\overline{x_2} - \frac{1}{2}\lambda_1^2\overline{x_1}\cdot\overline{x_1} - \frac{1}{2}\lambda_2^2\overline{x_2}\cdot\overline{x_2}$$

Пример 1 (наставак)

$$L(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\overline{x_1}\cdot\overline{x_2} - \frac{1}{2}\lambda_1^2\overline{x_1}\cdot\overline{x_1} - \frac{1}{2}\lambda_2^2\overline{x_2}\cdot\overline{x_2}$$

На основу ККТ мора да буде испуњено $\lambda_i \geq 0$, као и да важи ограничење $-\sum_i \lambda_i y_i = 0$ (у овом случају $(\lambda_1 - \lambda_2 = 0)$. И ово ограничење се додаје у Лагранжијан:

$$L(\lambda,\gamma) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\overline{x_1}\cdot\overline{x_2} - \frac{1}{2}\lambda_1^2\overline{x_1}\cdot\overline{x_1} - \frac{1}{2}\lambda_2^2\overline{x_2}\cdot\overline{x_2} - \gamma(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Пример 1 (наставак)

$$\frac{\partial L(\lambda,\gamma)}{\partial \lambda_1} = 1 + \lambda_2 \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} - \lambda_1 \overline{x_1} \cdot \overline{x_1} - \gamma = 0$$
$$\frac{\partial L(\lambda,\gamma)}{\partial \lambda_2} = 1 + \lambda_1 \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} - \lambda_2 \overline{x_2} \cdot \overline{x_2} + \gamma = 0$$
$$\frac{\partial L(\lambda,\gamma)}{\partial \gamma} = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Како је $\lambda_1 = \lambda_2, \overline{x_1} \cdot \overline{x_1} = 2, \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = 4, \overline{x_2} \cdot \overline{x_2} = 8$, добија се систем једначина

$$1 + 4\lambda_1 - 2\lambda_1 - \gamma = 0$$
$$1 + 4\lambda_1 - 8\lambda_1 + \gamma = 0$$

Одакле следи $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \gamma = 3$

Пример 1 (наставак)

Из опште формуле: $w = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i x_i$ добија се

$$w_1 = 1 - 2, w_2 = 1 - 2, \text{odnosno} \quad w = (-1, -1)$$

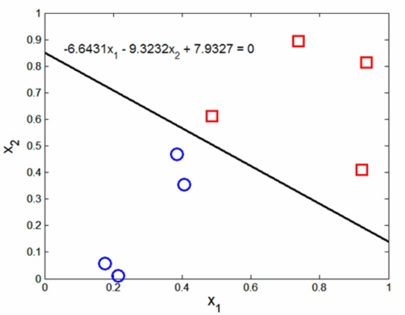
Како су $\lambda_i > 0$, важи $[w \cdot \overline{x_1} + b] - 1 = 0$. Одатле

$$b = 1 - w \cdot \overline{x_1} = 1 - (-1, -1) \cdot (1, 1) = 1 - (-1 - 1) = 3$$

Аналогно, из $[w \cdot \overline{x_2} + b] + 1 = 0$ следи

$$b = -1 + w \cdot \overline{x_2} = -1 + (-1, -1) \cdot (2, 2) = -1 - (-2 - 2) = 3$$

Одређивање Лагранжових множилаца



Support vectors

x1	x2	y	λ
0.3858	0.4687	1	65.5261
0.4871	0.611	-1	65.5261
0.9218	0.4103	-1	0
0.7382	0.8936	-1	0
0.1763	0.0579	1	0
0.4057	0.3529	1	0
0.9355	0.8132	-1	0
0.2146	0.0099	1	0

Одређивање Лагранжових множилаца

Помоћу CPLEX програма

```
float x[1..2][1..8]=[
  [0.3858,0.4871,0.9218,0.7382,0.1763,0.4057,0.9355,0.2146],
  [0.4687,0.6110,0.4103,0.8936,0.0579,0.3529,0.8132,0.0099]];

dvar float lambda[1..8];
int y[1..8] =[1,-1,-1,-1,1,1,-1,1];

maximize
   sum (i in 1..8) lambda[i]
 - (sum (i in 1..8) sum (j in 1..8) lambda[i] *  lambda[j]
    * y[i] * y[j] * (sum (k in 1..2) x[k][i] * x[k][j] ))/2;

subject to {
  ct1:  sum (i in 1..8) lambda[i] * y[i]==0;
  lambda[1]>=0;  lambda[2]>=0;  lambda[3]>=0;  lambda[4]>=0;
  lambda[5]>=0;  lambda[6]>=0;  lambda[7]>=0;  lambda[8]>=0;
}
```

Одређивање Лагранжових множилаца

За добијене вредности λ=(65.55,65.55,0,0,0,0,0,0) из опште формуле: $w = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i x_i$ добија се

$$w_1 = 65.55 \times 1 \times 0.3858 + 65.55 \times -1 \times 0.4871 = -6.64$$

$$w_2 = 65.55 \times 1 \times 0.4687 + 65.55 \times -1 \times 0.6110 = -9.32$$

Како су $\lambda_i > 0$, важи $[w \cdot \overline{x_1} + b] - 1 = 0$. Одатле

$$b_1 = 1 - w \cdot \overline{x_1} = 1 - < (-6.64, -9.32), (0.3858, 0.4687) >=$$

$$1 - ((-6.64 \times 0.3858) + (-9.32) \times 0.4687)) = 1 - (-2.5617 - 4.3682) = 7.9299$$

Аналогно, из $[w \cdot \overline{x_2} + b] + 1 = 0$ следи

$$b_2 = 1 - w \cdot \overline{x_1} = 1 - < (-6.64, -9.32), (0.4871, 0.6110) >=$$

$$-1 - ((-6.64 \times 0.4871) + (-9.32) \times 0.6110)) = -1 - (-3.2343 - 5.6945) = 7.9288$$

Добијена вредност за b је $b = \underset{i}{avg}\ b_i = 7.9293$

Одређивање Лагранжових множилаца

Одредити једначину хиперравни која раздваја следећи скуп тачака

x_i	x_{i1}	x_{i2}	y_i
x_1	3.5	4.25	1
x_2	4	3	1
x_3	4	4.	1
x_4	4.5	1.75	1
x_5	4.9	4.5	1
x_6	5	4	1
x_7	5.5	2.5	1
x_8	5.5	3.5	1
x_9	0.5	1.5	-1
x_{10}	1	2.5	-1
x_{11}	1.25	9.5	-1
x_{12}	1.5	1.5	-1
x_{13}	2	2	-1
x_{14}	2.5	0.75	-1

x_i	x_{i1}	x_{i2}	y_i
x_{15}	4	2	1
x_{16}	2	3	1
x_{17}	3	2	-1
x_{18}	5	3	-1