# Класификација

Ненад Митић

Математички факултет
nenad@matf.bg.ac.rs

# Увод

Улазни материјал садржи слогове облика $S_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^k, y_i)$ где је атрибут $y$ од посебног интереса

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1^1$ | $x_1^2$ | $x_1^3$ | $x_1^4$ | $\ldots$ | $y_1$ |
| $x_2^1$ | $x_2^2$ | $x_2^3$ | $x_2^4$ | $\ldots$ | $y_2$ |
| $x_3^1$ | $x_3^2$ | $x_3^3$ | $x_3^4$ | $\ldots$ | $y_3$ |
| $x_4^1$ | $x_4^2$ | $x_4^3$ | $x_4^4$ | $\ldots$ | $y_4$ |
| $x_5^1$ | $x_5^2$ | $x_5^3$ | $x_5^4$ | $\ldots$ | $y_5$ |
| $x_6^1$ | $x_6^2$ | $x_6^3$ | $x_6^4$ | $\ldots$ | $y_6$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $x_n^1$ | $x_n^2$ | $x_n^3$ | $x_n^4$ | $\ldots$ | $y_n$ |

Циљ је уочити да ли се на основу вредности атрибута $x_i$ може одредити вредност атрибута $y$

# Увод

- Задатак класификације: одредити функцију (класификациони модел) која пресликава сваки скуп атрибута $X = (x^1, x^2, ..., x^k)$ у једну од предефинисаних вредности $y$
- $y$ - ознака класе
  - $y$ категорички атрибут $\Longrightarrow$ класификација
  - $y$ је нумерички atribut $\Longrightarrow$ регресија
- Циљ формирања модела: примена на материјал код кога је вредност атрибута $y$ непозната ради што прецизнијег предвиђања вредности $y$

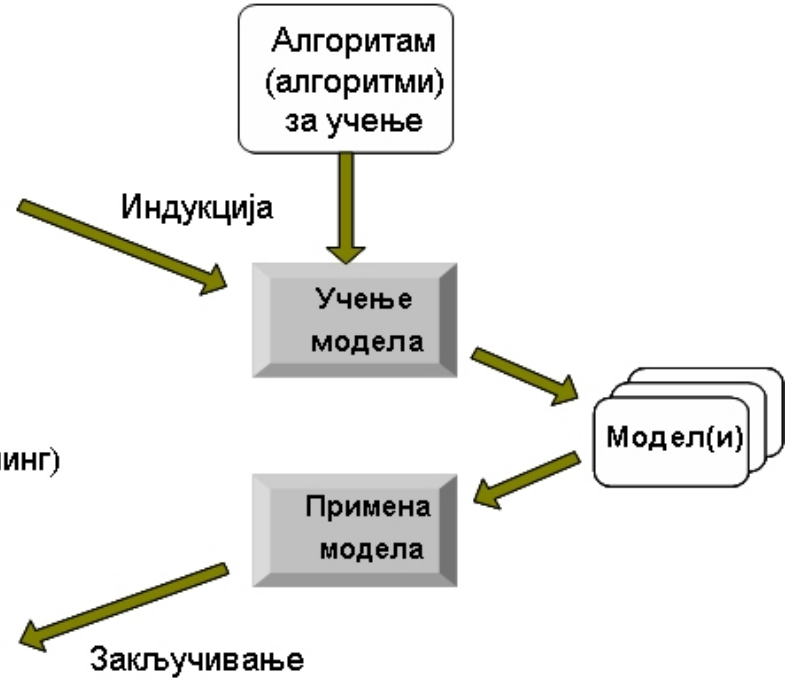
# Увод

- Како проверити карактеристике модела?
- Улазни подаци се обично деле у два дисјунктна дела
  - податке за тренинг помоћу којих се формира модел и који се користе за иницијално одређивање тачности модела
  - податке за тестирање који се користе за проверу исправности модела
- При провери се упоређују предвиђене вредности класа са стварним вредностима

# Увод

| Tid | Attrib1 | Attrib2 | Attrib3 | Class |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Yes | Large | 125K | No |
| 2 | No | Medium | 100K | No |
| 3 | No | Small | 70K | No |
| 4 | Yes | Medium | 120K | No |
| 5 | No | Large | 95K | Yes |
| 6 | No | Medium | 60K | No |
| 7 | Yes | Large | 220K | No |
| 8 | No | Small | 85K | Yes |
| 9 | No | Medium | 75K | No |
| 10 | No | Small | 90K | Yes |

Подаци за формирање модела (тренинг)



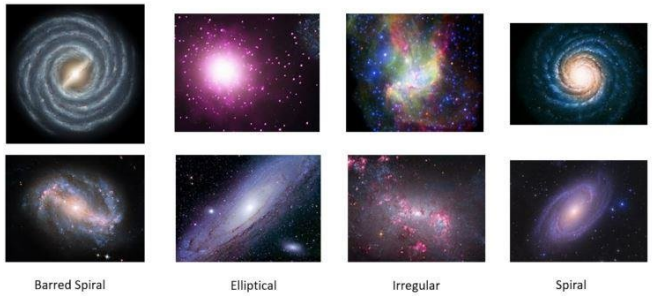

| Tid | Attrib1 | Attrib2 | Attrib3 | Class |
|---|---|---|---|---|
| 11 | No | Small | 55K | ? |
| 12 | Yes | Medium | 80K | ? |
| 13 | Yes | Large | 110K | ? |
| 14 | No | Small | 95K | ? |
| 15 | No | Large | 67K | ? |

Подаци за проверу модела (тест)

# Увод

## Примери класификација

- Ћелије тумора (бенигни, малигни)
- Исправност коришћења кредитних картица
- Предвиђање секунарне структуре протеина
- Одређивање типа текстова (спорт, политика, ...)
- Одређивање типа галаксија




- ...

# Технике класификације

- Основне технике/методе класификације
  - Дрвета одлучивања
  - Правила
  - Неуронске мреже
  - Статистички засноване методе
  - Машине са потпорним векторима
  - Одређивање најближег суседа
  - ...
- Методе ансамбла
  - Појачавање (енг. *Boosting*)
  - Паковање (енг. *Bagging*)
  - Насумична шума (енг. *Random forest*)
  - ...

# Основна идеја

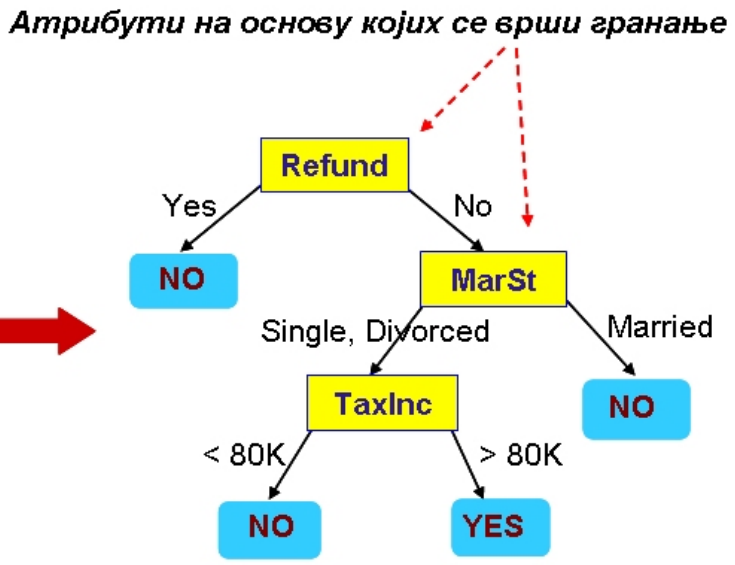
- Модел се формира у облику дрвета
- У не-лист чвору се налазе питања на основу којих се врши гранање
- Улазни материјал се дели на основу вредности атрибута и питања у чвору
- Листови дрвета одређују ознаке класа

# Пример дрвета одлучивања

категорички категорички непрекидни класа

| Tid | Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Yes | Single | 125K | No |
| 2 | No | Married | 100K | No |
| 3 | No | Single | 70K | No |
| 4 | Yes | Married | 120K | No |
| 5 | No | Divorced | 95K | Yes |
| 6 | No | Married | 60K | No |
| 7 | Yes | Divorced | 220K | No |
| 8 | No | Single | 85K | Yes |
| 9 | No | Married | 75K | No |
| 10 | No | Single | 90K | Yes |

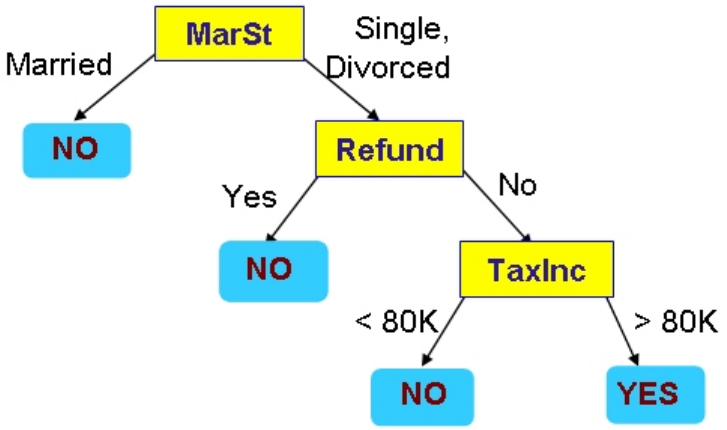
**Подаци за тренинг (прављење модела**




**Модел: дрво одлучивања**

# Пример дрвета одлучивања (наставак)

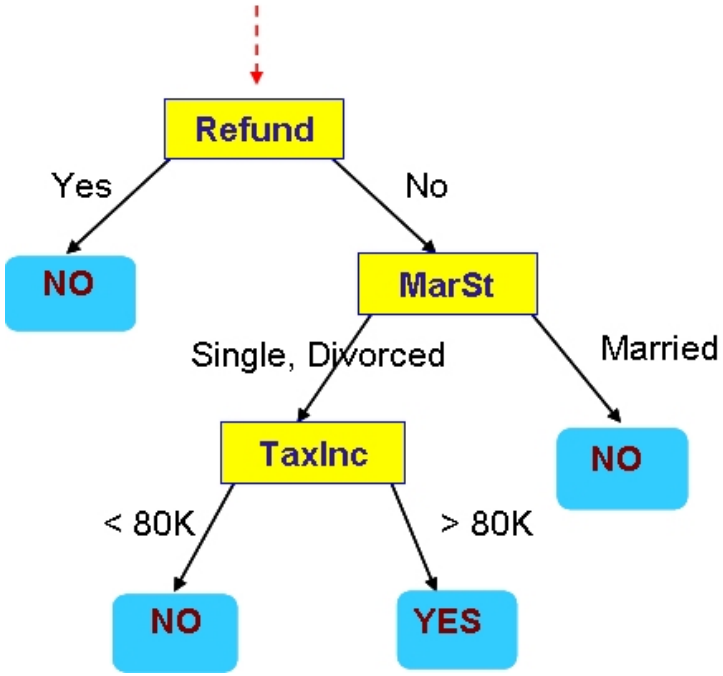
| Tid | Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|---|
| | категорички | категорички | непрекидни | класа |
| 1 | Yes | Single | 125K | No |
| 2 | No | Married | 100K | No |
| 3 | No | Single | 70K | No |
| 4 | Yes | Married | 120K | No |
| 5 | No | Divorced | 95K | Yes |
| 6 | No | Married | 60K | No |
| 7 | Yes | Divorced | 220K | No |
| 8 | No | Single | 85K | Yes |
| 9 | No | Married | 75K | No |
| 10 | No | Single | 90K | Yes |




**Могуће је да постоји више дрвета (модела) која одговарају истим подацима**

# Примена модела - пример

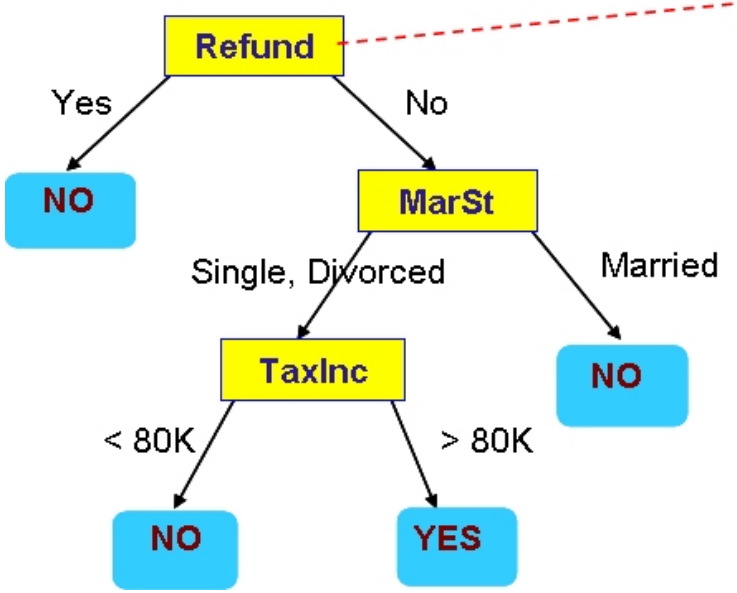
Почетак од корена дрвета




Подаци за проверу
(тестни подаци)

| Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|
| No | Married | 80K | ? |

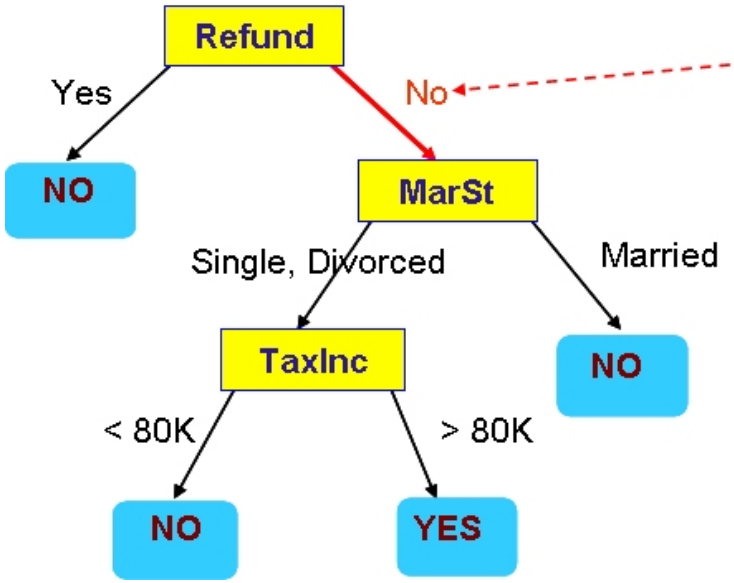
# Примена модела - пример (наставак)




Подаци за проверу
(тестни подаци)

| Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|
| No | Married | 80K | ? |

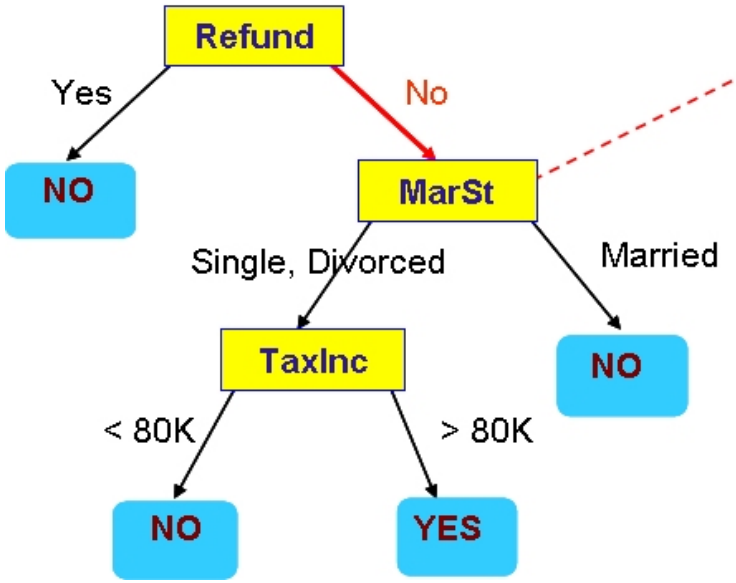
# Примена модела - пример (наставак)




Подаци за проверу
(тестни подаци)

| Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|
| No | Married | 80K | ? |

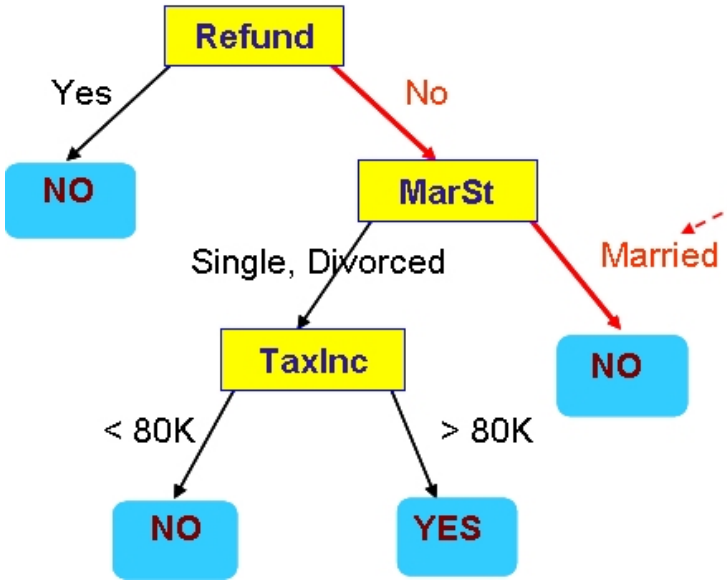
# Примена модела - пример (наставак)




Подаци за проверу
(тестни подаци)

| Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|
| No | Married | 80K | ? |

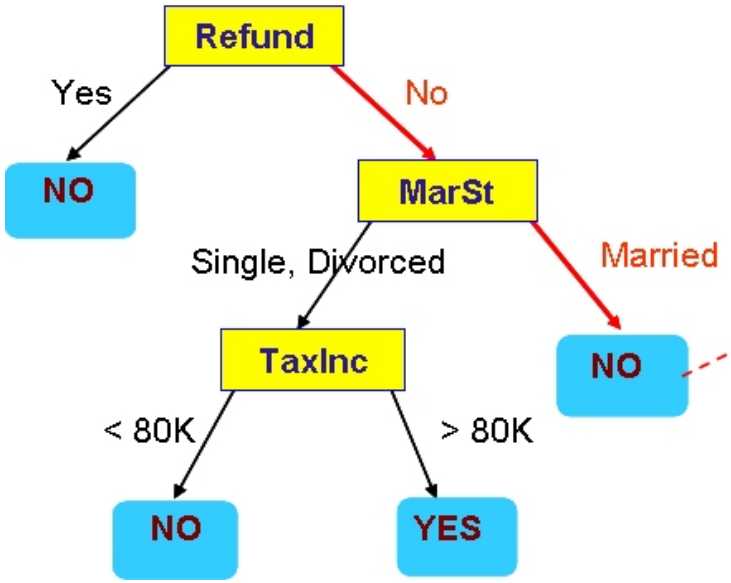
# Примена модела - пример (наставак)




Подаци за проверу
(тестни подаци)

| Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|
| No | Married | 80K | ? |

# Примена модела - пример (наставак)




Подаци за проверу
(тестни подаци)

| Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|
| No | Married | 80K | ? |

Доделити “Не” атрибуту “Cheat”

# Конструкција дрвета одлучивања

## Изазови

- Како одабрати атрибут(е) по коме се врши подела?

# Конструкција дрвета одлучивања

## Изазови

- Како одабрати атрибут(е) по коме се врши подела?
- Како формирати упит за различите типове атрибута?

# Конструкција дрвета одлучивања

## Изазови

- Како одабрати атрибут(е) по коме се врши подела?
- Како формирати упит за различите типове атрибута?
- Како одредити најбољу поделу?

# Конструкција дрвета одлучивања

## Изазови

- Како одабрати атрибут(е) по коме се врши подела?
- Како формирати упит за различите типове атрибута?
- Како одредити најбољу поделу?
- На који начин индуктивно применити претходне критеријуме на дрво по дубини?

# Конструкција дрвета одлучивања

## Изазови

- Како одабрати атрибут(е) по коме се врши подела?
- Како формирати упит за различите типове атрибута?
- Како одредити најбољу поделу?
- На који начин индуктивно применити претходне критеријуме на дрво по дубини?
- Када стати са конструкцијом дрвета?

# Конструкција дрвета одлучивања

## Изазови

- Како одабрати атрибут(е) по коме се врши подела?
- Како формирати упит за различите типове атрибута?
- Како одредити најбољу поделу?
- На који начин индуктивно применити претходне критеријуме на дрво по дубини?
- Када стати са конструкцијом дрвета?
- Начин рада са недостајућим вредностима?

# Конструкција дрвета одлучивања

## Изазови

- Како одабрати атрибут(е) по коме се врши подела?
- Како формирати упит за различите типове атрибута?
- Како одредити најбољу поделу?
- На који начин индуктивно применити претходне критеријуме на дрво по дубини?
- Када стати са конструкцијом дрвета?
- Начин рада са недостајућим вредностима?
- Који је критеријум за процену грешке у генерализацији?

# Конструкција дрвета одлучивања

## Изазови

- Како одабрати атрибут(е) по коме се врши подела?
- Како формирати упит за различите типове атрибута?
- Како одредити најбољу поделу?
- На који начин индуктивно применити претходне критеријуме на дрво по дубини?
- Када стати са конструкцијом дрвета?
- Начин рада са недостајућим вредностима?
- Који је критеријум за процену грешке у генерализацији?
- Цена и перформансе модела?

# Конструкција дрвета одлучивања

## Изазови

- Како одабрати атрибут(е) по коме се врши подела?
- Како формирати упит за различите типове атрибута?
- Како одредити најбољу поделу?
- На који начин индуктивно применити претходне критеријуме на дрво по дубини?
- Када стати са конструкцијом дрвета?
- Начин рада са недостајућим вредностима?
- Који је критеријум за процену грешке у генерализацији?
- Цена и перформансе модела?
- ...

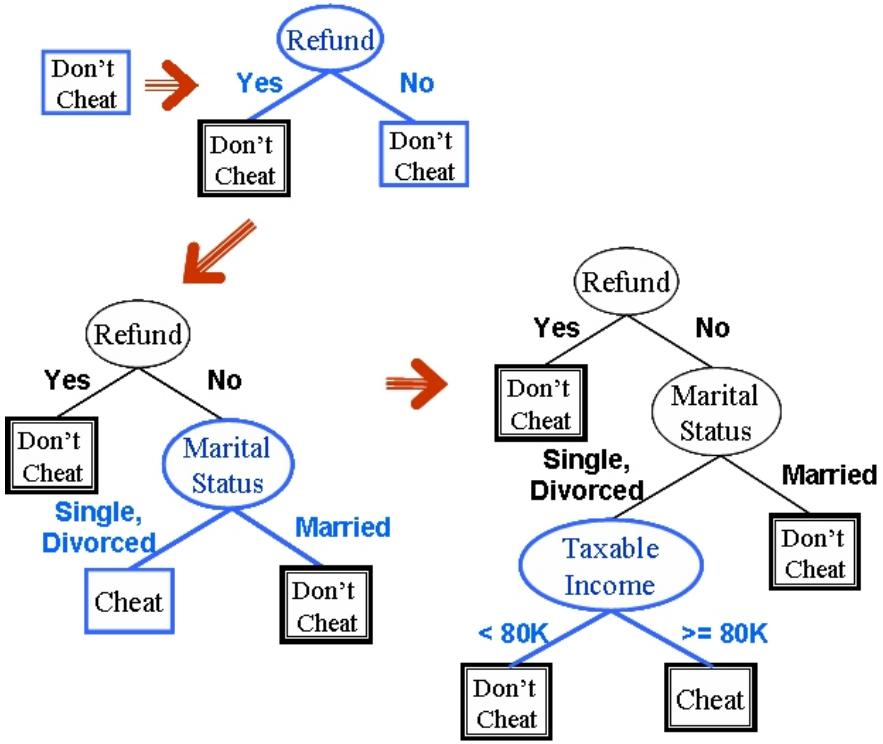
# Алгоритми

- ID3 (Iterative Dichotomiser 3)
- C4.5
- C5.0
- CART (Classification And Regression Trees)
- CHAID (CHi-squared Automatic Interaction Detection)
- Exhaustive CHAID
- QUEST (Quick, Unbiased, Efficient Statistical Trees)
- SLIQ (Supervised Learning In Quest)
- SPRINT (Scalable PaRallelizable INduction and decision Trees)
- ...

# Општи модел - Хантов алгоритам

- Општа процедура за конструкцију дрвета
- Описује начин поделе материјала у чвору
- Ако је $D_t$ скуп слогова за тренинг који се налазе у чвору $t$ и нека су $y = \{y_1, y_2, ..., y_c\}$ ознаке класа. Општи поступак је
  - Ако $D_t$ садржи само слогове који припадају истој класи $y_t$ тада је тај чвор лист означен по називу класе $y_t$
  - Ако $D_t$ садржи слогове који се налазе у више од једне класе, тада се на основу тест атрибута врши подела материјала у мање подскупове на које се рекурзивно примењује комплетна процедура

# Хантов алгоритам - илустрација



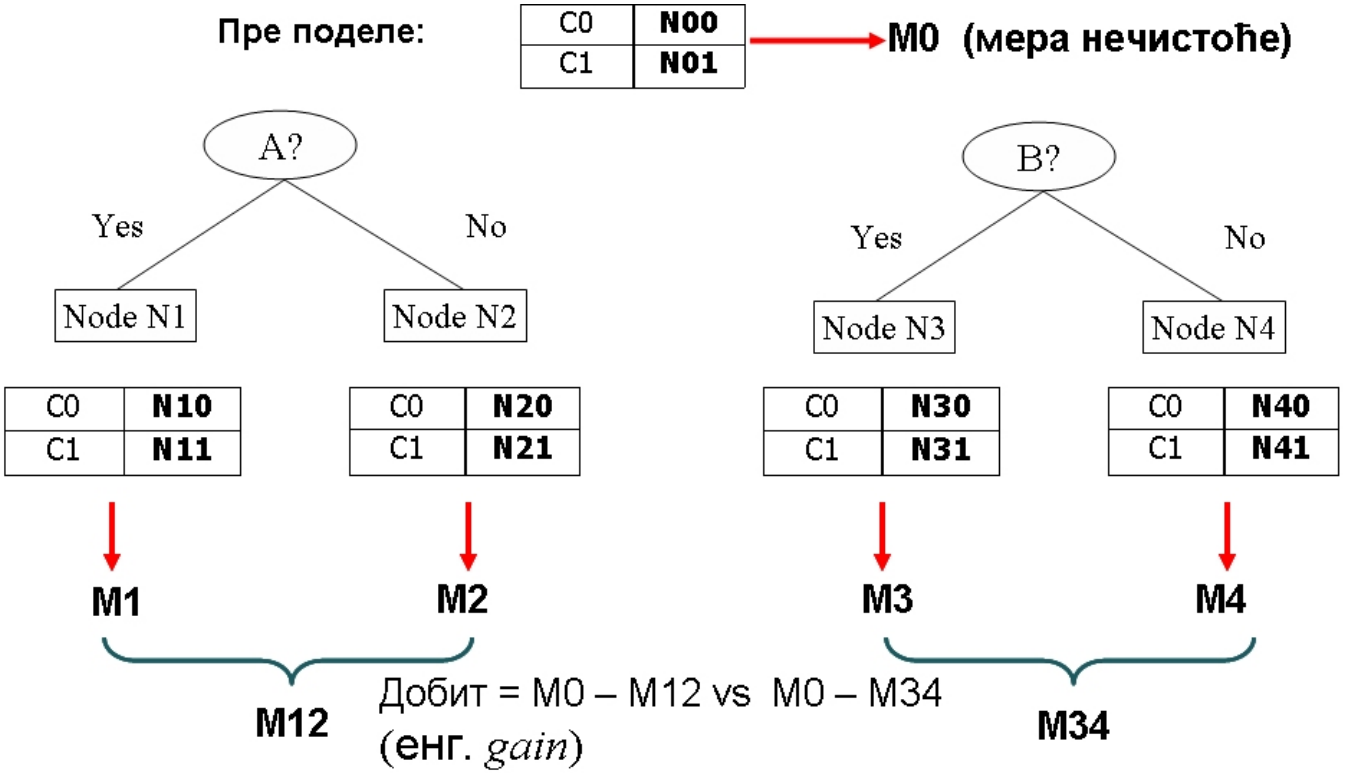

| Tid | Refund | Marital Status | Taxable Income | Cheat |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Yes | Single | 125K | No |
| 2 | No | Married | 100K | No |
| 3 | No | Single | 70K | No |
| 4 | Yes | Married | 120K | No |
| 5 | No | Divorced | 95K | Yes |
| 6 | No | Married | 60K | No |
| 7 | Yes | Divorced | 220K | No |
| 8 | No | Single | 85K | Yes |
| 9 | No | Married | 75K | No |
| 10 | No | Single | 90K | Yes |

# Избор атрибута за поделу

- Атрибут за поделу материјала се бира стратегијом похлепе (енг. *greedy*)
  - Поделити слогове према атрибуту који оптимизује одређени критеријум
- Одлуке које треба донети
  - Како поделити слогове и која је најбоља подела?
  - Како навести услове за тестирање атрибута
  - Када стати са деобом

# Одређивање најбоље поделе

Најбоља подела се одређује помоћу *мере нечистоће* - мера хомогености дистрибуције класа у чвору



# Мере нечистоће

$$\text{Gini}(t) = 1 - \sum_{i=1}^{c} [p(i \mid t)]^2$$

$$\text{Ентропија}(t) = -\sum_{i=1}^{c} p(i \mid t) log_2 p(i \mid t)$$

$$\text{Грешка класификације}(t) = 1 - \max_i p(i \mid t)$$

gde $p(j \mid t)$ означава релативну учесталост класе $j$ у чвору $t$, $c$ број класа, и важи $0 * log_2 0 = 0$ при рачунању ентропије

# Мера нечистоће

- Гинијев индекс (*Corrado Gini*, италијански статистичар)
- Максимум ($1-1/n_c$ za Ginijev indeks i grešku klasifikacije, $log_2 n_c$ за ентропију ) када су слогови равномерно распоређени у свим класама садржи најмање интересантне информације
- Минимум (0.0) када сви слогови припадају једној класи садржи најинтересантније информације

| | |
|---|---|
| $C_1$ | 0 |
| $C_2$ | 6 |
| Gini=0.000 | |

| | |
|---|---|
| $C_1$ | 1 |
| $C_2$ | 5 |
| Gini=0.278 | |

| | |
|---|---|
| $C_1$ | 2 |
| $C_2$ | 4 |
| Gini=0.444 | |

| | |
|---|---|
| $C_1$ | 3 |
| $C_2$ | 3 |
| Gini=0.500 | |

# Мере нечистоће - примери израчунавања

| Чвор $H_1$ | Број |
|---|---|
| Класа 1 | 0 |
| Класа 2 | 6 |

Гини $=1-(0/6)^2-(6/6)^2=0$
Ентропија $=-(0/6)log_2(0/6)-(6/6)log_2(6/6)=0$
Грешка класификације$=1-max[0/6,6/6]=0$

| Чвор $H_1$ | Број |
|---|---|
| Класа 1 | 1 |
| Класа 2 | 5 |

Гини $=1-(1/6)^2-(5/6)^2=0.278$
Ентропија $=-(1/6)log_2(1/6)-(5/6)log_2(5/6)=0.650$
Грешка класификације$=1-max[1/6,5/6]=0.167$

| Чвор $H_1$ | Број |
|---|---|
| Класа 1 | 3 |
| Класа 2 | 3 |

Гини $=1-(3/6)^2-(3/6)^2=0.5$
Ентропија $=-(3/6)log_2(3/6)-(3/6)log_2(3/6)=1$
Грешка класификације$=1-max[3/6,3/6]=0.5$

# Критеријум поделе у чвору

Посматра се разлика мере нечистоће у родитељ чвору и деци чворовима. Што је разлика већа то је подела квалитетнија
Нека $I(.)$ означава нечистоћу чвора, $N$ укупан број слогова у родитељ чвору, $N(v_j)$ број слогова у дете чвору $v_j$ и  број различитих вредности атрибута

- Добит за Гини

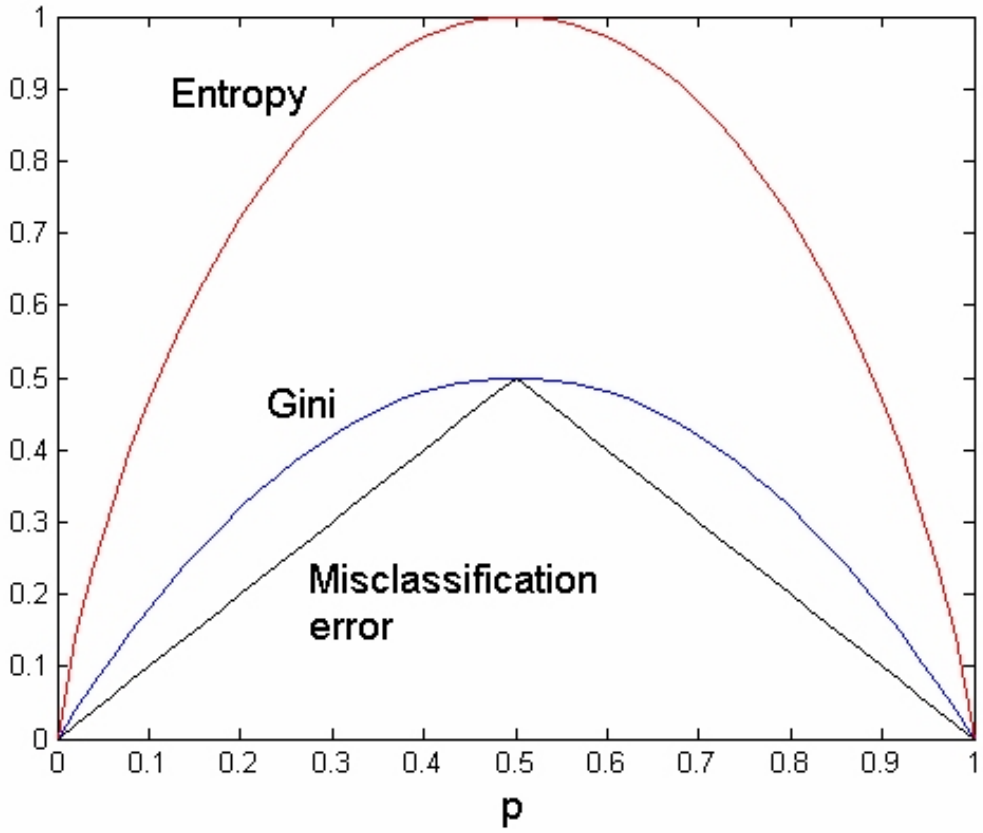
$$\Delta = \text{Гини(родитељ чвор)} - \sum_{j=1}^{k} \frac{N(v_j)}{N} I(v_j)$$

- Добит за Ентропију (информациона добит)

$$\Delta = \text{Ентропија(родитељ чвор)} - \left( \sum_{j=1}^{k} \frac{N(v_j)}{N} \text{Ентропија}(v_j) \right)$$

# Поређење мера нечистоће

Пример за проблем бинарне класификације



# Услови тестирања атрибута за поделу

- Зависност од типа атрибута
  - Бинарни
  - Именски
  - Редни
  - Непрекидни
- Зависност од броја начина за поделу
  - Подела на две гране
  - Подела на више грана

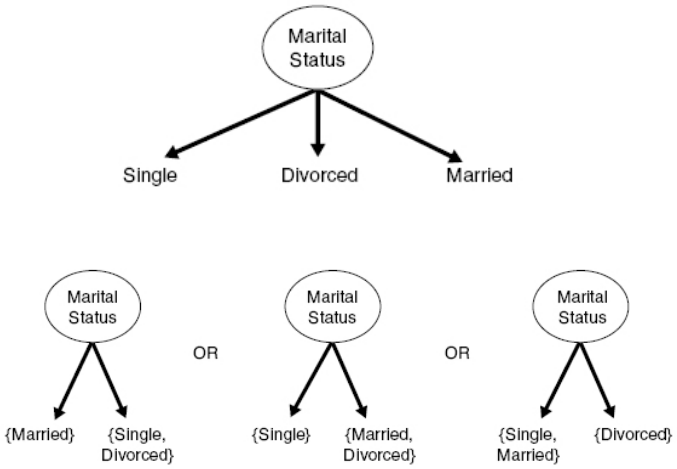
# Подела заснована на бинарним и именским атрибутима

Бинарни атрибути

- Увек се дели на две гране

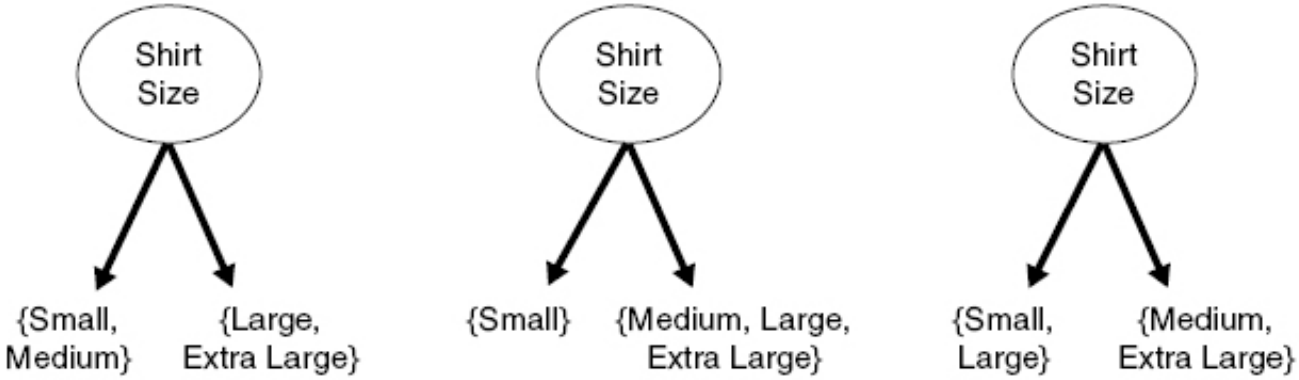
Именски атрибути

- Подела на више грана (колико атрибут има различитих вредности)
- Подела на две гране - подела у два подскупа. Треба наћи оптималну поделу



# Подела заснована на редним атрибутима

- Бинарна подела или подела на више грана
- Да ли су све поделе коректне? Очување редоследа!



# Подела заснована на непрекидним атрибутима

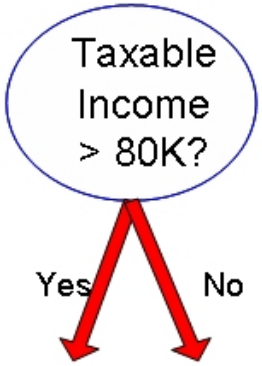
Различити начини рада

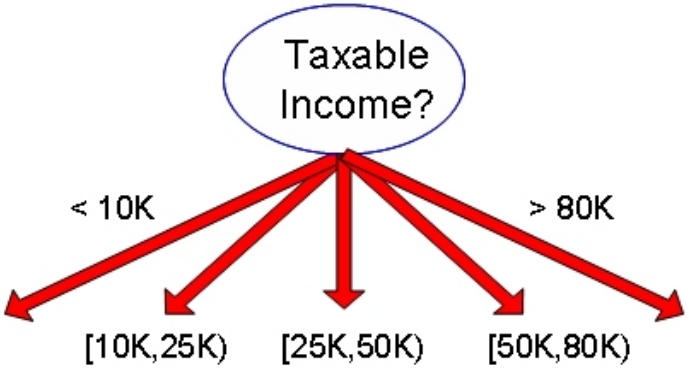
- Дискретизацијом - формирање редних категоричких атрибута
- Бинарна подела: $A < v$ или $A \geq v$
  - Разматрају се све могуће поделе у зависности од $v$
  - Рачунарски интензиван посао

# Подела заснована на непрекидним атрибутима (наставак)

Различити начини рада

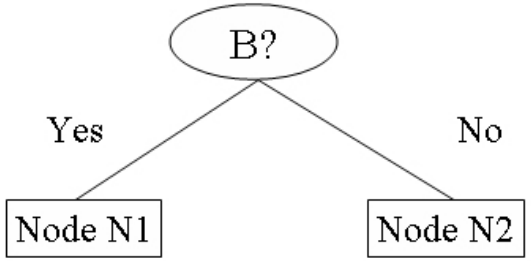
- Подела на $k$ интевала: $v_i \leq A < v_{i+1}, i = 1, \ldots, k$
  - Разматрају се сви могући интервали
  - Рачунарски интензиван посао



# Подела по бинарним атрибутима - израчунавање Гини индекса

- Скуп се дели у две партиције
- Ефекти тежина партиција - пожељне су веће и чистије




| | Parent |
|---|---|
| C1 | 6 |
| C2 | 6 |
| Gini = 0.500 | |

**Gini(N1)**
**= 1 – $(5/7)^2$ - $(2/7)^2$**
**= 0.408**

**Gini(N2)**
**= 1 – $(1/5)^2$ – $(4/5)^2$**
**= 0.320**

| | N1 | N2 |
|---|---|---|
| C1 | 5 | 1 |
| C2 | 2 | 4 |
| Gini=0.371 | | |

**Gini(dete)**
**= 7/12 * 0.408 +**
**5/12 * 0.320**
**= 0.371**

# Подела по категоричким атрибутима - израчунавање Гини индекса

- За сваку од различитих вредности атрибута израчуна се број слогова у свакој класи података
- Одреди се Гинијев индекс за сваки чвор и пронађе минимална вредност

Подела у више грана

| | CarType | | |
|---|---|---|---|
| | Family | Sports | Luxury |
| C1 | 1 | 2 | 1 |
| C2 | 4 | 1 | 1 |
| Gini | 0.393 | | |

Подела у две групе
(налази се најбоља подела по вредности)

| | CarType | |
|---|---|---|
| | {Sports, Luxury} | {Family} |
| C1 | 3 | 1 |
| C2 | 2 | 4 |
| Gini | 0.400 | |

| | CarType | |
|---|---|---|
| | {Sports} | {Family, Luxury} |
| C1 | 2 | 2 |
| C2 | 1 | 5 |
| Gini | 0.419 | |

# Подела по непрекидним атрибутима - израчунавање Гини индекса

За ефикасно израчунавање за сваки атрибут се

- врши сортирање по вредностима
- добијене вредности линеарно скенирају уз ажурирање броја и слогова и рачунање Гинијевог индекса
- бира се позиција за поделу са најмањим Гинијевим индексом

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cheat | No | | No | | No | | Yes | | Yes | | Yes | | No | | No | | No | | No | | No | |
| | Taxable Income | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Сортиране вредности → | 60 | | 70 | | 75 | | 85 | | 90 | | 95 | | 100 | | 120 | | 125 | | 220 | | | |
| Позиције поделе → | 55 | | 65 | | 72 | | 80 | | 87 | | 92 | | 97 | | 110 | | 122 | | 172 | | 230 | |
| | <= | > | <= | > | <= | > | <= | > | <= | > | <= | > | <= | > | <= | > | <= | > | <= | > | <= | > |
| Yes | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| No | 0 | 7 | 1 | 6 | 2 | 5 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 3 | 5 | 2 | 6 | 1 | 7 | 0 |
| Gini | 0.420 | | 0.400 | | 0.375 | | 0.343 | | 0.417 | | 0.400 | | *0.300* | | 0.343 | | 0.375 | | 0.400 | | 0.420 | |

# Алтернативни критеријум поделе

- Мере као што су Гинијев индекс и ентропија фаворизују атрибуте са великим бројем различитих вредности
- У неким случајевима се добијају погрешни резултати (нпр. број индекса, матични број, ...)
- Стратегије превазилажења проблема
  - употреба искључиво бинарне поделе
  - укључивање броја могућих вредности

$$\text{Однос добити за поделу} = \frac{\Delta_{podela}}{Split_info}$$

$$Split_info = -\sum_{i=1}^{k} P(v_i) log_2 P(v_i)$$

где је $k$ број подела атрибута

# Модел алгоритма за формирање дрвета одлучивања

```
/* Skup atributa F; skup trening slogova E */
Formiranje drveta(E, F )
if uslov_zaustavljanja(E,F) then
   list=formiraj_cvor()
   labela lista=Klasifikuj(E)
   return list
else
   koren=formiraj_cvor()
   koren.test_uslov = nadji_najbolju_podelu(E,F)
   let V={v|v je moguci ishod za koren.test_uslov}
   for each v in V do
       E_v = {e | koren.test_uslov(e) = v i e pripada E}
       dete = Formiranje_drveta(E_v,F)
       dodaj dete cvor kao potomak korenog cvora i
             oznaci granu (koren-dete) sa v
    end for
end if
return koren

/* Posle formiranj drvo treba da se potkrese */
```

# Критеријум заустављања

Формирање нових чвора деобом слога текућег чвора се зауставља (функција uslov_zaustavljanja из претходног алгоритма) када

- сви слогови у текуће, чвору припадају истој класи
- сви слогови имају исте вредности (свих) атрибута
- испуњен критеријум ранијег заустављања (достигнута дубина дрвета, ....)

# Карактеристике дрвета одлучивања

- Јевтина за конструисање
- Јако брза у класификацији непознатог материјала
- Лака за интерпретацију за дрвета мале величине
- Прецизност је упоредива са осталим техникама класификације за једноставне типове података
- Избор мере нечистоће нема велики утицај на перформансе

# Карактеристике дрвета одлучивања

- Примењивост (на све типове података)
- Изражајност (могу да представе сваку функцију дискретних атрибута)
- Ефикасност израчунавања
- Рад са недостајућим вредностима
- Рад са ирелевантним атрибутима и редундантним атрибутима

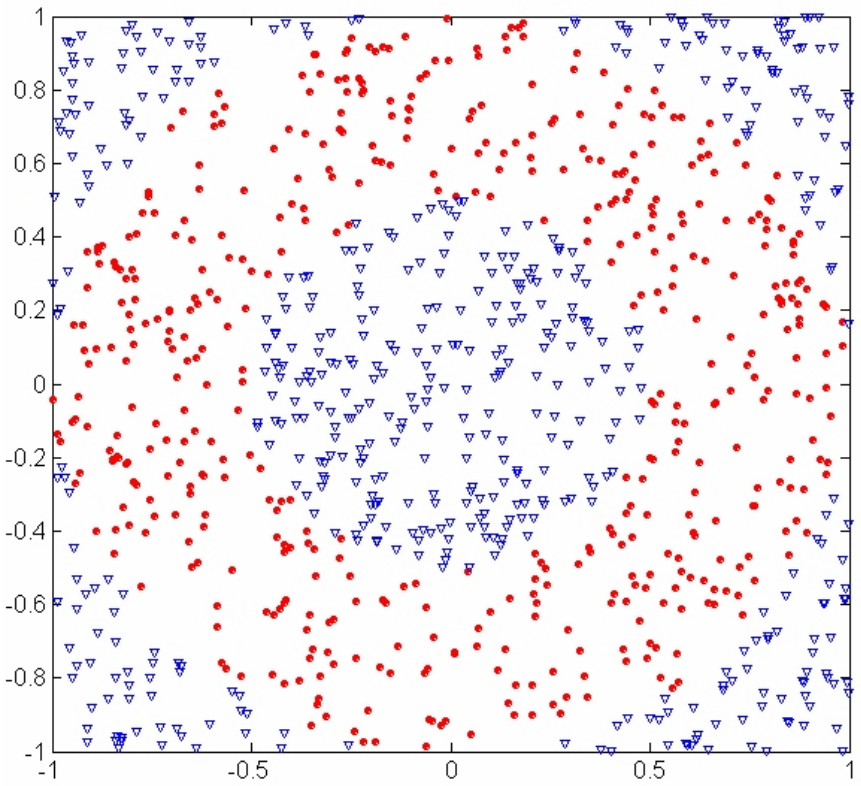
# Карактеристике дрвета одлучивања

- Слаба могућност рада са повезаним атрибутима (спајање два атрибута даје значајну информацију)
- Критеријум поделе само један атрибут $\longrightarrow$ интервал је правоугаоног облика
- Критеријум поделе комбинација више атрибута $\longrightarrow$ могуће је обрадити и нпр. *косе* податке
- Избор начина поткресивања значајно утиче на резултате
- Проблем преприлагођавања и потприлагођавања

# Преприлагођеност и потприлагођеност

- Модел који исувише добро класификује податке за тренинг може да има лошије карактеристике при генерализацији од модела који има већу грешку у процесу прављења модела - превише прилагођен модел (преприлагођен модел, енг. *model overfitting*)
- Ако је модел исувише једноставан грешке при тренирању и уопштавању могу да буду јако високе - премало прилагођен модел (потприлагођен модел, енг. *model underfitting*)

# Преприлагођеност и потприлагођеност




500 кружних и 500 троугаоних тачака

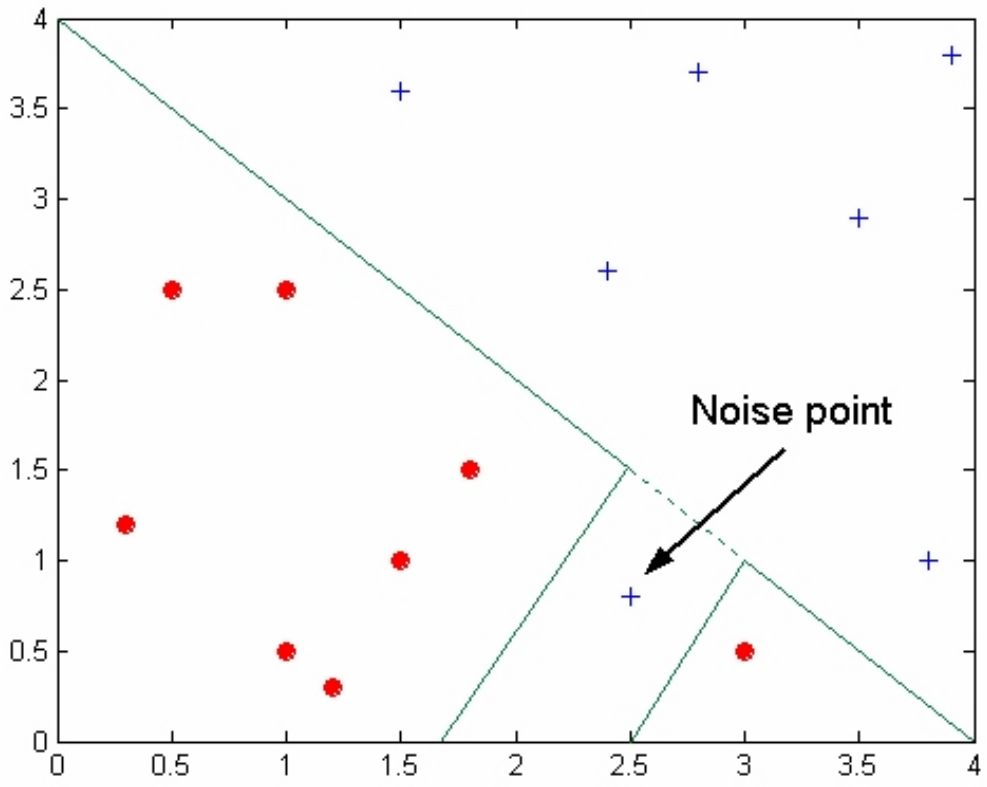
Кружне тачке:
$0.5 \leq \mathrm{sqrt}(x_1^2+x_2^2) \leq 1$

Троугаоне тачке:
$\mathrm{sqrt}(x_1^2+x_2^2) < 0.5$ или
$\mathrm{sqrt}(x_1^2+x_2^2) > 1$

30% тачака се бира за тренинг, остале за тест

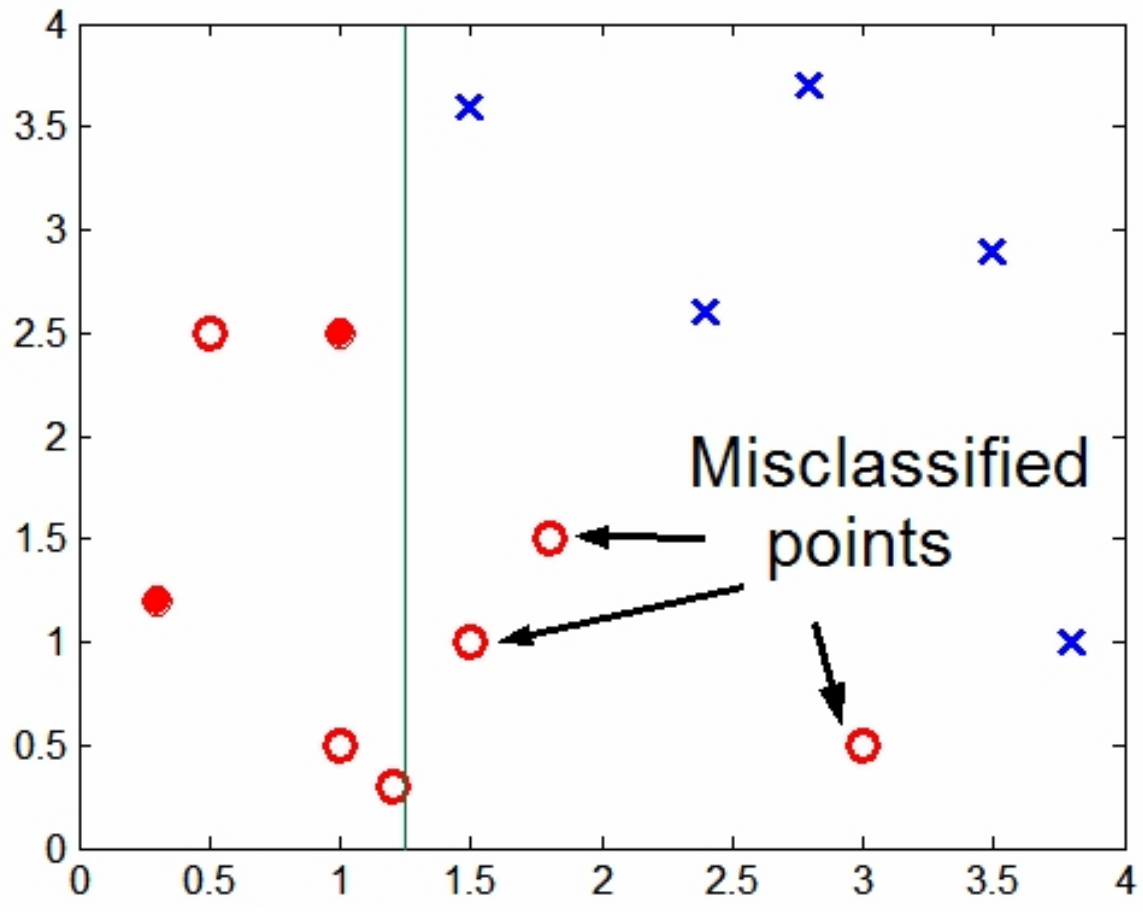
Дрво са Гинијевим индексом као мером се примењује на тренинг податке

# Преприлагођеност и потприлагођеност




Границе поделе могу да се искриве и због постојања шума

# Преприлагођеност и потприлагођеност




Преприлагођеност може да се јави због непостојања репрезентативних примера

# Преприлагођеност и потприлагођеност

- Преприлагођеност се јавља код дрвета која су сложенија него што је потребно
- У том случају грешка при тренирању не даје коректну процену понашања дрвета у случају примене на претходно непознате податке
- Потребно је наћи начин за процену грешке при примени на тестне и непознате податке

# Процена грешке у генерализацији

- Нека је $T$ дрво, $t$ чвор, $N$ број листова у дрвету $T$, $e(t)$ број погрешно класификованих слогова у $t$, и $e(T)$ укупан број грешака у класификацији по дрвету $T$
- Грешка поновне замене (грешка при тренирању) $min(\sum e(t))$ - бира се модел са најмањом грешком при тренирању
- Грешка при генерализацији: грешка при тестирању $\sum e'(t)$

# Процена грешке у генерализацији

Методе за процену грешке у генерализацији

- Оптимистички приступ: $e'(t) = e(t)$
- Песимистички приступ: $e'(t) = e(t) + 0.5$ (лист)

$$e'(T) = \frac{\sum_{i=1}^{k} [e(t_i) + \Omega]}{\sum_{i=1}^{k} n(t_i)} = e(T) + \frac{k\Omega}{N} \qquad \text{(дрво)}$$

где је $k$ broj listova, $\Omega$ цена придружена сваком листу $t$, $e(T)$ укупна грешка дрвета у фази тренинрања, а $N$ укупан број тренинг слогова

# Процена грешке у генерализацији

На пример, за $\Omega = 0.5$ укупан број грешака је $e'(T) = e(T) + N \times 0.5$. За дрво са 30 листова и 10 грешака на тренинг скупу од 1000 ставки:

- Грешка тренирања = 10/1000 (1%)
- Грешка уопштавања = (10+ 30× 0.5)/1000 (2.5%)

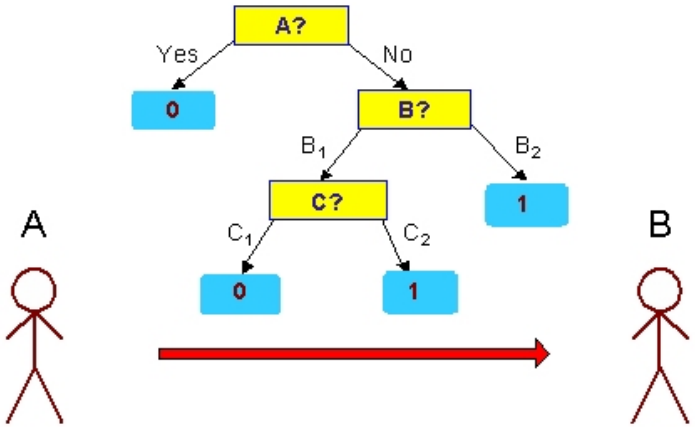
- Смањење грешке поткресивањем (дрвета)
  - Користи се посебан скуп података за процену грешке уопштавања

# Процена грешке у генерализацији

- Што је модел сложенији веће су шансе за преприлагођеност
- Параметар процене је и сложеност модела
- Модел не треба непотребно усложњавати
- Од два модела са сличном грешком генерализације изабрати онај који је једноставнији - Окамов (*Occm*) принцип (жилет)
- Код сложених модела већа је шанса да случајно дође до уклапања због грешаак у подацима

# Принцип најмање дужине описа (*MDL*)

| X | y |
|---|---|
| $X_1$ | 1 |
| $X_2$ | 0 |
| $X_3$ | 0 |
| $X_4$ | 1 |
| ... | ... |
| $X_n$ | 1 |

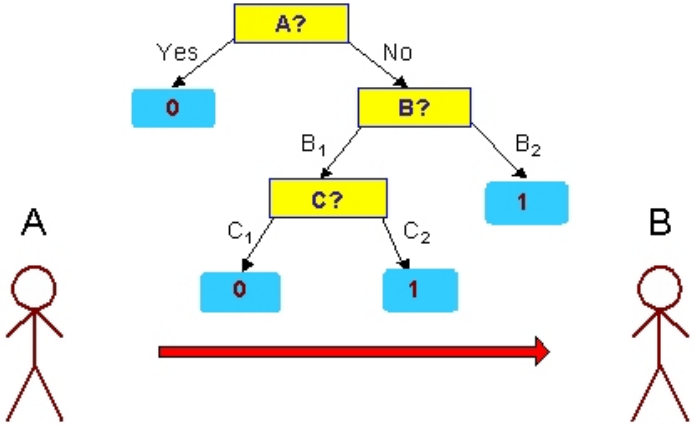



| X | y |
|---|---|
| $X_1$ | ? |
| $X_2$ | ? |
| $X_3$ | ? |
| $X_4$ | ? |
| ... | ... |
| $X_n$ | ? |

- Начин да се укључи сложеност модела
- Дат је скуп слогова са познатим атрибутом $X$
- Особа $A$ познаје све вредности класа атрибута $y$
- Особа $B$ нема ту информацију и може да пошаље захтев $A$ да проследи све ознаке класа - $\Theta(n)$ битова где је $n$ број слогова
- Алтернативно, $A$ може да направи модел, кодира и пошаље $B$

# Принцип најмање дужине описа (*MDL*)

| X | y |
|---|---|
| $X_1$ | 1 |
| $X_2$ | 0 |
| $X_3$ | 0 |
| $X_4$ | 1 |
| ... | ... |
| $X_n$ | 1 |




| X | y |
|---|---|
| $X_1$ | ? |
| $X_2$ | ? |
| $X_3$ | ? |
| $X_4$ | ? |
| ... | ... |
| $X_n$ | ? |

- Ако је модел 100% тачан цена преноса је једнака цени кодирања модела. Ако није, потребне су и информације о некоректно класификованим слоговима
- Цена (модел,подаци)= Цена (модел) + Цена (подаци|модел), где је цена број битова потребан за енкодирање
- Према *MDL*-у тражи се модел који минимизује укупну цену

# Баратање преприлагођавањем у индукцији по дрвету

Пре-поткресивање (правило ранијег заустављања)

- Алгоритам се зауставља пре него што дрво нарасте до максималне величине
- Типични услови заустављања:
  - све инстанце припадају истој класи
  - вредности свих атрибута (сем атрибута класе) су исте
  - број инстанци је мањи од неке унапред задате границе
  - дистрибуција инстанци је независна од расположивих атрибута (нпр. види се применом $\chi^2$ теста)
  - ширење текућег чвора не побољшава меру чистоће

# Баратање преприлагођавањем у индукцији по дрвету

Поткресивање по завршетку

- Дрво одлучивања расте до крајњих граница
- Исеку се чворови у дрвету од дна ка врху
- Ако се грешка генерализације побољша после отсецања поддрво се замени са чвором који је лист
- Ознака класе листа се одређују према већини класа инстанци поддрвета
- За поткресивање по завршетку се може користити и *MDL*

# Пример поткресивања по завршетку

| | |
|---|---|
| Class = Yes | 20 |
| Class = No | 10 |
| Error = 10/30 | |

**Тренинг грешка (пре деобе) = 10/30**

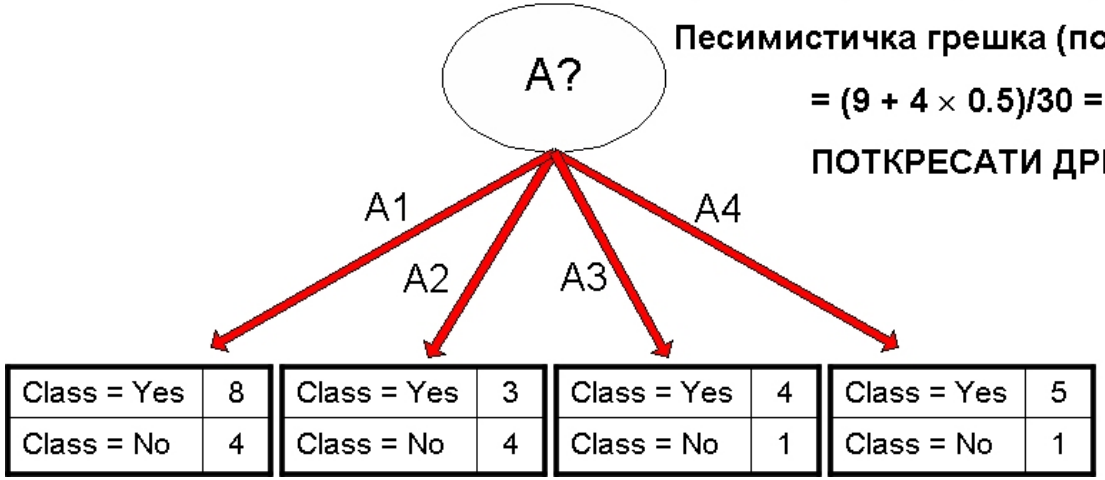
**Песимистичка грешка = (10 + 0.5)/30 = 10.5/30 за** $\Omega$=0.5

**Тренинг грешка (после деобе) = 9/30**

**Песимистичка грешка (после деобе)**

**= (9 + 4 $\times$ 0.5)/30 = 11/30**

**ПОТКРЕСАТИ ДРВО!**



# Руковање атрибутима са недостајућим вредностима

Утицај НВ на дрво одлучивања

- Шта ако атрибут по коме се дели чвор има НВ (како рачунати меру нечистоће)
- Како дистрибуирати инстанце са НВ на децу чворове
- Како класификовати тест инстанцу са НВ

# Руковање атрибутима са недостајућим вредностима

| *Tid* | Refund | Marital Status | Taxable Income | Class |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Yes | Single | 125K | No |
| 2 | No | Married | 100K | No |
| 3 | No | Single | 70K | No |
| 4 | Yes | Married | 120K | No |
| 5 | No | Divorced | 95K | Yes |
| 6 | No | Married | 60K | No |
| 7 | Yes | Divorced | 220K | No |
| 8 | No | Single | 85K | Yes |
| 9 | No | Married | 75K | No |
| 10 | ? | Single | 90K | Yes |

**Недостајућа вредност**

**Пре поделе: Ентропија (родитељ)**
**= -0.3 log(0.3)-(0.7)log(0.7) = 0.8813**

| | Class = Yes | Class = No |
|---|---|---|
| Refund=Yes | 0 | 3 |
| Refund=No | 2 | 4 |
| Refund=? | 1 | 0 |

**Подела на REFUND:**

**Ентропија(Refund=Yes) = 0**

**Ентропија(Refund=No)**
**= -(2/6)log(2/6) – (4/6)log(4/6) = 0.9183**

**Ентропија (дете)**
**= 0.3 (0) + 0.6 (0.9183) = 0.551**

**Добит = 0.9 × (0.8813 – 0.551) = 0.3303**

# Мерење преформанси израчунавања

Утицај НВ на дрво одлучивања

- Нагласак је на предвиђачким особинама модела
  - предност у односу на брзину класификације, изградње модела, скалабилност, ...
- Матрица конфузије

| | Предвиђена класа | | |
|---|---|---|---|
| Стварна класа | | Класа=Да | Класа=Не |
| | Класа=Да | a | b |
| | Класа=Не | c | d |

- a: TP (true positive)
- b: FN (false negative)
- c: FP (false positive)
- d: TN (true negative)

# Мерење преформанси израчунавања

| | | Предвиђена класа | |
|---|---|---|---|
| | | Класа=Да | Класа=Не |
| Стварна класа | Класа=Да | a TP | b FN |
| | Класа=Не | c FP | d TN |

Најчешће коришћена метрика

$$\text{Тачност} = \frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{TP+TN}{TP+FN+FP+TN}$$

# Ограничења прецизности

- Размотримо проблем 2 класе
  - Број примерака класе 0 = 9990
  - Број примерака класе 1 = 10
- Ако модел предвиђа да ће сви слогови бити класе 0 тада је прецизност 9990/10000 = 99.9 %
  - Прецизност нема значаја (ни смисла) јер модел не открива ни један слог класе

# Матрица цене

| | | Предвиђена класа | |
|---|---|---|---|
| | | Класа=Да | Класа=Не |
| Стварна класа | Класа=Да | Цена(Да\|Да) | Цена(Не\|Да) |
| | Класа=Не | Цена(Да\|Не) | Цена(Не\|Не) |

Цена(а|б) - цена погрешне класификације слога класе а као слога класе б

# Израчунавање цене класификације

| Матрица цене | Предвиђена класа | | |
|---|---|---|---|
| | Цена(а\|б | + | - |
| Стварна класа | + | -1 | 100 |
| | - | 1 | 0 |

| Модел M1 | Предвиђена класа | | |
|---|---|---|---|
| | | + | - |
| Стварна класа | + | 150 | 40 |
| | - | 60 | 250 |

| Модел M2 | Предвиђена класа | | |
|---|---|---|---|
| | | + | - |
| Стварна класа | + | 250 | 45 |
| | - | 5 | 200 |

Модел M1: Прецизност 80%, Цена 3910

Модел M2: Прецизност 90%, Цена 4255

# Мере осетљиве на цену

- Прецизност $p = \frac{a}{a+c}$
- Одзив $r = \frac{a}{a+b}$
- Ф - мера $F = \frac{2rp}{r+p} = \frac{2a}{2a+b+c}$
- Тежинска прецизност $= \frac{w_1 a + w_4 d}{w_1 a + w_2 b + w_3 c + w_4 d}$
- $F_\beta$ мера $F_\beta = (1+\beta)^2 \times \frac{p \times r}{\beta^2 \times p + r}$

Проверити:

- Да ли је $F$ мера специјалан случај $F_\beta$ мере

- Шта се добија за $\beta = 0$ а шта за $\beta = \infty$?