DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, drugi domaći zadatak, 2016/17

1. Pokazati da su vektorska polja $X = y^2\frac{\partial}{\partial x}$ i $Y = x^2\frac{\partial}{\partial y}$ u standardnim koordinatama prostora R^2 kompletna. Da li je $X+Y$ kompletno?

2. Data je matrica $S \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}$ u prostoru kvadratnih matrica dimenzije $2n$ sa
$$S = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix},$$
gde je E_n jedinična matrica dimenzije n. Dato je i preslikavanje $f : \mathcal{M}_{2n\times 2n} \to \mathcal{M}_{2n\times 2n}$ sa $f(X) = X^tSX$. Pokazati da je f diferencijabilno preslikavanje, odrediti njegov rang u tačkama X td. $f(X) = S$, pokazati da je $f^{-1}(S)$ podmnogostrukost $\mathcal{M}_{2n\times 2n}$ i odrediti tangentni prostor u tački E_{2n} te podmnogostrukosti.

3. Data je Mebijusova traka M kao skup tačaka $\psi(u,v) = 2(\cos u, \sin u, 0) + v(-\sin u/2\cos u, -\sin u/2\sin u, \cos u/2)$, gde $u \in R$, $v \in (-1,1)$ i preslikavanje $f : R\times(-1,1) \to R^4$ sa
$$f(u,v) = \left(\sin\frac{(v+1)\pi}{2}\cos u, \sin\frac{(v+1)\pi}{2}\sin u, \cos\frac{(v+1)\pi}{2}\cos u/2, \cos\frac{(v+1)\pi}{2}\sin u/2\right).$$
   (a) Pokazati da preslikavanje f indukuje diferencijabilno preslikavanje $F : M \to R^4$.
   (b) Pokazati da je F ulaganje.
   (c) Pokazati da je M podmnogostrukost sfere S^3 i naći sliku ruba M.
   (d) Naći površ u R^3 difeomorfnu M, čiji je rub krug.

4. U prostoru R^3, u standardnim koordinatama, data su vektorska polja
$$X_1 = xy(z-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2z + x^2)\frac{\partial}{\partial y} + y(z^2-1)\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_2 = (x^2z + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy(z-1)\frac{\partial}{\partial y} + x(z^2-1)\frac{\partial}{\partial z}.$$
   (a) Odrediti skup tačaka prostora R^3 u kojem X_1, X_2 razapinju dvodimenzionu distribuciju D.
   (b) Pokazati da je dvodimenziona distribucija D involutivna.
   (c) Naći par vektorskih polja koja razapinju D i ujedno komutiraju.
   (d) Odrediti integralne mnogostrukosti distribucije D. Kako nazivamo dobijene površi?