МОДУЛСКИ ПРОСТОРИ КОМБИНОВАНОГ ТИПА У МОРС–ФЛОРОВОЈ ТЕОРИЈИ

Јелена Катић

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
БЕОГРАД, СРБИЈА
2008.

Садржај

АПСТРАКТ

У овом раду дат је потпун опис многострукости решења комбиноване (нехомогене Коши–Риманове и градијентне диференцијалне) једначине. Ова решења су дефинисана на скупу који је комбинација графа и Риманове површи са границом, а вредности узимају у котангентном раслојењу компактне многострукости. Конструисани су домен и кодомен одговарајућег Фредхолмог оператора и израчунат његов индекс, односно димензија многострукости решења. Коришћењем својства конвергенције ка распаднутим трајекторијама и технике лепљења, описана је граница многострукости комбинованих објеката у вишим димензијама. Дата и је конструкција кохерентне оријентације, сагласне са оријентацијама на простору објеката некомбинованог типа – градијентних трајекторија и холоморфних кривих. На крају су изведене неке примене у конструкцијама алгебарских структура и изоморфизама са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима у Морсовој и Флоровој хомологији.

ПРЕДГОВОР

Предмет истраживања приказаних у овом раду су простори решења једначине која је комбинација градијентне диференцијалне једначине на графовима и нелинеарне нехомогене Коши–Риманове, као и њихове примене у Морс–Флоровој теорији, у случају котангентног раслојења. Прве две главе су уводне и садрже дефиниције и преглед познатих резултата од значаја. Остале главе садрже оригиналне резултате рада. Главе 3, 4 и 5 су посвећене опису простора и њихових тополошких граница, док су у Глави 6 дате примене претходних резултата. На почетку сваке главе дат је кратак приказ резултата у њој.

Пре свега, желим да се захвалим мом ментору, Дарку Милинковићу, на великој помоћи, подршци и стрпљењу које је показао током протеклих година заједничког рада, као и на многим корисним примедбама и коментарима везаним за саму докторску тезу. Такође се захваљујем члановима комисије: Миодрагу Матељевићу, Зорану Петровићу, Божидару Јовановићу и Драгољубу Кечкићу на свим исправкама и сугестијама које су ми упутили приликом читања тезе.

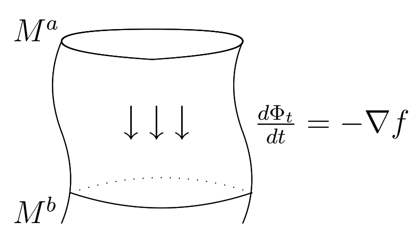
ГЛАВА 1

Увод и преглед резултата

Морсова теорија се бави описом топологије диференцијалне многострукости помоћу анализе критичних тачака погодно изабране глатке функције на њој. Прецизиније, нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција на компактној многострукости M и $a \in \mathbb{R}$. Нека је $M^a := \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$.

Ако у интервалу $[a, b]$ нема критичних вредности функције f, онда су многострукости M^a и M^b дифеоморфне. Дифеоморфизам се успоставља „гурањем” тачака из M дуж градијентних трајекторија, то јест, он је дефинисан једначином

$$\frac{d\Phi_t}{dt}(x) = -\nabla f(\Phi_t(x)), \quad \Phi_0 = \mathrm{Id}$$



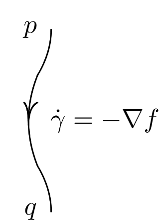
Слика 1.1: Дифеоморфизам многострукости M^a и M^b

(видети Слику 1.1). Из Теореме о егзистенцији и јединствености решења система обичних диференцијалних једначина и Теореме о глаткој зависности од параметара следи да је за свако t, Φ_t дифеоморфизам многострукости M.

Ако се у интервалу $[a, b]$ налази тачно једна критична вредност која одговара критичној тачки p Морсовог индекса[1] k, онда је многострукост M^a хомотопски еквивалентна простору који добијамо лепљењем $k-$ ћелије и многострукости M^b. На тај начин k ћелијама одговарају критичне тачке индекса k. Опис CW – декомпозиције многострукости помоћу проласка кроз критичне тачке Морсове функције представља класичан (Милнор – Смејлов) приступ Морсовој теорији и може се наћи у књизи [53] Џ. Милнора или у радовима [10, 11, 12] Р. Бота.

Савременији, Флор–Витенов приступ чини конструкција Морсове хомологије. Док се у класичном приступу градијентне трајекторије и промена топологије многострукости дуж њих посматрају *унутар* саме амбијентне многострукости, у Флор–Витеновом приступу оне се проучавају као скуп за себе, са сопственом топологијом, која, индиректно, садржи информације о топологији полазне многострукости (видети [73]). Флор–Витенов приступ је оперативнији и доноси више алгебарских информација од Милнор–Смејловог, али, на рачун тога, дозвољава мање директан геометријски увид. За генераторе Морсовог ланчастог комплекса узимају се критичне тачке Морсове функције, градуисане Морсовим индексом.

Диференцијал у Морсовој хомологији се дефинише помоћу броја градијентних трајекторија које спајају две критичне тачке (видети Слику 1.2), прецизна дефиниција диференцијала дата је у Поглављу 2.1.



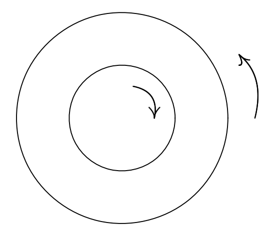
Слика 1.2: Градијентна трајекторија

[1] Дефиниција Морсовог индекса дата је на страни 61.

Морсова хомологија је изоморфна сингуларној хомологији многострукости M (видети [6]).

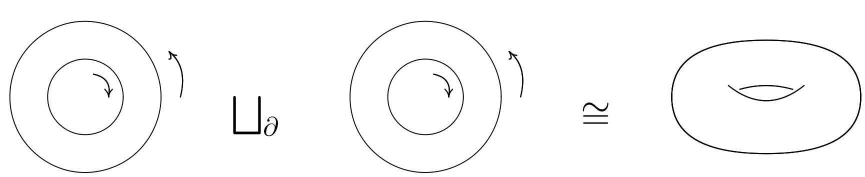
Флорова теорија представља бесконачнодимензионо уопштење Морсове. Оригинално је настала као доказ Арнолдове хипотезе и развио ју је А. Флор у радовима [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. Наиме, Последња Поенкареова геометријска теорема (коју је доказао Биркхоф двадесетих година двадесетог века) тврди да

дифеоморфизам прстена који чува површину и „уврће” границе[2] (видети Слику 1.3) има најмање две фиксне тачке. Лепљењем два оваква прстена добијамо торус, а лепљењем одговарајућих дифеоморфизама добијамо дифеоморфизам који чува површину и који има четири



Слика 1.3: Прстен са „уврнутим” границама

фиксне тачке (видети Слику 1.4). Приметимо да је сума Бетијевих бројева торуса једнака четири.



Слика 1.4: Торус $\mathbb{T}^2$

Природно уопштење ове појаве је питање колико фиксних тачака имају дифеоморфизми површи који чувају површину (и општије, дифеоморфизми симплектичких многострукости који чувају симплектичку форму, а самим тим и запремину). Тако долазимо до Арнолдове хипотезе: број фиксних

[2]Унутрашња и спољашња кружница се сликају у себе ротацијама, али у супротним смеровима.

тачака Хамилтоновог дифеоморфизма симплектичке многострукости P је већи или једнак од суме Бетијевих бројева:

$$\mathrm{Fix}(\Phi_1) \geq \sum_{k=0}^{\dim P} \beta_k(P),$$

где су

$$\beta_k(P) = \dim H_k(P, \mathbb{Q})$$

Бетијеви бројеви многострукости P. За дату симплектичку многострукост P, и Хамилтоново векторско поље[3] X_H, Хамилтонови дифеоморфизми су решења система

$$\phi_t^H : P \to P, \quad \frac{d}{dt}\phi_t^H(x) = X_H(\phi_t^H(x)), \quad \phi_0^H = \mathrm{Id}\,. \tag{1.0.1}$$

У локалним координатама ова једначина има облик:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

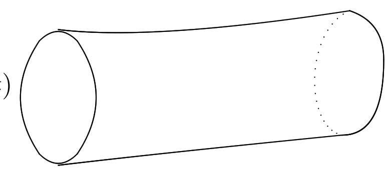
А. Банјага је доказао да Хамилтонови дифеоморфизми чине нормалну подгрупу групе свих дифеоморфизама који чувају симплектичку форму (видети [5]). Може се доказати (видети [45] или [74]) да се ова два скупа (Хамилтонових и симплектичких дифеоморфизама) разликују ако и само ако је прва кохомолошка група многострукости P нетривијална. Из једначине (1.0.1) следи да је ϕ_1 хомотопно идентитету. Одатле и из Лефшецове теореме о фиксној тачки следи да је број фиксних тачака дифеоморфизма ϕ_1 већи или једнак од Ојлерове карактеристике (то јест, алтернирајуће суме Бетијевих бројева):

$$\mathrm{Fix}(\Phi_1) \geq \sum_{k=0}^{\dim P} (-1)^n \beta_k(P) =: \chi(P).$$

Приметимо да је, у случају торуса $\mathbb{T}^2$, ова информација бескорисна, јер је $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$, док из Арнолдове хипотезе сазнајемо да је број фиксних тачака барем четири.

[3] Дефиниција Хамилтоновог векторскох поља дата је на страни 19.

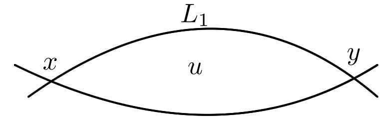
Фиксна тачка Хамилтоновог дифеоморфизма описује периодичну орбиту, односно, Хамилтонов пут $x(t) = \phi_t^H(x)$ који почиње и завршава се у тачки x. Флорова хомологија има за генераторе овакве периодичне орбите, а гранични оператори се дефинишу помоћу броја пертурбованих холоморфних цилиндара који спајају два таква пута (видети Слику 1.5).



Слика 1.5: Пертурбовани холоморфни цилиндар

А. Флор је доказао да је овако конструисана хомологија изоморфна сингуларној.[4] Ово представља доказ Арнолдове хипотезе: периодичних орбита има барем онолико колико има генератора Флорове (односно, сингуларне) хомологије, то јест, њихов број је већи или једнак од суме Бетијевих бројева.

Поред Флорове хомологије за периодичне орбите постоји и Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке. Подмногострукост L симплектичке многострукости P је Лагранжева ако је $\dim L = \frac{1}{2}\dim P$ и ако се симплектичка форма анулира на TL. Генератори Флорове хомологије у Лагранжевом случају су пресечне тачке двеју Лагранжевих подмногострукости (под претпоставком да се оне секу трансверзално). Гранични оператор се дефинише помоћу броја пертурбованих холоморфних дискова са границом на поменутим подмногострукостима (видети Слику 1.6 и дефиницију на страни 21). Флорова



Слика 1.6: Холоморфни диск u

[4] Флор је ово доказао под извесним претпоставкама о $\pi_2(P)$. Касније су оне ослабљене и, у случају хомологије са рационалним коефицијентима, потпуно елиминисане (видети [28, 42, 32]).

хомологија за Лагранжеве пресеке је уопштење Флорове хомологије за периодичне орбите. Заиста, дифеоморфизам $\phi : P \to P$ чува симплектичку форму ако и само је график пресликавања $\Gamma_\phi := \{(x, \phi(x)) \mid x \in P\}$ Лагранжева подмногострукост многострукости $P \times P$ са симплектичком формом $\omega \oplus -\omega$. Периодичне орбите пресликавања ϕ, односно његове фиксне тачке, су пресеци Лагранжевих подмногострукости Γ_ϕ и дијагонале $\Delta = \{(x, x) \mid x \in P\}$.

Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке не може увек да се дефинише. За нас је од значаја случај када је симплектичка многострукост P котангентно раслојење T^*M, а Лагранжеве подмногострукости – нулто сечење O_M и његова Хамилтонова деформација $\phi_1(O_M)$. У том случају Флорова хомологија је добро дефинисана, и изоморфна сингуларној хомологији многострукости M (видети [18, 56]).

Ова конструкција може да се уопшти. За дату затворену подмногострукост $N \subset M$, М. Позниак је у [62] посматрао конормално раслојење

$$\nu^*N := \left\{\xi \in T^*M\big|_N \mid \xi(T^*N) = \{0\}\right\} \subset T^*M$$

и Флоров комплекс $\nu^*N \cap \phi_1^H(O_M)$. У овом случају Флорова хомологија се дефинише помоћу броја пертурбованих холоморфних дискова који имају један крај на O_M, а други на ν^*N и изоморфна је сингуларној хомологији многострукости N. Специјално, за $M = N$, важи $\nu^*N = O_M$, па добијамо претходно описану Флорову хомологију. Р. Кастуриранган и Ј.-Г. О су у [33] извели ову конструкцију за *отворен* подскуп $U \subset M$, уместо затворене подмногострукости $N \subset M$.

Од методе за доказ Арнолдове хипотезе, Флорова хомологија се развила у разним правцима и преплиће се са скоро свим подобластима данашње Симплектичке топологије. Веза Флорове хомологије са Громов–Витеновим инваријантама доводи до једног приступа квантној кохомологији. Као њено уопштење (и уопштење Громов–Витенове теорије) развила се Симплектичка теорија поља.

Флорова хомологија је и у вези са Хоферовом геометријом на простору Хамилтонових дифеоморфизама симплектичке многострукости. Тангентни простор на многострукост Хамилтонових изоморфизама се природно идентификује (до на додавање константи) са скупом Хамилтонових функција. Нека је Хамилтонов дифеоморфизам дефинисан једначином (1.0.1). Тада се дужина пута ϕ_t дефинише као

$$l(\phi_t) := \int_0^1 \|H_t\| dt,$$

а растојање

$$d(\mathrm{Id}, \phi_1) := \inf\{l(\phi_t)\},$$

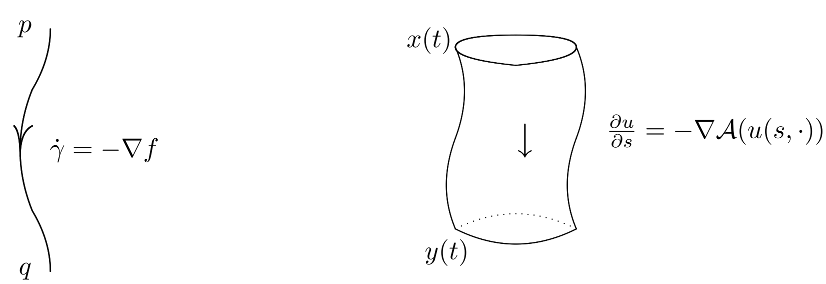
при чему се инфимум узима по свим Хамилтоновим дифеоморфизмима који спајају Id и ϕ_1. Слично се дефинише растојање између два произвољна Хамилтонова дифеоморфизма. Видимо да од избора метрике на скупу Хамилтонових функција зависи дужина пута, а самим тим и Хоферова (псеудо)метрика d. Ако се Хоферова дужина пута зада помоћу L^p норме на простору Хамилтонијана, тада је d дегенерисана, односно само псеудометрика (видети [15]). Ако се за норму на простору Хамилтонијана изабере супремум норма, тада је пресликавање d недегенерисано. Видели смо већ да су уопштења симплектичких дифеоморфизама Лагранжеве подмногострукости. Могуће је дефинисати Хоферову метрику и на простору Лагранжевих подмогострукости фиксиране симплектичке многострукости. У случају котангентог раслојења, доказ недегеренисаности Хоферове метрике, као и опис геодезијских линија користи Флорову хомологију (видети [46, 49, 50] за детаље).

Опишимо укратко како Флорова хомологија генерализује Морсову.

Критичне тачке функције $f : M \to \mathbb{R}$ чине скуп нула форме df, односно пресек подмногострукости $df(O_M)$ и нултог сечења O_M у котангентом раслојењу T^*M. Свако котангентно раслојење је симплектичка многострукост, у којој су подмногострукости O_M и $df(O_M)$ Лагранжеве. Ако је f

Морсова функција тада су ови пресеци трансверзални (односно критичне тачке су изоловане). Уопштење овога су трансверзални пресеци двеју Лагранжевих подмногострукости, то јест, генератори Флорове хомологије.

Други начин гледања на ово уопштење је следећи. Функционал дејства[5] $\mathcal{A}_H(\gamma) := \int_\gamma p\,dq - H\,dt$ је добро дефинисан на симплектичким многострукостима на којима је симплектичка форма тачна (један такав пример је котангентно раслојење). Претпоставимо да је домен функционала дејства простор петљи (у случају периодичних орбита) или простор путева са крајевима на нултом сечењу (у случају Лагранжевих пресека), означимо га са Ω_0 у оба случаја. Тада из Картанове формуле следи да су критичне тачке функционала дејства управо Хамилтонови путеви (видети (2.1.4) на страни 20). Лако се проверава и да су пертурбовани холоморфни дискови градијентне трајекторије[6] функционала дејства на бесконачнодимензионом простору Ω_0, (видети Слику 1.7), дакле, постоји потпуна аналогија са коначнодимензионим, Морсовим случајем.



Слика 1.7: Градијентна трајекторија у коначнодимензионом и бесконачнодимензионом случају

Изоморфизам између Флорове и сингуларне хомологије остварује се преко Морсове хомологије. У радовима [19, 18], Флор је, за дату Морсову

[5]Видети и (2.1.3) на страни 20.

[6]Овде подразумевамо да се спаривање $d\mathcal{A}_H \leftrightsquigarrow \nabla\mathcal{A}_H$ остварује преко L^2- скаларног производа: $d\mathcal{A}_H(\xi) = \langle\nabla\mathcal{A}_H, \xi\rangle_{L^2} = \int\langle\nabla\mathcal{A}_H, \xi\rangle_g$.

функцију f, дефинисао Хамилтонијан

$$H_f : T^*M \to \mathbb{R}, \quad H_f := f \circ \pi,$$

(где је $\pi : T^*M \to M$ канонска пројекција) такав да пресечним тачкама $O_M \cap \phi_1^{H_f}(O_M)$ одговарају критичне тачке функције f. Осим тога, он је доказао и да су, уколико је C^2–норма функције f довољно мала, скуп решења градијентне једначине које дефинишу гранични оператор у Морсовој теорији и скуп решења Коши–Риманове једначине које дефинишу гранични оператор у Флоровој, у један-један кореспонденцији. Тиме се успоставља изоморфизам хомологија још на нивоу ланаца.

Постоји још један начин да се конструише изоморфизам између Морсове и Флорове хомологије, и то за *произвољну* Морсову функцију и *произвољни* Хамилтонијан – помоћу објеката комбинованог типа. Осим произвољности избора Морсове и Хамилтонове функције, предност изоморфизма овог (другог) типа је његова сагласност са неким конструкцијама у Морс–Флоровој теорији. Наиме, овај изоморфизам комутира са природним изоморфизмима (видети једначину (2.1.10) на страни 23) и са кохомолошким производима (видети (2.1.11) на страни 24) у обе хомологије (док у случају Флоровог изоморфизма ово није познат резултат). Конструкцију овог изоморфизма у случају Флорове хомологије за периодичне орбите су дали С. Пиуникин, Д. Саламон и М. Шварц у [60]. У ауторовој магистарској тези [75] и коауторском раду са Д. Милинковићем [36] дата је конструкција изоморфизма који користи комбиноване објекте за случај Лагранжевих пресека. П. Алберс је уопштио конструкцију Пиуникин–Саламон–Шварцовог изоморфизма за Лагранжеве пресеке са котангентог раслојења на произвољну симплектичку многострукост (видети [1]). За разлику од случаја Флорове хомологије за периодичне орбите, Пиуникин–Саламон–Шварцов хомоморфизам за Лагранжеве пресеке у општем случају, није обавезно изоморфизам.

Помоћу броја градијентних дрвета у Морсовом и холоморфних „панталона” у Флоровом случају могуће је дефинисати кохомолошке производе у (ко)хомологијама (видети Поглавље 6.1.1). К. Фукаја и Ј.-Г. О су, у раду [27], показали везу између ова два производа, посматрајући, као и Флор, специјални Хамилтонијан H_f. Т. Симчевић је, за произвољне три Морсове функције и произвољна три Хамилтонијана, користећи анализу простора комбинованих објеката, доказала функторијалност Пиуникин–Саламон–Шварцовог изоморфизма у односу на кохомолошки производ. Везом између модулских простора графова и кохомолошких операција бавили су се и М. Бец и Р. Коен у раду [8].

Р. Леклерк је, користећи објекте комбинованог типа, доказао да Флорова хомологија има структуру модула над Морсовим хомолошким прстеном. Ова конструкција, као и њена веза са природним изоморфизмима у Морсовој и Флоровој хомологији, дата је у [41].

У доказима поменутих резултата учествује анализа простора комбинованих објеката димензија нула и један. Модулске просторе виших димензија у Морсовој и Флоровој теорији користили су Ж.-Ф. Баро и О. Корнеа у [7], и Д. Милинковић и З. Петровић у [52].

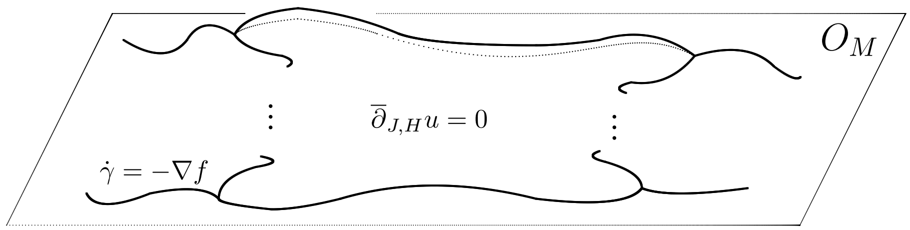
У овом раду настављамо са изучавањем простора комбинованог типа, и то у општијем случају, са више улаза и излаза. Прецизније, посматрамо пресликавања која се састоје из неколико градијентних трајекторија

$$\gamma : \mathbb{R} \supset \Gamma \to M, \quad \dot{\gamma} = -\nabla f \tag{1.0.2}$$

и једног пертурбованог холоморфног диска

$$u : \mathbb{C} \supset D \to T^*M, \quad \overline{\partial}_{J,H} u = \overline{\partial}_J u - X_H(u) = 0, \tag{1.0.3}$$

са границом на нултом сечењу (видети Слику 1.8). Овде је X_H Хамилтоново векторско поље на T^*M које одговара Хамилтоновој функцији H (видети и Дефиницију 1 на страни 19). Коши–Риманов оператор $\overline{\partial}_J$ се дефинише (видети прецизну дефиницију на страни 43) помоћу скоро комплексне структуре J која постоји на сваком котангентном раслојењу (видети Дефиницију 2 на страни 21).



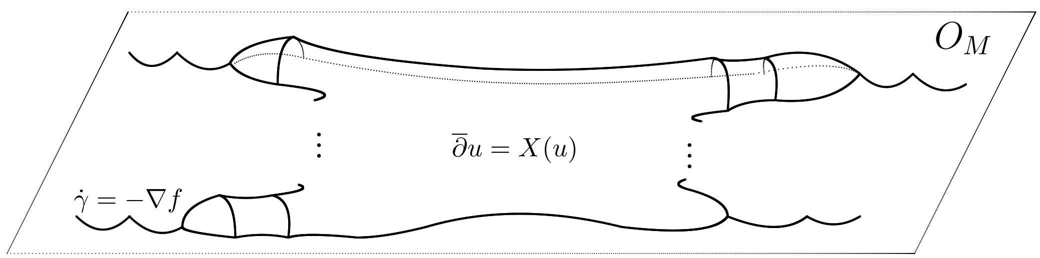
Слика 1.8: Комбиновани објекат са више улаза и излаза

За разлику од радова [75, 76, 36] који су се првенствено бавили *улогом* модулских простора у Морсовој и Флоровој (ко)хомологији, у овом раду, као и у радовима [35, 34], који представљају неке његове делове, акценат је на аналитичком приступу, односно, детаљном опису многострукости комбинованих објеката и њихових граница. Простори комбинованих објеката су се углавном (у [75, 76, 36]) посматрали као пресек простора јединствених (некомбинованих) објеката. Под „јединственим објектом" подразумевамо или градијентну трајекторију или (пертурбовани) холоморфни диск. Такав начин проучавања нам омогућава да израчунамо димензије, али не и да докажемо извесне правилности код губљења компактности у вишим димензијама. У овом раду модулске просторе посматрамо као скупове нула Фредхолмових оператора (а не као пресеке), на погодно изабраном домену. Прецизније, конструисаћемо раслојење за које ће пресликавање

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+k}, u) \mapsto \big(\dot{\gamma}_1 + \nabla f_1(\gamma_1), \ldots, \dot{\gamma}_{m+k} + \nabla f_{m+k}(\gamma_{m+k}), \overline{\partial}_J u + X(u)\big)$$

бити добро дефинисано сечење, а скуп комбинованих објеката које посматрамо – инверзна слика нуле при овом сечењу. Доказаћемо да је ово сечење, односно његова линеаризација, Фредхолмов оператор, из чега ће следити да је простор пресликавања који посматрамо коначнодимензиона, глатка многострукост.

Овакав приступ нам, пре свега, омогућава да опишемо тополошку границу многострукости решења. Наиме, осим у димензији нула, многострукости решења комбинованих једначина (1.0.2) и (1.0.3) нису затворене (то јест, компактне и без границе). Њихова тополошка граница – тачке нагомилавања које не припадају самој многострукости – састављена је од уније многострукости комбинованог и некомбинованог типа (видети Слику 1.9).



Слика 1.9: Разломљени објекат

Доказ ових чињеница подељен је на два корака. Први корак је доказ да се сваки низ објеката комбинованог типа, који не конвергира ка објекту истог типа, „распада" на неколико објеката из поменуте уније. У доказу овог дела користи се Арцела–Асколијева теорема и Громовљеве теореме о конвергенцији (пертурбованих) холоморфних дискова са Лагранжевим граничним условима. Појава „мехурова" на граничним дисковима, до које може да дође у општем случају, код нас је онемогућена захваљујући амбијентној многострукости – котангентном раслојењу – на којој је симплектичка форма тачна.

Други корак је обратни смер – сваки „разломљени" објекат (елемент поменуте уније) јесте гранична вредност неког низа из многострукости пресликавања коју проучавамо. Овај други смер називамо *лепљењем.* У доказима теорема везаних за лепљење (базираним на једној верзији Банаховог става о фиксној тачки), приступ који заступамо – да скуп објеката мешовитог типа посматрамо као нулу јединственог Фредхолмовог оператора – је неопходан.

Поред поменутог губљења компактности, овакав приступ нам омогућује и да конструишемо истовремену (кохерентну) оријентацију свих модулских простора, и, последично, проширимо досадашње примене модулских простора на (ко)хомологије са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима. Наиме, поменута карактеризација тополошке границе многострукости мешовитих пресликавања је кључни корак у разним конструкцијама у Морс – Флоровој теорији (као што су, на пример, конструкција изоморфизма између Морсове и Флорове хомологије, конструкција разних производа у обе теорије, функторијалности ових изоморфизама и производа). Да бисмо те конструкције многли да уопштимо на случај Морсове и Флорове хомологије са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима,[7] потребно је да оријентишемо све објекте који у њима учествују. Већина ових објеката (и мешовитих и немешовитих) припада већем броју граница многострукости пресликавања истовремено, а све те многострукости учествују у поменутим конструкцијама. Зато је важно да нађемо начин да оријентишемо све објекте који су од значаја истовремено. То подразумева да оријентације два „залепљена” објекта дефинишу оријентацију многострукости чију рубну тачку чине. Такву оријентацију називамо *кохерентном.* Да би могла да се примени на поменуте конструкције у Морс–Флоровој теорији, кохерентна оријентација мора да обухвати објекте различитих типова (мешовитог и немешовитог), јер се границе многострукости мешовитих објеката (за разлику од немешовитих) састоје из таквих објеката различитих типова.

У Глави 2 су дефинисани основни појмови у Морсовој и Флоровој

[7] Флорову хомологију са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима конструисали су А. Флор у Х. Хофер у [24], док је у Морсовој теорији ову конструкцију дао М. Шварц у [69].

теорији, дата су два примера простора комбинованих објеката и наведени су потребни ставови везани за примену Фредхолмове теорије и израчунавање димензија многострукости. У Глави 3 дата је аналитичка поставка Фредхолмовог проблема, доказана је Фредхолмовост одговарајућих оператора и израчунат је Фредхолмов индекс који одређује димензије многострукости. Глава 4 је посвећена опису тополошке границе многострукости комбинованих објеката, односно, испитивању могућности губљења компактности у појединим димензијама. У Глави 5 конструисана је кохерентна оријентација модулских простора. Глава 6 представља примене ових резултата, и то на: конструкције кохомолошког производа на нивоу Морсових и Флорових кохомологија многострукости, конструкцију Месијевих производа, доказ својстава изоморфизма алгебарских структура, као и изоморфизма са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима.

ГЛАВА 2

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И ДЕФИНИЦИЈЕ

У овој глави наводимо дефиниције и ставове које ћемо користити у даљем раду. Поглавље 2.1 посвећено је опису Морсове и Флорове хомологије и неким примерима комбинованих објеката. Како се основне особине модулских простора комбинованог и некомбинованог типа[1] изводе из чињенице да су они скупови нула одређених пресликавања која су Фредхолмова, у Поглављу 2.2 наводимо основне дефиниције и ставове везане за Фредхоломову теорију. У Поглављу 2.3 дајемо опис везе између индекса Фредхолмовог оператора и Масловљевог индекса Хамилтоновог пута.

2.1 Морсова и Флорова хомологија

Глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ дефинисана на глаткој многострукости M је *Морсова* ако су све њене критичне тачке недегенерисане. Из недегенерисаности другог извода следи да су критичне тачке Морсове функције изоловане (видети [53, 74]), па ако претпоставимо још и да је многострукост M компактна, закључујемо да их има коначно много.

[1]Прецизиније, чињеница да они представљају коначнодимензионе многострукости.

Нека је $\mathrm{Crit}(f)$ скуп критичних тачака Морсове функције f. Означимо са $CM(f)$ векторски простор над $\mathbb{Z}_2$ генерисан елементима из $\mathrm{Crit}(f)$. Гранични оператор:

$$\partial_M : CM(f) :\to CM(f)$$

се на генераторима дефинише као

$$\partial_M(p) := \sum_{q\in\mathrm{Crit}(f)} n(p,q)q,\ p\in\mathrm{Crit}(f), \tag{2.1.1}$$

где је $n(p,q)$ број (по модулу 2 и до на транслацију) негативних градијентних трајекторија које спајају критичне тачке p и q. Прецизније, $n(p,q)$ је број (до на транслацију) решења једначине

$$\begin{cases} \gamma : \mathbb{R} \to M, \\ \frac{d\gamma}{dt} + \nabla f(\gamma) = 0, \\ \gamma(-\infty) = p,\ \gamma(+\infty) = q, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

модуло 2 (видети Слику 1.2). Може се доказати да је да оператор (2.1.1) добро дефинисан, као и да важи $\partial_M \circ \partial_M = 0$, што нам омогућава да дефинишемо Морсове хомолошке групе:

$$HM_k(f) := \mathrm{Ker}(\partial_M)/\,\mathrm{Im}(\partial_M).$$

За две различите Морсове функције, f^α и f^β, постоји изоморфизам између одговарајућих Морсових хомолошких група - означимо овај изоморфизам са $T^{\alpha\beta}$ (конструкција изоморфизма $T^{\alpha\beta}$ дата је у Поглављу 6.1.2, на страни 175). За доказ ових тврђења видети [69], [74] или [75]. Морсова хомологија изоморфна је сингуларној хомологији многострукости M (видети [54, 6]).

Скицирајмо конструкцију Флорове хомологије у случају котангентног раслојења. Нека је T^*M котангентно раслојење компактне глатке многострукости M и нека је ω стандардна симплектичка форма на њему, у локалним координатама задата са $\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$, где су x_j координате у бази, а y_j координате у слоју.

Дефиниција 1. Нека је $H : T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ глатка функција са компактним носачем (овакву функцију називамо *Хамилтонијаном* или *Хамилтоновом функцијом* који зависи од времена и означавамо и са H_t). Векторско поље X_H које задовољава

$$dH(\xi) = \omega(X_H, \xi), \quad \forall \xi \in TT^*M$$

зовемо *Хамилтоновим векторским пољем.* Решење ϕ_t^H система

$$\phi_t : T^*M \to T^*M, \quad \frac{d}{dt}\phi_t^H(x) = X_H(\phi_t^H(x)), \quad \phi_0^H = \mathrm{Id}$$

називамо *Хамилтоновим дифеоморфизмом* дефинисаним Хамилтонијаном H. За фиксирано $x \in T^*M$, пут $\phi_t^H(x)$ називамо *Хамилтоновим путем* са почетком у тачки x. Од сада, у целом раду претпостављамо да су сви Хамилтонијани са компактним носачем. $\diamond$

Означимо са $L_0 = O_M$ нулто сечење котангентног раслојења T^*M и са $L_1 = \phi_1^H(L_0)$ Хамилтонову деформацију нултог сечења. Претпоставимо да се подмногострукости L_0 и L_1 секу трасверзално у T^*M. Генератори Флоровог ланчастог комплекса су тачке пресека $L_0 \cap L_1$. Сваком $x \in L_0 \cap L_1$ одговара тачно један Хамилтонов пут, $\phi_t^H \circ (\phi_1^H)^{-1}(x)$, који почиње и завршава се на нултом сечењу, и обратно, сваком таквом Хамилтоновом путу, одговара тачно једно $x \in L_0 \cap L_1$. Зато за генераторе Флоровог ланчастог комплекса можемо узети и Хамилтонове путеве са крајевима на нултом сечењу.

Као у Морсовом случају, и овде се генератори могу схватити као критичне тачке функције (само што је сада домен функције бесконачнодимензиона многострукост). Заиста, нека је Ω скуп глатких путева у T^*M, а Ω_0 подскуп путева који почињу и завршавају се на нултом сечењу, то јест

$$\Omega := \{\gamma : [0,1] \to T^*M \mid \gamma \text{ је класе } C^\infty\},$$

$$\Omega_0 := \{\gamma : [0,1] \to T^*M \mid \gamma \text{ је класе } C^\infty,\ \gamma(0), \gamma(1) \in O_M\}.$$

Функционал дејства је пресликавање

$$\mathcal{A}_H : \Omega_0 \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}_H(\gamma) := \int_0^1 \gamma^*\theta - H_t(\gamma(t))dt, \tag{2.1.3}$$

где је θ Лиувилова 1− форма на котангентном раслојењу, за коју важи $-d\theta = \omega$. У локалним координатама је $\theta = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j dx_j$. Хамилтонови путеви са крајевима на нултом сечењу су екстремале функционала дејства. Заиста, из Картанове формуле:[2]

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^*(d(X\lrcorner\alpha) + X\lrcorner d\alpha)$$

(која важи за произвољну форму α), видимо да је за $\xi \in T_\gamma\Omega$

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) &= \int_0^1 \gamma^*(d(\xi\lrcorner\theta) + \xi\lrcorner d\theta - dH(\xi)dt) = \\ &= \int_0^1 \gamma^*(-\xi\lrcorner\omega - dH(\xi)dt) + \int_0^1 \gamma^* d(\xi\lrcorner\theta) = \\ &= -\int_0^1 \omega(\xi, \dot\gamma - X_H(\gamma))dt + \theta(\gamma(1))\xi - \theta(\gamma(0))\xi. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

За $\gamma \in \Omega_0$ последња два сабирка у горњем изразу су једнака нули, па су критичне тачке функционала дејства путеви који задовољају услов $\dot\gamma = X_H(\gamma)$, односно Хамилтонови путеви са крајевима на нултом сечењу. Дакле, генератори Флоровог ланчастог комплекса су решења система

$$\begin{cases} z : [0,1] \to T^*M, \\ \dot z = X_H(z), \\ z(0), z(1) \in O_M. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Векторски простор над $\mathbb{Z}_2$ генерисан решењима јеначине (2.1.5) означићемо са $CF(H)$. Да бисмо дефинисали гранични оператор у Флоровом случају, потребан нам је следећи појам.

[2]Симбол $\lrcorner$ означава унутрашње множење вектора и форме. За произвољни вектор X и $k-$форму α је $(X\lrcorner\alpha)(X_1, \ldots, X_{k-1}) := \alpha(X, X_1, \ldots, X_{k-1})$.

Дефиниција 2. *Скоро комплексна структура* на многострукости T^*M је фамилија линеарних пресликавања $J_p : T_pT^*M \to T_pT^*M$ која глатко зависи од p и за коју важи $J_p^2 = -\operatorname{Id}_p$. $\diamond$

Напомена 3. Ако за скоро комплексну структуру на T^*M важи да је са $\langle X, Y\rangle := \omega(X, JY)$ задата Риманова метрика на T^*M онда кажемо да је J *сагласно са* ω. Ако је g дата Риманова метрика на симплектичкој многострукости P, нека је B_g такво линеарно пресликавање (у свакој тачки T_pP) које задовољава

$$g \circ (B_g \times \operatorname{Id}) = \omega.$$

Тада је $-B_g^2$ позитивни $g-$ самоадјунговани изоморфизам. Ако ставимо $J_g := B_g(\sqrt{-B_g^2})^{-1}$, тада је лако проверити да је

$$J_g^2 = -\operatorname{Id}, \quad \omega \circ (J_g \times J_g) = \omega$$

и да је J_g сагласно[3] са ω (видети и [45] за детаље). $\diamondsuit$

Нека је $x(t)$ Хамилтонов пут која почиње и завршава се у O_M. Дефинишимо

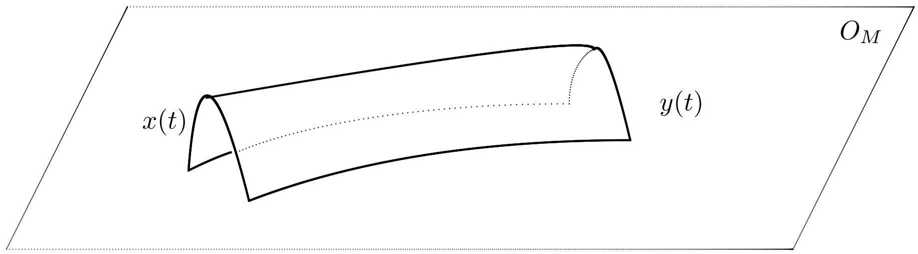
$$\partial_F : CF(H) \to CF(H), \quad \partial_F(x) := \sum_{y \in CF(H)} n(x, y)y, \tag{2.1.6}$$

где је $n(x, y)$ број (до на транслацију) решења елиптичког система

$$\begin{cases} u : \mathbb{R} \times [0, 1] \to T^*M, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)) = 0, \\ u(s, i) \in O_M,\ i \in \{0, 1\}, \\ u(-\infty, t) = x(t), \\ u(+\infty, t) = y(t) \end{cases} \tag{2.1.7}$$

[3] Метрика која повезује ω и J_g не мора бити баш g.

(видети Слику 2.1).



Слика 2.1: Пертурбовани холоморфни тунел u

Може се доказати да је оператор (2.1.6) добро дефинисан и да важи $\partial_F \circ \partial_F = 0$. Флорову хомологију дефинишемо као

$$HF_*(H) := \mathrm{Ker}(\partial_F)/\,\mathrm{Im}(\partial_F).$$

За различите Хамилтонове функције H^α и H^β, одговарајуће Флорове хомологије су изоморфне. Означимо одговарајући изоморфизам са $S^{\alpha\beta}$ (видети Поглавље 6.1.2, страну 180 за конструкцију изоморфизма $S^{\alpha\beta}$).

Наведимо два примера комбинованих модулских простора и њихових улога у Морс–Флоровој теорији.

Као што смо споменули у Предговору, важи

$$H_*(M, \mathbb{Z}_2) \cong HM_*(f) \cong HF_*(H_f).$$

У нашем случају (Лагранжевих пресека), Пиуникин–Саламон–Шварцово пресликавање[4] између Морсовог и Флоровог ланчастог комплекса се дефинише као:

$$\Psi : CM(f) \to CF(H), \quad \Psi(p) := \sum_x n(p,x)x, \tag{2.1.8}$$

где је $n(p,x)$ број парова (γ, u) који задовољавају следећу комбиновану

[4]Означаваћемо га, скраћено, и са ПСС.

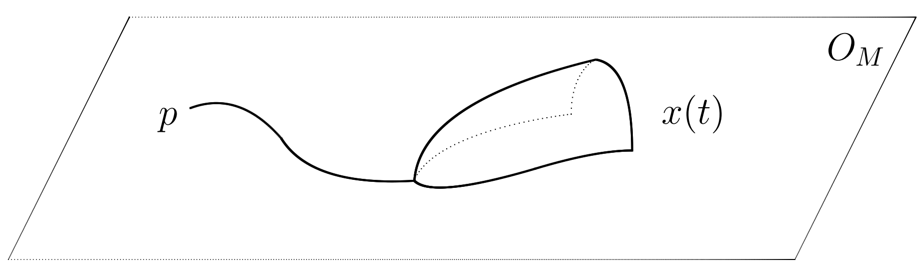
једначину, за фиксирано $R_0 > 0$:

$$\begin{cases} \gamma : (-\infty, 0] \to M, \quad u : [0, +\infty) \times [0, 1] \to T^*M, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s)), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_{R_0} H}(u)) = 0, \\ u(s, 0), u(s, 1), u(0, t) \in O_M, \\ \gamma(-\infty) = p, u(+\infty, t) = x(t), \\ \gamma(0) = u\left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{2.1.9}$$

(видети Слику 2.2). Овде је $\rho_{R_0} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ глатка неопадајућа функција, која је једнака нули на $[0, R_0]$, а јединици на $[R_0 + 1, +\infty)$. Може се показати (видети и [37, 36, 75]) да пресликавање (2.1.8) индукује пресликавање на нивоу хомологије, да је оно изоморфизам као и да је функторијално, то јест да дијаграм

$$\begin{array}{ll} HF_*(H^\alpha) & \xrightarrow{S^{\alpha\beta}} HF_*(H^\beta) \\ \uparrow \Psi^\alpha & \qquad \uparrow \Psi^\beta \\ HM_*(f^\alpha) & \xrightarrow{T^{\alpha\beta}} HM_*(f^\beta) \end{array} \tag{2.1.10}$$

комутира.



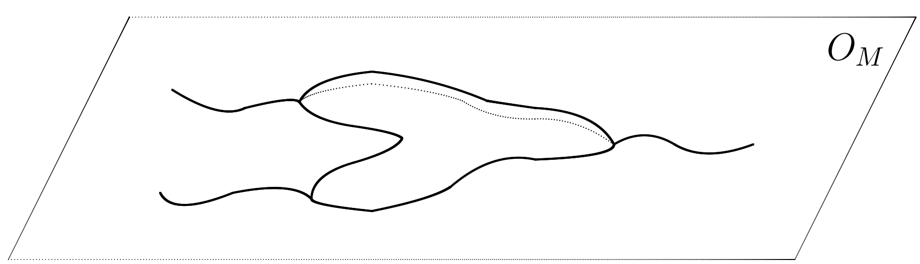
Слика 2.2: Објекат комбинованог типа који дефинише пресликавање Ψ

Објекти комбинованог типа користе се и у доказу функторијалности Пиуникин–Саламон–Шварцовог изоморфизма у односу на кохомолошки производ. Прецизније, нека су f_1, f_2 и f_3 три произвољне Морсове функције и H_1, H_2 и H_3 три произвољна три Хамилтонијана. Означимо са $\cup_M$ и $\cup_F$ кохомолошке производе у Морсовој и Флоровој кохомологији (видети 6.1.1). У својој магистарској тези, користећи комбиноване објекте са два улаза и једним излазом (видети Слику 2.3), Т. Симчевић је доказала да дијаграм

$$\begin{array}{ccc} HF^*(H_1)\otimes HF^*(H_2) & \stackrel{\cup_F}{\longrightarrow} & HF^*(H_3) \\ \tau_1\otimes\tau_2\uparrow & & \tau_3\uparrow \\ HM^*(f_1)\otimes HM^*(f_2) & \stackrel{\cup_M}{\longrightarrow} & HM^*(f_3) \end{array} \tag{2.1.11}$$

комутира, где су τ_j изоморфизми кохомологија добијени помоћу изоморфизма (2.1.8), видети [76].

Комутативност дијаграма (2.1.10) и (2.1.11) ће следити из карактеризација граница простора решења, које ћемо извести као специјалан случај описа простора комбинованих објеката у случају општијих комбинованих објеката, са m улаза и k излаза.



Слика 2.3: Објекат комбинованог типа са два улаза и једним излазом

2.2 Примена Фредхолмове теорије

Дефиниција 4. Нека је N произвољан скуп и E Банахов простор. *Карта* на N је пар (U,ψ), где је $U\subset N$ и $\psi : U\to U'$ бијекција скупа U на отворен подскуп $U' \subset E$. *Атлас* на N је покривање скупа N скуповима U_j таквим да је, за одговарајуће ψ_j из карте (U_j, ψ_j) пресликавање

$$\psi_j \circ \psi_k^{-1} : \psi_k(U_j \cap U_k) \to \psi_j(U_j \cap U_k)$$

класе C^∞ за сваки пар индекса j, k за који је $U_j \cap U_k$ непразан. Скуп N снабдевен оваквом структуром назива се *Банахова многострукост*. $\diamond$

Дефиниција 5. Нека су X и Y Банахови простори. *Фредхолмов оператор* је ограничен линеаран оператор $F : X \to Y$ који има коначнодимензионо језгро $\mathrm{Ker}(F)$, затворену слику $\mathrm{Im}(F)$ и коначнодимензионо којезгро $\mathrm{Coker}(F) := Y/\,\mathrm{Im}(F)$. Ако су M и N Банахове многострукости, онда пресликавање $f : M \to N$ називамо *Фредхолмовим* ако је диференцијал $df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ Фредхолмов оператор у свакој тачки $x \in M$. $\diamond$

Дефиниција 6. *Фредхолмов индекс* Фредхолмовог оператора F је

$$\mathrm{Ind}(F) := \dim \mathrm{Ker}(F) - \dim \mathrm{Coker}(F).$$

У случају Фредхолмовог пресликавања многострукости, $f : M \to N$, ако је многострукост M повезана, Фредхолмов индекс извода $\mathrm{Ind}(df(x))$ не зависи од тачке x и назива се *Фредхолмовим индексом пресликавања* f. $\diamond$

Теорема 7 (Сард–Смејл). *Нека су M и N Банахове многострукости, нека је M повезана и $f : M \to N$ Фредхолмово пресликавање класе C^k, где је $k >$* $\max\{0, \mathrm{Ind}(f)\}$. *Тада је скуп сингуларних вредности пресликавања f скуп прве категорије (пребројива унија нигде густих скупова) у N.*

Напомена 8. Скуп чији је комплемент скуп прве категорије називаћемо и *генеричким* скупом. $\diamondsuit$

Последица 9. Под условима претходне теореме скуп $f^{-1}(y)$ је многострукост класе C^k и димензије $\mathrm{Ind}(f)$ или празан скуп за генеричко $y \in N$.

Докази претходних тврђења могу се наћи у [67, 74].

2.3 Масловљев индекс и спектрални ток

Дефиниција Масловљевог индекса и његова веза са спектралним током неких типова Фредхолмових оператора детаљно је изложена у радовима Џ. Робина и Д. Саламона [64, 65]. Ради комплетности, у овом поглављу дајемо конструкцију Масловљевог индекса и спектралног тока и наводимо нека њихова својства и везу са индексима Фредхолмових оператора који за овај рад имају значаја.

2.3.1 Масловљев индекс

Нека је $\mathbb{R}^{2n} \ni (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ снабдевен стандардном симплектичком структуром

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Дефиниција 10. Потпростор $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ се назива *Лагранжевим* ако је $\dim L = n$ и $\omega_0|_L = 0$. $\diamond$

Ако је

$$L = \mathrm{Im}(Z), \quad Z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n, \quad Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X + iY, \tag{2.3.1}$$

тада је L Лагранжев ако и само ако је Z инјективно пресликавање и $X^\top Y$ симетрична матрица.

Скуп свих Лагранжевих потпростора у $\mathbb{R}^{2n}$ означаваћемо са $\mathcal{L}(n)$. Нека је, за $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$, W фиксирани Лагранжев векторски потпростор такав да је $\mathbb{R}^{2n} = \Lambda \oplus W$. Нека је $\Lambda(s) \in \mathcal{L}(n)$ глатка крива у простору Лагранжевих подмногострукост таква да је $\Lambda(0) = \Lambda$. За $v \in \Lambda$ и мало s нека је $w(s) \in W$ такво да $v + w(s) \in \Lambda(s)$. Тада важи следећа лема.

Лема 11. **[64]** *Нека су W, $w(s)$ и Λ као малопре.*

а) Квадратна форма

$$Q(v) := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \omega_0(v, w(s))$$

не зависи од избора простора W.

б) Ако је $\Lambda(s) = Z(s)$ где је $Z(s)$ као у (2.3.1), тада је

$$Q(v) = \langle X(0)u, \dot{Y}(0)u \rangle - \langle Y(0)u, \dot{X}(0)u \rangle,$$

где је $v = Z(0)u$.

Тачка *а*) у Леми 11 нам омогућава да сваком тангентном вектору $(\Lambda, \hat{\Lambda}) \in T_\Lambda \mathcal{L}(n)$ придружимо квадратну форму Q. Користићемо ознаку $Q(\Lambda, \hat{\Lambda})$ за форму добијену на овај начин.

Сваки Лагранжев потпростор V дефинише једну декомпозицију скупа $\mathcal{L}(n)$:

$$\mathcal{L}(n) = \bigcup_{k=0}^{n} \Sigma_k(V),$$

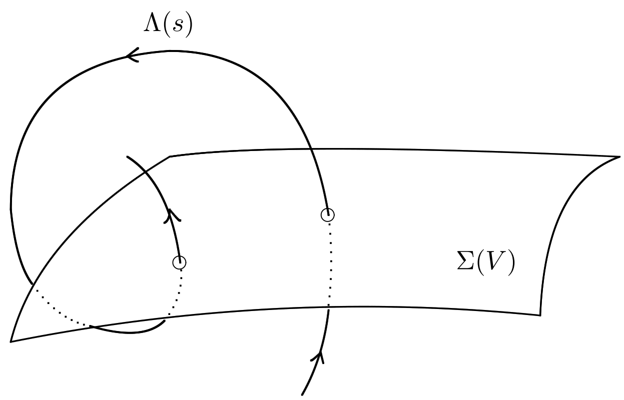
где је $\Sigma_k(V)$ подмногострукост свих Лагранжевих потпростора чији је пресек са V потпростор димензије k. *Масловљев сингуларни цикл* придружен подмногострукости V је скуп

$$\Sigma(V) := \bigcup_{k=1}^{n} \Sigma_k(V).$$

Масловљев индекс представља индекс пресека Масловљевог сингуларног цикла и криве у простору Лагранжевих потпростора (видети Слику 2.4). Прецизније, нека је $\Lambda : [a,b] \to \mathcal{L}(n)$ дата крива. Кажемо да је $s \in [a,b]$ *тачка пресецања* ако се $\Lambda(s)$ и V секу по неком нетривијалном потпростору,[5] односно, ако је $\Lambda(s) \in \Sigma(V)$. У свакој тачки пресецања дефинишемо *форму пресецања*:[6]

$$\Gamma(\Lambda, V, s) := Q\big(\Lambda(s), \dot{\Lambda}(s)\big)\Big|_{L(s)\cap V}.$$

Тачку пресецања s зовемо *регуларном* ако је форма пресецања $\Gamma(\Lambda, V, s)$ регуларна. Регуларност тачака пресецања представља услов трансверзалности криве $L(s)$ на алгебарски варијетет $\Sigma(V)$.



Слика 2.4: Масловљев индекс

Дефиниција 12. Нека је $\Lambda : [a,b] \to \mathcal{L}(n)$ глатка крива којој су све тачке

[5] Ако је $V = \{0\} \times \mathbb{R}^n$, а $\Lambda(s) = Z(s)(\mathbb{R}^n)$, где је $Z(s) = X(s) + iY(s)$ као у (2.3.1), тада је s тачка пресецања ако и само ако је $\det X(s) = 0$.

[6] У случају $V = \{0\} \times \mathbb{R}^n$, $\Lambda(s) = Z(s)(\mathbb{R}^n)$, $Z(s) = X(s) + iY(s)$ форма пресецања има једноставан запис $\Gamma(\Lambda, V, s)(v) = -\langle \dot{X}(s)u, Y(s)u\rangle$, где је $v = (0, Y(s)u)$.

пресецања регуларне. *Масловљев индекс* $\mu(\Lambda, V)$ је збир[7]

$$\mu(\Lambda, V) := \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\Lambda, V, a) + \sum_{a<s<b}\operatorname{sign}\Gamma(\Lambda, V, s) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\Lambda, V, b). \tag{2.3.2}$$

$\diamond$

Симбол $\operatorname{sign} Q$ означава сигнатуру матрице Q, односно разлику броја негативних и броја позитивних сопствених вредности форме Q.

Дефиниција 13. За дати пар Лагранжевих путева $\Lambda_1, \Lambda_2 : [a, b] \to \mathcal{L}(n)$ дефинишемо *релативну форму пресецања* на $\Lambda_1(s) \cap \Lambda_2(s)$ као:

$$\Gamma(\Lambda_1, \Lambda_2, s) := \Gamma(\Lambda_1(s), \Lambda_2, s) - \Gamma(\Lambda_2(s), \Lambda_1, s)$$

и, уколико је ова форма регуларна, *релативни Масловљев индекс* као:

$$\mu(\Lambda_1, \Lambda_2) := \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\Lambda_1, \Lambda_2, a) + \sum_{a<s<b}\operatorname{sign}\Gamma(\Lambda_1, \Lambda_2, s) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\Gamma(\Lambda_1, \Lambda_2, b).$$

$\diamond$

За линеарно пресликавање $\Psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ кажемо да је *симплектичко* или *симплектоморизам* уколико чува симплектичку форму ω_0, односно, ако за сваки пар вектора $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$ важи:

$$\omega_0\big(\Psi(X), \Psi(Y)\big) = \omega_0(X, Y).$$

Напомена 14. Матрица Ψ линеарног пресликавања у стандардној бази је симплектичка ако и само ако важи

$$\Psi^\top \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} \Psi = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

. $\diamond$

[7] Може се доказати да су регуларне тачке пресецања изоловане, односно, да је сума у формули (2.3.2) коначна (видети [64]).

Из дефиниције Лагранжевог потпростора, као и из чињенице да је симплектичко пресликавање изоморфизам (што следи из недегерисаности форме ω_0) следи да симплектоморна слика произвољног Лагранжевог потпростора поново Лагранжев потпростор. Са $\mathrm{Sp}(2n)$ означимо скуп свих симплектоморизама простора $\mathbb{R}^{2n}$. За пут симплектичких матрица $\Psi : [a,b] \to \mathrm{Sp}(2n)$ дефинишемо Масловљев индекс као

$$\mu(\Psi) := \mu(\Psi(V), V), \quad V := \{0\} \times \mathbb{R}^n.$$

Масловљев индекс се може задати и аксиоматски на следећи начин (видети и [64]).

- **(Аксиома хомотопије)** Два пута у $\mathrm{Sp}(2n)$ која почињу у Ψ_0 а завршавају се у Ψ_1 су хомотопна са фиксираним крајевима ако и само ако имају једнаке Масловљеве индексе.

- **(Аксиома нуле)** Ако димензија простора $\Psi(s)(V) \cap V$ не зависи од s, онда је $\mu(\Psi) = 0$.

- **(Аксиома катенације)** Ако је $s_0 \in (a,b)$, онда је

$$\mu(\Psi) = \mu(\Psi|_{[a,s_0]}) + \mu(\Psi|_{[s_0,b]}).$$

- **(Аксиома производа)** Ако је $n_1 + n_2 = n$, групу $\mathrm{Sp}(2n_1) \times \mathrm{Sp}(2n_2)$ можемо да идентификујемо са подгрупом групе $\mathrm{Sp}(2n)$. Нека је, за $\Psi_j \in \mathrm{Sp}(2n_j)$, и $\Psi_1 \oplus \Psi_2 \in \mathrm{Sp}(2n_1) \times \mathrm{Sp}(2n_2)$. Тада је

$$\mu(\Psi_1 \oplus \Psi_2) = \mu(\Psi_1) + \mu(\Psi_2).$$

- **(Аксиома нормализације)** Ако је $B(s)$ пут симетричих матрица[8] и

$$\Psi(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & B(s) \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

[8] Ако је B симетрична матрица реда n, онда је матрица $\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & B \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$ симплектичка.

за $s \in [a,b]$, онда је

$$\mu(\Psi) = \frac{1}{2}\operatorname{sign} B(b) - \frac{1}{2}\operatorname{sign} B(a).$$

Доказ ових тврђења детаљно је изложен у [64]. У једном смеру доказа (у доказивању да претходне аксиоме у потпуности одређују Масловљев индекс) се користи чињеница да је сваки пут симплектоморизама хомотопан путу облика $\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & B(s) \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$ за неку симетричну матрицу $B(s)$.

На овај начин смо дефинисали индекс Лагранжевог пута у $\mathcal{L}(n)$ као индекс пресека криве и (оријентисаног) Масловљевог цикла. У раду [2] Арнолд је дао следећу интерпретацију Масловљевог индекса, у случају када је Лагранжев пут *затворен*, то јест, петља у $\mathcal{L}(n)$. Пре свега, подсетимо се да унитарна група $U(n)$ дејствује транзитивно на простору $\mathcal{L}(n)$, и да се стабилизатор тачке $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ може идентификовати са ортогоналном групом $O(n)$. Одатле следи да је $\mathcal{L}(n) = U(n)/O(n)$. Ако фиксирамо Лагранжев потпростор $L_0 := \mathbb{R}^n \times \{0\}$ и посматрамо неки потпростор $L \in \mathcal{L}(n)$, тада постоји (јединствен до на ортогоналну трансформацију) унитарни аутоморфизам $\varphi(L)$ који слика L_0 у L. Квадрат детерминанте матрице $\varphi(L)$ зависи само од L, јер је детерминанта ортогоналне матрице једнака ± 1. Зато је добро дефинисано пресликавање:

$$\mathrm{Det}^2 : \mathcal{L}(n) \to \mathbb{S}^1, \quad L \mapsto \mathrm{Det}^2(\varphi(L)).$$

Нека је $S\mathcal{L}(n)$ скуп Лагранжевих потпростора L за које је $\mathrm{Det}^2(L) = 1$. Важи $S\mathcal{L}(n) = SU(n)/SO(n)$. Из тачних низова за хомотопске групе придруженим следећим двема фибрацијама:

$$\begin{array}{ccc} SO(n) \to & SU(n) \\ & \downarrow \\ & S\mathcal{L}(n) \end{array} \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{ccc} S\mathcal{L}(n) \to & \mathcal{L}(n) \\ & \downarrow \\ & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

добијамо да је $\pi_1(S\mathcal{L}(n)) = \{0\}$ и $\pi_1(\mathcal{L}(n)) = \mathbb{Z}$. Одатле је и

$$H_1(\mathcal{L}(n), \mathbb{Z}) \cong H^1(\mathcal{L}(n), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

За генератор α кохомолошке групе $H^1(\mathcal{L}(n), \mathbb{Z})$ изаберимо број ротација пресликавања Det^2, односно, коцикл чија је вредност на затвореној кривој $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{L}(n)$ једнака степену композиције

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{L}(n) \xrightarrow{\mathrm{Det}^2} \mathbb{S}^1.$$

Тада је Масловљев индекс μ *петље* Лагранжевих потпростора $L(s)$ дефинисан у (2.3.2) једнак вредности $\alpha(L(s))$.

Напомена 15. Генератор α се зове и *Масловљева класа* и често означава истим словом μ. $\diamondsuit$

Ниједна од величина μ и α не зависи од хомотопске класе петље $L(s)$. Због тога, како је $\pi_1(\mathcal{L}(n)) = \mathbb{Z}$, доказ да су μ и α једнаки ће следити из једнакости њихових вредности на генератору групе $\pi_1(\mathcal{L}(n))$, односно на петљи $e^{is}L_0$, $0 \le s \le \pi$. Провером се утврђује да је $\mu(e^{is}L_0) = \alpha(e^{is}L_0) = n$. Тиме је завршена скица доказа Арнолдове карактеризације Масловљевог индекса.

Остало је још да дефинишемо Масловљев индекс у нетривијалном случају Хамилтоновог пута са крајевима на нултом сечењу и тиме задамо градуацију у Флоровој хомологији.

У случају произвољне симплектичке многострукости P (односно, глатке многострукости са затвореном, недегенерисаном 2− формом), симплектоморизмом називамо глатки дифеоморфизам чији извод чува симплектичку форму у свакој тачки. Може се доказати (видети, на пример [45]) да Хамилтонов изоморфизам дефинисан једначином (1.0.1) чува симплектичку форму, то јест да је он и симплектоморизам. Нека је $z(t)$ Хамилтонов пут у симплектичкој многострукости P који почиње на фиксираној Лагранжевој подмногострукости L_0. Посматрајмо раслојење:

$$\begin{array}{ccc} T_{z(t)}P \cong \mathbb{R}^{2n} \to & z^*TP \\ & \downarrow \\ & [0,1] \end{array}$$

чији је слој над тачком $t \in [0,1]$ простор $T_{z(t)}P \cong \mathbb{R}^{2n}$. Свака тривијализација овог раслојења одређивала би пут у простору $\mathrm{Sp}(2n)$ (где имамо дефинисан Масловљев индекс), помоћу пута $\phi_t^H(L_0)$, где је ϕ_t^H одговарајући Хамилтонов дифеоморфизам, а $T\phi_t^H$ означава извод. У општем случају, тако задат индекс зависи од тривијализације, односно, не може добро да се дефинише. У случају котангентог раслојења постоји уочена класа тривијализација, таква да Масловљев индекс не зависи од конкретне тривијализације из те класе.

Означимо са $\mathcal{T}$ класу тривијализација

$$\varphi : z^*T(T^*M) \to [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} = [0,1] \times \mathbb{C}^n$$

раслојења $z^*T(T^*M)$ за које важи

$$\varphi(H_{z(t)}) = \{t\} \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi(V_{z(t)}) = \{t\} \times i\mathbb{R}^n,$$

где су H_z и V_z хоризонтално и вертикално подраслојење раслојења

$$z^*T(T^*M) = H_z \oplus V_z$$

у односу на Леви–Чивита повезаност на T^*M одређену фиксираном метриком g на M. Класа $\mathcal{T}$ није празна јер је скуп $[0,1]$ контрактибилан (видети [56] за детаље). Ако дефинишемо (за овакве z и $\varphi \in \mathcal{T}$) пут симплектоморизама

$$\Psi_\varphi^z(t) := \varphi \circ T\phi_t^H \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C}^n \cong \{0\} \times \mathbb{C}^n \to \{t\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n,$$

онда важи следећа

Лема 16. **[56]** *Ако су $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}$, онда је $\mu(\Psi_{\varphi_1}) = \mu(\Psi_{\varphi_2})$.*

Захваљујући претходној леми, можемо да дефинишемо Масловљев индекс Хамилтоновог пута z као

$$\mu(z) := \mu(\Psi_\varphi^z).$$

2.3.2 Примене спектралног тока

Нека су W и H сепарабилни Хилбертови простори такви да $W \subset H$ и да је инклузија $W \hookrightarrow H$ компактан оператор са густом сликом. Нека је

$$A(s) : W \to H$$

фамилија ограничених линеарних оператора. За дату диференцијабилну криву $\xi : \mathbb{R} \to W$, посматрајмо оператор облика[9]

$$(D_A\xi)(s) = \dot{\xi} - A(s)\xi(s). \tag{2.3.3}$$

Претпоставимо да A задовољава следеће услове:

(A1) Пресликавање $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ је непрекидно диференцијабилно у операторској топологији и постоји константа $c_0 > 0$ таква да важи:

$$\|A(s)\xi\|_H + \|\dot{A}(s)\xi\|_H \leq c_0\|\xi\|_W$$

за свако $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in W$.

(A2) За свако s, оператор $A(s)$, посматран као неограничен линеарни оператор на H са доменом W, јесте самоадјунгован и постоји константа $c_1 > 0$ таква да важи

$$\|\xi\|_W^2 \leq c_1 \left(\|A(s)\xi\|_H^2 + \|\xi\|_H^2\right)$$

за свако $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in W$.

(A3) Постоје инвертибилни оператори $A^\pm \in \mathcal{L}(W, H)$ такви да је

$$\lim_{s\to\pm\infty} \|A(s) - A^\pm\|_{\mathcal{L}(W,H)} = 0.$$

[9] У применама у Морсовој и Флоровој хомологији, W и H су простори Собољевљевог типа $W^{1,2}$ и L^2, а $A(s)$ елиптички диференцијални оператори првог реда чији коефицијенти глатко зависе од $s \in \mathbb{R}$.

Означимо са $\mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$ скуп свих пресликавања A која задовољавају наведене услове. Може се доказати (видети [65]) да је, за

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}, H), \quad \mathcal{W} := L^2(\mathbb{R}, W) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}, H)$$

и $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$, оператор

$$D_A : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$$

дефинисан у (2.3.3) Фредхолмов.

Неформално речено, спектрални ток је број промена знака сопствених вредности оператора $A(s)$, када се s креће од $-\infty$ до $+\infty$. Формална дефиниција је следећа. Дефинишимо *оператор пресецања* као

$$\Gamma(A, s) := P\dot{A}(s)P\big|_{\mathrm{Ker}(A)} : \mathrm{Ker}(A) \to \mathrm{Ker}(A),$$

где $P : H \to H$ означава ортогоналну пројекцију на језгро оператора A. Може се доказати да из услова (A2) следи да је језгро оператора $A(s)$ коначне димензије. *Тачка пресецења* за A је број $s \in \mathbb{R}$ за коју $A(s)$ није инјективан. Тачку пресецања називамо *регуларном* ако је оператор пресецања $\Gamma(A, s)$ регуларан.

Дефиниција 17. Претпоставимо да A има само регуларне тачке пресецања. *Спектрални ток* фамилије оператора A је број[10]

$$\mu_S(A) := \sum_s \operatorname{sign} \Gamma(A, s). \tag{2.3.4}$$

◇

Спектрални ток карактеришу следеће аксиоме:

- **(Аксиома хомотопије)** Спектрални ток μ_S је константно пресликавање на повезаним компонентама скупа $\mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$.

[10] Може се доказати да је сума у (2.3.4) коначна.

- **(Аксиома нуле)** Ако је $A(s) = \mathrm{const}$, онда је $\mu_S(A) = 0$.
- **(Аксиома катенације)** Ако је $A_0(s) = A_1(-s) = A(0)$, за $s > 0$ и

$$A = \begin{cases} A_0, \ \text{за}\, s \leq 0, \\ A_1, \ \text{за}\, s \geq 0, \end{cases}$$

онда је

$$\mu_S(A) = \mu_S(A_0) + \mu_S(A_1).$$

- **(Аксиома производа)** Ако су $A_j \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, W_j, H_j)$, за $j = 1, 2$, дефинишимо $A_1 \oplus A_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, W_1 \oplus W_2, H_1 \oplus H_2)$ као $(A_1 \oplus A_2)(s) := A_1(s) \oplus A_2(s)$. Тада је $\mu_S(A_1 \oplus A_2) = \mu_S(A_1) + \mu_S(A_2)$.
- **(Аксиома нормализације)** Ако је $W = H = \mathbb{R}$ и $A(s) = \operatorname{arctg} s$, онда је $\mu_S(A) = 1$.

Провером се доказује да спектрални ток задовољава претходне аксиоме. У доказу другог смера, то јест тврђења да ове аксиоме карактеришу спектрални ток, користи се чињеница да за сваки оператор $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H)$ постоје $m \in \mathbb{N}$ и $B \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ такви да је $A \oplus B$ хомотопно константном путу. За такво B, из аксиома следи да је

$$-\mu_S(A) = \mu_S(B) = \frac{1}{2} \operatorname{sign} B^+ - \frac{1}{2} \operatorname{sign} B^-,$$

чиме је пресликавање јединствено одређено.

За нас је од значаја следећа теорема.

Теорема 18. **[65]** *Ако је* $\operatorname{Ind}(D_A)$ *Фредхолмов индекс оператора* $D_A : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$, *дефинисаног у (2.3.3) онда важи*

$$\operatorname{Ind}(D_A) = -\mu_S(A).$$

Доказ се заснива на провери да пресликавање

$$\widetilde{\mu} : \mathcal{A}(\mathbb{R}, W, H) \to \mathbb{Z}, \quad \widetilde{\mu}(A) := -\operatorname{Ind}(D_A)$$

задовољава аксиоме које карактеришу спектрални ток. У доказу да $-\operatorname{Ind}(D_A)$ задовољава аксиому нормализације користи се формула за Фредхолмов индекс у коначнодимензионом случају дата у следећој напомени.

Напомена 19. У коначнодимензионом случају, када је $W = H = \mathbb{R}^n$, за оператор $D_A : W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ дефинисан у (2.3.3) важи формула за индекс:

$$\operatorname{Ind}(D_A) = \dim E^u(A^-) - \dim E^u(A^+),$$

где су, за фиксирану реалну $n \times n$ матрицу B скупови $E^u(B)$ и $E^s(B)$ дефинисани са:

$$E^u(B) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{s \to -\infty} e^{Bs} v = 0 \right\}, \quad E^s(B) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{s \to +\infty} e^{Bs} v = 0 \right\}.$$

Доказ за коначнодимензиони случај такође је дат у [65]. $\diamondsuit$

Нека је

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id} \\ \operatorname{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

стандардна скоро комплексна структура на $\mathbb{R}^{2n}$. Посматрајмо пертурбовани Коши–Риманов оператор

$$\overline{\partial}_{S,\Lambda_1,\Lambda_2} \zeta := \frac{\partial \zeta}{\partial s} + J_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + S\zeta,$$

где $\zeta : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{2n}$, са граничним условима

$$\zeta(s, j) \in \Lambda_j, \ \text{за}\, j = 0, 1.$$

Простори $\Lambda_j \subset \mathbb{R}^{2n}$ су Лагранжеви, а $S(s,t)$ фамилија $2n \times 2n$ матрица. Важи следећа

Теорема 20. **[65]** *Ако је*

$$L^2 := L^2(\mathbb{R} \times [0,1], \mathbb{R}^{2n}),$$

$$W^{1,2}_{\Lambda_1,\Lambda_2} := \left\{ \zeta \in W^{1,2}(\mathbb{R} \times [0,1], \mathbb{R}^{2n}) \mid \zeta(s,j) \in \Lambda_j \text{ за } j = 0,1 \right\},$$

тада је оператор $\overline{\partial}_{S,\Lambda_1,\Lambda_2} : W^{1,2}_{\Lambda_1,\Lambda_2} \to L^2$ *Фредхолмов. Његов Фредхолмов индекс је дат са:*[11]

$$\operatorname{Ind}(\overline{\partial}_{S,\Lambda_1,\Lambda_2}) = \mu(\operatorname{Graph}(\Psi^-), \Lambda_1 \times \Lambda_2) - \mu(\operatorname{Graph}(\Psi^+), \Lambda_1 \times \Lambda_2) - \mu(\Delta, \Lambda_0 \times \Lambda_1),$$

где су пресликавања $\Psi^\pm : [0,1] \to \operatorname{Sp}(2n)$ *решења диференцијалних једначина*

$$\frac{\partial \Psi^\pm}{\partial s} + J_0 S^\pm \Psi^\pm = 0, \quad \Psi^\pm(0) = \operatorname{Id}.$$

Овде ознака μ *представља релативни Масловљев индекс пара.*

Доказ Теореме 20 се ослања на претходна тврђења у вези са Фредхолмовим оператором D_A датим у (2.3.3). Овде је оператор $A(s) : W \to H$ облика $A(s) = J_0 \frac{d}{dt} + S(s,t)$, где су

$$H = L^2([0,1], \mathbb{R}^{2n}), \quad W = W^{1,2}_0([0,1], \mathbb{R}^n) \times W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^n),$$

а доказ Фредхолмовости Коши–Римановог оператора $\overline{\partial}_{S,\Lambda_1,\Lambda_2}$ се своди на проверу услова (A1)-(A3). Може се показати да се форме пресецења за дати спектрални ток и пут Лагранжевих подмогострукости поклапају, па, из Теореме 18, следи и формула за индекс у Теореми 20.

[11]Симбол Graph(Ψ) означава график пресликавња Ψ а Δ дијагоналу у $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$.

ГЛАВА 3

ПРОСТОРИ РЕШЕЊА

3.1 Преглед резултата ове главе

У овој глави ћемо доказати да је скуп решења комбиноване једначине глатка коначнодимензиона многострукост и израчунаћемо њену димензију. Простори некомбинованих објектата – градијентних трајекторија у Морсовом[1] и холоморфних дискова у Флоровом случају[2] – изучавани су, између осталог, у радовима Флора, Шварца и Оа у [69, 56, 20]. Један приступ истраживања простора решења *комбиноване* једначине је диференцијално-тополошки приступ, објаснимо га на примеру комбинованог објекта дефинисаног једначином (2.1.9) (видети и Слику 2.2 на страни 23). Означимо са $\mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J)$ скуп решења једначине (2.1.9). Овде је g Риманова метрика која дефинише градијент ∇ у (2.1.9). Ако са $W^u(p)$ означимо скуп свих градијентих трајекторија γ које „извиру” из тачке p (то јест, за које важи $\gamma(-\infty) = p$), а са $W^s(x)$ скуп свих холоморфних дискова u за које важи $u(+\infty, t) = x(t)$, тада многострукост

[1]Видети једначину (2.1.2) на страни 18.

[2]Видети једначину (2.1.7) на страни 21.

$\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$ може да се опише као

$$\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J) = \left\{(\gamma,u)\in W^u(p)\times W^s(x)\mid \gamma(0)=u\left(0,\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$\subset W^u(p)\times W^s(x)$$

и њена димензија може да израчуна као димензија пресека, уколико је он трансверзалан (видети и [75, 36] за детаље). Међутим, овај приступ нам не омогућава да прецизно опишемо нарушавање компактности многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$ и изведемо технике лепљења,[3] као ни да задамо оријентацију. Због тога се овде одлучујемо за другачији, аналитички приступ. Идеја је да простор решења посматрамо као језгро *једног* Фредхолмовог оператора, а не као скуп уређених парова. За коректну поставку оваквог Фредхолмовог проблема, потребно је да дефинишемо домен и кодомен одговарајућег пресликавања, који морају бити Банахове многострукости. Да бисмо то постигли, често ћемо посматрати пресликавања која априори нису глатка, касније ће глаткост следити из стандардних резултата регуларности решења елиптичких једначина.

Формулишимо прецизно резултат ове главе.

Нека је Σ отворен просто-повезан подскуп комплексне равни са $m+k$ цилиндричних крајева Σ_j. Прецизније, постоје инјективна холоморфна пресликавања

$$\begin{aligned}\phi_j &: (-\infty,0]\times[0,1]\to\Sigma, \quad j=1,\dots,m,\\ \phi_j &: [0,+\infty)\times[0,1]\to\Sigma, \quad j=m+1,\dots,m+k.\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Означимо са

$$\begin{aligned}\Sigma_j &:= \phi_j\left((-\infty,0)\times[0,1]\right)\subset\Sigma, \quad j=1,\dots,m,\\ \Sigma_j &:= \phi_j\left([0,+\infty)\times[0,1]\right)\subset\Sigma, \quad j=m+1,\dots,m+k,\\ \Sigma_0 &:= \Sigma-\sum_j\Sigma_j.\end{aligned}$$

[3] Ове две конструкције – нарушавање компактности и лепљење – заједно дају опис тополошке границе модуларских простора, видети Главу 4.

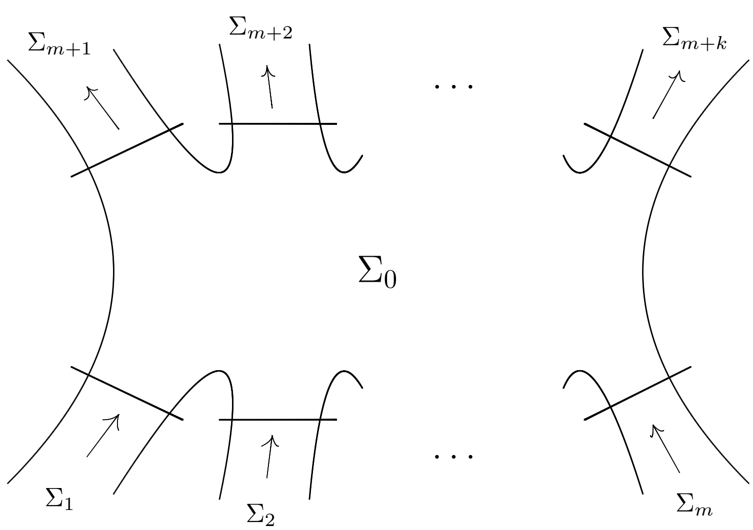
Кажемо да Σ има m улаза и k излаза (видети Слику 3.1). Површ $\overline{\Sigma}$ је конформно еквивалентна јединичном диску у комплексној равни без $m+k$ тачака на рубу.

Нека су $f_j : M \to \mathbb{R}$, за $j = 1, \ldots, m+k$, дате Морсове функције и $H_j : T^*M \to \mathbb{R}$, за $j = 1, \ldots, m+k$, дати Хамилтонијани. Нека је $R > 2$ фиксирано, p_j критична тачка функције f_j и $\rho_R : (-\infty, 0] \to [0,1]$ глатка функција таква да је

$$\rho_R(s) = \begin{cases} 1, & -R \leq s \leq -2, \\ 0, & s \leq -R-1, s \geq -1 \end{cases} \tag{3.1.2}$$

и нека је $\tilde{\rho}_R(s) = \rho_R(-s)$. Означимо са

$$\begin{aligned} &\vec{f} := (f_1, f_2, \ldots, f_{m+k}), \\ &\overrightarrow{H} := (H_1, H_2, \ldots, H_{m+k}), \\ &\vec{p} := (p_1, p_2, \ldots, p_{m+k}). \end{aligned}$$



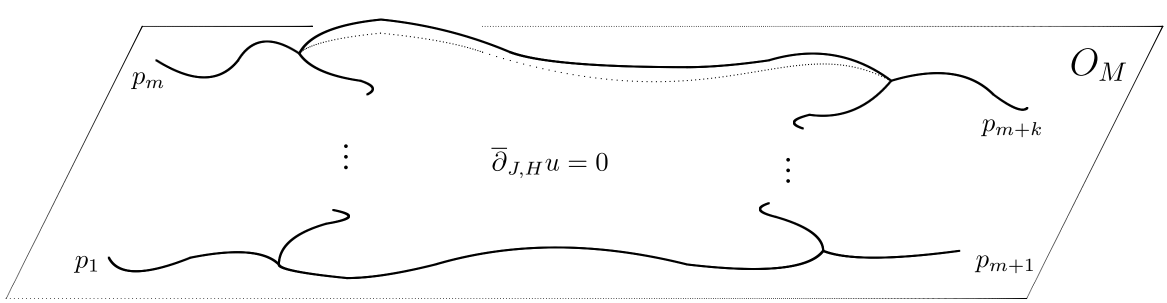
Слика 3.1: Домен Σ са m улаза и k излаза

Елемент основног модулског простора који у овом раду анализирамо састоји се од $m+k$ градијентних једнодимензионих крајева спојених у средини

једним дводимензионим објектом u. Пресликавање u задовољава пертурбовану Коши–Римановy једначину на деловима цилиндричних крајева, а холоморфно је на остатку свог домена (видети и Слику 3.2).
Прецизније, за фиксирану Риманову метрику g, са $\mathcal{M}_R(\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$ означимо скуп свих $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m+k},u)$ таквих да важи:

$$\begin{cases} \gamma_j:(-\infty,0]\to M,\ j=1,\ldots,m,\\ \gamma_j:[0,+\infty)\to M,\ j=m+1,\ldots,m+k,\\ \frac{d\gamma_j}{ds}=-\nabla f_j(\gamma_j),\ j=1,\ldots,m+k;\\ u:\Sigma\to T^*M,\\ \frac{\partial u_j}{\partial s}+J(\frac{\partial u_j}{\partial t}-X_{\rho_R H_j}(u_j))=0,\ u_j:=u\circ\phi_j,\ j=1,\ldots,m,\\ \frac{\partial u_j}{\partial s}+J(\frac{\partial u_j}{\partial t}-X_{\tilde{\rho}_R H_j}(u_j))=0,\ u_j:=u\circ\phi_j,\ j=m+1,\ldots,m+k,\\ \left[\frac{\partial u}{\partial s}+J(\frac{\partial u}{\partial t})\right]_{\Sigma_0}=0;\\ \gamma_j(0)=u_j(-\infty,t),\ j=1,\ldots,m,\\ \gamma_j(0)=u_j(+\infty,t),\ j=m+1,\ldots,m+k,\\ u(\partial\overline{\Sigma})\subset O_M,\\ \gamma_j(-\infty)=p_j,\ j=1,\ldots,m,\\ \gamma_j(+\infty)=p_j,\ j=m+1,\ldots,m+k. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Да бисмо доказали да је скуп $\mathcal{M}_R(\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$ коначнодимензиона многострукост, потребни су нам појмови које уводимо у овој глави.



Слика 3.2: Елемент простора $\mathcal{M}_R(\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$

Напомена 21. Користићемо и ознаку $\overline{\partial}_{J,\overrightarrow{H}}\, u = 0$ за пертурбовану Коши–Риманову једначину

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial s} + J(\frac{\partial u_j}{\partial t} - X_{\rho_R H_j}(u_j)) = 0,\ j = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial u_j}{\partial s} + J(\frac{\partial u_j}{\partial t} - X_{\tilde{\rho}_R H_j}(u_j)) = 0,\ j = m+1, \dots, m+k, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t})\right]_{\Sigma_0} = 0. \end{cases}$$

$\diamondsuit$

Напомена 22. У целом раду ћемо претпоставити да су сви поменути Хамилтонијани H_j такви да се O_M и $\phi^1_{H_j}(O_M)$ секу трансверзално. Захваљујући компактности многострукости M, овај услов трансверзалности обезбеђује да Хамилтонових путева са крајевима на нултом сечењу има коначно много. $\diamondsuit$

3.2 Банахова многострукост пресликавања

У овом поглављу дајемо конструкцију Банахове многострукости пресликавања која је потребна за коректну аналитичку поставку Фредхолмовог проблема. Димензију многострукости M ћемо означавати са n у целом раду.

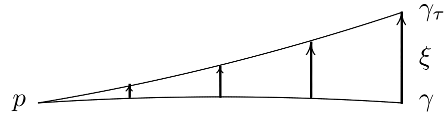
Нека је p критична тачка Морсове функције f. Означимо са $C^\infty_+(p)$ скуп свих глатких пресликавања γ која испуњавају следеће услове:

$$\begin{cases} \gamma : [0, +\infty) \to M, \\ \gamma(+\infty) = p. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Слично, нека је $C^\infty_-(p)$ скуп свих глатких γ таквих да важи:

$$\begin{cases} \gamma : (-\infty, 0] \to M, \\ \gamma(-\infty) = p. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Тангентни простор $T_\gamma C^\infty_+(p)$ бесконачнодимензионе многострукости $C^\infty_+(p)$ у тачки γ састоји се од свих векторских поља ξ (дуж криве γ) која испуњавају следеће услове



Слика 3.3: Векторско поље ξ дуж криве γ

$$\begin{cases} \xi : [0,+\infty) \to TM, \\ \xi(s) \in T_{\gamma(s)}M, \\ \xi(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Слично, $T_\gamma C^\infty_-(p)$ је скуп свих векторских поља ξ таквих да је

$$\begin{cases} \xi : (-\infty,0] \to TM, \\ \xi(s) \in T_{\gamma(s)}M, \\ \xi(-\infty) = 0 \end{cases}$$

(видети Слику 3.3). Нека $\|\xi\|_{L^r}$ и $\|\xi\|_{W^{1,r}}$ означавају стандардне Собољевљеве норме

$$\|\xi\|_{L^r} = \left(\int\limits_\Gamma |\xi|^r\, ds\right)^{\frac{1}{r}}, \quad \|\xi\|_{W^{1,r}} = \left(\int\limits_\Gamma \left(|\xi|^r + \left|\nabla_{\frac{d\gamma}{ds}}\xi\right|^r\right) ds\right)^{\frac{1}{r}},$$

где је домен Γ или $[0,+\infty)$ или $(-\infty,0]$.

Означимо са D јединични диск у комплексној равни и дефинишимо скуп $C^\infty(D)$ као скуп свих глатких пресликавања u која задовољавају услове:

$$\begin{cases} u : D \to T^*M, \\ u(\partial D) \subset O_M. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

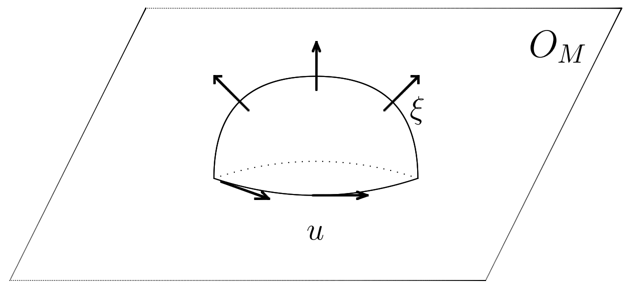
Тангентни простор $T_u C^\infty(D)$ на $C^\infty(D)$ у тачки u је скуп свих векторских поља η дуж u (видети Слику 3.4) са особином

$$\begin{cases} \eta : D \to TT^*M, \\ \eta(s,t) \in T_{u(s,t)}T^*M, \\ \eta(\partial D) \subset O_M. \end{cases}$$

И за домен D користићемо исте ознаке за норме Собољева:

$$\|\eta\|_{L^r} = \left(\iint\limits_D |\eta|^r \, dsdt \right)^{\frac{1}{r}}, \quad \|\eta\|_{W^{1,r}} = \left(\iint\limits_D \left(|\eta|^r + \left| \nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}} \eta \right|^r + \left| \nabla_{\frac{\partial u}{\partial t}} \eta \right|^r \right) dsdt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Овде је Риманова метрика $|\cdot|$ на T^*M настала спаривањем симплектичке форме ω и скоро комплексне структуре која задовољава извесне услове, наведене касније, на страни 49.



Слика 3.4: Векторско поље ξ

Нека су $W^{1,r}_{+,\gamma}(p)$, $W^{1,r}_{-,\gamma}(p)$ и $W^{1,r}_u(D)$ комплетирања (у $W^{1,r}-$ норми Собољева) простора $T_\gamma C^\infty_+(p)$, $T_\gamma C^\infty_-(p)$ и $T_u C^\infty(D)$, редом. Слично, нека $L^r_{+,\gamma}(p)$, $L^r_{-,\gamma}(p)$ и $L^r_u(D)$ означавају L^r- комплетирања истих простора. Са $\mathcal{P}^{1,r}_+(p)$ означимо скуп свих пресликавања која испуњавају услов (3.2.1) таквих да је тангентни простор на $\mathcal{P}^{1,r}_+(p)$ у тачки γ:

$$T_\gamma \mathcal{P}^{1,r}_+(p) = W^{1,r}_{+,\gamma}(p),$$

и слично, нека је $\mathcal{P}^{1,r}_-(p)$ скуп свих пресликавања која задовољавају услов (3.2.2) таквих да је тангентни простор на $\mathcal{P}^{1,r}_-(p)$ у тачки γ:

$$T_\gamma \mathcal{P}^{1,r}_-(p) = W^{1,r}_{-,\gamma}(p).$$

Скупови $\mathcal{P}^{1,r}_+(p)$ и $\mathcal{P}^{1,r}_-(p)$ чине Банахове многострукости, атлас на многострукости се задаје помоћу експоненцијалног пресликавања следећи стандардну конструкцију Банахове многострукости пресликавања овог типа (дату у [38]; видети и [69] за детаље у случају пресликавања са доменом димензије један):

$$(\exp_\gamma \xi)(s) = \exp_{\gamma(s)} \xi(s). \tag{3.2.4}$$

Слично, нека је $\mathcal{P}^{1,r}(D)$ скуп свих пресликавања која задовољавају услов (3.2.3) таквих да је тангентни простор на $\mathcal{P}^{1,r}(D)$ у тачки u:

$$T_u\mathcal{P}^{1,r}(D) = W^{1,r}_u(D).$$

Скуп $\mathcal{P}^{1,r}(D)$ представља Банахову многострукост, где је, као и пре, атлас на многострукости задан помоћу експоненцијалног пресликавања (видети и [20] за овај случај):

$$(\exp_u \eta)(s,t) = \exp_{u(s,t)} \eta(s,t).$$

Нека су сада p_j, за $j = 1, \ldots, m+k$, критичне тачке Морсових функција f_j и нека су q_j, за $j = 1, \ldots, m+k$, неке фиксиране тачке скупа ∂D. Очигледно је да је и

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}^{1,r}_-(p_1) \times \ldots \times \mathcal{P}^{1,r}_-(p_m) \times \mathcal{P}^{1,r}_+(p_{m+1}) \times \ldots \times \mathcal{P}^{1,r}_+(p_{m+k}) \times \mathcal{P}^{1,r}(D) \quad (3.2.5)$$

Банахова многострукост. Означимо тангентни простор ове многострукости (који је производ одговарајућих тангентних простора) са $\prod W^{1,r}(\vec{p}, D)$. Нас интересује следећи подскуп Банахове многострукости $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}^{1,r}(\vec{p}, D) := \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+k}, u) \in \mathcal{P} \mid \gamma_j(0) = u(q_j), \text{ за } j = 1, \ldots, m+k\}.$$

Тврђење 23. *За $r > 2$, скуп $\mathcal{P}^{1,r}(\vec{p}, D)$ је Банахова многострукост.*

Доказ: Посматрајмо пресликавање

$$\mathrm{ev} : \mathcal{P} \to M^{2(m+k)} = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{2(m+k)},$$

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+k}, u) \mapsto \big((\gamma_1(0), u(q_1)), \ldots, (\gamma_{m+k}(0), u(q_{m+k}))\big).$$

Услов $r > 2$ (заједно са Собољевљевим теоремама о утапању) повлачи непрекидност пресликавања γ_j и u, тако да је пресликавање ev добро дефинисано. Ако са Δ_M означимо дијагоналу у $M^2 = M \times M$,

$$\Delta_M := \{(q, q) \mid q \in M\} \subset M^2,$$

а са Δ производ дијагонала,

$$\Delta := \Delta_M^{m+k} \subset M^{2(m+k)},$$

тада је очигледно да је $\mathcal{P}^{1,r}(\vec{p}, D) = \mathrm{ev}^{-1}(\Delta)$. Израчунајмо извод $D\mathrm{ev}$ пресликавања ev у произвољној тачки $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+k}, u) \in \mathcal{P}$. Нека је

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{m+k}, \eta) \in T_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+k}, u)}\mathcal{P}.$$

Постоји фамилија $(\gamma_1^\tau, \ldots, \gamma_{m+k}^\tau, u^\tau)$, за $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, таква да је

$$\xi = \frac{d}{d\tau}(\gamma_1^\tau, \ldots, \gamma_{m+k}^\tau, u^\tau)\Big|_{\tau=0}.$$

Извод $D\mathrm{ev}_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+k}, u)}(\xi)$ је тангентни вектор

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{ev}(\gamma_1^\tau, \ldots, \gamma_{m+k}^\tau, u^\tau)\right)\Big|_{\tau=0} \in T(M^{2(m+k)}).$$

Добијамо

$$\begin{aligned} & D\mathrm{ev}_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+k}, u)}(\xi) = \\ & \frac{d}{d\tau}\Big(\left(\gamma_1^\tau(0), u^\tau(q_1)\right), \ldots, \left(\gamma_{m+k}^\tau(0), u^\tau(q_{m+k})\right)\Big)\Big|_{\tau=0} = \\ & \Big(\left(\xi_1(0), \eta(q_1)\right), \ldots, \left(\xi_{m+k}(0), \eta(q_{m+k})\right)\Big) \in TM^{2(m+k)}. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Тангентни простор на скуп Δ у тачки $Q = \big((q_1, q_1), \ldots, (q_{k+m}, q_{k+m})\big)$ је дат са

$$T_Q\Delta = \Big\{\Big((\varsigma_1, \varsigma_1), \ldots, (\varsigma_{m+k}, \varsigma_{m+k})\Big) \mid \varsigma_j \in TM,\ j = 1, \ldots, m+k\Big\}.$$

Изаберимо произвољан вектор $((X_1, Y_1), \ldots, (X_{m+k}, Y_{m+k})) \in T_Q M^{2(m+k)}$ који није у $T_Q\Delta$ и векторска поља $\tilde{\xi}_j \in W^{1,r}_{-,\gamma_j}(p_j)$, за $j = 1, \ldots, m$, $\tilde{\xi}_j \in W^{1,r}_{+,\gamma_j}(p_j)$, за $j = m+1, \ldots, m+k$, која задовољавају услов

$$\tilde{\xi}_j(0) = X_j,\ j = 1, \ldots, m+k$$

(односно, векторе X_j проширимо до векторских поља $\tilde{\xi}_j$ дуж γ_j на било који начин, тако да буду елементи простора $W^{1,r}_{\pm,\gamma_j}(p_j)$). Слично, конструишимо векторско поље $\tilde{\eta}$ дуж u које припада простору $W^{1,r}_u(D)$ такво да важи

$$\tilde{\eta}(q_j) = Y_j,\ j = 1, \ldots, m+k.$$

Из (3.2.6) видимо да је

$$D\mathrm{ev}(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{m+k}, \tilde{\eta}) = ((X_1, Y_1), \ldots, (X_{m+k}, Y_{m+k}))\,,$$

то јест да простор $D\mathrm{ev}(T_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+k},u)}\mathcal{P})$ заједно за $T_Q\Delta$ разапиње цео простор $T_Q M^{2(m+k)}$. Закључујемо да је пресликавање ev трансверзално на Δ. Осим тога, кодомен пресликавања ev је коначне димензије, па је језгро извода $D\mathrm{ev}_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+k},u)}$ коначне кодимензије у $T_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+k},u)}\mathcal{P}$ (осим што је затворено). Из Хан–Банахове теореме следи да се простор $\mathrm{Ker}\, D\mathrm{ev}_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+k},u)}$ може комплементирати у $T_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+k},u)}\mathcal{P}$, и то простором Y, таквим да је рестрикција пресликавања $D\mathrm{ev}_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+k},u)}$ на Y изоморфизам. Одавде и из Теореме о имплицитној функцији следи познати резултат да је $\mathrm{ev}^{-1}(\Delta)$ бесконачно-димензиона Банахова подмногострукост многострукости $\mathcal{P}$. $\square$

Напомена 24. Тангентни простор $T_{(\gamma_1,\ldots\gamma_{m+k},u)}\mathcal{P}^{1,r}(\vec{p}, D)$ означаваћемо са $W^{1,r}_{(\gamma_1,\ldots\gamma_{m+k},u)}(\vec{p}, D)$. $\diamondsuit$

Циљ нам је да применимо тврђења из Поглавља 2.2 на погодно изабран Фредхолмов оператор дефинисан на простору $\mathcal{P}^{1,r}(\vec{p}, D)$.

Теорема 25. *За генерички избор Морсових функција $\vec{f}$ и скоро комплексне структуре J, скуп $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ описан у (3.1.3) је глатка многострукост.*

Напомена 26. У Теореми 25 фиксирани су Риманова метрика g и Хамилтонијан H, а за генерички скуп параметара узети су скуп Морсових функција и скуп скоро комплексних структура. Тврђење важи и ако се фиксирају Морсова функција f и скоро комплексна структура J, а за скупове параметара изаберу скуп Риманових метрика и Хамилтонових функција, као и у другим комбинацијама, у којима је по један елемент скупова $\{g, f\}$ и $\{H, J\}$ фискиран, а други се варира. $\diamondsuit$

Доказ: Посматрајмо пресликавање

$$\mathcal{F} : (\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+k}, u, \vec{f}, J) \mapsto (\dot\gamma_1 + \nabla f_1, \ldots, \dot\gamma_{m+k} + \nabla f_{m+k}, \overline{\partial}_{J,\overrightarrow{H}} u). \qquad (3.2.7)$$

Очигледно је да је простор који проучавамо, $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$, скуп нула пресликавања $\mathcal{F}$. Пре свега, прецизирајмо домен и кодомен пресликавања $\mathcal{F}$. За погодно изабран низ позитивних бројева $\epsilon = \{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$, скуп $C^\infty_\epsilon(M)$ свих глатких функција $f : M \to \mathbb{R}$ које задовољавају услов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \|f\|_{C^k} < \infty$$

чини Банахов простор, а скуп Морсових функција $\mathcal{U}$ је отворен и генерички подскуп простора $C^\infty_\epsilon(M)$ (видети [53, 31, 74]).

Нека је g фиксирана Риманова метрика на M и J_0 фиксирана скоро комплексна структура која има следеће особине:

1) J_0 је компатибилна са симплектичком формом ω на T^*M.

2) J_0 слика вертикалне тангентне векторе у хоризонталне у односу на Леви–Чивита повезаност[4] одређену метриком g.

3) На нултом сечењу $O_M \subset T^*M$ сваком вектору $X \in T_q(O_M) \cong T_qM$ J_0 придружује котангентни вектор J_0X такав да је $J_0X(\xi) = g(\xi, J_0X)$ за свако $\xi \in T_qM$.

Означимо са $\mathcal{J}^l = \mathcal{J}^l(M, \omega)$ скуп свих скоро комплексних структура J класе C^l које су компатибилне са ω и поклапају се са J_0 ван компактног подскупа простора T^*M. Простор $\mathcal{J}^l$ је глатка Банахова многострукост. Тангентни простор $T_J\mathcal{J}^l$ у тачки J се састоји од свих C^l сечења раслојења $\mathrm{End}(J, \omega) \to T^*M$ чији је слој над тачком $P \in T^*M$ скуп свих линеарних пресликавања $L : T_PT^*M \to T_PT^*M$ таквих да важи:

$$LJ + JL = 0, \quad \omega(L\xi, \eta) + \omega(\xi, L\eta) = 0.$$

[4] Видети, на пример [39].

Структура Банахове многострукости задаје се помоћу експоненцијалног пресликавања $L \mapsto J\exp(-JL)$ (видети [20] и [44]).

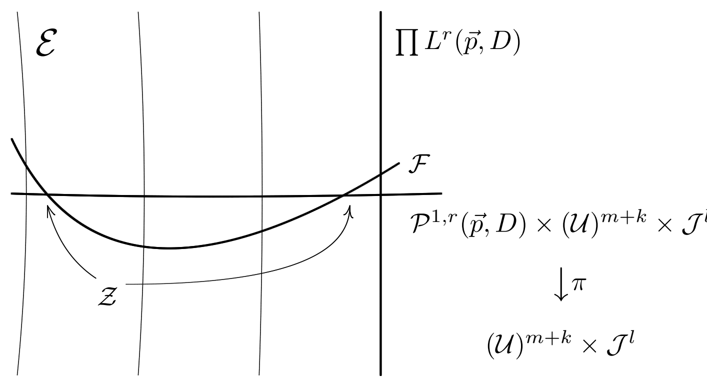
Пресликавање $\mathcal{F}$ је сечење раслојења

$$\mathcal{E} \to \mathcal{P}^{1,r}(\vec{p}, D) \times (\mathcal{U})^{m+k} \times \mathcal{J}^l$$

чији је слој над тачком $\Big((\gamma_1, \dots \gamma_{m+k}, u), \vec{f}, J\Big)$ скуп

$$\prod L^r(\vec{p}, D) :=$$
$$L^r_{-,\gamma_1}(p_1) \times \dots \times L^r_{-,\gamma_m}(p_m) \times L^r_{+,\gamma_{m+1}}(p_{m+1}) \times \dots \times L^r_{+,\gamma_{m+k}}(p_{m+k}) \times L^r_u(D).$$

Означимо за $\mathcal{Z}$ пресек нултог сечења раслојења $\mathcal{E}$ и сечења $\mathcal{F}$ (видети Слику 3.5).



Слика 3.5: Сечење $\mathcal{F}$ и пројекција π

Нека је

$$\pi : \mathcal{P}^{1,r}(\vec{p}, D) \times (\mathcal{U})^{m+k} \times \mathcal{J}^l \to (\mathcal{U})^{m+k} \times \mathcal{J}^l,$$
$$\Big((\gamma_1, \dots, \gamma_{m+k}, u), \vec{f}, J\Big) \mapsto (\vec{f}, J)$$

пројекција на друге две компоненте. Потребно је да докажемо да је за генеричке $\vec{f}$ и J скуп $\mathcal{Z} \cap \pi^{-1}(\vec{f}, J)$ коначнодимензиона многострукост. Ако докажемо да је $\mathcal{Z}$ Банахова многострукост и π Фредхолмово пресликавање, моћи ћемо да применимо Сард–Смејлову теорему 7.

Да бисмо доказали да је $\mathcal{Z}$ Банахова многострукост треба да докажемо да је пресликавање $\mathcal{F}$ трансвезално на нулто сечење раслојења $\mathcal{E}$. Посматраћемо коваријантни извод $d\mathcal{F}$ пресликавања $\mathcal{F}$, који је пројекција обичног извода на слој – како је $\mathcal{F}$ сечење (па је његова рестрикција на базу, то јест, нулто сечење, идентичко пресликавање), то је услов трансверзалности пресликавања $\mathcal{F}$ на нулто сечење еквивалентан услову сурјективности коваријантног извода. Имамо:

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}\left((\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+k},u),\vec{f},J\right) &: W^{1,r}_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+k},u)}(\vec{p},D)\times(C^\infty_\epsilon(M))^{m+k}\times T_J\mathcal{J}^l \\ &\to \prod L^r(\vec{p},D) \\ d\mathcal{F}\left((\gamma_1,\ldots\gamma_{m+k},u),\vec{f},J\right)&((\xi_1,\ldots,\xi_{m+k},\eta),(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m+k}),\zeta) = \\ &(d\mathcal{F}_1(\xi_1,\varphi_1),\ldots,d\mathcal{F}_{m+k}(\xi_{m+k},\varphi_{m+k}),d\mathcal{F}_u(\eta,\zeta)), \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

где је

$$d\mathcal{F}_j(\xi_j,\varphi_j) = \nabla_{\frac{d\gamma_j}{ds}}\xi_j + \nabla_{\xi_j}\nabla f_j(\gamma_j) + \nabla\varphi_j(\gamma_j),$$

за $j=1,\ldots,m+k$, а

$$d\mathcal{F}_u(\eta,\zeta) = \nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}}\eta + J(u)\nabla_{\frac{\partial u}{\partial t}}\eta + \nabla_\eta J(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla_\eta JX_{R,\overrightarrow{H}}(u) + \zeta\left(J\frac{\partial u}{\partial s}\right).$$

Ознаку $X_{R,\overrightarrow{H}}$ користимо за векторско поље које је једнако нули на $u(\Sigma_0)$, а на цилиндричним крајевима u_j Хамилтоновом векторском пољу $X_{\rho_R H_j}$.

Напомена 27. У локалним координатама оператор

$$\eta \mapsto \nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}}\eta + J(u)\nabla_{\frac{\partial u}{\partial t}}\eta + \nabla_\eta J(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla_\eta JX_{R,\overrightarrow{H}}(u)$$

је облика

$$\frac{\partial}{\partial s} + J(s,t)\frac{\partial}{\partial t} + A(s,t)$$

(видети и Напомену 55), па је он *елиптички*. Нека је $D:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ диференцијални оператор, где су $\Gamma(E)$ и $\Gamma(F)$ глатка сечења векторских раслојења E и F, у локалним координатама ψ дат са $D=$

$\sum_{|\alpha|\leq m} A^\alpha(x) D^\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$. Овде су $A^\alpha(x) : E_x \to F_x$ линеарна пресликавања која глатко зависе од x. Оператор D је елиптички ако је, за сваки фиксирани не-нула ковектор $y \in T^*X$, у истим локалним координатама ψ дат са $y = \sum y^k dx_k$, пресликавање

$$\sigma_y(D) : E_x \to F_x, \quad \sigma_y(D) = \sum_{|\alpha|=m} A^\alpha(x) y^\alpha$$

инвертибилно. Може се показати да ова дефиниција не зависи од избора локалних координата ψ. Важно својство елиптичких оператора је елиптичка регуларност, коју ћемо овде користити, а која обезбеђује да решење u једначине $Du = f$ има већу глаткост од f (видети [29] за детаље, или [40] за више геометријски приступ). У нашем случају је $E = F = u^*T(T^*M)$ раслојење над Σ, за $z \in \Sigma$, слој $E_z = F_z = T_{u(z)}T^*M$, и, за $y = y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2 \in T^*\Sigma$, симбол $\sigma_y(d\mathcal{F}_u) = y_1 \operatorname{Id} + y_2 J$. Лако се проверава да је $\sigma_y(d\mathcal{F}_u)$ инвертибилно пресликавање ако је $y_1^2 + y_2^2 \neq 0$. Слично важи и за операторе $d\mathcal{F}_j$. $\diamondsuit$

Поделићемо наставак доказа у неколико корака. Следеће тврђење се односи на својства Фредхолмовости већ изучаваних оператора јединственог типа.[5] Доказ за Морсов случај се може наћи у [69] или [74], а за случај холоморфних кривих видети [30].

Тврђење 28. *Пресликавања*

$$dF_+ : W^{1,r}_{+,\gamma}(p) \to L^r_{+,\gamma}(p),\ \xi \mapsto \nabla_{\frac{d\gamma}{ds}}\xi + \nabla_\xi \nabla f(\gamma),$$

$$dF_- : W^{1,r}_{-,\gamma}(p) \to L^r_{-,\gamma}(p),\ \xi \mapsto \nabla_{\frac{d\gamma}{ds}}\xi + \nabla_\xi \nabla f(\gamma),$$

$$dF_u : W^{1,r}_u(D) \to L^r_u(D),\ \eta \mapsto \nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}}\eta + J(u)\nabla_{\frac{\partial u}{\partial t}}\eta + \nabla_\eta J(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla_\eta J X_{R,\overrightarrow{H}}(u)$$

су Фредхолмова.

[5] Видети Напомену 39 на страни 64.

Из претходног Тврђења следиће да су и пресликавања која су за нас од значаја Фредхолмова.

Тврђење 29. *Пресликавање*

$$dF := (dF_1, \dots, dF_{m+k}, dF_u) : W^{1,r}_{(\gamma_1,\dots\gamma_{m+k},u)}(\vec{p}, D) \to \prod L^r(\vec{p}, D), \tag{3.2.9}$$

где су dF_j и dF_u пресликавања из Тврђења 28, такође је Фредхолмово.

Доказ: Пре свега, приметимо да је $\mathcal{P}^{1,r}(\vec{p}, D)$ подмногострукост коначне кодимензије многострукости $\mathcal{P}$ дефинисане као производ многострукости објеката јединственог типа[6] (видети (3.2.5)). Заиста, тангентни простор $W^{1,r}(\vec{p}, D)$ (у некој тачки) је језгро $\mathrm{Ker}(D\mathrm{ev})$ диференцијала $D\mathrm{ev}$ евалуације ev. Важи:

$$\prod W^{1,r}(\vec{p}, D)/\,\mathrm{Ker}(D\mathrm{ev}) \cong \mathrm{Im}(D\mathrm{ev}),$$

где је $\prod W^{1,r}(\vec{p}, D) = T\mathcal{P}$, за $\mathcal{P}$ дефинисано једначином (3.2.5). Простор $\mathrm{Im}(D\mathrm{ev})$ је коначне димензије, јер је такав и кодомен пресликавања $D\mathrm{ev}$. Одатле је $W^{1,r}(\vec{p}, D)$ коначне кодимензије, па из Хан–Банахове теореме следи да $W^{1,r}(\vec{p}, D)$ може бити комплементиран у $\prod W^{1,r}(\vec{p}, D)$ неким коначнодимензионим простором, означимо га са X. Како је

$$\mathrm{Codim}_{M^{2(m+k)}}(\Delta) = (m+k)n,$$

важи $\dim X = (m+k)n$ (n је димензија многострукости M).

Посматрајмо помоћни оператор

$$\begin{aligned}\widetilde{dF} &: \prod W^{1,r}(\vec{p}, D) \to \prod L^r(\vec{p}, D),\\ \widetilde{dF} &:= (dF_1, \dots, dF_{m+k}, dF_u),\end{aligned}$$

дефинисан на производу тангентих простора $\prod W^{1,r}(\vec{p}, D)$ са истим кодоменом (производом) као и dF. Како су оператори dF_j, за $j = 1, \dots, m+k$ и

[6] Видети Напомену 39 на страни 64.

dF_u Фредхолмови и како важи

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(\widetilde{dF}) &= \operatorname{Ker}(dF_1) \times \ldots \times \operatorname{Ker}(dF_{m+k}) \times \operatorname{Ker}(dF_u),\\
\operatorname{Coker}(\widetilde{dF}) &= \operatorname{Coker}(dF_1) \times \ldots \times \operatorname{Coker}(dF_{m+k}) \times \operatorname{Coker}(dF_u),
\end{aligned}$$

закључујемо да је и $\widetilde{dF}$ такође Фредхолмов, са Фредхолмовим индексом

$$\operatorname{Ind}(\widetilde{dF}) = \operatorname{Ind}(dF_1) + \ldots + \operatorname{Ind}(dF_{m+k}) + \operatorname{Ind}(dF_u).$$

Оператор dF је рестрикција оператора $\widetilde{dF}$ на простор $W^{1,r}(\vec{p}, D)$. Посматрајмо следећа (дисјунктна) разлагања простора $\prod W^{1,r}(\vec{p}, D)$ и $\prod L^r(\vec{p}, D)$:

$$\prod W^{1,r}(\vec{p}, D) = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4, \quad \prod L^r(\vec{p}, D) = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y,$$

где су простори X_j, Y_j и Y дефинисани на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&X_3 := W^{1,r}(\vec{p}, D) \cap \operatorname{Ker}(\widetilde{dF}), \quad X_1 := W^{1,r}(\vec{p}, D) \ominus X_3,\\
&X_4 := X \cap \operatorname{Ker}(\widetilde{dF}), \quad X_2 := X \ominus X_4, \qquad (3.2.10)\\
&Y_i := \widetilde{dF}(X_i), \text{ за } i = 1, 2, \quad Y := \left(\prod L^r(\vec{p}, D)\right) \ominus (Y_1 \oplus Y_2)\,.
\end{aligned}$$

Симбол $A \ominus B$ означава комплемент простора B у простору A. Простори из (3.2.10) су добро дефинисани захваљујући Хан–Банаховој теореми. Сви простори осим X_1 и Y_1 су коначне димензије: X_3 и X_4 су потпростори простора $\operatorname{Ker}(\widetilde{dF})$ – који је коначнодимензион будући Фредхолмов; X_2 је потпростор простора X – који је коначне димензије; Y_2 је изоморфна слика простора X_2; Y је коначне димениje јер представља којезгро Фредхолмовог оператора $\widetilde{dF}$. Дефинишимо

$$m_2 := \dim X_2 = \dim Y_2, \quad m_3 := \dim X_3, \quad m_4 := \dim X_4, \quad m_0 := \dim Y.$$

Имамо

$$\operatorname{Ker}(\widetilde{dF}) = X_3 \oplus X_4, \quad \operatorname{Coker}(\widetilde{dF}) = Y$$

и, како је $dF = \widetilde{dF}|_{X_1 \oplus X_3} : X_1 \oplus X_3 \to Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y$, важи

$$\operatorname{Ker}(dF) = X_3, \quad \operatorname{Coker}(dF) = Y_2 \oplus Y.$$

Одавде закључујемо да је dF такође Фредхолмов, а његов индекс у терминима индекса оператора dF_j и dF_u рачунамо на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}(dF) = \dim \mathrm{Ker}(dF) - \dim \mathrm{Coker}(dF) = \dim X_3 - \dim(Y_2 \oplus Y) = \\
&m_3 - (m_2 + m_0) = (m_3 + m_4) - m_0 - (m_2 + m_4) = \\
&\dim \mathrm{Ker}(\widetilde{dF}) - \dim \mathrm{Coker}(\widetilde{dF}) - \dim(X_2 \oplus X_4) = \mathrm{Ind}(\widetilde{dF}) - \dim X = \\
&\sum_{j=1}^{m+k} \mathrm{Ind}(dF_j) + \mathrm{Ind}(dF_u) - (m+k)n. \quad \square
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Вратимо се на доказ Теореме 25. Хоћемо да докажемо да је коваријантни извод $d\mathcal{F}$ (изостављамо индексе да бисмо поједноставили запис) дат у (3.2.8) сурјективан. Из следеће леме следи да је довољно да покажемо да је слика $\mathrm{Im}(d\mathcal{F})\left((\gamma_1, \dots \gamma_{m+k}, u), \vec{f}, J\right)$ свуда густ скуп у $\prod L^r(\vec{p}, D)$.

Лема 30. *Слика оператора $d\mathcal{F}$ је затворен скуп.*

Доказ: Како је

$$\begin{aligned}
&d\mathcal{F}\left((\gamma_1, \dots, \gamma_{m+k}, u), \vec{f}, J\right)((\xi_1, \dots, \xi_{m+k}, \eta), \varphi_1, \dots, \varphi_{m+k}, \zeta) = \\
&dF(\xi_1, \dots, \xi_{m+k}, \eta) + \left(\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_{m+k}, \zeta\left(J\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right)
\end{aligned}$$

то је

$$\mathrm{Im}(dF) \subset \mathrm{Im}(d\mathcal{F}) \subset \prod L^r(\vec{p}, D) = \mathrm{Im}(dF) \oplus X.$$

Последња једнакост важи јер је dF Фредхолмов, па $\mathrm{Im}(dF)$ има свој комплемент у $\prod L^r(\vec{p}, D)$. Из истог разлога је $\dim X < \infty$, па је $\mathrm{Im}(d\mathcal{F}) = \mathrm{Im}(dF) \oplus Y$, где је и $\dim Y < \infty$.[7] Нека је

$$z_n = x_n \oplus y_n \in \mathrm{Im}(dF) \oplus Y = \mathrm{Im}(d\mathcal{F})$$

низ елемената такав да $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z \in \prod L^r(\vec{p}, D)$. Како је простор $\mathrm{Im}(dF)$ затворен и коначне кодимензије у $\prod L^r(\vec{p}, D)$, то је пројекција

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{Im}(dF)} : \prod L^r(\vec{p}, D) \to \mathrm{Im}(dF)$$

[7] Простор Y можемо дефинисати као $X \ominus (X \cap \mathrm{Im}(d\mathcal{F}))$.

добро дефинисано и непрекидно пресликавање, па

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{Im}(dF)}(z_n) = x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x := \mathrm{Proj}_{\mathrm{Im}(dF)}(z) \in \mathrm{Im}(dF).$$

Како је Y затворен, то је

$$Y \ni y_n = z_n - x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z - x =: y \in Y,$$

па је $z = x + y \in \mathrm{Im}(dF) \oplus Y = \mathrm{Im}(d\mathcal{F})$. □

Покажимо сада да је слика $\mathrm{Im}(d\mathcal{F})\left((\gamma_1, \dots \gamma_{m+k}, u), \vec{f}, J\right)$ свуда густ скуп у $\prod L^r(\vec{p}, D)$. Ако претпоставимо да то није случај, закључујемо да постоји вектор $0 \neq \chi = (\chi_1, \dots, \chi_{m+k}, \chi_u) \in \prod L^s(\vec{p}, D)$ (где је $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$) који се анулира (као фунционал на простору L^r) на $\mathrm{Im}(d\mathcal{F})$. То значи да, за свако $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m+k}, \xi_u) \in W^{1,r}(\vec{p}, D)$, свако $\varphi_j \in C^\infty(M)$ и свако $\zeta \in T_J\mathcal{J}^l$, важи

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0} \langle \chi_j, dF_j\xi_j \rangle ds = 0, \quad &&\int_{-\infty}^{0} \langle \chi_j, \nabla\varphi_j \rangle ds = 0, \text{ за } j = 1, \dots, m,\\
&\int_{0}^{+\infty} \langle \chi_j, dF_j\xi_j \rangle ds = 0, \quad &&\int_{0}^{+\infty} \langle \chi_j, \nabla\varphi_j \rangle ds = 0, \text{ за } j = m+1, \dots, m+k,\\
&\iint_D \langle \chi_u, dF_u\xi_u \rangle dsdt = 0, \quad &&\iint_D \left\langle \chi_u, \zeta\left(J\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right\rangle dsdt = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Прва два реда у формули (3.2.12) одмах повлаче да је $\chi_j = 0$, за $j = 1, \dots, m+k$. Доказ да је и $\chi_u = 0$ је нешто сложенији и базира се на следећој верзији Теореме о јединствености.

Теорема 31. (Аронзајн) [3] *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ отворен повезан скуп. Ако функција $v \in W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ задовољава услов*

$$|\Delta v| \leq c\left(|v(s,t)| + \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|\right)$$

скоро свуда и ако је $v = 0$ на неком отвореном подскупу скупа Ω, тада је $v \equiv 0$.

Из услова $\iint\limits_D \langle \chi_u, dF_u\xi_u\rangle = 0$ следи да је χ_u слабо решење једначине (по η) $dF_u^*\eta = 0$, где је dF_u^* формално адјунговани оператор. Како су коефицијенти уз сабирке првог (то јест највишег) реда у оператору dF_u класе најмање C^l, исто важи и за оператор dF_u^* (видети Лему 3.1.8 у [69]), па из елиптичке регуларности следи да је χ_u класе $W^{l+1,t}$, за свако $t > 0$. Овде под елиптичком регуларношћу подразумевамо следеће: ако је D елиптички оператор првог реда са C^l коефицијентима и ако је η слабо решење једначине $D\eta = f$, где је $f \in W^{k,p}$, тада је $\eta \in W^{k+1,p}$, за $k \leq l$.[8] Због тога је χ_u и непрекидно, па је $dF_u^*\chi_u = 0$. Како је $\chi_u \in W^{2,2}$ и

$$0 = DF_u DF_u^*\chi_u = \Delta\chi_u + \text{оператор нижег реда},$$

из Теореме 31 следи да, ако је χ_u једнако нули на неком отвореном скупу, тада је $\chi_u \equiv 0$.

Скуп

$$U := \left\{ z \in D \,\middle|\, \frac{\partial u}{\partial s}(z) \neq 0 \right\}$$

је отворен и непразан. Наиме, ако претпоставимо да је $U = \emptyset$, тада је $u|_{\Sigma_0} \equiv \mathrm{const}$, а $u|_{\Sigma_j}$ представља Хамилтонов пут са крајевима на нултом сечењу за Хамилтонијан H_j. Малом пертурбацијом функција H_j, односно поља X_{H_j} можемо постићи да важи $\mathrm{Crit}\,\mathcal{A}_{H_j} \cap \mathrm{Crit}\,\mathcal{A}_{H_i} = \emptyset$, за $i \neq j$, тако да добијамо $U \neq \emptyset$. Повећањем r (које учествује у $W^{1,r}$), ако је потребно, постижемо да функција $\frac{\partial u}{\partial s}$ буде непрекидна, па је U и отворен.

Докажимо да се $\chi_u(z_0)$ анулира на скупу U. Ако претпоставимо да је $\chi_u(z_0) \neq 0$, за неко $z_0 \in U$, тада можемо да изаберемо такво ζ_0 за које важи

$$\left\langle \chi_u(z_0), \zeta_0\left(J\frac{\partial u}{\partial s}(z_0)\right)\right\rangle \neq 0.$$

Избором погодне функције са носачем у довољно малој околини тачке $u(z_0)$, можемо наћи ζ за које важи $\zeta(u(z_0)) = \zeta_0$ и за које израз

$$\iint\limits_{\Sigma} \left\langle \chi_u, \zeta\left(J\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right\rangle$$

[8] Видети и [44].

није једнак нули. Тиме добијамо контрадикцију са условом (3.2.12), па закључујемо да је $\chi_u|_U = 0$, па из Теореме 31 следи да је $\chi_u \equiv 0$.

Закључујемо да је пресликавање $d\mathcal{F}$ је сурјективно, па је $\mathcal{F}$ трансверзално на нулто сечење. Одавде следи први корак у доказу Теореме 25 – скуп $\mathcal{Z}$ је глатка бесконачнодимензиона Банахова многострукост.

Нека је

$$\pi|_{\mathcal{Z}} : \mathcal{Z} \to (\mathcal{U})^{m+k} \times \mathcal{J}^l$$

већ поменута пројекција на друге две компоненте. Тангентни простор

$$T_{\left((\gamma_1,\dots\gamma_{m+k},u),\vec{f},J\right)}\mathcal{Z}$$

састоји се од вектора $(\xi_1, \dots, \xi_{m+k}, \xi_u, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+k}, \zeta)$ таквих да је

$$\begin{aligned} &dF_j(\xi_j) + \nabla\varphi_j = 0, \quad j = 1, \dots, m+k, \\ &dF_u(\xi_u) + \zeta\left(J\frac{\partial u}{\partial s}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Извод $d\pi$ пројекције π је такође пројекција на друге две компоненте (између тангентних простора):

$$\begin{aligned} &d\pi : T\mathcal{Z} \to T\left((\mathcal{U})^{m+k} \times \mathcal{J}^l\right) = T(\mathcal{U})^{m+k} \times T\mathcal{J}^l, \\ &d\pi : (\xi_1, \dots, \xi_{m+k}, \xi_u, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+k}, \zeta) \mapsto (\varphi_1, \dots, \varphi_{m+k}, \zeta). \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Последњи корак у доказу Теореме 25 следиће из следеће леме.

Лема 32. *Оператор* $d\pi\left((\gamma_1, \dots \gamma_{m+k}, u), \vec{f}, J\right)$ *је Фредхолмов. Његов Фредхолмов индекс је једнак Фредхоломовом индексу оператора* $dF\left(\gamma_1, \dots \gamma_{m+k}, u\right)$.

Доказ: Користићемо и ознаке $\vec{\xi}$ и $\vec{\varphi}$ за одговарајуће $(m+k)-$торке да бисмо скратили запис. Из истог разлога, изостављаћемо индексе који означавају тачку $\Big((\gamma_1, \dots \gamma_{m+k}, u), \vec{f}, J\Big)$. Из (3.2.13) и (3.2.14) имамо:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(d\pi) = &\Bigg\{(\vec{\xi}, \vec{\varphi}, \zeta) \in W^{1,r}(p, \vec{D}) \times T(\mathcal{U})^{m+k} \times T\mathcal{J}^l \mid \\ &\qquad (\vec{\varphi}, \zeta) = 0,\, dF(\vec{\xi}) = -\left(\nabla\vec{\varphi}, \zeta\left(J\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right)\Bigg\} = \\ &\Big\{(\vec{\xi}, \vec{0}, 0) \mid dF(\vec{\xi}) = 0\Big\} \cong \operatorname{Ker}(dF),\end{aligned}$$

па је језгро оператора $d\pi$ коначне димензије и важи $\dim \operatorname{Ker}(d\pi) = \dim \operatorname{Ker}(dF)$.

Нека је $(\vec{\varphi}_n, \zeta_n)$ низ у $\operatorname{Im}(d\pi)$ који конвергира (у простору $T(\mathcal{U})^{m+k} \times T\mathcal{J}^l$) ка вектору $(\vec{\varphi}, \zeta)$. Из топологије простора $T(\mathcal{U})^{m+k} \times T\mathcal{J}^l$ следи да и низ вектора $\left(\nabla\vec{\varphi}_n, \zeta_n\left(J\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right)$ конвергира ка вектору $\left(\nabla\vec{\varphi}, \zeta\left(J\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right)$, па, из (3.2.13) и затворености скупа $\operatorname{Im}(dF)$, следи да и $(\vec{\varphi}, \zeta)$ припада скупу $\operatorname{Im}(d\pi)$.

Којезгро пресликавања $d\pi$ је изоморфно којезгру пресликавања dF. Заиста, за $[(\vec{\varphi}, \zeta)] \in \operatorname{Coker}(d\pi)$, дефинишимо:

$$\mathbf{L} : [(\vec{\varphi}, \zeta)] \mapsto \left[\left(\nabla\vec{\varphi}, \zeta\left(J\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right)\right] \in \operatorname{Coker}(dF).$$

Из услова (3.2.13) и сурјективности пресликавања $d\mathcal{F}$, лако следи да је пресликавање $\mathbf{L}$ добро дефинисано и изоморфизам. Због тога је и $\dim \operatorname{Coker}(d\pi) = \dim \operatorname{Coker}(dF)$.

Закључујемо да је пресликавање π Фредхолмово, са Фредхолмовим индексом једнаким Фредхолмовом индексу пресликавања dF. $\square$

Из доказа Леме 32 следи да је оператор $d\pi$ сурјективан ако и само ако је оператор dF сурјективан. Ако J није вредност пројекције π, тада ни за једно $(\gamma_1, \dots, \gamma_{m+k}, u)$, објекат $\Big((\gamma_1, \dots, \gamma_{m+k}, u), \vec{f}, J\Big)$ не припада скупу $\mathcal{Z}$. Одавде следи да је скуп

$$\Big\{(J, \vec{f}) \in \mathcal{J}^l \times \mathcal{U}^{m+k} \mid dF \text{ је сурјекција за свако } \Big((\gamma_1, \dots, \gamma_{m+k}, u), \vec{f}, J\Big) \in \mathcal{Z}\Big\}$$

управо скуп регуларних вредности пројекције $d\pi$ (при чему је регуларна вредност и она тачка која није вредност). Одавде, из Сард–Смејлове теореме и Леме 32 следи да за скоро свако $J \in \mathcal{J}^l$, $\vec{f} \in \mathcal{U}^{m+k}$ оператор dF сурјективан, одакле следи доказ Теореме 25.

Напомена 33. У Поглављу 2.3 смо посматрали операторе F чији су домени и кодомени били Хилбертови простори $W^{1,2}$ и L^2, док смо у овом поглављу посматрали просторе $W^{1,r}$ и L^r, за $r > 2$. Наиме, оператори који су за нас од интереса су облика (3.2.7), односно (2.3.3), а они су добро дефинисани на просторима $W^{1,p}$ са вредностима у L^p за све $p \geq 1$. При томе, Фредхолмови индекси ових оператора не зависе од домена и кодомена, то јест од r. Наиме, из стандардних теорема о регуларности решења пертурбованих Коши–Риманових једначина (видети, на пример, [44]) следи да су та решења глатка, па $\dim \mathrm{Ker}(F)$ не зависи од простора на ком се задаје (кадгод је на том простору F добро дефинисан). Слично важи и за којезгро. Ако са F^* означимо одговарајући формално адјунговани оператор, такав да је $\langle F^* u, v\rangle = \langle u, Fv\rangle$ за $u, v \in C_0^\infty$, тада се може доказати (видети, на пример [69]) да је и F^* истог типа (облика $\overline{\partial}$ у случају дискова, односно $\frac{d}{ds} +$ оператор нижег реда у случају трајекторија), да се F^* продужава на скуп $W^{1,r}$ као и да је $\mathrm{Coker}(F) \cong \mathrm{Ker}(F^*)$. Одатле, поново захваљујући регуларности закључујемо да ни димензија којезгра не зависи од r.

Како је згодније радити у Хилбертовим просторима $W^{1,2}$ и L^2, ми ћемо тако поступити кад год је то могуће. У случају простора градијентних трајекторија, када је димензија домена једнака 1, могуће је извести целу аналитичку поставку, укључујући конвергенцију, лепљење и оријентацију у просторима $W^{1,2}$ и L^2, јер Собољевљеве теореме обезбеђују да су криве класе $W^{1,2}$ непрекидне. Ипак, када је димензија домена једнака 2, ако нам је потребна непрекидност пресликавања која посматрамо, мораћемо да претпоставимо да је $r > 2$. Наиме, у конструкцији простора комбинованих објеката, користимо евалуацију ev. Израз $u \mapsto u\left(0, \frac{1}{2}\right)$ нема априори смисла на просторима облика L^2 (или $W^{1,2}$). Ако је $r > 2$, тада су елементи простора $W^{1,r}$ непрекидна пресликавања, захваљујући Собољевљевој теореми о утапању. Осим тога, за примену својства елиптичке регуларности решења (које често користимо) потребно је да важи $r > 2$. $\diamondsuit$

3.3 Димензије многострукости пресликавања

Димензију многострукости $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ можемо да израчунамо користећи везу између индекса Фредхолмових оператора дату у (3.2.11). Индекс оператора dF_u је једнак n, где је $n = \dim M$ (видети, на пример [30, 44]). Да бисмо изразили индексе осталих Фредхолмових оператора F_j потребан нам је следећи појам.

Дефиниција 34. *Морсов индекс* критичне тачке p је димензија негативног сопственог потпростора билинеарне форме другог извода у тачки p. Означавамо га са $m_f(p)$. $\diamond$

Тврђење 35. **[69]** *Индекси Фредхолмових оператора dF_+ и dF_- из Тврђења 28 се рачунају помоћу формуле:*

$$\mathrm{Ind}(dF_+) = n - m_f(p), \quad \mathrm{Ind}(dF_-) = m_f(p).$$

Сада из формуле (3.2.11) следи доказ следеће теореме.

Теорема 36. *За онај избор параметара* $(\vec{f}, J)$ *за који је оператор* dF *из једначине (3.2.9) сурјективан, димензија многострукости* $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ *једнака је*

$$\dim \mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J) = \sum_{j=1}^{m} m_{f_j}(p_j) - \sum_{j=m+1}^{m+k} m_{f_j}(p_j) + (1-m)n.$$

Доказ:

$$\dim \mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J) = \operatorname{Ind} dF = \sum_{j=1}^{m+k} \operatorname{Ind}(dF_j) + \operatorname{Ind}(dF_u) - (m+k)n =$$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{f_j}(p_j) - \sum_{j=m+1}^{m+k} m_{f_j}(p_j) + (1-m)n. \quad \square$$

У даљем изучавању многострукости $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ сретаћемо се са још неким типовима модулских простора. Прва је многострукост „панталона” помоћу које се у Флоровој хомологији могу дефинисати кохомолошки производи. Ову многострукост чине пресликавања дефинисана на површи Σ (Слика 3.1 на страни 41) која имају за кодомен котангентно раслојење T^*M, са границом на нултом сечењу и која су решења пертурбоване Коши–Риманове једначине. Прецизније, нека су H_j, за $j = 1, \ldots, m+k$, глатки Хамилтонијани са компактним носачима на T^*M и x_j одговарајући Хамилтонови путеви са почетком и крајем на нултом сечењу. Уведимо ознаку

$$\vec{x} := (x_1, \ldots, x_{m+k})$$

и дефинишимо скуп $\mathcal{M}(\vec{x}, \overrightarrow{H}, J)$ као скуп решења једначине

$$\begin{cases} u : \Sigma \to T^*M, \\ \frac{\partial u_j}{\partial s} + J(\frac{\partial u_j}{\partial t} - X_{\rho_R H_j}(u_j)) = 0, \ u_j := u \circ \phi_j, \ j = 1, \ldots, m+k, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t})\right]_{\Sigma_0} = 0, \\ u(\partial \overline{\Sigma}) \subset O_M, \\ u_j(-\infty, t) = x_j(t), \ j = 1, \ldots, m, \\ u_j(+\infty, t) = x_j(t), \ j = m+1, \ldots, m+k. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Нека $\mu_H(x)$ означава Масловљев индекс[9] Хамилтоновог пута x који одговара Хамилтону H. Формула за израчунавање димензије скупа решења претходне једначине дата је у следећем Тврђењу.

Тврђење 37. **[69]** *За генерички избор скоро комплексне структуре J, скуп $\mathcal{M}(\vec{x},\overrightarrow{H},J)$ је глатка многострукост димензије*

$$\dim \mathcal{M}(\vec{x},\overrightarrow{H},J) = n - \sum_{j=1}^{m}\left(-\mu_{H_j}(x_j)+\frac{n}{2}\right) - \sum_{j=m+1}^{m+k}\left(\mu_{H_j}(x_j)+\frac{n}{2}\right).$$

За дату Морсову функцију f, њену критичну тачку p, Хамилтонијан H са компактним носачем и његов Хамилтонов пут x са крајевима на O_M, са $\mathcal{M}_{R_0}(x,H,J;p,f,g)$ означавамо скуп објеката који су састављени од једног пертурбованог холоморфног диска са границом на нултом сечењу и једне градијентне трајекторије, тако да холоморфни диск „полази” из Хамилтоновог пута x, а градијентна трајеторија „завршава” у тачки p. Прецизније, $\mathcal{M}_{R_0}(x,H,J;p,f,g)$ је скуп решења једначине:

$$\begin{cases} \gamma:[0,+\infty)\to M, \quad u:(-\infty,0]\times[0,1]\to T^*M, \\ \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s)), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\widetilde{\rho}_{R_0}H}(u)) = 0, \\ u(s,0), u(s,1), u(0,t)\in O_M, \\ \gamma(+\infty)=p, u(-\infty,t)=x(t), \\ \gamma(0) = u\left(0,\frac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Овде је $\widetilde{\rho}_{R_0}(s)=\rho_{R_0}(-s)$, а

$$\rho_{R_0}(s) = \begin{cases} 0, & s\in[0,R_0] \\ 1, & s\in[R_0+1,+\infty). \end{cases}$$

Слично, са $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$ означимо скуп парова код којих је трајекторија на првом, а диск на другом месту, то јест, скуп решења једначине (2.1.9).

[9] Видети Поглавље 2.3.

Тврђење 38. **[36, 75]** *За генерички избор Морсове функције f и скоро комплексне структуре J, скупови $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$ и $\mathcal{M}_{R_0}(x,H,J;p,f,g)$ су глатке многострукости димензија:*

$$\dim \mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J) = m_f(p) - \left(\mu_H(x) + \frac{n}{2}\right),$$
$$\dim \mathcal{M}_{R_0}(x,H,J;p,f,g) = \mu_H(x) + \frac{n}{2} - m_f(p).$$

Означимо са $\mathcal{M}(p,q,f,g)$ скуп решења (2.1.2), а са $\mathcal{M}(x,y,H,J)$ скуп решења једначине (2.1.7). За генеричке изборе, ови скупови су глатке многострукости, и то први димензије

$$\dim \mathcal{M}(p,q,f,g) = m_f(p) - m_f(q),$$

(видети, на пример, [69]), а други димензије

$$\dim \mathcal{M}(x,y,H,J) = \mu_H(x) - \mu_H(y)$$

(видети [56, 19]). Група $\mathbb{R}$ дејствује на овим скуповима са

$$(\gamma,\tau) \mapsto \gamma(\tau+\cdot), \quad (u,\tau) \mapsto u(\tau+\cdot,\cdot).$$

Количничке скупове (који уствари представљају многострукост трагова, односно слика, одговарајућих пресликавања) означићемо са

$$\widehat{\mathcal{M}}(p,q,f,g) := \mathcal{M}(p,q,f,g)/\mathbb{R}, \quad \widehat{\mathcal{M}}(x,y,H,J) := \mathcal{M}(x,y,H,J)/\mathbb{R}.$$

Њихова димензија је, наравно, за један мања од димензије многострукости $\mathcal{M}(p,q,f,g)$ и $\mathcal{M}(x,y,H,J)$.

Напомена 39. Елементе скупова $\mathcal{M}(p,q,f,g)$, $\mathcal{M}(x,y,H,J)$, $\mathcal{M}(\vec{x},\overrightarrow{H},J)$ и уопште, пресликавања чији је домен многострукост константне димензије (1 или 2) називамо *објектима јединственог типа.* $\diamondsuit$

ГЛАВА 4

КОМПАКТИФИКАЦИЈА МНОГОСТРУКОСТИ $\mathcal{M}$

4.1 Преглед резултата ове главе

Ова глава је посвећена опису тополошке границе многострукости комбинованих решења. Као и у случају некомбинованих решења, ове многострукости нису затворене (то јест, компактне и без границе), осим у димензији нула. Оне нису ни многострукости са границом.[1] Међутим, њихова тополошка граница (односно, тачке нагомилавања које не припадају самој многострукости) је доста правилан скуп, наиме, она је састављена од унија многострукости нижих димензија. Ове многострукости које чине границу су или истог типа којег је и полазна многострукост, или припадају неком од других модулских простора којима се овде бавимо (комбинованог или некомбинованог типа). Доказ ове чињенице врши се у два смера: доказује се да су рубне тачке многострукости коју посматрамо подксуп поменуте уније („распадање”), и обратно – доказује се да је сваки елемент поменуте уније рубна тачка неке компоненте полазне многострукости („лепљење”).

Осим многострукости $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ дефинисане у (3.1.3), посматраћемо и фамилију мноострукости $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$, параметризовану

[1] То јест, њихова граница није многострукост димензије за један мање од полазне.

параметром R, која је и сама многострукост. Прецизније, фиксирајмо $R_0 > 0$, уведимо скраћену ознаку $\vec{\gamma} := (\gamma_1, \dots, \gamma_{m+k})$ и дефинишимо

$$\mathcal{M}(R; \vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J) := \left\{ (R, \vec{\gamma}, u) \mid R \geq R_0, (\vec{\gamma}, u) \in \mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J) \right\}.$$

Слично као у случају скупа $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$, може се доказати да је, за генеричке изборе, $\mathcal{M}(R; \vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ глатка многострукост чија је димензија за један већа од димензије многострукости $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$. Подсетимо се да смо ознаку $\mathcal{M}(p, q, f, g)$ користили за скуп градијентних трајекторија које спајају критичне тачке p и q, то јест, за скуп решења једначине (2.1.2). Ознаку $\mathcal{M}(x, y, H, J)$ смо користили за скуп пертурбованих холоморфних дискова са крајевима на нултом сечењу, који спајају путеве x и y, то јест, за скуп решења једначине (2.1.6); $\widehat{\mathcal{M}}(p, q, f, g)$ за количнички скуп $\mathcal{M}(p, q, f, g)/\mathbb{R}$; $\widehat{\mathcal{M}}(x, y, H, J)$ за $\mathcal{M}(x, y, H, J)/\mathbb{R}$. Скупове комбинованих објеката који се састоје од једне трајекторије и једног диска (то јест, скупове решења једначина (2.1.9) и (3.3.2)) означавали смо са $\mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J)$ и $\mathcal{M}_{R_0}(x, H, J; p, f, g)$. Симбол $\mathcal{M}(\vec{x}, \overrightarrow{H}, J)$ означава скуп Флорових „панталона”, односно, скуп решења једначине (3.3.1).

Главни резултат ове главе формулисан је у следећим двема теоремама.

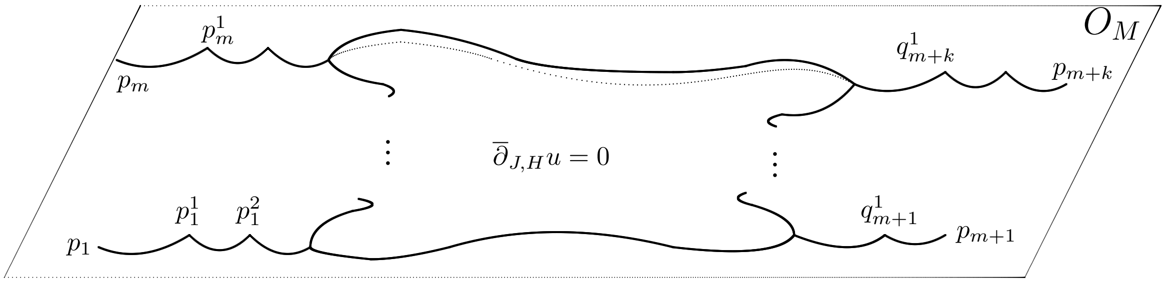
Теорема 40. *Тополошку границу многострукости $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ чине сви објекти изломљеног типа (видети Слику 4.1)*

$$(A_1, A_2, \dots, A_m, B, C_{m+1}, \dots, C_{m+k}),$$

где су

$$A_j \in \widehat{\mathcal{M}}(p_j, p_j^1, f_j, g) \times \widehat{\mathcal{M}}(p_j^1, p_j^2, f_j, g) \times \ldots \times \widehat{\mathcal{M}}(p_j^{a_j - 1}, p_j^{a_j}, f_j, g), \text{ за } j = 1, \dots m,$$
$$B \in \mathcal{M}_R\left((p_1^{a_1}, \dots, p_m^{a_m}, q_{m+1}, \dots, q_{m+k}), \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J \right),$$
$$C_j \in \widehat{\mathcal{M}}(q_j, q_j^1, f_j, g) \times \ldots \times \widehat{\mathcal{M}}(q_j^{b_j}, p_j, f_j, g), \text{ за } j = m+1, \dots m+k.$$

Теорема 40 нам говори да се граница многострукости $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ може идентификовати са изломљеним објектима, и то таквим код којих су изломљене само градијентне трајекторије.



Слика 4.1: Елемент границе $\partial\mathcal{M}_R(\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$

Теорема 41. *Тополошку границу многострукости* $\mathcal{M}(R;\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$ *чине сви објекти изломљеног типа* $(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B},\overrightarrow{C},D,\overrightarrow{E},\overrightarrow{F},\overrightarrow{G})$, $(\overrightarrow{P},Q,\overrightarrow{T})$ *и* $(\overrightarrow{P},Q_R,\overrightarrow{T})$, *где су, у првом случају:*

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{A}=(A_1,\ldots,A_m), & \overrightarrow{B}=(B_1,\ldots,B_m), & \overrightarrow{C}=(C_1,\ldots,C_m), \\ \overrightarrow{E}=(E_{m+1},\ldots,E_{m+k}), & \overrightarrow{F}=(F_{m+1},\ldots,F_{m+k}), & \overrightarrow{G}=(G_{m+1},\ldots,G_{m+k}) \end{array}$$

и

$$\begin{aligned}
&A_j\in\widehat{\mathcal{M}}(p_j,p_j^1,f_j,g)\times\ldots\times\widehat{\mathcal{M}}(p_j^{a_j-1},p_j^{a_j},f_j,g),\ \text{за}\, j=1,\ldots m,\\
&B_j\in\mathcal{M}_{R_0'}(p_j^{a_j},f_j,g;x_j^0,H_j,J),\ \text{за}\, j=1,\ldots m,\\
&C_j\in\mathcal{M}(x_j^0,x_j^1,H_j,J)\times\ldots\times\mathcal{M}(x_j^{b_j-1},x_j^{b_j},H_j,J),\ \text{за}\, j=1,\ldots m,\\
&D\in\mathcal{M}\left((x_1^{b_1},\ldots,x_m^{b_m},x_{m+1}^0,\ldots,x_{m+k}^0),\overrightarrow{H},J\right),\\
&E_j\in\widehat{\mathcal{M}}(x_j^0,x_j^1,H_j,J)\times\ldots\times\widehat{\mathcal{M}}(x_j^{c_j},x_j,H_j,J)\ \text{за}\, j=m+1,\ldots m+k,\\
&F_j\in\mathcal{M}_{R_0''}(x_j,H_j,J;q_j,f_j,g),\ \text{за}\, j=m+1,\ldots m+k,\\
&G_j\in\widehat{\mathcal{M}}(q_j,q_j^1,f_j,g)\times\ldots\times\widehat{\mathcal{M}}(q_j^{d_j},p_j,f_j,g),\ \text{за}\, j=m+1,\ldots m+k;
\end{aligned}$$

у другом:

$$\overrightarrow{P}=(P_1,\ldots,P_m),\quad \overrightarrow{T}=(T_{m+1},\ldots,T_{m+k})$$

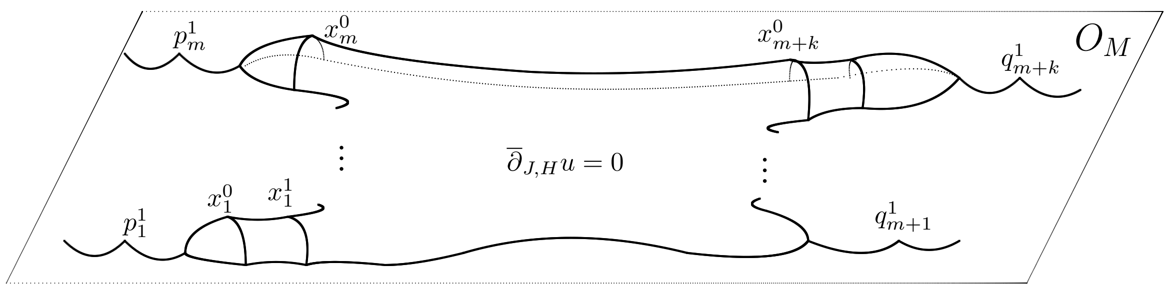
и

$$\begin{aligned}
&P_j\in\widehat{\mathcal{M}}(p_j,p_j^1,f_j,g)\times\ldots\times\widehat{\mathcal{M}}(p_j^{a_j-1},p_j^{a_j},f_j,g),\ \text{за}\, j=1,\ldots m,\\
&Q\in\mathcal{M}_{R_0}\left((p_m^{a_m},\ldots,p_m^{a_m},q_{m+1},\ldots,q_{m+k}),\vec{f},g;\overrightarrow{H},J\right),\\
&T_j\in\widehat{\mathcal{M}}(q_j,q_j^1,f_j,g)\times\ldots\times\widehat{\mathcal{M}}(q_j^{d_j},p_j,f_j,g),\ \text{за}\, j=m+1,\ldots m+k;
\end{aligned}$$

и у трећем $\overrightarrow{P}$ *и* $\overrightarrow{T}$ *као и малопре, а*

$$Q_R=(R,Q)\in\mathcal{M}\left(R;(p_1^{a_1},\ldots,p_m^{a_m},q_{m+1},\ldots,q_{m+k}),\vec{f},g;\overrightarrow{H},J\right).$$

Неформално речено, границу многострукости $\mathcal{M}(R;\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$ чине објекти „сличног облика”, али изломљени на разним местима, и то, за разлику од претходног случаја (када нисмо имали параметар R), до ломљења може доћи и код градијентних трајекторија, и на пертурбованим холоморфним цилиндричним крајевима (видети Слику 4.2). Ломљење на пертурбованим фохоломорфним крајевима настаје у случајевима када $R \to \infty$. Наиме, сваки низ објеката свих модулских простора које спомињемо има локално $C^\infty-$ конвергентан подниз (Лема 47), тако да ломљења (то јест, нарушавања ковергенције) може доћи тамо где је домен некомпактан.



Слика 4.2: Елемент границе $\partial\mathcal{M}(R;\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$

Као што смо већ споменули, претходне две теореме доказују се у два смера. Први смер представља доказ да сваки низ у неком од два модулска простора која изучавамо, уколико не конвергира у топологији многострукости, конвергира ка изломљеној трајекторији. Ако са $\mathcal{B}$ означимо скуп описаних изломљених објеката, из првог смера добијамо инклузију

$$\partial\mathcal{M} \subset \mathcal{B}.$$

Овај смер ће бити доказан у Поглављу 4.2. Други смер је доказ да ка сваком датом изломљеном објекту конвергира неки низ из скупа $\mathcal{M}$. Овај смер користи технике лепљења и биће доказан у Поглављу 4.3. Он обезбеђује и другу инклузију

$$\mathcal{B} \subset \partial\mathcal{M}.$$

4.2 Конвергенција ка изломљеним трајекторијама

У овом поглављу доказаћемо инклузију $\partial\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$. Један тип конвергенције комбинованих објеката ка изломљеним дат је у [35]. Посматраћемо два случаја. Први – када су Хамилтонијани $\overrightarrow{H}$ фиксирани (Теорема 40) – обрађен је у Поглављу 4.2.1, а други – када варирамо и Хамилтонијане (Теорема 41) – изучавамо у Поглављу 4.2.2.

4.2.1 Конвергенција у случају фиксираних Хамилтонијана

У овом поглављу доказујемо један смер тврђења из Теореме 40. Ради једноставности записа, доказ ћемо извести у специјалном случају – са једним улазом и излазом. Доказ у општем случају се не разликује од овог који дајемо. Нека је $m = k = 1$. Тада је $\vec{f} = (f_1, f_2)$, $\vec{p} = (p, q)$ и $\overrightarrow{H} = (H_1, H_2)$. Користићемо ознаку (α, u, β) за елемент скупа $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$. Ако уведемо ознаку

$$\widetilde{H}(s) := \rho_R(s)H_1 + \tilde{\rho}_R(s)H_2$$

(фунцкија ρ_R дата је у (3.1.2)), тада је, у овом случају (α, u, β) решење једначине:

$$\begin{cases} \alpha : (-\infty, 0] \to M, & \frac{d\alpha}{ds} = -\nabla f_1(\alpha), \\ \beta : [0, +\infty) \to M, & \frac{d\beta}{ds} = -\nabla f_2(\beta), \\ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, & \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\widetilde{H}}(u)) = 0, \\ u(s,0), u(s,1) \in O_M, & \\ \alpha(0) = u(-\infty, t), & \beta(0) = u(+\infty, t), \\ \alpha(-\infty) = p, & \beta(+\infty) = q. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

У овом случају се тврђење „$\partial\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$" своди на

Тврђење 42. *Нека је (α_n, u_n, β_n) низ у $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$. Тада или (α_n, u_n, β_n) има $W^{1,r}-$конвергентан подниз или постоје:*

- *критичне тачке $p = p^0, p^1, \ldots, p^l$ функције f_1,*
- *критичне тачке $q^0, q^1, \ldots, q^k = q$ функције f_2,*

- *градијентне трајекторије* $\alpha^j \in \mathcal{M}(p^j, p^{j+1}, f_1, g)$, $j = 0, 1, \ldots, l-1$,
- *градијентне трајекторије* $\beta^j \in \mathcal{M}(q^j, q^{j+1}, f_2, g)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$,
- $(\alpha, u, \beta) \in \mathcal{M}_R\left((p^l, q^0), \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J\right)$,
- *низови* $\{t_n^j\}_{n=1}^{\infty}$, *за* $j = 0, 1, \ldots, l-1$, $\{s_n^j\}_{n=1}^{\infty}$, *за* $j = 0, 1, \ldots, k-1$, *у* $\mathbb{R}$,
- *подниз (означимо га поново са* (α_n, u_n, β_n)*) полазног низа,*

такви да важи (ознака (α_n, u_n, β_n) *се односи на подниз):*

1. $\alpha_n(\cdot + t_n^j) \overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows} \alpha^j, \quad j = 0, 1, \ldots, l-1;$
2. $\beta_n(\cdot + s_n^j) \overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows} \beta^j, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1;$
3. $(\alpha_n, u_n, \beta_n) \overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows} (\alpha, u, \beta);$
4. $1 \le l + k \le m_{f_1}(p) - m_{f_2}(q)$.

Напомена 43. Може да се деси да k или l буде једнако нули, односно да се низ „распадне” на само једном месту. $\diamondsuit$

Оваква конвергенција ка изломљеним објектима се некад назива *слабом* или *геометријском* конверегенцијом и означава са $\xrightarrow{w}$. Доказ ћемо извести из следеће три леме.

Лема 44. *Постоји константа* $c_0 > 0$ *таква да је* $\|u\|_{C^0} \le c_0$ *за свако и такво да* (α, u, β) *припада скупу* $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$.

Доказ: Како је многострукост M компактна, биће довољно да покажемо да је $\|p_u(s,t)\|$ ограничена, где је $p_u(s,t)$ компонента дуж влакна пресликавања $u(s,t)$, односно, $u(s,t) = (q_u(s,t), p_u(s,t))$, за $(\alpha, u, \beta) \in \mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$. Овде је $\|\cdot\|$ норма на влакнима раслојења T^*M коју дефинишемо помоћу метрике g на M и већ поменуте идентификације тангентног и котангентног раслојења (дате у тачки 3) на страни 49). За доказ ове чињенице потребно је да уведемо следеће појмове.

Дефиниција 45. **[16]** Нека је Δ оријентисана хиперповрш у скоро комплексној многострукости (V, J) и ζ_q максимални $J-$инваријатни потпростор простора $T_q\Delta$. Тада се Δ назива *$J-$конвексном* ако за неку 1-форму ϱ такву да је $\zeta = \mathrm{Ker}(\varrho)$ важи $d\varrho(X, JX) > 0$, за свако $X \in \zeta_q$ различито од нуле. $\diamond$

Пример $J-$конвексне хиперповши у T^*M који је за нас од важности је

$$\Delta := \{(q,p) \in T^*M \mid \|p\|_g = 1\},$$

где је $\|\cdot\|$ већ поменута норма на влакнима, а $J = J_0$ скоро комплексна структура описана на страни 49. Наиме:

$$T_{(q,p)}\Delta = \{X = (X_1, X_2) \in TT^*M \cong TM \oplus V \mid \langle X_2, p\rangle_g = 0\}\,, \text{ а}$$
$$\zeta = T_{(q,p)}\Delta \cap J_0 T_{(q,p)}\Delta = \{(X_1, X_2) \in TM \oplus V \mid \langle X_2, p\rangle_g = 0, \langle J_0X_1, p\rangle = 0\}\,.$$

Како је, захваљући својству 3) скоро комплексне структуре J_0 (страна 49) и дефиницији форме[2] θ:

$$\langle J_0X_1, p\rangle_g = \langle -J_0p, X_1\rangle_g = J_0(-J_0p)(X_1) = p(X_1) = \theta_{(q,p)}(X_1, X_2),$$

то је $\zeta = \mathrm{Ker}(-\theta)$.

Доказ униформне C^0- ограничености следиће из наредне леме, која је једна генерализација Принципа максимума модула.

Лема 46. **[43, 48]** *Нека је D јединични диск у $\mathbb{C}$, $u : D \to V$ $J-$холоморфно пресликавање, и $\Delta \subset V$ $J-$конвексна хиперповрш. Тада $u(D)$ није тангентно на Δ у унутрашњој тачки $u(D)$.*

Доказ: Претпоставимо да је $\Delta = f^{-1}(0)$, за неко пресликавање $f : V \to \mathbb{R}$, за које је $0 \in \mathbb{R}$ регуларна вредност. Претпоставимо да не важи тврђење Леме, то јест, је нека $u(D)$ тангентно на Δ у тачки $u(z)$, где је $z \in D$ унутрашња тачка. Како је u $J-$ холоморфно, и ζ $J-$инваријантан и максималан потпростор, то је $u_*(T_zD) \subset \zeta_{u(z)}$. Доказаћемо да је $f \circ u : D \to \mathbb{R}$ субхармонијска функција у некој околини z, или еквивалентно томе,[3]

[2] Овде је θ канонска Лиувилова форма на T^*M (дефинисана на страни 20).

[3] О еквиваленцији ових дефиниција видети у [16].

да је 2-форма $di^*d(f\circ u)$ позитивно дефинитна у некој околини z, где је $i^*: T^*D \to T^*D$ оператор конјугован оператору множења са i на TD. Ако је $Y\in\zeta$, онда је и $JY\in\zeta$, па је $J^*df(Y)=df(JY)=0$, односно, форма J^*df се анулира на $\zeta=\mathrm{Ker}(\varrho)\cap T\Delta$. Одавде закључујемо да постоје функције $\lambda,\mu: V\to\mathbb{R}$ такве да важи

$$J^*df|_\Delta=\mu\varrho|_\Delta+\lambda df|_\Delta.$$

Наиме, за $Q=(q,p)\in\Delta$ важи

$$T_QV=T_Q\Delta\oplus A_Q=(\zeta_Q\oplus B_Q)\oplus A_Q,$$

где су простори A_Q и B_Q димензије један. Како је

$$df|_{\zeta_Q\oplus B_Q}=\rho|_{\zeta_Q}=J^*df|_{\zeta_Q}=0 \quad \text{и} \quad df|_{A_Q}\neq 0,\, \rho|_{A_Q}\neq 0,$$

то су $\mu(Q)$ и $\lambda(Q)$ решења система једначина

$$\begin{cases} J^*df_Q(X)=\mu(Q)\rho_Q(X)\\ J^*df_Q(Y)=\mu(Q)\rho_Q(Y)+\lambda(Q)df_Q(Y),\end{cases}$$

где су $X\in B_Q$, $Y\in A_Q$ произвољни не–нула вектори (систем је добро дефинисан јер су J^*df, ρ, df линеарне). Функција μ је сталног знака, јер не може бити $J^*df=\lambda df$ ни у једној тачки из Δ,[4] тако да можемо да претпоставимо да је $\mu>0$. Одавде је

$$dJ^*df|_{\zeta_{u(z)}}=d\mu\wedge\varrho|_{\zeta_{u(z)}}+\mu d\varrho|_{\zeta_{u(z)}}+d\lambda\wedge df|_{\zeta_{u(z)}}=\mu d\varrho|_{\zeta_{u(z)}},$$

а како је, због холоморфности u, $i^*u^*=u^*J^*$, биће:

$$di^*d(f\circ u)=u^*dJ^*df=u^*(\mu d\varrho)=(\mu d\varrho)u_*$$

[4]Ако претпоставимо да је $J^*df(Q)=\lambda df(Q)$ за неко $Q\in\Delta$, тада је $df(Q)(Y-\lambda JY)=0$ за свако $Y\in T_QV$. Вектор JY је ортогоналан на Y, па, за свако λ, постоји база простора TV коју чине вектори облика $Y-\lambda JY$ (ако једну базу простора TV чине вектори $X_1,\dots,X_{2n}$, онда је скуп $\{X_1-\lambda JX_1,\dots,X_{2n}-\lambda JX_{2n}\}$ такође база). Одатле закључујемо да је $df(Q)=0$, што је у контрадикцији са претпоставком о регуларности нуле као вредности функције f.

у тачки $u(z)$. Одавде видимо да је форма $di^*d(f\circ u)$ позитивно дефинитна у тачки z, јер је $u_*(T_zD)\in\zeta_{u(z)}$ и $d\varrho(X,JX)>0$, за $X\in\zeta_{u(z)}$, а функција μ позитивна. Из непрекидности форме $d\varrho$ следи да је она позитивно дефинитна и у некој околини тачке z. Закључујемо да је функција $f\circ u$ субхармонијска, и, ако би $u(D)$ било тангентно на Δ у тачки $u(z)$, онда би функција $f\circ u$ достизала свој максимум (или минимум) у z, а то је у контрадикцији са Принципом максимума модула за субхармонијске функције.[5] Дакле, z не може бити унутрашња тачка. $\square$

Сада можемо да наставимо са доказом Леме 44. Ако је u пресликавање дефинисано једначином (4.2.1), онда се максимум p_M функције

$$\|p_u\|:\mathbb{R}\times[0,1]\to\mathbb{R}^+$$

достиже у унутрашњој тачки z_0 скупа $\mathbb{R}\times[0,1]$, будући да је у рубним тачкама $\|p_u\|=0$. Нека је K компакт ван којег је[6] $J=J_0$. Ван скупа $K\cup\operatorname{supp}\widetilde{H}$ је пресликавање u J_0- холоморфно, и ако је $u(z)\in(K\cup\operatorname{supp}\widetilde{H})^c$, тада постоји околина $U_z\ni z$, садржана у $u^{-1}\left((K\cup\operatorname{supp}\widetilde{H})^c\right)$ на којој је u J_0- холоморфно. Ако претпоставимо да је $u(z_0)\in(K\cup\operatorname{supp}\widetilde{H})^c$, закључујемо да $u(U_{z_0})$ тангентно на хиперповрш $\{(q,p)\in T^*M\mid\|p\|=p_M\}$ која је J_0- конвексна, што је у контрадикцији са Лемом 46. Одатле је $u(z_0)\in K\cup\operatorname{supp}\widetilde{H}$, а како је скуп $K\cup\operatorname{supp}\widetilde{H}$ ограничен, имамо $p_M\leq c_0$, где константа c_0 не зависи од u. $\square$

Лема 47. *Сваки низ у $\mathcal{M}_R(\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$ има подниз који конвергира заједно са свим својим изводима униформно на компактним скуповима.*

Доказ: Нека је $(\alpha_n,u_n\,b_n)$ произвољан низ у $\mathcal{M}_R(\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$. Како је многострукост M компактна, то је низ униформно $\alpha_n(s)$ ограничен и по n и по s. Осим тога, низ α_n је еквинепрекидан јер су сва пресликавања α_n (негативне) градијентне трајекторије исте функције. Прецизније, из

[5] Видети [63] за овај случај Принципа максимума модула.

[6] И овде је J_0 скоро комплексна структура дефинисана на страни 49.

Њутн–Лајбницове формуле следи:

$$d(\alpha_n(s_1),\alpha_n(s_2)) \le \int_{s_1}^{s_2} |\dot{\alpha_n}(\tau)|d\tau \le \sqrt{s_2-s_1}\sqrt{\int_{s_1}^{s_2} |\dot{\alpha_n}(\tau)|^2 d\tau} =$$
$$= \sqrt{s_2-s_1}\sqrt{\int_{s_1}^{s_2} -\frac{\partial}{\partial\tau} f(\alpha_n(\tau))d\tau} \le \sqrt{s_2-s_1}\sqrt{\max_M f - f(p)}.$$

Због тога, из Теореме Арцеле – Асколија следи да низ α_n има конвергентан подниз (означимо га поново са α_n) који конвергира униформно на компактним скуповима. Трајекторије α_n су решење градијентне једначине:

$$\dot{\alpha_n} = -\nabla f(\alpha_n), \tag{4.2.2}$$

а функција f је глатка, тако да α_n конвергира заједно са свим својим изводима на компактним подскуповима скупа $(-\infty,0]$. Исто важи и за низ β_n. Можемо истовремено издвојити подниз низа (α_n,β_n) са поменутим својствима. За тако издвојен подниз парова (поново исто означен), посматрајмо подниз (α_n,u_n,β_n). У следећим проценама користићемо униформну C^0- ограниченост функција $u:\mathbb{R}\times[0,1]\to T^*M$ доказану у Леми 44. У нашем случају u_n су решења пертурбоване Коши–Риманове једначине

$$\begin{aligned} & u_n:\mathbb{R}\times[0,1]\to T^*M,\ u_n(s,0),u_n(s,1)\in O_M,\\ & \frac{\partial u_n}{\partial s}+J\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}-X_{\widetilde{H}}(u_n)\right)=0, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

где, подсетимо се, важи:

$$\widetilde{H}(s,x)=\begin{cases} 0, & s\in(-\infty,-R-1]\cup[-1,1]\cup[R+1,+\infty),\\ H_1(x), & s\in[-R,-2],\\ H_2(x), & s\in[2,R]. \end{cases}$$

Низ u_n има униформно ограничену *енергију:*

$$E(u_n) := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u_n}{\partial t} - X_{\widetilde{H}}(u)\right\|^2 dtds.$$

Заиста, ако је G произвољни Хамилтонијан и $v(s,t)$ произвољно пресликавање из бесконачне траке $\mathbb{R}\times[0,1]$ у T^*M такво да је $v(s,0)$, $v(s,1)\in O_M$, из Њутн–Лајбницове и Картанове формуле се лако изводи:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_G(v(s_2,t))-\mathcal{A}_G(v(s_1,t))=\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{d}{ds}\mathcal{A}_G(v(s,t))ds=\\
&\int\limits_0^1\int\limits_{s_1}^{s_2}\left\{\frac{d}{ds}(v(s,t)^*(\theta))-dG\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)-\frac{dG}{ds}(s,v)ds\right\}dt=\\
&\int\limits_0^1\int\limits_{s_1}^{s_2}\left\{v^*\left(d\left(\frac{\partial v}{\partial s}\lrcorner\theta\right)+\frac{\partial v}{\partial s}\lrcorner\omega\right)-dG\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)-\frac{dG}{ds}(s,v)ds\right\}dt=\\
&\int\limits_{s_1}^{s_2}\left\{\theta(v(s,1))\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)-\theta(v(s,0))\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)\right\}ds+\\
&\int\limits_0^1\int\limits_{s_1}^{s_2}\left\{\omega\left(\frac{\partial v}{\partial s},\frac{\partial v}{\partial t}-X_G(v,s)\right)-\frac{dG}{ds}(s,v)\right\}dsdt.
\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

У нашем случају, када је v решење једначине (4.2.3), важи и

$$\mathcal{A}_{\widetilde{H}}(v(s_2,t))-\mathcal{A}_{\widetilde{H}}(v(s_1,t))=-\frac{1}{2}E(v)+\int\limits_0^1\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{d\widetilde{H}}{ds}(s,v)dsdt.$$

Како је $u_n(\pm\infty,t)=*\in O_M$, и $\widetilde{H}(\pm\infty,x)=0$, када у горњу неједнакост заменимо $s_1=-\infty$, $s_2=+\infty$, добијамо

$$\begin{aligned}
&0=0-0=\mathcal{A}_{\widetilde{H}}(u_n(+\infty,t))-\mathcal{A}_{\widetilde{H}}(u_n(-\infty,t))=\\
&-\frac{1}{2}E(u_n)+\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\widetilde{H}}{ds}(s,u_n)dsdt=-\frac{1}{2}E(u_n)+\int\limits_0^1\int\limits_{-R-2}^{R+2}\frac{d\widetilde{H}}{ds}(s,u_n)dsdt
\end{aligned}$$

односно

$$E(u_n)=2\int\limits_0^1\int\limits_{-R-2}^{R+2}\frac{d\widetilde{H}}{ds}(s,u_n)dsdt.$$

Како је $\widetilde{H}$ глатка функција са компактним носачем (и по $s \in \mathbb{R}$ и по $x \in T^*M$), то је десна страна претходне неједнакости униформно ограничена, а тиме и лева.

Напомена 48. Претходно расуђивање не може да се спроведе у општем случају са m улаза и k излаза, јер ту немамо бесконачну траку и ток функционала дејства. У том случају расуђиваћемо другачије. С једне стране, из Стоксове формуле и чињенице да се Лиувилова форма[7] θ анулира на нултом сечењу следи:

$$\iint\limits_{\Sigma} u_n^*\omega = -\iint\limits_{\Sigma} u_n^* d\theta = -\iint\limits_{\Sigma} du_n^*\theta = -\iint\limits_{\partial\Sigma\subset O_M} u_n^*\theta = 0.$$

С друге стране:

$$0 = \iint\limits_{\Sigma} u_n^*\omega = \iint\limits_{\Sigma} \omega\left(\frac{\partial u_n}{\partial s}, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right) dsdt = \iint\limits_{\Sigma} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial s}, J\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\rangle dsdt =$$
$$-\iint\limits_{\Sigma} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial s}, \frac{\partial u_n}{\partial s}\right\rangle dsdt + \iint\limits_{\Sigma} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial s}, JX_{\widetilde{H}} \circ u\right\rangle dsdt,$$

па је

$$\iint\limits_{\Sigma} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial s}, JX_{\widetilde{H}} \circ u\right\rangle dsdt = \iint\limits_{\Sigma} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^2 dsdt. \tag{4.2.5}$$

Израз под интегралом на левој страни једнакости (4.2.5) је различит од нуле само на компактном скупу Q, јер $X_{\widetilde{H}} \circ u$ има компактан носач. Осим тога, из Коши–Шварцове неједнакости имамо

$$\left|\iint\limits_{Q} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial s}, JX_{\widetilde{H}} \circ u\right\rangle\right|^2 dsdt \leq \iint\limits_{Q} \|X_{\widetilde{H}} \circ u\|^2 dsdt \cdot \iint\limits_{Q} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^2 dsdt$$
$$\leq c_1 \iint\limits_{Q} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^2 dsdt,$$

јер је $\|X_{\widetilde{H}}\|$ ограничен, а Q компактан. Доказ униформне ограничености енергије ће сада следити из униформне ограничености израза

$$\iint\limits_{Q} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^2 dsdt.$$

[7] Видети дефиницију на страни 20.

Да бисмо доказали ову униформну ограниченост, означимо са Ω отворен скуп, такав је $\overline{\Omega}$ компактан подскуп скупа Σ и $Q \subset \Omega$. Из локалне регуларности (видети Лему B.4.6 у [44]), следи да је, за $r > 2$:

$$\|u_n\|_{W1,r(Q)} \leq c\left(\|u_n\|_{L^r(\Omega)} + \|X_{\widetilde{H}}\|_{L_r(\Omega)}\right). \tag{4.2.6}$$

Нека је $A_n \subset Q$ скуп на ком је $\left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^2 \leq 1$, а $B_n := Q \setminus A_n$. Имамо:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^2 dsdt = \iint\limits_{A_n} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^2 dsdt + \iint\limits_{B_n} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^2 dsdt \\
&\leq 1 \cdot m(A_n) + \iint\limits_{B_n} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^r dsdt \leq c_2 + \iint\limits_{Q} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial s}\right\|^r dsdt \\
&\leq c_2 + c\left(\|u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|X_{\widetilde{H}}\|_{L_p(\Omega)}\right) \leq c_2 + c \cdot c_3,
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

јер су u_n и $X_{\widetilde{H}}$ ограничени у C^0 норми, а Ω коначне мере. $\diamondsuit$

Пошто су енергија и C^0 норма низа u_n униформно ограничене, можемо да применимо Громовљеве резултате (дате у [30]) о локалној конвергенцији. Ради комплетности, даћемо кратак опис тих резултата. Уколико је

$$\sup_n \|du_n\|_{L^\infty} < \infty$$

тада је низ u_n равностепено непрекидан, па из Арцела–Асколијеве теореме следи доказ овог тврђења.

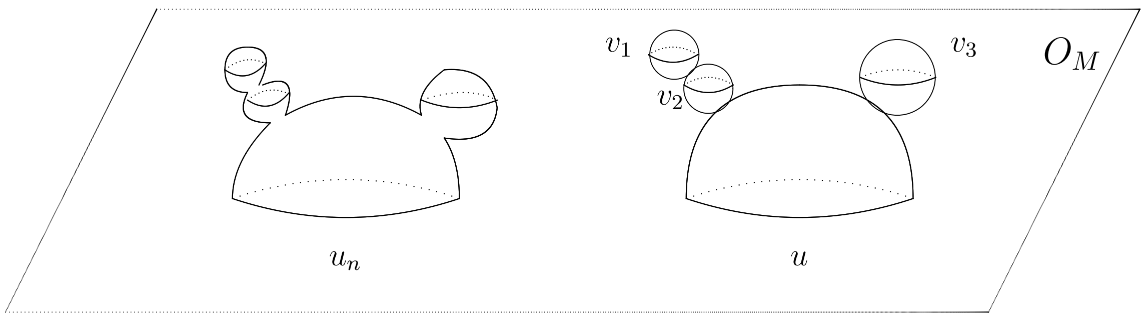
Уколико то није случај, онда се може доказати[8] да се ова униформна ограниченост нарушава само у коначно много тачака, то јест, да постоји коначно много тачака $\{z^1, \ldots, z^l\}$ и низова $\{z_n^1\}, \cdots, \{z_n^l\}$ таквих да важи

$$\lim_{n\to\infty} z_n^j = z^j, \quad \lim_{n\to\infty} \|du_n(z_n^j)\| \to +\infty, \quad j = 1, \ldots, l$$

и да је у некој околини сваке тачке из $\Sigma \setminus \{z^1, \ldots, z^l\}$ низ du_n униформно ограничен. У општем случају, уколико се $L^\infty-$ норма првих извода у неким тачкама домена бесконачно увећава, може доћи до следеће појаве [30] (видети и [4, 59, 44]): низ холоморфних дискова $u_n : \Sigma \to P$

[8] Видети, на пример, Став 3.3 у [66].

локално униформно ограничене $W^{1,2}$ норме има подниз који конвергира C^1 локално униформно „до на мехурове”, односно, ван скупа $\{z^1, \ldots, z^l\}$, ка неком $u : \Sigma \to P$ (видети Слику 4.3).



Слика 4.3: Појава мехура на граничној холоморфној кривој

Осим тога, постоје холоморфне криве $v_j : \mathbb{C}P^1 \to P$, $j = 1, \ldots, l$, за које важи:

а) $E(u) + \sum\limits_j E(v_j) = \lim\limits_{n\to\infty} E(u_n)$;

б) скупови $\mathrm{Im}(u_n)$ конвергирају ка $\mathrm{Im}(u) \cup \bigcup\limits_j \mathrm{Im}(v_j)$;

в) скуп $\mathrm{Im}(u) \cup \bigcup \mathrm{Im}(v_j)$ је повезан и кроз сваку тачку $u(z_j)$ пролази нека од сфера v_j.

Најједноставнији пример овог феномена је низ пресликавања $u_n : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, $u_n(z) := nz$. Пресликавање u је константно, $u \equiv \infty$, и u_n ковергира C^1 локално униформно ван тачке $z = 0$, а у њој се јавља мехур, $v(z) = z$.

У случају низа холоморфних дискова са границом на Лагранжевим подмногострукостима може доћи до појаве мехурова не само у облику холоморфних сфера (што је случај када је тачка у којој се јавља мехур унутрашња), већ и у виду холоморфних дискова са истим граничним условима (видети Слику 4.3), ако се ради о рубној тачки (видети [58]). Међутим у нашем случају не долази до појаве мехурова ни у виду холоморфних сфера ни у виду холоморфних дискова. Холоморфних сфера нема јер је форма ω на T^*M тачна, а сфера $\mathbb{C}P^1$ без границе, па из Стоксове формуле следи:

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{C}P^1} \|du\|^2 = \iint\limits_{\mathbb{C}P^1} u^*\omega = \iint\limits_{\mathbb{C}P^1} u^*d\theta = \iint\limits_{\partial\mathbb{C}P^1=\emptyset} u^*\theta = 0.$$

Одавде закључујемо да су једина холоморфна пресликавања константна. Ни холоморфни дискови са границом на нултом сечењу не постоје из сличних разлога. Ако претпоставимо да је u такав холоморфни диск, имамо:

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{D} \|du\|^2 = \iint\limits_{D} u^*\omega = \iint\limits_{\mathbb{C}P^1} u^*d\theta = \iint\limits_{\partial D\subset O_M} u^*\theta = 0, \tag{4.2.8}$$

јер је $\theta|_{O_M} = 0$.

Докази цитираних тврђења су изведени, у наведеној литератури, за низ (пертурбованих) холоморфних дискова који за кодомен имају компактну многострукост. Зато нам је овде потребна C^0 униформна ограниченост доказана у Леми 44.

Из локалне C^1 конвергенције следи да је и гранични диск u такође локално решење једначине (4.2.3), а из елиптичности оператора $\overline{\partial}_{J,\widetilde{H}}$ следи да је u и класе C^∞. □

Лема 49. *Нека је дат низ* $(\alpha_n, u, \beta_n) \in \mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$. *Тада низ* u_n *има конвергентан подниз који конвергира у* $W^{1,r}-$ *норми. Ако низ* (α_n, u_n, β_n) $C^\infty_{loc}-$*конвергира ка* $(\alpha, u, \beta) \in \mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$, *тада је он и* $W^{1,r}$ *конвергентан.*

Доказ: Ако је v решење пертурбоване Коши - Риманове једначине (4.2.3), тада су следећи услови еквивалентни (за доказ видети, на пример [66]):

1) Енергија $E(v)$ је коначна.

2) Постоје лимеси
$$v(\pm\infty, t) = \lim_{s\to\pm\infty} v(s,t)$$
који представљају Хамилтонове путеве са крајевима на O_M за Хамилтонијан који учествује једначини $\overline{\partial}_{J,H} = 0$. Ови лимеси су униформни по $t \in [0,1]$.

3) Ако је још H (у околини бесконачних крајева) такво да је $O_M \pitchfork \phi_1^H(O_M)$, тада постоје константе $\delta > 0$ и $c > 0$ такве да важи
$$\left|\frac{\partial v}{\partial s}\right| \leq c e^{-\delta|s|} \tag{4.2.9}$$
за све s и t.

Нека је u_n подниз из Леме 47 који конвергира локално униформно. Приметимо најпре да је лимес u низа u_n поново објекат истог типа: из униформне C^∞_{loc} конвергенције видимо да u задовољава пертурбовану Коши–Риманову једначину на целом свом домену, да су тачке $u(s,0)$ и $u(s,1)$ на нултом сечењу, као и да u има ограничену енергију. Одавде закључујемо да је $u(\pm\infty, t)$ Хамилтонов пут са крајевима на O_M за Хамилтонијан $H = 0$, односно константан пут. Означимо
$$u(\pm\infty, t) \equiv x \in O_M.$$

Докажимо сада да $u_n \rightrightarrows u$ на целом свом домену. Ако претпоставимо да то не важи, како имамо локално униформну конвергенцију, постоји $\varepsilon > 0$ и низови $t_n \in [0,1]$, $s_n \to -\infty$ такви да је
$$d(u_n(s_n, t_n), x) = \max_{t\in[0,1]} d(u_n(s_n, t), x) \geq \varepsilon \tag{4.2.10}$$
(јер је $d(u_n(s_n,t),x) \geq d(u_n(s_n,t), u(s_n,t)) - d(x, u(s_n,t))$, а величина $d(x, u(s_n,t))$ тежи нули кад $n \to \infty$). Како је слика свих пресликавања u_n садржана у компактном скупу (ово следи из C^0-униформне ограничености, доказане у Леми 44), то постоји подниз низа $y_n := u_n(s_n, t_n)$ (поново означен са y_n)

који конвергира ка неком y. Из неједнакости (4.2.10) видимо да је $y \neq x$. Нека су U и V дисјунктне околине тачака x и y. Нека су $s_0 \in \mathbb{R}$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такви за свако $n \geq n_0$, $s \leq -s_0$ важи $y_n \in V$, $x_n \equiv u_n(-\infty, t) \in U$. Како је, за $n \geq n_1$ и $u_n(s_n, t) \in U$ за свако t (јер $u_n(s,t) \rightrightarrows x_n$, кад $s \to -\infty$), то је и $y_n \in U$, што је немогуће, јер $U \cap V = \emptyset$. На исти начин резонујемо и другом бесконачом крају $(+\infty)$. Одавде закључујемо да $u_n \rightrightarrows u$ на целом $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Докажимо сада да $u_n \xrightarrow{W^{1,r}} u$.

Посматрајмо низ првих извода

$$\iint\limits_{\mathbb{R}\times[0,1]} \|du_n\|^2 dsdt = \int\limits_{-\infty}^{-R-1}\int\limits_0^1 \|du_n\|^2 dsdt + \int\limits_{-R-1}^{R+1}\int\limits_0^1 \|du_n\|^2 dsdt + \int\limits_{R+1}^{+\infty}\int\limits_0^1 \|du_n\|^2 dsdt \stackrel{(*)}{=}$$
$$\int\limits_{-\infty}^{-R-1}\int\limits_0^1 u_n^*\omega + \int\limits_{-R-1}^{R+1}\int\limits_0^1 \|du_n\|^2 dsdt + 2\int\limits_{R+1}^{+\infty}\int\limits_0^1 u_n^*\omega =$$
$$\int\limits_{-\infty}^{-R-1}\int\limits_0^1 d(u_n^*\theta) + \int\limits_{-R-1}^{R+1}\int\limits_0^1 \|du_n\|^2 dsdt + 2\int\limits_{R+1}^{+\infty}\int\limits_0^1 d(u_n^*\theta) \stackrel{(**)}{=}$$
$$2\int\limits_0^1 u_n(-R-1,t)^*\theta + \int\limits_{-R-1}^{R+1}\int\limits_0^1 \|du_n\|^2 dsdt + 2\int\limits_0^1 u_n(R+1,t)^*\theta. \tag{4.2.11}$$

Једнакост $(*)$ важи јер су пресликавања $u_n|_{(-\infty,-R-1)\times[0,1]}$ холоморфна; једнакост $(**)$ следи из Стоксове формуле и чињенице да је $u_n(s,0) \in O_M$.

Подсетимо се да је $u_n = \exp_u \eta_n$, где су η_n сечења раслојења $u_n^*(T^*M)$ над базом $\mathbb{R} \times [0,1]$ (ово су, уствари векторска поља дуж u) и да се топологија на скупу пресликавања u локално задаје топологијом на простору сечења η. Ако у једначини (4.2.11) ставимо $u_n = \exp \eta_n$, како $\eta_n, d\eta_n \to 0$ униформно на компактима и како се сви интеграли у (4.2.11) појављују са скупом коначне мере, то видимо да важи да $d\eta_n \xrightarrow{L^2} 0$. Услов $d\eta_n \xrightarrow{L^2} 0$ еквивалентан је услову $du_n \xrightarrow{L^2} du$. Из услова $\eta_n \rightrightarrows 0$ такође закључујемо да је, за $n \geq n_0$, $|d\eta_n| \leq 1$, па, за $r > 2$, важи $\|d\eta_n\|_{L^r}^r \leq \|d\eta_n\|_{L^2}^2$. Одатле следи да $d\eta_n \xrightarrow{L^r} 0$, па $du_n \xrightarrow{L^r} du$.

Докажимо сада да и $\eta_n \xrightarrow{L^r} 0$. Како је скуп $\mathbb{R}\times[0,1]$ контрактибилан, раслојења $u_n^*(T^*M)$ су тривијална, па можемо да претпоставимо да је $T^*M=\mathbb{R}^{2n}$. Заиста, како $u_n \rightrightarrows u$, можемо да изаберемо тривијализације

$$\Phi_n : u_n^*(T^*M)\to(\mathbb{R}\times[0,1])\times\mathbb{R}^{2n},\quad \Phi : u^*(T^*M)\to(\mathbb{R}\times[0,1])\times\mathbb{R}^{2n}$$

такве да важи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{(s,t)}\|\Phi_n(s,t)-\Phi(s,t)\|=0,$$

па $\Phi_n(\eta_n) \xrightarrow{L^r} 0$ ако и само ако $\eta_n \xrightarrow{L^r} 0$. Ако са $\mathcal{W}^{1,r}$ и $\mathcal{L}^r$ означимо скуп свих пресликавања $\eta:\mathbb{R}\times[0,1]\to\mathbb{R}^{2n}$, класе $W^{1,r}$ и L^r, са особином $\eta(s,1),\eta(s,t)\in\mathbb{R}^n\times\{0\}$, тада пресликавање

$$\overline{\partial}:\mathcal{W}^{1,r}\to\mathcal{L}^r$$

има непрекидан леви инверз. Заиста, из Стоксове формуле следи да су све нуле оператора $\overline{\partial}$ константе, па из L^r интеграбилности следи да је $\overline{\partial}$ инјективно. Како је $\overline{\partial}$ и Фредхолмов оператор, то се његов леви инверз може додефинисати ван слике оператора $\overline{\partial}$. Из Теореме о затвореном графику следи да је овај леви инверз непрекидан. Сада имамо:

$$\|d\eta_n\|_{L^r}^r=\left\|\frac{\partial\eta_n}{\partial s}\right\|_{L^r}^r+\left\|\frac{\partial\eta_n}{\partial t}\right\|_{L^r}^r=\left\|\frac{\partial\eta_n}{\partial s}\right\|_{L^r}^r+\left\|J\frac{\partial\eta_n}{\partial t}\right\|_{L^r}^r\geq$$
$$\left\|\frac{\partial\eta_n}{\partial s}+J\frac{\partial\eta_n}{\partial t}\right\|_{L^r}^r=\|\overline{\partial}\eta_n\|_{L^r}^r\geq c\|\eta_n\|_{W^{1,r}},$$

одакле, на основу већ доказане L^r- конвергенције првих извода, добијамо конвергенцију у $W^{1,r}-$ норми.

Ако је лимес датог низа (α,u,β) елемент простора $\mathcal{M}_R(\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$, тада се, сличним резоновањем као у случају холоморфних дискова, лако доказује да $\alpha_n(s)$ равномерно ковергира ка $\alpha(s)$, и $\beta_n(s)$ равномерно конвергира ка $\beta(s)$, на целим својим доменима. Докажимо и конвергецију у $W^{1,r}-$норми. За свако решење градијентне једначине $\dot{\gamma} = \nabla f_1(\gamma)$ важи следећа оцена (видети [69]):

$$|\gamma(s)| \leq ce^{-\delta|s|},\ s \leq -s_0,$$

при чему константе c, δ и s_0 зависе од критичне тачке p функције f_1. Одавде, из конвергенције тачка-по-тачка и Теореме о доминантној конвергенцији закључујемо да $\alpha_n \xrightarrow{L^r} \alpha$. Да бисмо доказали и L^r конвергенцију низа извода, пређимо на (као и у случају дискова), тривијализовани и линеаризовани случај. Нека је $\xi_n = \exp_\alpha \alpha_n$. Услов да α_n конвергира униформно значи да $\xi_n \overset{C^\infty}{\rightrightarrows} 0$. Пресликавања $\xi_n : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ су, у локалним координатама, решења једначине

$$\dot{\xi_n} = B_n(s)\xi_n$$

где су $B_n(s)$, матрице које зависе од α_n, тривијализација

$$\Psi_n : \alpha_n^* M \to (-\infty, 0]) \times \mathbb{R}^n$$

и функције f_1. Из $\alpha_n \rightrightarrows \alpha$ следи да $\|B_n\| \leq M$. Из већ доказане L^r конвергенције низа ξ_n имамо:

$$\|\dot{\xi_n}\|_{L^r} = \|B_n(s)\xi_n\|_{L^r} \leq M\|\xi_n\|_{L^r}$$

одакле добијамо жељену конвергенцију у $W^{1,r}-$ норми. Аналогно изводимо исти закључак о низу β_n. $\square$

Вратимо се доказу Тврђења 42.

Нека је (α_n, u_n, β_n) низ у $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$. Из Леме 47 следи да постоји C^∞_{loc} униформно конвергентан подниз, поново исто означен, такав да је u_n конвергентан у $W^{1,r}-$ топологији. Ако је лимес (α, u, β) (где је $\alpha(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(s)$, $u(s,t) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(s,t)$ и $\beta(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n(s))$ елемент простора $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$, доказ је завршен захваљујући Леми 49. Претпоставимо зато да то није случај. У наставку доказа користићемо следеће помоћно тврђење (чији доказ, мада стандардан, није прецизно дат у литератури познатој аутору).

Лема 50. *Нека је α решење градијентне једначине $\frac{d\alpha}{ds} = -\nabla f(\alpha(s))$. Тада су $\alpha(\pm\infty) = \lim\limits_{s\to\pm\infty} \alpha(s)$ критичне тачке Морсове функције f.*

Доказ: Из градијентне једначине и компактности многострукости M следи да је реална функција

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(s) := f(\alpha(s))$$

монотона и ограничена, па има лимес у бесконачности. Нека је s_n произвољан низ у $\mathbb{R}$ који тежи ка $+\infty$ и $\varepsilon > 0$ произвољно. Из Теореме о средњој вредности следи да постоји низ $a_n \in (0, \varepsilon)$ такав да је

$$\varphi(s_n + \varepsilon) - \varphi(s_n) = \varepsilon\varphi'(s_n + a_n), \tag{4.2.12}$$

одакле следи да $\varphi'(s_n + a_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (јер на левој страни једнакости (4.2.12) оба члана конвергирају ка истом броју). Важи и

$$|\varphi'(s_n + a_n) - \varphi'(s_n)| < M|s_n + a_n - s_n| < M\varepsilon \tag{4.2.13}$$

па је и $\varphi'(s_n)$ произвољно мало, за n довољно велико. Како је низ s_n произвољан, то је $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi'(s) = 0$. Неједнакост (4.2.13) важи јер је функција φ' (као и сви изводи функције φ) Липшицова, пошто јој је први извод ограничен (ово следи из глаткости функције f и компактности многострукости M).

Како је

$$\varphi'(s) = \langle \nabla f(\alpha(s)), \dot{\alpha}(s) \rangle = -\|\nabla f(\alpha(s))\|^2, \tag{4.2.14}$$

то је и $\lim\limits_{s\to\infty} \nabla f(\alpha(s)) = 0$. Нека је, поново, s_n произвољан низ у $\mathbb{R}$ који тежи ка $+\infty$. Како је M компактна, то низ $\alpha(s_n)$ има конвергентан подниз, који конвергира ка неком $p \in M$. Из претходног расуђивања следи да је p критична тачка функције f. Када сам низ $\alpha(s_n)$ не би конвергирао ка p, онда би постојао његов други подниз, који би конвергирао ка q (такође критичној тачки). Критичне тачке p_j Морсове функције су изоловане и има их коначно много, а многострукост M компактна, па постоје дискунктне околине $U_j \ni p_j$ и $m > 0$ такво да је $\|\nabla f\| > m$ ван $\bigcup_{j=1}^{l} U_j$. Нека је $\alpha(s_n) \to p \in U_{j_0}$, $\alpha(t_n) \to q \in U_{j_1}$, где $s_n, t_n \to +\infty$. Како је, за $n \geq n_0$, $\alpha(s_n) \in U_{j_0}$, $\alpha(t_n) \in U_{j_1}$, из непрекидности пресликавања α следи да постоји низ $d_n \to +\infty$ такав да[9] $\alpha(d_n) \notin \bigcup_{j=1}^{l} U_j$, па је $\|\nabla f(\alpha(d_n))\| > m$, што је у контрадикцији са (4.2.14) и условом $\varphi'(s) \overset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Из Леме 50 следи да $(\alpha, u, \beta) \in \mathcal{M}_R\left((p^l, q^0), \vec{f}; \overrightarrow{H}\right)$, за неке критичне тачке p^l и q^0 Морсових функција f_1 и f_2. Важи $f_1(p^l) < f_1(p)$ и $f_2(q^0) > f_2(q)$. Наиме, функције f_1 и f_2 опадају дуж својих градијентних трајекторија, па је, за свако n и s, $f_1(\alpha_n(s)) < f_1(p) = f_1(-\infty)$. После преласка на два лимеса добијамо $f_1(\alpha(-\infty)) \leq f_1(p)$. Осим тога, можемо претпоставити да су вредности у критичним тачкама функције f_1 међусобно различите,[10] то јест, да важи строга неједнакост. Изаберимо регуларну вредност $a \in (f_1(p^l), f_1(p))$ функције f_1 и низ $t_n \in \mathbb{R}$ такав да је $f_1(\alpha_n(t_n)) = a$. Овакав низ постоји за свако a (почевши од неког n_0) јер је:

1. $f_1(\alpha_n(-\infty)) = f_1(p)$
2. $f_1(\alpha_n(0)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_1(\alpha(0)) < f_1(\alpha(-\infty)) = f_1(p^l)$, па је, за $n \geq n_0$, $f_1(\alpha_n(0)) < f_1(p^l)$.

Низ t_n тежи ка $-\infty$, наиме, ако претпоставимо да је t_n (или неки његов подниз) ограничен, из локално униформне конвергенције закључујемо да $d\left(\alpha_n(t_n), \alpha(t_n)\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, одакле лако следи да је $f_1(\alpha_n(t_n)) \leq f_1(p^l)$, за довољно велико n.

---

[9] Ако такав низ не би постојао, тада би важило:

$$\alpha([t_n, s_n]) \subset U_{j_0} \cup \ldots \cup U_{j_k}, \tag{4.2.15}$$

за неке j_l за које је $\alpha([t_n, s_n]) \cap U_{j_l} \neq \emptyset$. Како је $\alpha([t_n, s_n])$ повезан скуп и $\alpha([t_n, s_n]) \cap U_{j_l} \neq \emptyset$, то је $\alpha([t_n, s_n]) \cup U_{j_0} \cup \ldots \cup U_{j_k}$ такође повезан. Али, под претпоставком (4.2.15) важи $\alpha([t_n, s_n]) \cup U_{j_0} \cup \ldots \cup U_{j_k} = U_{j_0} \cup \ldots \cup U_{j_k}$, па добијамо контрадикцију, јер је $U_{j_0} \cup \ldots \cup U_{j_k}$ очигледно неповезан.

[10] Уколико то није случај, малим пертурбацијама Морсове функција у близиних критичних тачака можемо постићи да јесте.

Користећи исте аргументе као за полазни низ, закључујемо да низ $\alpha_n(\cdot+t_n)$ ковергира локално униформно ка градијентној трајекторији. Низови $\tilde{\alpha}_n := \alpha_n(\cdot+t_n)$ имају домене $(-\infty,-t_n]$, па како $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, можемо претпоставити да гранична трајекторија (новог низа, $\tilde{\alpha}_n$) има за домен $\mathbb{R}$. Овај поступак можемо поновити за нове критичне тачке нове граничне трајекторије. Поступак ће се завршити након коначно много корака јер критичних тачака Морсове функције има коначно много. Добијене трајекторије су повезане, односно, настављају се једна на другу, јер су вредности у критичним тачкама функције f_1 међусобно различите, па бирајући нову вредност између вредности сваке суседне[11] две критичне тачке добијамо трајекторију која их спаја. Исто важи и за други крај, односно трајекторију β. Закључак о максималном броју „ломљења” изводимо из димензија сваке од многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(p^j,p^{j+1},f_1,g)$, $\widehat{\mathcal{M}}(q^j,q^{j+1},f_2,g)$ и $\mathcal{M}_R\left((p^l,q^0),\vec{f},g;\overrightarrow{H},J\right)$. Наиме, ако постоји трајекторија у многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(p^j,p^{j+1},f_1,g)$, тада је

$$\dim\widehat{\mathcal{M}}(p^j,p^{j+1},f_1,g)=m_{f_1}(p^j)-m_{f_2}(p^{j+1})-1\geq 0.$$

Исто важи и за скуп $\widehat{\mathcal{M}}(q^j,q^{j+1},f_2,g)$, док је

$$\dim\mathcal{M}_R\left((p^l,q^0),\vec{f},g;\overrightarrow{H},J\right)=m_{f_1}(p^l)-m_{f_2}(q^0)\geq 0.$$

Одавде, ако су $p^1,\dots,p^l$, $q^0,\dots,q^{k-1}$ тачке распадања, важи:

$$m_{f_1}(p)>m_{f_1}(p^1)>\dots>m_{f_1}(p^l)\geq m_{f_2}(q^0)>m_{f_2}(q^1)>\dots>m_{f_2}(q). \quad \square$$

4.2.2 Конвергенција у случају промењљивих Хамилтонијана

У случају једног улаза и једног излаза, тврђење једног смера ($\partial\mathcal{M}\subset\mathcal{B}$) Теореме 41 се своди на

Тврђење 51. *Ако низ $(R_n,\alpha_n,u_n,\beta_n)$ у $\mathcal{M}(R;\vec{p},\vec{f},g;\overrightarrow{H},J)$ нема $W^{1,r}-$ конвергентан подниз, тада разликујемо два случаја.*

Први случај: *Уколико је низ R_n ограничен тада постоје:*

[11] Мисли се на суседне по вредности функције f_1 у њима.

- *критичне тачке* $p = p^0, p^1, \dots, p^l$ *функције* f_1,
- *критичне тачке* $q^0, q^1, \dots, q^k = q$ *функције* f_2,
- *градијентне трајекторије* $\alpha^j \in \mathcal{M}(p^j, p^{j+1}, f_1, g)$, $j = 0, 1, \dots, l-1$,
- *градијентне трајекторије* $\beta^j \in \mathcal{M}(q^j, q^{j+1}, f_2, g)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$,
- $(\widetilde{R}, \alpha, u, \beta) \in \mathcal{M}\Big(R, (p^l, q^0), \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J\Big)$ *или*
  $(\alpha, u, \beta) \in \mathcal{M}_{R_0}\Big((p^l, q^0), \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J\Big)$,
- *низови* $\{t_n^j\}_{n=1}^{\infty}$, *за* $j = 0, 1, \dots, l-1$, $\{s_n^j\}_{n=1}^{\infty}$, *за* $j = 0, 1, \dots, k-1$, *у* $\mathbb{R}$,
- *подниз (означимо га поново са* (α_n, u_n, β_n)*) полазног низа,*

такви да важи (ознака (α_n, u_n, β_n) *се односи на подниз):*

1. $\alpha_n(\cdot + t_n^j) \overset{C^{\infty}_{loc}}{\rightrightarrows} \alpha^j, \quad j = 0, 1, \dots, l-1$;
2. $\beta_n(\cdot + s_n^j) \overset{C^{\infty}_{loc}}{\rightrightarrows} \beta^j, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$;
3. $(\alpha_n, u_n, \beta_n) \overset{C^{\infty}_{loc}}{\rightrightarrows} (\alpha, u, \beta)$;
4. $1 \leq l + k \leq m_{f_1}(p) - m_{f_2}(q) + 1$;
5. $R_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} R_0$ *или* $R_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{R}$.

Други случај: *Уколико је низ* R_n *неограничен тада постоје критичне тачке* $p = p^0, p^1, \dots, p^l$, $q^0, q^1, \dots, q^k = q$, *градијентне трајекторије* $\alpha^j \in \mathcal{M}(p^j, p^{j+1}, f_1, g)$, $\beta^j \in \mathcal{M}(q^j, q^{j+1}, f_2, g)$ *и низови реалних бројева* $\{t_n^j\}_{n=1}^{\infty}$, *и* $\{s_n^j\}_{n=1}^{\infty}$, *као малопре. Осим тога, постоје и*

- *Хамилтонови путеви* x_j *који одговарају Хамилтонијану* H_1, *за* $j = 1, \dots, a$;
- *Хамилтонови путеви* y_j *који одговарају Хамилтонијану* H_2, *за* $j = 1, \dots, b$;
- $(\alpha, u^1) \in \mathcal{M}_{R_0'}(p^l, f_1, g; x_1, H_1, J)$;
- $v^j \in \widehat{\mathcal{M}}(x_j, x_{j+1}, H_1, J)$, *за* $j = 1, \dots, a-1$;
- $u \in \widehat{\mathcal{M}}(x_a, y_1, g; \widetilde{H}, J)$;

- $w^j \in \widehat{\mathcal{M}}(y_j, y_{j+1}, H_2, J)$, *за* $j = 1, \ldots, b-1$;
- $(u^2, \beta) \in \mathcal{M}_{R_0''}(y_b, H_2, J; q_0, f_2, g)$;
- *низови реалних бројева* $\{r_n^j\}_{n=1}^{\infty}$, *за* $j = 1, \ldots, a-1$;
- *низови реалних бројева* $\{\tau_n^j\}_{n=1}^{\infty}$, *за* $j = 1, \ldots, b-1$;
- *низови реалних бројева* c_n *и* d_n,

такви да важи:

1. $u_n(\cdot + r_n^j, \cdot) \overset{C^{\infty}_{loc}}{\rightrightarrows} v^j, \quad j = 1, \ldots, a-1$;
2. $u_n(\cdot + \tau_n^j, \cdot) \overset{C^{\infty}_{loc}}{\rightrightarrows} w^j, \quad j = 1, \ldots, b-1$;
3. $(\alpha_n, u_n(\cdot + c_n, \cdot)) \overset{C^{\infty}_{loc}}{\rightrightarrows} (\alpha, u^1)$;
4. $u_n \overset{C^{\infty}_{loc}}{\rightrightarrows} u$;
5. $(u_n(\cdot + d_n, \cdot), \beta_n) \overset{C^{\infty}_{loc}}{\rightrightarrows} (u^2, \beta)$;
6. $1 \leq l + k + a + b \leq m_{f_1}(p) - m_{f_2}(q) + 1$.

Као и раније, може да се деси да је неки од бројева k, l, a или b једнак нули, односно да не долази до распадања обе трајекторије или оба цилиндрична краја.

Напомена 52. Овде ћемо (видети доказ који следи) елементима скупова облика $\mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J)$ сматрати парове (u, γ) који задовољавају једначину (2.1.9) уз следеће измене: u је дефинисано на бесконачној траци $\mathbb{R} \times [0,1]$ а не на полутраци $[0, +\infty) \times [0,1]$ (наравно, ρ_{R_0} које учествује у (2.1.9) је сада глатка неопадајућа функција дефинисана на $\mathbb{R}$, једнака нули на $(-\infty, R_0]$, и јединици на $[R_0{+}1, +\infty)$). Оно што је за нас од интереса су ПСС хомоморфизми које ови скупови индукују. Помоћу оператора ланчасте хомотопије (коришћењем сличних аргумената као у Поглављу 6.1.2 или у доказу Теореме 49 у [75]) може се доказати да су хомоморфизми индуковани пресликавањима која за домен имају траку и пресликавањима која за домен имају полутраку исти на нивоу хомологија. Слично важи скупове облика $\mathcal{M}_{R_0}(x, H, J; p, f, g)$. $\diamondsuit$

Доказ Тврђења 51: Део везан за градијентне трајекторије је потпуно исти као и у доказу Тврђења 42. Пређимо на део тврђења везан за низ u_n. У (4.2.4) доказали смо

$$0=\mathcal{A}_{\widetilde{H}_R}(u_n(+\infty,t))-\mathcal{A}_{\widetilde{H}_R}(u_n(-\infty,t))=-\frac{1}{2}E(u_n)-\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\widetilde{H}_R}{ds}(s,u_n)dsdt. \tag{4.2.16}$$

Подсетимо се да су сви Хамилтонијани $\widetilde{H}_R$ настали множењем функције ρ_R дефинисане у (3.1.2) и фиксираних Хамилтонијана H_1 и H_2, и то тако да је функција ρ_R различита од константе само на интервалима укупне дужине највише 2. Због тога је израз $\dfrac{d\widetilde{H}_R}{ds}(s,u_n)$ различит од нуле на скупу мере највише 2, па, како H_1 и H_2 имају компактне носаче у T^*M, имамо

$$\left|\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\widetilde{H}_R}{ds}(s,u_n)dsdt\right|\leq c.$$

Доказали смо униформну ограниченост енергије, па можемо да применимо Громовљеве теореме о конвергенцији, и из истих разлога као у доказу Тврђења 42, елиминишемо могућност постојања холоморфних мехурова. Такође, на исти начин доказујемо тврђење из Леме 49: ако је $C^\infty_{loc}-$ лимес (који постоји због доказане ограничености енергије) елемент полазног простора, тада низ $(R_n,\alpha_n,u_n,\beta_n)$ конвергира и у $W^{1,r}-$ топологији.

У случају да је низ R_n ограничен, из њега можемо да издвојимо конвергентан подниз – поново исто означен – $R_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\widetilde{R}$, па да на одговарајући подниз (α_n,u_n,β_n) применимо расуђивање из Тврђења 42; уколико је $\widetilde{R}=R_0$, средишњи неизломљени објекат у граничном изломљеном је $(\alpha,u,\beta)\in\mathcal{M}_{R_0}\left((p^l,q^0),\vec{f},\overrightarrow{H}\right)$, а ако није, онда је то $(\widetilde{R},\alpha,u,\beta)\in\mathcal{M}\left(R,(p^l,q^0),\vec{f},\overrightarrow{H}\right)$.

Ако низ R_n није ограничен, тврђења која се односе на низ u_n важе и даље. Можемо да претпоставимо да $R_n\to\infty$. Гранични диск $u(s,t):=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(s,t)$ је решење пертурбоване Коши–Риманове једначине (4.2.3).

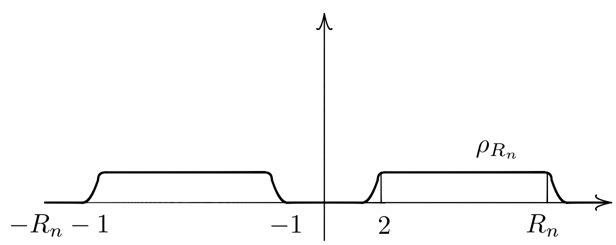
Како је

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J\frac{\partial u}{\partial t} = X_{H_1}(u), \text{ за } s \leq -2; \quad \frac{\partial u}{\partial s} + J\frac{\partial u}{\partial t} = X_{H_2}(u), \text{ за } s \geq 2$$

то је $u(\pm\infty, t) = \lim_{s\to\pm\infty} u(s,t)$ Хамилтонов пут са крајевима на нултом сечењу који одговара Хамилтонијану H_1 у $-\infty$ а Хамилтонијану H_2 у $+\infty$. Нека је $x_a(t) := u(-\infty, t)$. Посматрајмо низ $\check{u}_n(s,t) := u_n(s - R_n, t)$. Важи

$$\frac{\partial \check{u}_n}{\partial s}(s,t) + J\frac{\partial \check{u}_n}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial u_n}{\partial s}(s - R_n, t) + J\frac{\partial u_n}{\partial t}(s - R_n, t).$$

За свако n, u_n задовољава пертурбовану Коши–Риманову једначину дефинисану помоћу функције ρ_{R_n} чији је график приказан на Слици 4.4.



Слика 4.4: Функција ρ_{R_n}

Како је

$$s - R_n \in [-R_n, -2] \Leftrightarrow s \in [0, R_n - 2],$$
$$s - R_n \in (-\infty, -R_n - 1] \Leftrightarrow s \in (-\infty, -1],$$

то видимо да низ $\check{u}_n$ задовољава једнакост

$$\frac{\partial \check{u}_n}{\partial s}(s,t) + J\frac{\partial \check{u}_n}{\partial t}(s,t) = \begin{cases} 0, & s \leq -1, \\ X_{H_1}, & s \in [0, R_n - 2]. \end{cases}$$

Низ $\check{u}_n$ у околини $-\infty$ задовољава услове Тврђења 42, односно конвергира равномерно (на $(-\infty, c] \times [0,1]$) ка неком објекту, означимо га са u^1, за који важи $u^1(-\infty, t) = \alpha(0)$. Како за свако $s \geq -1$ постоји n_0 такво да, за свако $n \geq n_0$ важи

$$\frac{\partial \check{u}_n}{\partial s}(s,t) + J\frac{\partial \check{u}_n}{\partial t}(s,t) = X_{H_1},$$

то је

$$u^1(+\infty, t) = x_1(t),$$

где је $x_1(t)$ Хамилтонов пут са крајевима на O_M који одговара Хамилтонијану H_1. Настављамо поступак слично као у случају ломљења трајекторија.[12] Ако се путеви x_1 и x_a поклапају, доказ је завршен, односно, $a = 1$. Ако то није случај, тада је $\mathcal{A}_{H_1}(x_1) \geq \mathcal{A}_{H_1}(x_a)$. Наиме, $\mathcal{A}_{H_1}$ опада дуж свог тока, а за произвољне s_1 и s_2 постоји n_0 такво да за свако $n \geq n_0$ важи $s_1 - R_n < s_2$, па је:

$$\mathcal{A}_{H_1}(\check{u}_n(s_1, t)) = \mathcal{A}_{H_1}(u(s_1 - R_n, t)) \geq \mathcal{A}_{H_1}(u_n(s_2, t)).$$

Ако у претходној неједнакости пустимо да $n \to \infty$, добијамо

$$\mathcal{A}_{H_1}(u^1(s_1, t)) \geq \mathcal{A}_{H_1}(u(s_2, t)).$$

Коначно, ако $s_1 \to +\infty$, а $s_2 \to -\infty$, добијамо $\mathcal{A}_{H_1}(x_1) \geq \mathcal{A}_{H_1}(x_a)$. Можемо претпоставити да функционал дејства $\mathcal{A}_{H_1}$ узима различите вредности за различите Хамилтонове путеве, односно да је $\mathcal{A}_{H_1}(x^1) > \mathcal{A}_{H_1}(x^a)$ (видети Напомену 53 која следи из доказа). Сада изаберимо регуларну вредност d функционала $\mathcal{A}_{H_1}(x^a)$ у интервалу $(\mathcal{A}_{H_1}(x^a), \mathcal{A}_{H_1}(x^1))$ и низ тачака t_n такав да је $\mathcal{A}_{H_1}(u_n(\cdot + t_n, \cdot)) = d$. Након коначно много корака поступак се завршава. $\square$

Напомена 53. Нека је $H : T^*M \to \mathbb{R}$ глатка функција са компактним носачем таква да је $O_M \pitchfork \phi_1^H(O_M)$. Претпоставимо да је $\mathcal{A}_H(\gamma_1) = \mathcal{A}_H(\gamma_2)$ за два различита Хамилтонова пута која почињу и завршавају се на O_M. Изаберимо отворене скупове U и V такве да важи:

1. $\overline{V}$ компактан,
2. $\gamma_1([0,1]) \subset U \subset \overline{U} \subset V$,
3. γ_1 је једини Хамилтонов пут са крајевима у нултом сечењу који има непразан пресек са скупом $\overline{V}$.[13]

[12] Низ c_n у формулацији Тврђења је низ $-R_n$.

[13] Могуће је испунити овај услов јер су Хамилтонови путеви са крајевима на O_M изоловани.

Изаберимо глатку функцију β такву да важи

$$\beta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{U}, \\ 0, & x \notin V. \end{cases}$$

Нека је $\varepsilon_0 > 0$. Дефинишимо Хамилтонијан $\widehat{H} := H + \varepsilon_0 \beta$. Из дефиниције функционала дејства

$$\mathcal{A}_{\widehat{H}}(\gamma) = \int_0^1 \gamma^* \theta - \widehat{H} dt$$

видимо да је

$$\mathcal{A}_{\widehat{H}}(\gamma_1) = \mathcal{A}_H(\gamma_1) - \varepsilon_0 = \mathcal{A}_H(\gamma_2) - \varepsilon_0 < \mathcal{A}_H(\gamma_2) = \mathcal{A}_{\widehat{H}}(\gamma_2).$$

Очигледно је да се у U и ван V Хамилтонови путеви са крајевима на нултом сечењу за Хамилтонијане H и $\widehat{H}$ поклапају. Нека је $x \in \overline{V} \setminus U$ произвољно и $\widehat{\gamma}$ решење једначине

$$\dot{\widehat{\gamma}} = X_{\widehat{H}}(\widehat{\gamma}), \quad \widehat{\gamma}(c) = x,$$

за неко $c \in [0,1]$. Нека је γ решење једначине

$$\dot{\gamma} = X_H(\gamma), \quad \gamma(c) = x.$$

Како је $x = \gamma(c) \in \overline{V} \setminus U$, то из услова 3) у дефиницији околина U и V следи да $\gamma(0) \notin O_M$ или $\gamma(1) \notin O_M$. Претпоставимо да важи $\gamma(0) \notin O_M$. Путеви $\widehat{\gamma}$ и γ су уствари крајње тачке фамилије (за $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$) γ_ε решења једначине

$$\dot{\gamma_\varepsilon} = X(\gamma_\varepsilon, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

где је

$$X(x, \varepsilon) = X_H(x) + \varepsilon X_\beta(x).$$

Ако x није критична тачка функције H, тада из Теореме о глаткој зависности решења обичне диференцијалне једначине од параметра ε, имамо да је $d(\widehat{\gamma}(0), \gamma(0)) < \delta$. Смањујући ε ако је потребно, закључујемо да ни $\widehat{\gamma}(0)$ не припада O_M. Закључујемо да $\widehat{\gamma}$ није Хамилтонов пут придружен Хамилтонијану $\widehat{H}$ са крајевима на O_M. (Ако је $x \in \mathrm{Crit}(H) \cap \mathrm{Crit}(\beta)$, тада исти закључак очигледно важи, јер је $\widehat{\gamma} \equiv x$. Ако је $x \in \mathrm{Crit}(H) \setminus \mathrm{Crit}(\beta)$, тада можемо да применимо исто резоновање на векторско поље $X(x, \varepsilon) = X_{\widehat{H}}(x) - \varepsilon X_\beta(x)$.) Одавде следи, како су $x \in \overline{V} \setminus U$ и $c \in [0,1]$ били произвољни, да не постоји Хамилтонов пут са крајевима на нултом сечењу придружен

Хамилтонијану $\widehat{H}$ који сече скуп $\overline{V} \setminus U$. На овај начин смо конструисали Хамилтонијан $\widehat{H}$ (произвољно близу полазном H), не променивши критичне тачке функционала дејства, такав да је $\mathcal{A}_{\widehat{H}}(\gamma_1) \neq \mathcal{A}_{\widehat{H}}(\gamma_2)$. Понављајући поступак у околини сваког Хамилтоновог пута са крајевима на O_M (којих има коначно много), добијамо Хамилтонијан (произвољно близу полазном), чији функционал дејства има различите вредности у различитим критичним тачкама. $\diamondsuit$

4.3 Лепљење

У овом поглављу доказујемо обратну инклузију у опису граница многострукости мешовитог типа, инклузију $\mathcal{B} \subset \partial\mathcal{M}$. Лепљење представља технику која доказује да, за дати фиксирани изломљени објекат A (на пример, изломљени објекат из формулције Теореме 40), постоји низ неизломљених објеката из многострукости чији границу желимо да опишемо, који конвергира ка A у већ описаном, геометријском, смислу. Овде ћемо дати доказ Теореме лепљења у случају многострукости типа $\mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J)$ (на Слици 2.2 на страни 23), и то када „се ломи" холоморфни диск (видети и [34]). Докази за остале случајеве се суштински не разликују од овог, осим што је доказ лепљења у случају трајекторије значајно једноставнији.[14] Главни резултат овог поглавља је следеће тврђење.

Тврђење 54. *a) Нека је $K \subset \mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J) \times \widehat{\mathcal{M}}(x, y, H, J)$ компактан скуп. Тада постоји таква доња граница $\rho_0 = \rho_0(K)$ и глатко утапање*

$$\begin{aligned} \sharp : K \times [\rho_0, +\infty) &\hookrightarrow \mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; y, H, J) \\ ((\gamma, u), v, \rho) &\mapsto (\gamma, u)\sharp_\rho v, \end{aligned}$$

за које важи: ако $\rho_n \to \infty$, тада $(\gamma, u)\sharp_{\rho_n} v \xrightarrow{w} ((\gamma, u), v)$. Прецизније, ако уведемо ознаку $(\gamma_n, u_n) := (\gamma, u)\sharp_{\rho_n} v$, тада $(\gamma_n, u_n) \xrightarrow{C^\infty_{loc}} (\gamma, u)$ и постоји низ

[14] Наиме, у случају градијентних трајекторија, радимо са доменом димензије 1, па се за тангентни простор многострукости пресликавања $\mathcal{P}$ (из Главе 3) може узети $W^{1,2}$ који је Хилбертов, што доста поједностављује доказе (видети доказе Тврђења 56 и Леме 58).

$\tau_n \in \mathbb{R}$, *такав да*

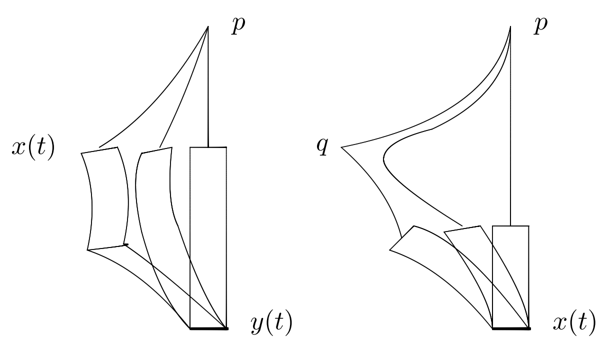
$$u_n(\cdot + \tau_n, \cdot) \xrightarrow{C^\infty_{loc}} v(\cdot, \cdot).$$

б) Нека је K *компактан подсуп скупа* $\widehat{\mathcal{M}}(p,q,f,g) \times \mathcal{M}_{R_0}(q,f,g;x,H,J)$. *Постоји таква доња граница* $\rho_0 = \rho_0(K)$ *и глатко утапање*

$$\sharp : K \times [\rho_0, +\infty) \hookrightarrow \mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$$
$$(\alpha, (\gamma, u), \rho) \mapsto \alpha\sharp_\rho(\gamma, u),$$

за које важи: ако $\rho_n \to \infty$, *тада* $\alpha\sharp_{\rho_n}(\gamma,u) \xrightarrow{w} (\alpha,(\gamma,u))$. *Прецизније, ако је* $(\gamma_n, u_n) := \alpha\sharp_{\rho_n}(\gamma, u)$, *тада* $(\gamma_n, u_n) \xrightarrow{C^\infty_{loc}} (\gamma, u)$ *и постоји низ* $\tau_n \in \mathbb{R}$, *такав да*

$$\gamma_n(\cdot + \tau_n) \xrightarrow{C^\infty_{loc}} \alpha(\cdot).$$



Слика 4.5: Лепљење изломљених трајекторија мешовитог и јединственог типа

Пресликавање $\sharp$ из претходног тврђења називамо *лепљењем* објекта мешовитог (комбинованог) типа (γ, u) и (пертурбоване) холоморфне траке v – у случају а), односно градијентне трајекторије α и објекта комбинованог типа – у случају б), видети и Слику 4.5. Параметар $\rho \geq \rho_0$ називамо *параметром лепљења*.

Пре него што докажемо Тврђење 54, прецизирајмо скупове (односно многострукости) којима припадају поменути објекти. За дате Хамилтонове путеве $x(t)$ и $y(t)$ са крајевима у O_M, тангентни простор у тачки u_0

на многострукост свих глатких пресликавања u за која важи

$$\begin{cases} u : D \to T^*M, \\ u(s,0), u(s,1) \in O_M, \\ u(-\infty,t) = x(t),\, u(+\infty,t) = y(t) \end{cases} \tag{4.3.1}$$

је скуп свих глатких векторских поља ξ дуж u_0 таквих да је

$$\begin{cases} \xi : D \to TT^*M, \\ \xi(s,t) \in T_{u_0(s,t)}T^*M, \\ \xi(-\infty,t) = \xi(+\infty,t) = 0. \end{cases}$$

Са $W^{1,r}_{u_0}(x,y)$ и $L^r_{u_0}(x,y)$ означаваћемо комплетирање поменутог тангентног простора у $W^{1,r}-$ и L^r- норми Собољева, а са $\mathcal{P}^{1,r}(x,y)$ скуп свих u из (4.3.1) таквих да је тангентни простор у тачки u_0 дат са:

$$T_{u_0}\mathcal{P}^{1,r}(x,y) = W^{1,r}_{u_0}(x,y).$$

Ако са $\mathcal{M}(x,y,H,J)$ означимо скуп свих пресликавања u за које важи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)) = 0, \\ u(s,i) \in L_0,\ i \in \{0,1\}, \\ u(-\infty,t) = x(t), \\ u(+\infty,t) = y(t), \end{cases} \tag{4.3.2}$$

тада је скуп $\mathcal{M}(x,y,H,J)$ језгро глатког сечења:

$$K(u) = \overline{\partial}_{H,J}(u) = \frac{\partial u}{\partial s} + J(u)\frac{\partial u}{\partial t} - J(u)X_H(u) \tag{4.3.3}$$

Банаховог раслојења

$$\mathcal{E}(x,y) \to \mathcal{P}^{1,r}(x,y)$$

са слојем $L^r_u(x,y)$ над $u \in \mathcal{P}^{1,r}(x,y)$ (видети [19, 20] за детаље). Линеаризација овог сечења у тачки u је Фредхолмов оператор дефинисан на $W^{1,r}_u(x,y)$ са вредностима у $L^r_u(x,y)$, облика

$$DK_u(\xi) = \nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}}\xi + J(u)\nabla_{\frac{\partial u}{\partial t}}\xi + \nabla_\xi\left(J(u)\right)\partial_t u - \nabla_\xi \nabla H(u). \tag{4.3.4}$$

Његов Фредхолмов индекс је једнак разлици Масловљевих индекса на крајевима $\mu_H(x) - \mu_H(y)$ (видети [56, 65]).

Напомена 55. Нека је

$$\Phi : (\mathbb{R} \times [0,1]) \times \mathbb{R}^{2n} \to u^*(TT^*M)$$

унитарна тривијализација, то јест, тривијализација за коју важи:

$$\Phi \circ J_0 = J \circ \Phi, \quad \omega(\Phi\cdot, \Phi\cdot) = \omega_0(\cdot, \cdot),$$

где су J_0 и ω_0 стандардна симплектичка и скоро комплексна структура у $\mathbb{R}^{2n}$ (унитарна тривијализација увек постоји, уколико постоји произвољна тривијализација; видети, на пример, Лему 3.1.4 у [69]). Нека је $DK_u^{\mathrm{triv}} := \Phi^{-1} \circ DK_u \circ \Phi$ тривијализовани оператор. Како је

$$\begin{aligned} \nabla_s(\Phi\xi) &= (\nabla_s\Phi)\,\xi + \Phi(\partial_s\eta), \\ \nabla_t(\Phi\xi) &= (\nabla_t\Phi)\,\xi + \Phi(\partial_t\eta), \end{aligned}$$

то је

$$DK_u^{\mathrm{triv}}(\xi) = \frac{\partial\xi}{\partial s}(s,t) + J_0\frac{\partial\xi}{\partial t}(s,t) + S(s,t)\xi(s,t), \tag{4.3.5}$$

где је

$$S(s,t)\xi = \Phi^{-1}\left((\nabla_s\Phi)\,\xi + J(u)\,(\nabla_t\Phi)\,\xi + (\nabla_{\Phi\xi}J(u))\,\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla_{\Phi\xi}\nabla H(u)\right).$$

Гранична пресликавања

$$S(\pm\infty, t) = \lim_{s\to\pm\infty} S(s,t) = \Phi^{-1}J\,(\nabla_t\Phi - \nabla_\Phi X_H) \tag{4.3.6}$$

су симетрична на скупу векторских функција $\xi : [0,1]$ које имају крајеве $\xi(0)$, $\xi(1)$ на $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ у односу на L^2-скаларни производ. Наиме:

$$\begin{aligned} (\nabla_t\Phi - \nabla_\Phi X_H)\xi = -\Phi\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) + \nabla_t(\Phi\xi) - \nabla_{\Phi\xi}X_H = \\ -\Phi\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) + \nabla_{X_H}(\Phi\xi) - \nabla_{\Phi\xi}X_H = -\Phi\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right), \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

при чему је последња једнакост тачна јер је $u(+\infty,\cdot)$ Хамилтонов пут за Хамилтонијан H (па је $X_H = \frac{\partial u}{\partial t}$), а $\Phi\xi$ векторско поље дуж u, (па су $\Phi\xi$

и $X_H = \frac{\partial u}{\partial t}$ генерисани двопараметарском фамилијом, односно $\nabla_{X_H}(\Phi\xi) = \nabla_{\Phi\xi}X_H)$. Даље је:

$$\langle S(\pm\infty,t)\xi(t),\eta(t)\rangle_{L^2} = \int_0^1 \langle S(\pm\infty,t)\xi(t),\eta(t)\rangle\,dt =$$

$$-\int_0^1 \left\langle \Phi^{-1}J\Phi\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}(t)\right),\eta(t)\right\rangle dt \overset{(i)}{=} -\int_0^1 \left\langle J_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}(t)\right),\eta(t)\right\rangle dt \overset{(ii)}{=}$$

$$\int_0^1 \left\langle \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}(t)\right), J_0\eta(t)\right\rangle dt \overset{(iii)}{=} \langle\xi(t),J_0\eta(t)\rangle\Big|_0^1 - \int_0^1 \left\langle \xi, \left(\frac{\partial J_0\eta}{\partial t}\right)\right\rangle dt \overset{(iv)}{=}$$

$$-\int_0^1 \left\langle \xi, J_0\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)\right\rangle dt = \langle\eta(t),S(\pm\infty,t)\xi(t)\rangle_{L^2}.$$

Једнакост (i) важи јер је тривијализација Φ унитарна; једнакост (ii) јер је пресликавање J_0 антисиметрично; једнакост (iii) је парцијална интеграција; једнакост (iv) важи јер је J_0 линеарно пресликавање (независно од t) и $\xi(0),\xi_1 \in \mathbb{R}\times\{0\}$, док је

$$J_0\eta(0), J_0\eta(1) \in J_0(\mathbb{R}^n\times\{0\}) = (\mathbb{R}^n\times\{0\})^\perp.$$

Асимптотска пресликавања

$$K^\pm : \xi \mapsto \frac{\partial\xi}{\partial s} + J(\pm\infty,t)\frac{\partial\xi}{\partial t} + S(\pm\infty,t)\xi \tag{4.3.8}$$

су изоморфизми простора $W^{1,r}$ и L^r, где је први простор свих пресликавања из $W^{1,r}(\mathbb{R}\times[0,1],\mathbb{R}^{2n})$ са крајевима на нултом сечењу, а други простор свих пресликавања из $L^r(\mathbb{R}\times[0,1],\mathbb{R}^{2n})$ са крајевима на нултом сечењу. Заиста, овде се ради о оператору типа (2.3.3) таквом да је $A(s) = -\frac{\partial}{\partial t} - S(\pm\infty,t)$. Из дефиниције спектралног тока видимо да је у овом случају он једнак нули, па су језгро и којезгро оператора $K^\pm$ изоморфни. Због тога, да бисмо доказали да је $K^\pm$ изоморфизам, довољно је докажемо да је инјективан.

Нека је ξ нула оператора (4.3.8), то јест, нека је

$$\frac{\partial\xi}{\partial s} + J\frac{\partial\xi}{\partial t} + S(\pm\infty,t)\xi = 0. \tag{4.3.9}$$

Посматрајмо глатку функцију

$$f(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\xi(s,t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \langle\xi,\xi\rangle dt.$$

Ако докажемо да је $\frac{\partial \xi}{\partial s}=0$, из услова

$$\frac{df}{ds}=\int\limits_0^1\left\langle\frac{\partial\xi}{\partial s},\xi\right\rangle dt=0$$

следиће да је функција f константа. Из услова $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds<+\infty$[15] следиће $f\equiv 0\Rightarrow \xi=0$. Докажимо зато да је $\frac{\partial\xi}{\partial s}=0$. Нека је

$$G:W^{1,2}\to L^2,\quad G:\eta\mapsto J\frac{\partial\eta}{\partial t}+S\eta,\quad (S=S(\pm\infty,t))$$

и

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(s)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\langle\eta,G\eta\rangle\,dt.$$

Имамо

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{ds}&=-\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1\left\langle\frac{\partial\eta}{\partial s},G\eta\right\rangle dt+\int\limits_0^1\left\langle G\frac{\partial\eta}{\partial s},\eta\right\rangle dt\right)\\
&\overset{(i)}{=}-\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1\left\langle\frac{\partial\eta}{\partial s},G\eta\right\rangle dt+\int\limits_0^1\left\langle J\frac{\partial^2\eta}{\partial s\partial t}+S\frac{\partial\eta}{\partial s},\eta\right\rangle dt\right)\\
&\overset{(ii)}{=}-\frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial\eta}{\partial s},\eta\right\rangle\Big|_0^1-\int\limits_0^1\left\langle\frac{\partial\eta}{\partial s},G\eta\right\rangle dt\\
&=-\frac{d}{ds}\left(\|\eta(s,1)\|^2-\|\eta(s,0)\|^2\right)+\int\limits_0^1\left\langle G\eta-K^{\pm}\eta,G\eta\right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Једнакост (i) следи из дефиниције оператора G. Једнакост (ii) добија парцијалном интеграцијом и коришћењем симетричности оператора S и антисиметричности оператора J. Претпоставимо сада да је $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,1],\mathbb{R}^{2n})$ глатка функција са компактним носачем, и интегралимо добијену једнакост по s од $-\infty$ до $+\infty$. Имамо:

$$0=\|G\eta\|^2_{L^2}-\langle K^{\pm}\eta,G\eta\rangle_{L^2}$$

[15] Наиме, из асимптотских оцена (4.2.9) на страни 80 следи да је $\xi\in W^{1,2}(\mathbb{R}\times[0,1],\mathbb{R}^{2n})$.

одакле, из Коши–Шварцове неједнакости следи

$$\|G\eta\|_{L^2} \leq \|K^{\pm}\eta\|_{L^2} \tag{4.3.10}$$

за свако глатко η са компактним носачем, а тиме и за свако $\eta \in W^{1,2}$. Ако је ξ још решење једначине (4.3.9), из (4.3.10) следи да је $\|G\xi\|_{L^2} = 0$, а како је ξ и глатко, то је $G\xi = 0$, па је $\frac{\partial \xi}{\partial s} = 0$. $\diamondsuit$

Ситуација са $\mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J)$ је слична оној у случају општих комбинованих објеката из Главе 3.2. Собољевљева комплетирања простора глатких пресликавања:

$$\begin{cases} \gamma : (-\infty, 0] \to O_M, \\ \gamma(-\infty) = p \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u : [0, +\infty) \times [0, 1] \to T^*M, \\ u(0, t), u(s, 0), u(s, 1) \in O_M, \\ u(+\infty, t) = x(t) \end{cases}$$

означаваћемо са $\mathcal{P}^{1,r}(p)$ и $\mathcal{P}^{1,r}(x)$, а одговарајуће тангентне просторе са $W^{1,r}_\gamma(p)$ и $W^{1,r}_u(x)$. Као и у случају комбинованих објеката општег типа (на страни 47), коришћењем евалуације

$$\mathrm{ev} : \mathcal{P}^{1,r}(p) \times \mathcal{P}^{1,r}(x) \to M^2, \quad \mathrm{ev}(\gamma, u) = \left(\gamma(0), u\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right),$$

може се доказати да је

$$\mathcal{P}^{1,r}(p, x) := \left\{(\gamma, u) \in \mathcal{P}^{1,r}(p) \times \mathcal{P}^{1,r}(x) \mid \gamma(0) = u\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \mathrm{ev}^{-1}(\Delta)$$

глатка Банахова многострукост бесконачне димензије, са тангентним простором $W^{1,r}_{(\gamma,u)}(p, x)$. На исти начин на који смо доказали Тврђење 29, доказује се да је оператор

$$\begin{aligned} &(DF)_{(\gamma,u)} : W^{1,r}_{(\gamma,u)}(p, x) \to L^r_\gamma(p) \times L^r_u(x), \quad (DF)_{(\gamma,u)} = ((DF_1)_\gamma, (DF_2)_u), \\ &(DF_1)_\gamma : W^{1,r}(p) \to L^r(p), \quad (DF_1)_\gamma \eta = \nabla_{\frac{d\gamma}{ds}} \eta + \nabla_\eta \nabla f(\gamma), \\ &(DF_2)_u : W^{1,r}(x) \to L^r(x), \\ &(DF_2)_u \xi = \nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}} \xi + J(u) \nabla_{\frac{\partial u}{\partial t}} \xi + \nabla_\xi J(u) \partial_t u - \nabla_\xi \nabla(\rho_R H)(u). \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

који представља линеаризацију оператора

$$\begin{aligned} &F = \widetilde{F}|_{\mathcal{P}^{1,r}(p,x)}, \quad \widetilde{F} = (F_1, F_2), \\ &F_1(\gamma) = \frac{d\gamma}{ds} + \nabla f(\gamma), \quad F_2(u) = \overline{\partial}_{\rho_R H,J}\, u \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Фредхолмов, са Фредхолмовим индексом

$$\mathrm{Ind}(DF) = \mathrm{Ind}(DF_1) + \mathrm{Ind}(DF_2) - n = m_f(p) - \mu_H(x) - \frac{n}{2}$$

(видети и [34]).

Доказ Тврђења 54 се ослања на модификацију Банаховог принцип контракције (прецизније, егзистенција неизломљеног објекта у произвољној близини изломљеног је последица апстрактне Леме 57). Како је он веома дугачак, поделићемо га на неколико делова. Први корак је конструкција неизломљеног објекта мешовитог типа који је, у геометријском смислу, близу фиксираног, изломљеног $((\gamma, u), v)$, али који није решење једначине $F = 0$. Овакав објекат називамо *апроксимативним решењем*. Циљ нам је да у близини апроксимативног решења нађемо и право решење, то је садржај апстрактне Леме 57 и зато проверамо све претпоставке наведене тамо. Доказујемо да извод оператора типа (4.3.12) у том апроксимативном решењу сурјекција за довољно велико ρ. Одавде ће следити егзистенција десног инверза извода поменутог оператора која је довољна за примену апстрактне Леме 57 – то је урађено у помоћном Тврђењу 56. Други корак је доказ да је поменути десни инверз ограничен и провера осталих претпоставки довољних за примену Леме 57 – ово је урађено у Леми 58 и остатку Поглавља 4.3.2. Последњи корак је доказ да је лепљење утапање, који је дат у Поглављу 4.3.3.

4.3.1 Пред-лепљење

Пред-лепљење представља придруживање неизломљеног објекта изломљеном – то јест пару, али тако да нови, „пред-залепљени” објекат није *тачно* решење градијентне, односно, Коши–Риманове једначине, већ само *апроксимативно*, које је произвољно близу (у геометријском смислу) полазном пару. Касније ћемо у близини овог апроксимативног решења наћи тачно решење, и то на јединствен начин. Нека је $w = (\gamma, u) \in \mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J)$ и $v \in \mathcal{M}(x, y, H, J)$. Означимо са

$$\beta^+ : \mathbb{R} \to [0, 1] \tag{4.3.13}$$

глатку, неопадајућу функцију, једнаку нули за $s \leq 0$ и једници за $s \geq 1$. Претпоставимо да важи $u(s,t) = \exp_{x(t)}(\xi(s,t))$ за свако $t \in [0,1]$ и $s \geq s_0$, и $v(s,t) = \exp_{x(t)}(\zeta(s,t))$ за свако $t \in [0,1]$ и $s \leq -s_0$. За $\rho \geq \rho_0 := \max\{2s_0, s_0{+}1\}$, дефинишимо:

$$u \sharp^0_\rho v(s,t) := \begin{cases} u(s,t), & 0 \leq s \leq \frac{\rho}{2}, \\ \exp_{x(t)}(\beta^+(-s + \frac{\rho}{2} + 1)\xi(s,t)), & \frac{\rho}{2} \leq s \leq \frac{\rho}{2} + 1, \\ x(t), & \frac{\rho}{2} + 1 \leq s \leq \rho, \\ \exp_{x(t)}(\beta^+(s - \rho)\zeta(s - 2\rho, t)), & \rho \leq s \leq \rho + 1, \\ v(s - 2\rho, t), & s \geq \rho + 1. \end{cases} \tag{4.3.14}$$

Сада дефинишимо:

$$\varpi := w \sharp^0_\rho v := (\gamma, u \sharp^0_\rho v). \tag{4.3.15}$$

Пресликавање $\sharp^0$ називамо *пред-лепљењем.*

Линеаризација пред-лепљења, за

$$\xi \in \mathrm{Ker}(DF_2)_u = T_u W^s(x, H), \quad \zeta \in \mathrm{Ker}(DK)_v = T_v \mathcal{M}(x, y, H, J)$$

је дата са

$$\xi\hat{\sharp}\zeta := D\sharp^0_\rho(u,v)(\xi,\zeta) = \begin{cases} \xi(s,t), & 0 \le s \le \frac{\rho}{2}, \\ \nabla_2 \exp(\beta^+(-s+\frac{\rho}{2}+1)\nabla_2 \exp^{-1}\xi(s,t)), & \frac{\rho}{2} \le s \le \frac{\rho}{2}+1, \\ 0, & \frac{\rho}{2}+1 \le s \le \rho, \\ \nabla_2 \exp(\beta^+(s-\rho)\nabla_2 \exp^{-1}\zeta(s-2\rho,t)), & \rho \le s \le \rho+1, \\ \zeta(s-2\rho,t), & s \ge \rho+1. \end{cases} \tag{4.3.16}$$

Овде је $\nabla_2 \exp$ линеаризација експоненцијалног пресликавања дуж слоја. Прецизније, за $P = T^*M$, нека

$$K : T(TP) \to TP, \quad \pi : TP \to P$$

означавају, редом, јединствену Леви–Чивита повезаност која одговара датој (фиксираној) Римановој метрици на P и канонску пројекцију. За $\xi \in T_pP$ такво да $\exp_p \xi$ припада нормалној околини тачке p (на којој је exp дифеоморфизам), означимо:

$$\nabla_1 \exp(\xi) := D\exp(\xi) \circ \left(D\pi|_{\mathrm{Ker}(K(\xi))}\right)^{-1} : T_{\pi(\xi)}P \xrightarrow{\cong} T_{\exp(\xi)}P$$
$$\nabla_2 \exp(\xi) := D\exp(\xi) \circ \left(K|_{\mathrm{Ker}(D\pi(\xi))}\right)^{-1} : T_{\pi(\xi)}P \xrightarrow{\cong} T_{\exp(\xi)}P$$

(видети Апендикс А.2 у [69] за више детаља).

Линеаризација пресликавања (4.3.15) је, за $\varsigma = (\eta,\xi)$ елемент простора $T_w\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$, односно $\eta \in \mathrm{Ker}(D_\gamma) = T_\gamma W^u(p,f)$, дата са

$$\varsigma\hat{\sharp}\zeta = (\eta,\xi)\hat{\sharp}\zeta = (\eta,\xi\hat{\sharp}\zeta).$$

Користићемо скраћене ознаке χ за тројку (w,u,ρ) и (ако желимо да подвучемо везу између ϖ и χ) ознаку ϖ_χ за ϖ као у (4.3.15).

Помоћу оператора F из (4.3.12) конструишимо пресликавање између раслојења

$$F_\varpi := \nabla_2 \exp_\varpi^{-1} \circ F \circ \exp_\varpi : \mathcal{E}^{1,r} \supset \mathcal{O}_\varpi \to \mathcal{E}^{0,r}, \tag{4.3.17}$$

где су $\mathcal{E}^{1,r}$ и $\mathcal{E}^{0,r}$ векторска раслојења над $K\times[\rho_0,\infty)$ са слојевима $W^{1,r}_{\varpi}(p,x)$ и $L^r_\gamma(p)\times L^r_{u\,\sharp^0_\rho\,v}(x)$, редом. Извод пресликавања F_ϖ дуж слоја

$$DF_\varpi(0):W^{1,r}_\varpi(p,x)\to L^r_\gamma(p)\times L^r_{u\,\sharp^0_\rho\,v}(x)$$

је управо коваријантни $(DF)_\varpi$ у тачки ϖ пресликавања F из (4.3.12).

Користићемо скраћену ознаку D_χ за $DF_{\varpi_\chi}(0)$. Слично, користићемо ознаку K_u за одговарајуће пресликавање раслојења придружено оператору K из (4.3.3) и D_u за $DK_u(0)=(DK)_u$.

Употребљаваћемо и следеће ознаке. Нека $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ означава стандардни скаларни производ:

$$\langle\xi,\zeta\rangle_{L^2}:=\int\langle\xi(\tau),\zeta(\tau)\rangle d\tau, \tag{4.3.18}$$

где је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ већ поменута Риманова метрика која учествује у дефиницији Собољевљевих норми и скоро комплексних структура. Следећи скупови су добро дефинисани

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}^\perp_w &:= \{\eta\in W^{1,r}_w(p,x)\mid \langle\eta,\xi\rangle_{L^2}=0 \text{ за свако } \xi\in\mathrm{Ker}(D_w)\}\\
\widetilde{L}^\perp_v &:= \{\eta\in W^{1,r}_v(x,y)\mid \langle\eta,\zeta\rangle_{L^2}=0 \text{ за свако } \zeta\in\mathrm{Ker}(D_v)\}\\
L^\perp_\chi &:= \{\eta\in W^{1,r}_\varpi(p,y)\mid \langle\eta,\xi\,\hat{\sharp}\,\zeta\rangle_{L^2}=0 \text{ за свако } (\xi,\zeta)\in\mathrm{Ker}(D_w)\times\mathrm{Ker}(D_v)\}.
\end{aligned}$$

Заиста, из експоненцијалног опадања градијентних трајекторија и (пертурбованих) холоморфних дискова (видети доказ Леме 49), следи да је $\xi\in L^q(p,x)$, $\zeta\in L^q(x,y)$ и $\xi\,\sharp\,\zeta\in L^q(p,y)$, за $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$.

Докажимо сада следеће помоћно Тврђење.

Тврђење 56. *Постоји доња граница $\rho_1\le\rho_0$ таква да је, за сваки параметар лепљења $\rho\ge\rho_1$ и сваки пар $(w,v)\in K$, Фредхолмов оператор $D_\chi:W^{1,r}_\varpi(p,y)\to L^r_\gamma(p)\times L^r_{u\,\sharp^0_\rho\,v}(y)$ типа (4.3.11) сурјекција. Како је $\mathrm{Ker}(D_\chi)$ коначне димензије, постоји комплемент Z простора $\mathrm{Ker}(D_\chi)$ у $W^{1,r}_\varpi(p,y)$ и пројекција на $\mathrm{Ker}(D_\chi)$, означимо је са $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(D_\chi)}$. Тада следећа композиција индукује изоморфизам:*

$$\varphi_\chi:=\mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}(D_\chi)}\circ\hat{\sharp}:\mathrm{Ker}(D_w)\times\mathrm{Ker}(D_v)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Ker}(D_\chi).$$

Доказ: Из формуле за индексе Фредхолмових оператора

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(D_w) &= m_f(p) - \left(\mu_H(x) + \frac{n}{2}\right)\\ \mathrm{Ind}(D_v) &= \mu_H(x) - \mu_H(y)\\ \mathrm{Ind}(D_\chi) &= m_f(p) - \left(\mu_H(x) + \frac{n}{2}\right)\end{aligned}$$

и чињенице да су D_w и D_v сурјективни, односно, да је:

$$\mathrm{Ind}(D_w) = \dim\mathrm{Ker}(D_w), \quad \mathrm{Ind}(D_v) = \dim\mathrm{Ker}(D_v),$$

следи

$$\dim\mathrm{Ker}(D_\chi) \geq \mathrm{Ind}(D_\chi) = \mathrm{Ind}(D_w) + \mathrm{Ind}(D_v) = \dim\mathrm{Ker}(D_w) + \dim\mathrm{Ker}(D_v). \tag{4.3.19}$$

Довољно је да докажемо да, за фиксиране $w, v \in K$ постоји доња граница $\rho(w, v)$, таква да је, за $\rho \geq \rho(w, v)$, пресликавање φ_χ сурјективно (како је K компактан, а сурјективност отворено својство,[16] ово ће обезбедити постојање униформне доње границе ρ_K такве да је φ_χ сурјективно за све $(w, v) \in K$, $\rho \geq \rho_K$). Заиста, ако претпоставимо да је φ_χ на, тада важи

$$\dim\mathrm{Ker}(D_w) + \dim\mathrm{Ker}(D_v) \geq \dim\mathrm{Ker}(D_\chi). \tag{4.3.20}$$

Из (4.3.19) и (4.3.20) закључујемо

$$\mathrm{Ind}(D_\chi) = \mathrm{Ind}(D_w) + \mathrm{Ind}(D_v) = \dim\mathrm{Ker}(D_w) + \dim\mathrm{Ker}(D_v) = \dim\mathrm{Ker}(D_\chi),$$

па је D_χ сурјективно и φ_χ инјективно, то јест, доказ Тврђења је завршен.

Докажимо, зато, да је пресликавање φ_χ на. Довољно је да докажемо да, за неко $C > 0$ и довољно велико ρ важи

$$\|D_\chi\varsigma\|_{L^r} \geq C\|\varsigma\|_{W^{1,r}} \tag{4.3.21}$$

за све $\varsigma \in L_\chi^\perp$. Заиста, када φ_χ не би био сурјективан, из декомпозиције $W^{1,r}_\varpi(p, y) = L_\chi^\perp \oplus \left(\mathrm{Ker}(D_w)\hat{\sharp}\,\mathrm{Ker}(D_u)\right)$ би следило да постоји $\varsigma \in \mathrm{Ker}(D_\chi)$

[16] Ако је φ_χ сурјективно, онда је сурјективно и $\varphi_{\chi'}$ за χ' довољно близу χ.

такво да $\varsigma \in L_\chi^\perp$. Али тада из (4.3.21) следи да ς мора бити нула вектор. Претпоставимо да (4.3.21) не важи. То значи да постоје низови $\rho_n \to \infty$ и $\varsigma_n \in L_{\chi_n}^\perp$ такви да

$$\|\varsigma_n\|_{W^{1,r}} = 1 \quad \text{и} \quad \|D_{\chi_n}\varsigma_n\|_{L^r} \to 0. \tag{4.3.22}$$

Овде $\chi_n = (w, v, \rho_n)$, то јест, w и v су фиксирани, а $\rho_n \to \infty$.

Наставак доказа можемо да сведемо на тривијални случај $\mathbb{R}^{2n}$ уместо T^*M. Заиста нека је Θ домен пресликавања w, то јест:

$$\Theta := (-\infty, 0] \cup ([0, +\infty) \times [0, 1]). \tag{4.3.23}$$

Изаберимо тривијализацију $\phi_x : TT^*M|_{N(x)} \to N(x) \times \mathbb{R}^{2n}$ (где је $N(x)$ нормална околина пута $x(t)$) и тривијализације ϕ_w раслојења $w^*(TT^*M)$ и ϕ_v раслојења $v^*(TT^*M)$, и то такве да су пресликавања $\phi_x(s,t)$, $\phi_w(s,t)$, $\phi_v(s,t)$ униформно по (s,t) ограничена у операторској норми.[17] За $\rho \geq \rho_0$ дефинишимо тривијализацију ϕ_ρ раслојења $(w\sharp_\rho^0 v)^* TT^*M$ такву да је

$$\begin{aligned}
\phi_\rho|_{\left[\frac{\rho}{2}, \rho+1\right]} &\equiv \phi_x|_{\left[\frac{\rho}{2}, \rho+1\right]}, \\
\phi_\rho|_{(-\infty, \frac{\rho}{2}]} &\equiv \phi_1 \circ \phi_w|_{(-\infty, \frac{\rho}{2}]}, \\
\phi_\rho|_{[\rho+1, +\infty)} &\equiv \phi_2 \circ \phi_v|_{[\rho+1, +\infty)}
\end{aligned}$$

где су

$$\phi_1(s,t) := \phi_x\left(\frac{\rho}{2}, t\right) \circ \phi_w^{-1}\left(\frac{\rho}{2}, t\right), \quad \phi_2(s,t) := \phi_x(\rho+1, t) \circ \phi_v^{-1}(\rho+1, t).$$

Тако долазимо до тривијализације

$$\phi : \bigcup_{\rho \geq \rho_0} (w\sharp_\rho^0 v)^* TT^*M \to [\rho_0, +\infty) \times \Theta \times \mathbb{R}^{2n}$$

која је униформно ограничена у операторској норми. Тако да се процена коју желимо да докажемо преноси са тривијалног на нетривијални случај.

[17] На пример, ако је $\phi(s,t)$ произвољна тривијализација, можемо узети $\frac{\phi(s,t)}{\|\phi(s,t)\|}$.

Идеја доказа је следећа: у близини Хамилтонијана распада, $x(t)$, користићемо чињеницу да су асимптотски линеаризовани оператори изоморфизми (видети Напомену 55); далеко од $x(t)$ користимо конструкцију пред-лепљења: пред-залепљени објекти су (до на транслацију) једнаки полазним w и u. Прецизније, нека је $\beta :\to [0,1]$ глатка функција једнака нули за $s \in (-\infty, \frac{1}{2} - \varepsilon\,] \cup [1+\varepsilon, \infty)$, а јединици за $s \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ за фиксирано, погодно одабрано $\varepsilon > 0$. Нека је $\beta_n(s) := \beta\left(\frac{s}{\rho_n}\right)$. Из конструкције пред-лепљења се лако изводи да важи:

$$\|D_{\chi_n}\varsigma_n\|_{L^r} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{\partial}{\partial s}(\beta_n\varsigma_n) + J(\infty,\cdot)\frac{\partial \beta_n\varsigma_n}{\partial t} + A(\infty,\cdot)\beta_n\varsigma_n\right\|_{L^r} \to 0$$

(у сличној ситуацији ово је прецизно доказано у [19, 24] или [69]). Пошто је $\frac{\partial}{\partial s} + J(\infty)\frac{\partial}{\partial t} + A(\infty)$ изоморфизам, важи $\beta_n\varsigma_n \xrightarrow{W^{1,r}} 0$, па

$$\left\|\varsigma_n|_{\left[\frac{\rho_n}{2},\rho_n+1\right]}\right\|_{W^{1,r}} \to 0. \tag{4.3.24}$$

Означимо са $\beta^-(s) := \beta^+(-s)$, где је β^+ дефинисано у (4.3.13) и са $\beta^{\pm}_\tau(s) := \beta^{\pm}(s+\tau)$, $\varsigma_\tau(s,t) := \varsigma(\tau+s,t)$. Сада из (4.3.22) и (4.3.24) следи

$$\left\|D_w(\beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1}\varsigma_n)\right\|_{L^r} \to 0 \quad \text{и} \quad \left\|D_v(\beta^+_{\rho_n}(\varsigma_n)_{2\rho_n})\right\|_{L^r} \to 0. \tag{4.3.25}$$

Али $\beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1}\varsigma_n \in \widetilde{L}^\perp_w$ и $\beta^+_{\rho_n}(\varsigma_n)_{2\rho_n} \in \widetilde{L}^\perp_u$, а за такве векторе важи:

$$\begin{aligned} \left\|D_w(\beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1}\varsigma_n)\right\|_{L^r} &\geq c_1\left\|\beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1}\varsigma_n\right\|_{W^{1,r}} \\ \left\|D_v(\beta^+_{\rho_n}(\varsigma_n)_{2\rho_n})\right\|_{L^r} &\geq c_2\left\|\beta^+_{\rho_n}(\varsigma_n)_{2\rho_n}\right\|_{W^{1,r}}, \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

пошто су $D_w|_{\widetilde{L}^\perp_w}$ и $D_v|_{\widetilde{L}^\perp_u}$ изоморфизми. Сада имамо:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to\infty}\|\varsigma_n\|_{W^{1,r}_{\varpi_n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\|\beta^+_{-\rho_n}\varsigma_n + \beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1}\varsigma_n + (1-\beta^+_{-\rho_n}-\beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1})\varsigma_n\|_{W^{1,r}} \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\|\beta^+_{-\rho_n}\varsigma_n\|_{W^{1,r}} + \|\beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1}\varsigma_n\|_{W^{1,r}} + \|(1-\beta^+_{\rho_n}-\beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1})\varsigma_n\|_{W^{1,r}}\right) \\ &\overset{(i)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\|\beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1}\varsigma_n\|_{W^{1,r}} + \|\beta^+_{\rho_n}(\varsigma_n)_{2\rho_n}\|_{W^{1,r}}\right) \\ &\overset{(ii)}{\leq} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{c_1}\|D_w(\beta^-_{-\frac{\rho_n}{2}-1}\varsigma_n)\|_{L^r} + \frac{1}{c_2}\|D_v(\beta^+_{\rho_n}(\varsigma_n)_{2\rho_n})\|_{L^r}\right) \\ &\overset{(iii)}{=} 0. \end{aligned}$$

Једнакост (i) следи из (4.3.24), чињенице да је

$$\operatorname{supp}\left(1-\beta^{+}_{-\rho_n}-\beta^{-}_{-\frac{\rho_n}{2}-1}\right)\subset\left[\frac{\rho_n}{2},\rho_n+1\right]$$

и једнакости $\|\beta^{+}_{-\rho_n}\varsigma_n\|_{W^{1,r}}=\|\beta^{+}_{\rho_n}(\varsigma_n)_{2\rho_n}\|_{W^{1,r}}$; (ii) следи из (4.3.26) и (iii) следи из (4.3.25). Добили смо контрадикцију, дакле, тврђење важи. $\square$

4.3.2 Егзистенција тачног решења

Проблем налажења тачног решења се углавном (и у случају објеката јединственог типа) своди на следећу апстрактну лему.

Лема 57. [23, 69] *Претпоставимо да глатко пресликавање $f : E \to F$ између Банахових преостора E и G има развој*

$$f(\varsigma)=f(0)+Df(0)\varsigma+N(\varsigma)$$

и да $Df(0)$ има коначнодимензионо језгро и десни инверз G такав да, за свако $\varsigma,\zeta\in E$ важи:

$$\|GN(\varsigma)-GN(\zeta)\|_E\le C\left(\|\varsigma\|_E+\|\zeta\|_E\right)\|\varsigma-\zeta\|_E$$

за неку константу C. Нека је $\varepsilon=\frac{1}{5C}$. Ако је $\|Gf(0)\|_E\le\frac{\varepsilon}{2}$, тада постоји јединствена нула пресликавања f

$$x_0\in B_\varepsilon(0)\cap G(F)$$

таква да је $\|x_0\|_E\le 2\|Gf(0)\|_E$.

Доказ Леме 57 се заснива на Банаховој теореми о контракцији и може се наћи у, на пример, [69].

Из Тврђења 56 следи да постоји изоморфизам векторских раслојења

$$D|_{L^\perp}:L^\perp\xrightarrow{\cong}\mathcal{E}^{0,r}$$

где је

$$L^\perp:=\bigcup_{\chi\in K\times[\rho_0,+\infty)}L^\perp_\chi$$

а $\mathcal{E}^{0,r}$ дефинисано у (4.3.17). Његова рестрикција на слој је

$$D_\chi|_{L_\chi^\perp} : L_\chi^\perp \xrightarrow{\cong} L_\gamma^r(p) \times L^r_{u\,\sharp_\rho^0\, v}(y).$$

Означимо са G_χ инверзно пресликавање $G_\chi := (D_\chi|_{L_\chi^\perp})^{-1}$. Да бисмо могли да применимо Лему 57 на наш случај, потребно је да оценимо десни инверз.

Лема 58. *Постоје константа C и доња граница за параметре лепљења $\rho_2 \geq \rho_1$ такве да важи оцена*

$$\|G_\chi \eta\|_{W^{1,r}} \leq C\|\eta\|_{L^r} \tag{4.3.27}$$

за све $\chi \in K \times [\rho_2, +\infty)$, $\eta \in L_\gamma^r(p) \times L^r_{u\,\sharp_\rho^0\, v}(y)$.

Доказ: Неједнакост (4.3.27) је еквивалентна неједнакости

$$\|\varsigma\|_{W^{1,r}} \leq C\|D_\chi \varsigma\|_{L^r}. \tag{4.3.28}$$

Претпоставимо супротно, то јест, нека (4.3.28) не важи. Тада постоје низови $\rho_n \to \infty$, $(w_n, v_n) \in K$ и $\varsigma_n \in L^\perp_{\chi_n}$ (где је $\chi_n = (w_n, v_n, \rho_n)$) такви да

$$\|\varsigma_n\|_{W^{1,r}} = 1, \quad \|D_{\chi_n}\varsigma_n\|_{L^r} \to 0. \tag{4.3.29}$$

Остатак доказа може се извести слично као доказ Тврђења 56. Главна разлика је у чињеници да овде имамо *низ* (w_n, v_n) изломљених трајекторија и низ $\rho_n \to \infty$, уместо *фиксираних* изломљених трајекторија (w, v) и низа $\rho_n \to \infty$, као што је био случај тамо. Ову тешкоћу ћемо превазићи захваљујући компактности скупа K, наиме, можемо претпоставити да $(w_n, v_n) \xrightarrow{W^{1,r}} (w, v) \in K$ (ако то није случај, постоји подниз на који се односи остатак доказа). Уведимо ознаке

$$\chi_{m,n} := (w_n, v_n, \rho_m), \quad \chi_n := (w, v, \rho_n),$$
$$\varpi_{m,n} := w_n \sharp^0_{\rho_m} v_n, \quad \varpi_n := w\, \sharp^0_{\rho_n} v.$$

Нека је $U \subset T^*M$ отворена околина скупа $w(\Theta) \cup u(D)$ (видети (4.3.23) и (3.2.3)) и нека је

$$\Phi : TT^*M|_U \xrightarrow{\approx} U \times \mathbb{R}^{2n} \tag{4.3.30}$$

такво да је $\varpi_{\chi_{m,n}}(\Theta) \subset U$ за $m,n \geq n_0$. Дефинишимо

$$\Phi_{m,n} : \xi \mapsto \Phi^{-1}(w \sharp^0_{\rho_m} v, \mathrm{Proj}_2 \circ \Phi(\xi))$$

где Proj_2 означава пројекцију на другу компоненту десне стране у изразу (4.3.30). Видимо да $\Phi_{n,n}$ успоставља изоморфизам између $W^{1,r}_{\varpi_{n,n}}$ и $W^{1,r}_{\varpi_n}$ као и изоморфизам између $L^r_{\gamma_n} \times L^r_{u_n \sharp^0_{\rho_n} v_n}$ и $L^r_\gamma \times L^r_{u \sharp^0_{\rho_n} v}$, и то тако да (захваљујући услову $(w_n, v_n) \xrightarrow{W^{1,r}} (w,v)$) $\Phi_{n,n} \to \mathrm{Id}_{W^{1,r}_{\varpi_n}}$ када $n \to \infty$. Због тога, за дато $\varepsilon > 0$, услов (4.3.29) можемо трансформисати у услов

$$1 - \varepsilon \leq \| \left(\mathrm{Proj}_{L^\perp_{\chi_n}} \circ \Phi_{n,n}\right) \varsigma_n \|_{W^{1,r}} \leq 1 + \varepsilon, \quad \|D_{\chi_n} \varsigma_n\|_{L^r} \to 0, \quad n \geq n_0.$$

Пресликавање $\mathrm{Proj}_{L^\perp_{\chi_n}}$ је добро дефинисано јер $L^\perp_{\chi_n}$ има комплемент у $W^{1,r}_{\varpi_n}(p,y)$, и то је коначнодимензиони простор $\mathrm{Ker}(D_{\chi_n})$. Међутим, низ $\left(\mathrm{Proj}_{L^\perp_{\chi_n}} \circ \Phi_{n,n}\right) \varsigma_n$ је низ вектора у $L^\perp_{\chi_n}$, па се остатак доказа може извести слично као у Тврђењу 56. □

Применимо Лему 57 на наш случај. Пресликавање f из Леме 57 је, код нас, рестрикција на слојеве

$$F_\chi : W^{1,r}_{\varpi_\chi}(p,y) \to L^r_\gamma(p) \times L^r_{u \sharp^0_\rho v}(y)$$

пресликавања векторских раслојења (4.3.17). Пресликавања Df и N из Леме 57 су одговарајући изводи (први и други) у Тејлоровом развоју пресликавања F_χ. Због тога пресликавању Df из Леме одговара пресликавање D_χ, пресликавању G из Леме 57 – пресликавање G_χ из Леме 58. Остало је још да проверимо да ли су испуњени услови који се односе на нелинеарни сабирак N. Из развоја

$$\begin{aligned} F_\chi(\xi) &= F_\chi(0) + D_\chi(0)\xi + N_\chi(0,\xi) \\ F_\chi(\eta) &= F_\chi(0) + D_\chi(0)\eta + N_\chi(0,\eta) \\ F_\chi(\xi) &= F_\chi(\eta) + D_\chi(\eta)(\xi - \eta) + N_\chi(\eta, \xi - \eta) \end{aligned}$$

се добија

$$\begin{aligned} N_\chi(\xi) - N_\chi(\eta) = N_\chi(0,\xi) - N_\chi(0,\eta) &= F_\chi(\xi) - F_\chi(\eta) - D_\chi(0)(\xi - \eta) \\ &= \left(D_\chi(\eta) - D_\chi(0)\right)(\xi - \eta) + N_\chi(\eta, \xi - \eta). \end{aligned}$$

Како је K компактан, то је скуп

$$\bigcup_{\chi\in K\times[\rho_0,+\infty)} \varpi_\chi(\Theta)\subset T^*M \tag{4.3.31}$$

релативно компактан, па важи оцена:

$$\|N_\chi(\xi)-N_\chi(\eta)\|\le C_1\left(\|\xi\|_{W^{1,r}_\varpi}+\|\eta\|_{W^{1,r}_\varpi}\right)\|\xi-\eta\|_{W^{1,r}_\varpi}, \tag{4.3.32}$$

где константа C_1 зависи од супремума C^2- норме пресликавања $\nabla_2\exp$ на релативно компактном скупу (4.3.31). Тражена горња оцена пресликавања GN следи из (4.3.32) и чињенице да је G_χ из Леме 58 ограничено.

Из Леме 57 следи да постоји јединствено $\Gamma(\chi)\in B_\varepsilon(0)\cap L_\chi^\perp$ за које важи $F_\chi(\Gamma(\chi))=0$. Ако дефинишемо

$$w\,\sharp_\rho\,v:=\exp_{w\,\sharp_\rho^0\,v}\Gamma(\chi),$$

добијамо тачно решење, за које је

$$F(w\,\sharp_\rho\,v)=0.$$

Из оцене

$$\|F(\varpi_\chi)\|_{L^r}\le\alpha e^{-m\rho} \tag{4.3.33}$$

која важи за неко $\alpha>0$, $m>0$ и

$$\|\Gamma(\chi)\|_{W^{1,r}}\le 2C\|F(\varpi_\chi)\|_{L^r} \tag{4.3.34}$$

следи да је

$$\|\Gamma(\chi)\|_{W^{1,r}}\le C(K)e^{-m\rho} \tag{4.3.35}$$

за неко $C(K)>0$ које зависи од скупа K. Оцена (4.3.34) следи из Леме 57, где C зависи од десног инверза пресликавања G. Оцена (4.3.33) се може лако извести из конструкције пред-залепљених трајекторија ϖ и експоненцијалних конвергенција пресликавања w и v ка $x(t)$, кад $s\to\pm\infty$ (видети и [20] за доказ овог детаља).

Из (4.3.35) следи да растојање између апроксимативног решења (пред-залепљених трајекторија) $w\,\sharp_\rho^0\,v$ из (4.3.15) и тачног решења $w\,\sharp_\rho\,v$ тежи нули довољно брзо, када $\rho\to\infty$. Апроксимативно решење $w\,\sharp_\rho^0\,v$ очигледно геометријски конвергира ка датом изломљеном, одакле следи да и тачно решење конвергира ка изломљеном.

Из стандардних резултата о регуларности решења елиптичке једначине следи да је тачно решење једначине (2.1.9) је глатко.

Остало је још да докажемо да је лепљење утапање.

4.3.3 Својство утапања

Да бисмо доказали да је лепљење $\sharp$ утапање, за $\rho\geq\rho(K)$, потребно је да проверимо да је његов извод $D\sharp$ у свакој тачки $(w,\hat{v},\rho)$ изоморфизам и да је $\sharp$ ињективно.

У Поглављу 4.3.1 дефинисали смо пред-лепљење за елементе скупа $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)\times\mathcal{M}(x,y,H,J)$. Нека је a фиксирана регуларна вредност функционала дејства $\mathcal{A}_H$. Постоји очигледна идентификација

$$\mathcal{M}^a(x,y,H,J)\cong\widehat{\mathcal{M}}(x,y,H,J), \tag{4.3.36}$$

где је

$$\mathcal{M}^a(x,y,H,J)=\left\{v\in\mathcal{M}(x,y;H)\mid\mathcal{A}_H(v(0,\cdot))=a\right\}.$$

Користећи инклузију

$$\iota:\mathcal{M}^a(x,y,H,J)\hookrightarrow\mathcal{M}(x,y,H,J)$$

можемо да дефинишемо лепљење на производу

$$\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)\times\widehat{\mathcal{M}}(x,y,H,J)$$

као $\sharp\circ(\mathrm{Id},\iota)$ (при чему подразумевамо поменуту идентификацију (4.3.36)).

Пошто је K компактан скуп, а регуларност отворено својство, довољно је да докажемо да постоји $\rho(w,\hat{v})$ (за фиксиран пар $(w,\hat{v})$) такво да је, за $\rho \geq \rho(w,\hat{v})$, пресликавање $D\sharp(w,\hat{v},\rho)$ изоморфизам. Ако то покажемо, можемо узети

$$\rho(K) := \max_{(w,\hat{v})\in K} \rho(w,\hat{v}).$$

Да бисмо доказали да је $D\sharp\,(w,\hat{v},\rho)$ изоморфизам, довољно је да проверимо да је оно инјективно, јер, из формуле за димензије простора решења,[18] следи:

$$\begin{aligned}\dim\left(K\times[\rho(K),\infty)\right) &= m_f(p) - \left(\mu_H(x)+\frac{n}{2}\right) + (\mu_H(x)-\mu_H(y)-1)+1\\ &= m_f(p) - \left(\mu_H(y)+\frac{n}{2}\right) = \dim\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;y,H,J).\end{aligned}$$

Претпоставимо супротно, да не постоји $\rho(w,\hat{v})$ такво да је пресликавање $D\sharp\,(w,\hat{v},\rho)$ инјективно за $\rho\geq\rho(w,\hat{v})$. Тада постоје низови

$$\xi_n\in T_w\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J),\quad \zeta_n\in T_{\hat{v}}\widehat{\mathcal{M}}(x,y,H,J),\quad \rho_n\to\infty,\quad t_n\in T_{\rho_n}[\rho_0,\infty)$$

такви да важи

$$(\xi_n,\zeta_n,t_n)\neq(0,0,0),\quad (\xi_n,\zeta_n,t_n)\in\mathrm{Ker}(D)\sharp(u,v,\rho_n). \tag{4.3.37}$$

Како је језгро оператора векторски потпростор, можемо још претпоставити да је

$$\|\xi_n\|+\|\zeta_n\|+|t_n|=1. \tag{4.3.38}$$

Имамо

$$D\sharp\,(w,\hat{v},\rho)(\xi,\zeta,t) = D\sharp_\rho\,(w,v)(\xi,\zeta) + D\sharp\,(w,v)\cdot(\dot{w},-\dot{v})\cdot t,$$

где прво D означава извод по (w,v) а друго D извод по (w,v,ρ). Како је још

$$D\sharp_\rho(w,v)(\xi,\zeta) = \nabla_1\exp(\Gamma(\chi))(\xi\,\sharp_\rho\,\zeta) + \nabla_2\exp(\Gamma(\chi))\,(D\Gamma(\chi)(\xi,\zeta))$$

и

$$D\sharp\,(w,v)(\dot{w},-\dot{v})t = \nabla_1\exp(\Gamma(\chi))(\dot{w}\,\sharp_\rho\,(-\dot{v})t),$$

[18] Видети Поглавље 3.3.

из (4.3.37) закључујемо

$$0 = D\sharp(\xi_n, \zeta_n, t_n) =$$
$$\nabla_1 \exp(\Gamma(\chi_n))[(\xi_n \sharp_{\rho_n} \zeta_n) + \dot{w} \sharp_{\rho_n} (-\dot{v})t_n] + \nabla_2 \exp(\Gamma(\chi_n))\,(D\Gamma(\chi_n)(\xi_n, \zeta_n))\,,$$

односно

$$\nabla_1 \exp(\Gamma(\chi_n))[(\xi_n \sharp_{\rho_n} \zeta_n) + \dot{w} \sharp_{\rho_n} (-\dot{v})t_n] = -\nabla_2 \exp(\Gamma(\chi_n))\,(D\Gamma(\chi_n)(\xi_n, \zeta_n))\,.$$

Али из идентитета

$$(\nabla_2 \exp^{-1} \circ \nabla_1 \exp)(p, 0) = \mathrm{Id}_{T_pP}$$

и експоненцијалног опадања

$$\|\Gamma(\chi_n)\|,\ \|D\Gamma(\chi_n)\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

добијамо

$$\|(\xi_n \sharp_{\rho_n} \zeta_n) + \dot{w} \sharp_{\rho_n} (-\dot{v})t_n\|_{W^{1,r}} \to 0.$$

Због тога имамо

$$\|\xi_n + \dot{w}t_n\|_{W^{1,r}(-\infty, \frac{\rho_n}{2}]} \to 0, \quad \|\zeta_n - \dot{v}t_n\|_{W^{1,r}[-2\rho_n, +\infty)} \to 0.$$

Како је

$$\zeta_n \in T_{\hat{v}}\widehat{\mathcal{M}}(x, y, H, J)$$

и

$$T_{\hat{v}}\widehat{\mathcal{M}}(x, y, H, J) \cap \mathbb{R}\dot{v} = \{0\},$$

закључујемо да $t_n \to 0$, па важи

$$\|\xi_n\|, \|\zeta_n\| \to 0,$$

што је у контрадикцији са (4.3.38). Тиме је доказ регуларности пресликавања $D\sharp$ завршен.

Инјективност самог пресликавања $\sharp$ (за довољно велико ρ) следиће из малопре доказане регуларности извода и компактности скупа K. Поново ћемо резоновати свођењем на контрадикцију. Претпоставимо зато да постоје низови $\rho_n \to \infty$ и

$$(w_n, \hat{v}_n) \neq (\delta_n, \hat{\sigma}_n) \tag{4.3.39}$$

такви да важи

$$w_n \sharp_{\rho_n} \hat{v}_n = \delta_n \sharp_{\rho_n} \hat{\sigma}_n.$$

Како је K компактан, можемо да претпоставимо да

$$w_n \to w, \quad \hat{v}_n \to \hat{v}, \quad \delta_n \to \delta, \quad \hat{\sigma}_n \to \hat{\sigma}.$$

Из експоненцијалног опадања пресликавања $\Gamma(\chi_n) = \Gamma(w_n, \hat{v}_n, \rho_n)$ и $\Gamma(\lambda_n) = \Gamma(\delta_n, \hat{\sigma}_n, \rho_n)$ следи да, у локалним координатама, важи:

$$\left\| w \sharp^0_{\rho_n} v - \delta \sharp^0_{\rho_n} \sigma \right\|_{W^{1,r}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

па $w = \delta$, $\hat{v} = \hat{\sigma}$. Како смо већ доказали да је $\sharp$ локално изоморфизам, закључујемо да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n \geq n_0$ важи

$$(w_n, \hat{v}_n) = (\delta_n, \hat{\sigma}_n)$$

што је у контрадикцији са (4.3.39).

Тиме је комплетиран доказ Тврђења 54. $\square$

ГЛАВА 5

ОРИЈЕНТАЦИЈА

5.1 Увод

У овој глави конструисаћемо кохерентну оријентацију модулских простора комбинованог типа, односно оријентацију која се слаже са операцијама лепљења.[1] Ради појендостављивања доказа, конструисаћемо кохерентну оријентацију само за просторе $\mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J)$, $\mathcal{M}_{R_0}(x, H, J; p, f, g)$, $\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ и $\mathcal{M}(R; \vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ са једним улазом и излазом (видети (2.1.9), (3.3.2) и (4.2.1)). Ова конструкција нам омогућава да дефинишемо ПСС изоморфизам (2.1.8) за Морсову и Флорову хомологију са целобројним коефицијентима. Конструкција Морсове хомологије са целобројним коефицијентима (а самим тим и са произвољним, захваљујући Формули о универзалним коефицијентима, видети, на пример [68]) дата је у [69], а Флорове у [24]. Основа ове конструкције је оријентација класе Фредхолмових оператора, односно, сечења на Доналдсоновом детерминантном раслојењу, описаном у Поглављу 5.2.1 (видети и [13, 14]). Специјално, када је Фредхолмов оператор сурјективан, ово сечење индукује оријентацију његовог језгра, што је у нашем случају тангентни простор многострукости (видети Напомену 63).

Наравно, задавање оријентације на модулским просторима је увек

[1] Видети Поглавље 4.3.

могуће и једноставно: диференцијално-тополошки гледано, простори који су за нас од значаја представљају пресеке неких стабилних и нестабилних многострукости. На пример, важи $\mathcal{M}(p,q,f,g) = W^u(p) \cap W^s(q) \subset W^u(p)$, $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J) = \mathrm{ev}^{-1}(\Delta) \subset W^u(p) \times W^s(x)$, где су $W^u(p)$, $W^s(q)$ стабилна и нестабилна многострукост тачака p и q, $W^u(x)$ „нестабилна многострукост" Хамилтоновог пута x (видети једначину (5.2.5)), $\Delta \subset M \times M$ дијагонала и $\mathrm{ev}(\gamma,u) = \left(\gamma(0), u\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$. Како су стабилна и нестабилна многострукост контрактибилне,[2] оне су и оријентабилне, па је оријентабилан и њихов производ, као и свака подмногострукост тог производа. То је један начин задавања оријентације модулских простора. Други начин је још једноставнији – наиме, простори који су за нас од значаја су димензије нула и један, па су самим тим оријентабилни.

Међутим, такво задавање оријентација није од користи за нашу конструкцију. Циљ нам је да оријентишемо модулске просторе сва три типа (трајекторије, дискове и комбиноване објекте) заједно, и то *истовремено у свим димензијама*, да бисмо применили резултате изведене из особина простора комбинованих објеката на случај хомологија са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима. У Глави 4 смо видели да тополошку границу модулских простора чине објекти који припадају компонентама мањих димензија неких од поменутих модулских простора. Један објекат може бити елемент тополошке границе разних многострукости. Хоћемо да конструишемо оријентацију која ће све ове објекте повезивати, то јест, која ће бити компатибилна са операцијама лепљења (у смислу да извод лепљења чува оријентацију).

Подсетимо се да се оријентација произвољне (оријентабилне) многострукости може задати на неколико еквивалентних начина. Један је избор оријентација у картама, такав да је, при промени координата x_α у x_β, детерминанта јакобијана композиције $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ позитиван број. Ово

[2] Фамилија решења једначине $\frac{d\phi_t}{dt}(x) = -\nabla f(\phi_t(x))$, $\phi_0 = \mathrm{Id}$ успоставља хомотопију између идентичког ($t=0$) и константног ($t=+\infty$) пресликавања на $W^s(p)$.

уствари представља оријентацију тангентног раслојења као векторског раслојења.[3] Други начин је избор форме максималне димензије која се нигде не анулира, и то је приступ који ћемо следити.

Идеја конструкције кохерентне оријентације је следећа. Тангентни простор $T\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$ је облика $F^{-1}(0)$ за неки сурјективни Фредхолмов оператор. *Оријентацијом сурјективног Фредхолмовог оператора* F зовемо оријентацију раслојења $T\mathcal{M}_R(\vec{p}, \vec{f}, g; \overrightarrow{H}, J)$. Хоћемо да оријентације два модулска простора која су компатибилна за лепљење индукују оријентацију добијеног, залепљеног простора. Зато дефинишемо операцију лепљења оператора, која нам то омогућава (Поглавље 5.2.3). Међутим, ову конструкцију је немогуће извести искључиво *кроз сурјективне* Фредхолмове операторе. Зато проширујемо појам оријентације оператора са сурјективних на произвољне Фредхолмове (Поглавље 5.2.1). Прецизније, посматрамо Фредхолмове операторе које смо већ изучавали у Поглављу 2.3.2 (видети Поглавље 5.2.2) и дефинишемо њихово лепљење. За дефиницију појма оријентације произвољних Фредхолмових оператора потребне су извесне алгебарске конструкције, оригинално дате у [14], описане у Поглављу 5.2.1.

Посебан проблем представља прелазак са тривијалног на нетривијални случај, јер пренос оријентације зависи од избора тривијализације. Овом проблему је посвећено Поглавље 5.3.

Постоји канонски начин задавања оријентације на нуладимензионим компонентама модулских простора. Упоређивањем ове оријентације са кохерентном придружујемо карактеристичне знаке (то јест, симболе $\pm$) нуладимензионим објектима (видети Поглавље 5.3.4). Они омогућују добру дефинисаност Морсове и Флорове хомологије са целобројним коефицијентима – у случају простора јединственог типа, као и конструкцију изоморфизама између њих – у случају простора комбинованог типа.

[3] То јест, оријентацију сваког слоја као векторског простора, компатибилну са функцијама преласка.

5.2 Оријентација и лепљење у тривијалном случају

У овом поглављу ћемо конструисати кохерентну оријентацију у тривијалном случају, то јест у случају симплектичке многострукости $\mathbb{R}^{2n}$ са стандардном симплектичком формом $\sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$.

5.2.1 Детерминантно раслојење

Дефиниција 59. Нека су E и F коначнодимензиони реални векторски простори. Дефинишимо *детерминантни простор придружен просторима E и F,* $\mathrm{Det}(E,F)$ као једнодимензиони векторски простор

$$\mathrm{Det}(E,F) := \left(\bigwedge^{\max} E\right) \otimes \left(\bigwedge^{\max} F\right)^*,$$

где је $\bigwedge^{\max} E := \bigwedge^{\dim E} E$, а $\bigwedge^{k}(E)$ простор $k-$ линеарних форми на E. Уобичајено је да се, за свако E, дефинише $\bigwedge^{0} E := \mathbb{R}$, па ћемо, у нашем случају, имати $\mathrm{Det}(0,0) := \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^*$. Нека су H_0 и H_1 Банахови простори, и нека је $\mathcal{L}(H_0,H_1)$ скуп непрекидних линеарних пресликавања. Означимо са

$$\mathrm{Fred}(H_0,H_1) \subset \mathcal{L}(H_0,H_1)$$

скуп свих Фредхолмових оператора, који је отворен у топологији индукованој операторском нормом. За оператор $F \in \mathrm{Fred}(H_0,H_1)$ дефинишимо *детерминантни простор придружен оператору F,* $\mathrm{Det}(F)$ као

$$\mathrm{Det}(F) := \mathrm{Det}(\mathrm{Ker}(F), \mathrm{Coker}(F)).$$

Нека је сада X произвољан тополошки простор и $f : X \to \mathrm{Fred}(H_0,H_1)$ произвољно непрекидно[4] пресликавање. Дефинишимо простор

$$\mathrm{Det}(f) := \bigcup_{x\in X} \{x\} \times \mathrm{Det}\left(f(x)\right). \tag{5.2.1}$$

◇

Постоји очигледна канонска пројекција

$$\pi : \mathrm{Det}(f) \to X.$$

Скуп $\pi^{-1}(x)$ је једнодимензиони реални векторски простор.

[4]Мисли се на пресликавање непрекидно у односу на норму индуковану операторском нормом.

Тврђење 60. **[14]** *Простор (5.2.1) је реално векторско раслојење над* X*.*

Доказ: Претпоставимо, за почетак, да је $\dim \mathrm{Ker}(f)$ локално константна функција. Захваљујући непрекидности Фредхолмовог индекса, исто важи и за $\dim \mathrm{Coker}(f)$. Ако дефинишемо

$$\mathrm{Ker}(f) := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathrm{Ker}(f(x)) \to X,$$
$$\mathrm{Coker}(f) := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathrm{Coker}(f(x)) \to X,$$

видимо да је $\mathrm{Ker}(f)$ подраслојење простора $X \times H_0$, а $\mathrm{Coker}(f)$ количничко раслојење простора $X \times H_1$. Самим тим они имају структуру векторских раслојења, и то коначне димензије јер су $f(x)$ Фредхолмови оператори. Алгебарски важи

$$\mathrm{Det}(f) = \bigwedge^{\max} \mathrm{Ker}(f) \otimes \left(\bigwedge^{\max} \mathrm{Coker}(f) \right)^*,$$

што нам омогућава да снабдемо скуп $\mathrm{Det}(f)$ структуром векторског раслојења.

У општем случају $\dim \mathrm{Ker}(f)$ не мора да буде локално константна. Зато ће нам бити потребна следећа алгебарска лема.

Лема 61. **[14]** *Нека је дат тачан низ*

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} E_k \longrightarrow 0 \tag{5.2.2}$$

векторских простора. Постоји канонски изоморфизам

$$\phi : \bigotimes_{i\,\text{парно}} \left(\bigwedge^{\max} E_i \right) \xrightarrow{\cong} \bigotimes_{i\,\text{непарно}} \left(\bigwedge^{\max} E_i \right).$$

Доказ: Нека је $e_{11}, \ldots, e_{1n_1}$ база простора E_1. Како је d_1 ињективно, постоје линеарно независни вектори $e_{21}, \ldots, e_{2n_2}$ који, заједно са (линеарно независним) векторима $d_1(e_{11}), \ldots, d_1(e_{1n_1})$, чине базу простора E_2. Због тачности низа (5.2.2), вектори $d_1(e_{11}), \ldots, d_1(e_{1n_1})$ разапињу језгро пресликавања d_2, па постоје линеарно независни вектори $e_{31}, \ldots, e_{3n_3}$ који, заједно са линеарно независним векторима $d_2(e_{21}), \ldots, d_2(e_{2n_2})$ чине базу простора E_3. Настављајући поступак, можемо да формирамо низ база облика

$$d_i(e_{i1}), \ldots, d_i(e_{in_i}), e_{(i+1)1}, \ldots, e_{(i+1)n_{i+1}}, \text{ за } i = 1, \ldots, k-1,$$

узимајући $n_k := 0$. Дефинишимо сада изоморфизам ϕ као

$$\begin{pmatrix} d_1(e_{11}) \wedge \ldots \wedge d_1(e_{1n_1}) \wedge e_{21} \wedge \ldots \wedge e_{2n_2} \otimes \\ d_3(e_{31}) \wedge \ldots \wedge d_3(e_{3n_3}) \wedge e_{41} \wedge \ldots \wedge e_{4n_4} \otimes \\ \vdots \\ d_{2j-1}(e_{(2j-1)1}) \wedge \ldots \wedge d_{2j-1}(e_{(2j-1)n_{2j-1}}) \wedge e_{(2j)1} \wedge \ldots \wedge e_{(2j)n_{2j}} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} e_{11} \wedge \ldots \wedge e_{1n_1} \otimes \\ d_2(e_{21}) \wedge \ldots \wedge d_2(e_{2n_2}) \wedge e_{31} \wedge \ldots \wedge e_{3n_3} \otimes \\ \vdots \\ d_{2j'}(e_{(2j')1}) \wedge \ldots \wedge d_{2j'}(e_{(2j')n_{2j'}}) \wedge e_{(2j'+1)1} \wedge \ldots \wedge e_{(2j'+1)n_{2j'+1}}. \end{pmatrix}$$

Лако се проверава да овај изоморфизам не зависи од избора базних вектора простора E_i. $\square$

Вратимо се на општи случај. Нека је $f : X \to \mathrm{Fred}(H_0, H_1)$ произвољно непрекидно пресликавање. За дато $x \in X$, придружимо Фредхолмовом оператору $f(x)$ линеарно пресликавање $\psi : \mathbb{R}^m \to H_1$ такво да је оператор

$$\hat{f}_\psi(x) : \mathbb{R}^m \times H_0 \to H_1, \quad \hat{f}_\psi(x) : (h,k) \mapsto \psi(h) + f(x)k$$

сурјективан. Како је сурјективност отворено својство, а Фредхолмов индекс локално константан, то постоји отворена околина $U(x)$ тачке x таква да је $\hat{f}_\psi(y)$ сурјективан за свако $y \in U(x)$ и да је $\mathrm{Ind}(\hat{f}_\psi)$ константан на $U(x)$. Дефинишимо, за $y \in U(x)$:

$$f_\psi(y) : \mathbb{R}^m \times H_0 \to \mathbb{R}^m \times H_1, \quad f_\psi(y)(h,k) := \Big(0, \hat{f}_\psi(y)(h,k)\Big).$$

Пресликавање $f_\psi : U(x) \to \mathrm{Fred}(\mathbb{R}^m \times H_0, \mathbb{R}^m \times H_1)$ има константну димензију језгра и којезгра, па, из претходног расуђивања закључујемо да је

$$\mathrm{Det}(f_\psi) \to U(x)$$

векторско раслојење, кадгод су $(x, \psi, U(x))$ као малопре. Посматрајмо, за такве $(x, \psi, U(x))$, $y \in U(x)$, тачан низ простора

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f(y)) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Ker}(f_\psi(y)) \xrightarrow{d_2} \mathbb{R}^m \xrightarrow{d_3} \mathrm{Coker}(f(y)) \longrightarrow 0,$$

где је

$$\begin{aligned} d_1(k) &= (0, k), \\ d_2(h, k) &= h, \\ d_3(h) &= \psi(h) \pmod{\mathrm{Im}(f(y))}. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Из Леме 61 следи да постоји канонски изоморфизам

$$\phi : \bigwedge^{\max} \mathrm{Ker}(f(y)) \otimes (\bigwedge^{\max} \mathbb{R}^m) \xrightarrow{\cong} \bigwedge^{\max} \mathrm{Ker}(f_\psi(y)) \otimes \bigwedge^{\max} \mathrm{Coker}(f(y)). \tag{5.2.4}$$

Приметимо да је $\left(\overset{\max}{\bigwedge} E\right) \otimes \left(\overset{\max}{\bigwedge} E\right)^*$ канонски изоморфно са $\mathbb{R}$, где се изоморфизам остварује преко спаривања $e \otimes f^* \mapsto f^*(e)$. Множењем израза (5.2.4) са $\left(\overset{\max}{\bigwedge} \mathbb{R}^m\right)^* \otimes \left(\overset{\max}{\bigwedge} \mathrm{Coker}(f(y))\right)^*$ и коришћењем природне идентификације $A \otimes B \cong B \otimes A$ добијамо природни изоморфизам

$$\mathrm{Det}(f(y)) \xrightarrow{\cong} \bigwedge^{\max} \mathrm{Ker}(f_\psi(y)) \otimes \bigwedge^{\max} (\mathbb{R}^m)^*,$$

а како је $\mathrm{Coker}\, f_\psi(y) = (H_1 \times \mathbb{R}^m)/H_1 \times \{0\} \cong \mathbb{R}^m$, то је

$$\mathrm{Det}(f(y)) \cong \mathrm{Det}(f_\psi)(y).$$

На тај начин смо конструисали природне бијекције $\phi = \phi(x, \psi, U(x))$

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathrm{Det}(f)\big|_{U(x)} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Det}(f_\psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U(x) & \xrightarrow{=} & U(x) \end{array}$$

које су изоморфизми дуж слојева. Нека две тројке $(x, \psi, U(x))$ и $(x', \psi', U(x'))$ задовољавају наведене услове. Ако бисмо доказали да је изоморфизам

$$\phi(x', \psi', U(x')) \circ \phi(x, \psi, U(x))^{-1} : \mathrm{Det}(f_\psi)\big|_{U(x) \cap U(x')} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Det}(f_{\psi'})\big|_{U(x) \cap U(x')}$$

пресликавање векторских раслојења, доказ Тврђења 60 би био завршен: структура векторског раслојења на (5.2.1) се преноси са $\mathrm{Det}(f_\psi)$ за било које ψ и било коју околину $U(x)$. Претпоставимо прво да је $\psi'(a,b) = \psi(a) + \varphi(b)$, за неко $\varphi : \mathbb{R}^k \to H_1$. За $y \in U(x) \cap U(x')$ имамо тачан низ

$$0 \to \mathrm{Ker}(f_\psi(y)) \to \mathrm{Ker}(f_{\psi\oplus\varphi}(y)) \to \mathbb{R}^k \to \mathrm{Coker}(f_\psi(y)) \to 0,$$

где су пресликавања дефинисана као у (5.2.3). Као и раније, добијамо канонски изоморфизам

$$\alpha_{\psi,\psi'} : \mathrm{Det}(f_\psi) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Det}(f_{\psi'}) \text{ над } U(x) \cap U(x')$$

који јесте изоморфизам векторских раслојења, јер су овога пута $\mathrm{Det}(f_\psi)$ заиста векторска раслојења. Лако се проверава да се $\alpha_{\psi,\psi'}$ поклапа са $\phi(x', \psi', U(x')) \circ \phi(x, \psi, U(x))^{-1}$. Нека је сада $\psi' : \mathbb{R}^{m'} \to H_1$ произвољно. Дефинишимо $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m'} \to H_1$ са

$$\varphi(h,k) = \psi(h) + \psi'(k).$$

Посматрајмо комутативни дијаграм

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Det}(f_\psi) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Det}(f_{\psi'}) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathrm{Det}_{\psi\oplus\psi'} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Det}_{\psi'\oplus\psi}\,. \end{array}$$

Вертикална пресликавања су већ доказани изоморфизми раслојења $\alpha_{\psi,\psi\oplus\psi'}$ и $\alpha_{\psi',\psi'\oplus\psi}$, док је доње хоризонтално пресликавање изоморфизам раслојења индуковано очигледним изоморфизмима[5] раслојења $\mathrm{Ker}(f_{\psi\oplus\psi'}) \cong \mathrm{Ker}(f_{\psi'\oplus\psi})$ и $\mathrm{Coker}(f_{\psi\oplus\psi'}) \cong \mathrm{Coker}(f_{\psi'\oplus\psi})$. Горње хоризонтално пресликавање је тражени изоморфизам раслојења. □

Дефиниција 62. Раслојење $\mathrm{Det}(f)$ називамо *детерминантним раслојењем фамилије* Фредхолмових оператора $f : X \to \mathrm{Fred}(H_0, H_1)$. *Оријентација*

[5] То су изоморфизми типа $(a,b,h) \mapsto (b,a,h)$.

Фредхолмовог оператора $F : H_0 \to H_1$ је оријентација његовог детерминантног раслојења $\mathrm{Det}(F)$. Произвољно сечење раслојења $\mathrm{Det}(f) \to X$ које је свуда различито од нуле[6] индукује оријентацију фамилије f. $\diamond$

Напомена 63. У случају да је Фредхолмовов оператор F сурјективан, важи

$$\mathrm{Det}(F) = \bigwedge^{\max}(\mathrm{Ker}(F)),$$

па је оријентација оператора F у смислу Дефиниције 62 уствари оријентација његовог језгра. $\diamondsuit$

Напомена 64. Иако смо, у Глави 3 дефинисали $\mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J)$ као $F^{-1}(0)$, где је F оператор дефинисан на $\mathcal{P}^{1,r}(p, x)$, проблем кохерентне оријентације ћемо разматрати за класу оператора дефинисану на производу $\mathcal{P}^{1,r}(p) \times \mathcal{P}^{1,r}(x)$. Разлог томе лежи у доказу Леме 80 на страни 138, који не пролази без ове измене. Али, ако кохерентно оријентишемо просторе решења свих оператора таквог облика (са производом као доменом), оријентација простора $\mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J)$ је аутоматски наслеђена. Заиста, ако $W^u(p, f)$ означава нестабилну многострукост критичне тачке p Морсове функције f, а $W^s(x, H)$ скуп решења једначине

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R H}(u)) = 0, \\ u(\partial([0, +\infty) \times [0, 1])) \in O_M, \\ u(+\infty, t) = x(t), \end{cases} \tag{5.2.5}$$

тада је, очигледно, $F^{-1}(0) = W^u(p, f) \times W^s(x, H)$ (где F има за домен производ простора) и $\mathcal{M}_{R_0}(p, f, g; x, H, J) \subset F^{-1}(0)$. Тако ћемо кохерентно оријентисати ширу класу елемената – $W^u(p, f) \times W^s(x, H)$. Због тога, у овој глави подразумевамо да су оператори дефинисани на производу одговарајућих Собољевљевих простора. $\diamondsuit$

[6] Такво сечење не мора да постоји.

5.2.2 Специјална класа Фредхолмових оператора

Пре свега, подсетићемо се неких старих ознака и увести неке нове. Нека је

$$
\begin{aligned}
&W_1^{1,r} := W^{1,r}\left((-\infty,0]\times\{0\},\mathbb{R}^n\times\{0\}\right),\\
&W_2^{1,r} := \left\{u\in W^{1,r}([0,\infty)\times[0,1],\mathbb{R}^{2n}),\mid u(s,0),u(s,1),u(0,t)\in\mathbb{R}^n\times\{0\}\right\},\\
&L_1^r := L^r\left((-\infty,0]\times\{0\},\mathbb{R}^n\times\{0\}\right),\\
&L_2^r := \left\{u\in L^r([0,\infty)\times[0,1],\mathbb{R}^{2n})\mid u(s,0),u(s,1),u(0,t)\in\mathbb{R}^n\times\{0\}\right\},\\
&W^{1,r} := W_1^{1,r}\times W_2^{1,r},\\
&L^r := L_1^r\times L_2^r.
\end{aligned}
$$

Означимо са Σ^1_{triv} скуп свих линеарних оператора из $\mathcal{L}(W_1^{1,r},L_1^r)$ облика

$$K(\gamma)(s)=\dot\gamma(s)+A(s)\gamma, \tag{5.2.6}$$

таквих да је $K^-:=A(-\infty)$ симетрична недегенерисана матрица, а са Σ^2_{triv} скуп свих $L\in\mathcal{L}(W_2^{1,r},L_2^r)$ облика

$$L(u)(s,t)=\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)+J(s,t)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)+B(s,t)u(s,t) \tag{5.2.7}$$

за неку скоро комплексну структуру J, компатибилну са стандардном симплектичком формом, таквих да је $L^+(x)(t):=J(+\infty,t)\dot x(t)+B(+\infty,t)x(t)$ самоадјунговани[7] изоморфизам са доменом

$$\widetilde{W}^{1,r}:=\left\{x\in W^{1,r}([0,1],\mathbb{R}^{2n})\mid x(0),x(1)\in\mathbb{R}^n\times\{0\}\right\}$$

и кодоменом

$$\widetilde{L}^r\left\{x\in L^r([0,1],\mathbb{R}^{2n})\mid x(0),x(1)\in\mathbb{R}^n\times\{0\}\right\}.$$

[7] То јест, да важи $\langle L^+x,y\rangle_{L^2}=\langle x,L^+y\rangle_{L^2}$ за све x, y из $\widetilde{W}^{1,r}$ за стандардни скаларни производ дефинисан у (4.3.18) Због коначне мере домена $[0,1]$ важи $\widetilde{W}^{1,r}\subset\widetilde{W}^{1,2}$.

Напомена 65. За K и A везане релацијом (5.2.6) користићемо и ознаке K_A и A_K. Слично, за операторе L, J и B из (5.2.7) користићемо и ознаке $L_{J,B}$, J_L, B_L. $\diamondsuit$

Дефинишимо

$$\Sigma_{\text{triv}} := \Sigma^1_{\text{triv}} \times \Sigma^2_{\text{triv}}.$$

Напомена 66. Из Тврђења 28 и 29 на страни 53 следи да су сви оператори из класе Σ_{triv} Фредхолмови. $\diamondsuit$

Напомена 67. Оператори који су за нас од интереса су облика (4.3.5) и заиста припадају скупу Σ_{triv} захваљујући условима (4.3.6) и (4.3.7) из Напомене 55 и чињеници да је $\phi_1^H(O_M) \pitchfork O_M$. $\diamondsuit$

Дефиниција 68. За два елемента $F = (F_1, F_2), G = (G_1, G_2) \in \Sigma_{\text{triv}}$ кажемо да су *еквивалентни* и пишемо $F \sim G$ ако важи:

$$F_1^- = G_1^-, \quad F_2^+ = G_2^+.$$

Означимо са

$$\widetilde{\Sigma}_{\text{triv}} := \Sigma_{\text{triv}} / \sim$$

скуп класа еквиваленције. $\diamond$

Тврђење 69. *Нека је $[F = (F_1, F_2)]$ произвољна класа у $\widetilde{\Sigma}$. Тада је класа $[F]$, посматрана као скуп у простору оператора, контрактибилна у топологији индукованој операторском нормом.*

Доказ: Фиксирајмо оператор $G_0 = (K_0, L_0)$ из $[F]$. Нека је $G = (K, L)$ произвољан елемент скупа $[F]$. Оператору L_0 одговара[8] скоро комплексна структура J_0 а оператору L скоро комплексна структура J. Слично, операторима K_0 и K одговарају оператори A_0 и A, а операторима L_0 и L одговарају оператори B_0 и B (приметимо да је $A_0(-\infty) = A(-\infty)$ и $B_0(+\infty, t) = B(+\infty, t)$). Нека су g_0 и g Риманове метрике које одговарају[9] скоро комплексним структурама J_0 и J. Тада је и

$$g_\tau := (1-\tau)g_0 + \tau g_1$$

[8] Видети (5.2.7).

[9] Видети Напомену 3 на страни 21.

Риманова метрика, означимо са J_τ њој придружену скоро комплексну структуру из Напомене 3. Из те конструкције видимо да је фамилија J_τ глатка по s, t и τ. Дефинишимо

$$A_\tau := (1-\tau)A_0 + \tau A, \quad B_\tau := (1-\tau)B_0 + \tau B$$

и

$$\begin{aligned}
&K_\tau(\gamma)(s) := \dot\gamma(s) + A_\tau(s)\gamma,\\
&L_\tau(u)(s,t) := \frac{\partial u}{\partial s}(s,t) + J_\tau(s,t)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + B_\tau(s,t)u(s,t),\\
&\mathcal{H}(\tau, G) := (K_\tau, L_\tau).
\end{aligned}$$

Јасно је да је $\mathcal{H}(\tau,G) \in [F]$, треба само да докажемо да је пресликавање $(\tau,G) \mapsto \mathcal{H}(\tau,G)$ непрекидно по обе променљиве. Претпоставимо зато да $\tau_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau$ и $G_n = (K_n, L_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} G = (K,L)$ у операторској норми, потребно је да докажемо да $\mathcal{H}(\tau_n, G_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{H}(\tau,G)$ у операторској норми. Посматраћемо одвојено компоненте елемента

$$(\mathcal{H}(\tau_n,G_n) - \mathcal{H}(\tau,G))(\gamma_n,u_n) = (((K_n)_{\tau_n} - K_\tau)\gamma_n, ((L_n)_{\tau_n} - L_\tau)u_n)$$

јер је кодомен производ простора. За прву компоненту важи

$$\begin{aligned}
&\|((K_n)_{\tau_n} - K_\tau)\gamma_n\|_{L^r} =\\
&\|\{(1-\tau_n)A_0 + \tau_n A_n - (1-\tau)A_0 - \tau A\}\gamma_n\|_{L^r} =\\
&\|(\tau-\tau_n)A_0 + (\tau_n A_n - \tau_n A) + (\tau_n - \tau)A\|_{L^r} \le\\
&|\tau-\tau_n|\cdot\|A_0\|_{\mathcal{L}} + |\tau_n|\cdot\|K_n - K\|_{\mathcal{L}} + |\tau_n-\tau|\cdot\|A\|_{\mathcal{L}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Симбол $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ означава операторску норму. Ситуација са другом компонентом је нешто сложенија зато што су и скоро комплексне структуре промењљиве. Имамо

$$
\begin{aligned}
&\|((L_n)_{\tau_n} - L_\tau)u_n\|_{L^r} = \\
&\left\|((J_n)_{\tau_n} - J_\tau)\frac{\partial u_n}{\partial t} + (B_n)_{\tau_n}u_n - B_\tau u_n\right\|_{L^r} = \\
&\left\|((J_n)_{\tau_n} - J_\tau)\frac{\partial u_n}{\partial t} + (1-\tau_n)B_0u_n + \tau_n B_n u_n - (1-\tau)B_0u_n - \tau B u_n\right\|_{L^r} = \\
&\left\|((J_n)_{\tau_n} - J_\tau)\frac{\partial u_n}{\partial t} + (\tau-\tau_n)B_0u_n + (\tau_n-\tau)B_n u_n + \tau(B_n - B)u_n\right\|_{L^r} \le \\
&\left\|((J_n)_{\tau_n} - J_\tau)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{L^r} + |\tau_n-\tau|\cdot\|B_0\|_{\mathcal{L}} + |\tau_n-\tau|\cdot\|B_n\|_{\mathcal{L}} + |\tau|\cdot\|B_n - B\|_{\mathcal{L}}.
\end{aligned}
\tag{5.2.9}
$$

Ако бисмо доказали да $J_n \rightrightarrows J$ униформно по (s,t), због непрекидности пресликавања $J \mapsto J_\tau$, важило би и $(J_n)_{\tau_n} \rightrightarrows J_\tau$. Тада бисмо из $L_n \xrightarrow{\mathcal{L}} L$ извели да $B_n \overset{\mathcal{L}}{\rightrightarrows} B$ униформно по (s,t), па би последњи сабирак у изразу (5.2.9) тежио нули, што, заједно са (5.2.8), даје жељену конвергенцију $\mathcal{H}(\tau_n, G_n)$ ка $\mathcal{H}(\tau, G)$. Симбол $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ означава конвергенцију у операторској норми.

Из услова $L_n \xrightarrow{\mathcal{L}} L$ следи да $l_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, где је

$$
l_n := \sup_{\|u\|_{W^{1,r}}\le 1}\left(\iint\limits_{[0,\infty)\times[0,1]}\left|(J_n(s,t) - J(s,t))\frac{\partial u}{\partial t} + (B_n(s,t) - B(s,t))u\right|^r dsdt\right)^{\frac{1}{r}}.
$$

Фиксирајмо тачку $z_0 \in [0,\infty)\times[0,1]$ и посматрајмо глатко пресликавање u са носачем у околини U_{z_0} тачке z_0, такво да је $u(0,t)$, $u(s,0)$, $u(s,1) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ и $\|u\|_{W^{1,r}} \le 1$. За такво u важи

$$
\iint\limits_{U_{z_0}} \|u\|^r dsdt \le \sup_{U_{z_0}} \|u\|^r_{C^0} \cdot m(U_{z_0}).
$$

Одавде следи, да, за исто u, важи

$$\left(\iint\limits_{[0,\infty)\times[0,1]} \left|(J_n(s,t)-J(s,t))\frac{\partial u}{\partial t}\right|^r dsdt\right)^{\frac{1}{r}} \leq \tag{5.2.10}$$
$$l_n + \sup_{U_{z_0}} \|B_n(s,t)-B(s,t))\| \cdot \sup_{U_{z_0}} \|u\|_{C^0} \cdot (m(U_{z_0}))^{\frac{1}{r}}.$$

Смањујући околину U_{z_0}, и бирајући погодне u са носачем у U_{z_0} и $W^{1,r}-$нормом не већом од један, можемо постићи[10] да лева страна једнакости (5.2.10) буде већа или једнака изразу $|J_n(z_0)-J(z_0)|$, а десна мања или једнака изразу $l_n+\frac{1}{n}$. Одатле имамо:

$$|J_n(z_0)-J(z_0)| \leq l_n + \frac{1}{n},$$

па како је z_0 произвољно, закључујемо да $J_n \rightrightarrows J$. $\square$

Означимо са $\mathrm{Det}[F]$ детерминатно раслојење дефинисано једначином (5.2.1), за $X=[F]$, $f: G\mapsto G$. Следеће тврђење је директна последица Тврђења 69.

Последица 70. *За произвољно $F\in\Sigma_{\mathrm{triv}}$, детерминантно раслојење $\mathrm{Det}[F]$ је тривијално, а самим тим и оријентабилно.*

Од значаја су и следеће две специјалне класе Фредхолмових оператора јединственог типа:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{triv}}^M := \{&K\in\mathcal{L}\big(W^{1,r}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n\times\{0\}), L^r(\mathbb{R},\mathbb{R}^n\times\{0\})\big) \mid K\gamma=\dot\gamma(s)+A(s)\gamma(s),\\
&K^{\pm}:=A(\pm\infty) \text{ је симетрична недегенерисана матрица}\},\\
\Sigma_{\mathrm{triv}}^F := \{&L\in\mathcal{L}\left(W_F^{1,r}, L_F^{1,r}\right) \mid Lu=\frac{\partial u}{\partial s}+J(s,t)\frac{\partial u}{\partial t}+B(s,t)u(s,t),\\
&L:\widetilde{W}^{1,r}\to\widetilde{L}^r,\ L^{\pm}x(t):=J(+\infty,t)\dot x(t)+B(+\infty,t)x(t)\\
&\text{је самоадјунговани изоморфизам }\}
\end{aligned}$$

[10]Такви u имају ограничену C^0 норму, али велику C^0 норму парцијалног извода по t. Захваљујући носачу мале мере, они су ипак $W^{1,r}$ норме не веће од један.

где су

$$W^{1,r}_F := \left\{u \in W^{1,r}([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R}^{2n}) \mid u(s,0), u(s,1) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}\right\},$$
$$L^r_F := \left\{u \in L^r([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R}^{2n}) \mid u(s,0), u(s,1) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}\right\},$$

а $\widetilde{W}^{1,r}$ и $\widetilde{L}^r$ дефинисани на страни 124. Релација еквиваленције на скупу оваквих специјалних оператора се дефинише помоћу асимтотских крајева:

$$K_1 \sim K_2 \in \Sigma^M_{\mathrm{triv}} \quad \Leftrightarrow \quad K_1^{\pm} = K_2^{\pm},$$
$$L_1 \sim L_2 \in \Sigma^F_{\mathrm{triv}} \quad \Leftrightarrow \quad L_1^{\pm} = L_2^{\pm}.$$

И овде су класе посматране као скупови контрактибилне, хомотопија која повезује два оператора је поново конструисана помоћу конвексних комбинација као у доказу Тврђења 69 (за више детаља видети [69] за Морсов, а [24] за Флоров случај).

5.2.3 Оријентација и лепљење Фредхолмових оператора

У овом поглављу конструисаћемо лепљење два Фредхолмова оператора специјалне класе, од којих је један јединственог, а други мешовитог типа. Лепљење оператора истог јединственог типа описано је у [24, 69].

За оператор специјалне класе, било ког типа (из скупа Σ_{triv}, Σ^M_{triv} или Σ^F_{triv}) кажемо да је *асимптотски константан* ако чиниоци који га дефинишу (J и B у једном, а A у другом случају) не зависе од s, за довољно велико $|s|$.

Дефиниција 71. Нека су $F = (F_1, F_2) \in \Sigma_{\mathrm{triv}}$, $K \in \Sigma^M_{\mathrm{triv}}$ и $L \in \Sigma^F_{\mathrm{triv}}$ асимптотски константни оператори, такви да важи

$$K^+ = F_1^-, \quad F_2^+ = L^-.$$

Нека је

$$(K \sharp_\rho F_1)(\gamma)(s) := \dot{\gamma}(s) + A_\rho(s)\gamma,$$

где је

$$A_\rho = \begin{cases} A_K(s+2\rho), & s \le -\rho, \\ A_{F_1}(s), & -\rho \le s \le 0, \end{cases}$$

за довољно велико ρ. Дефинишимо

$$K \sharp_\rho F := (K \sharp_\rho F_1, F_2) \in \Sigma_{\mathrm{triv}}.$$

Слично, дефинишимо

$$(F_2 \sharp_\rho L)\, u(s,t) := \frac{\partial u}{\partial s}(s,t) + J_\rho(s,t)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + B_\rho(s,t)u(s,t)$$

за довољно велико ρ, где је

$$\begin{aligned} B_\rho(s,t) &:= \begin{cases} B_{F_2}(s,t), & 0 \le s \le \rho, \\ B_L(s-2\rho,t), & s \ge \rho, \end{cases} \\ J_\rho(s,t) &:= \begin{cases} J_{F_2}(s,t), & 0 \le s \le \rho, \\ J_L(s-2\rho,t), & s \ge \rho \end{cases} \qquad \text{и} \\ F \sharp_\rho L &:= (F_1, F_2 \sharp_\rho L). \end{aligned}$$

$\diamond$

Напомена 72. Очигледно је да је лепљење Фредхолмових оператора специјалног типа добро дефинисано и на класама, то јест, да важи

$$F \sim G, K \sim L \quad \Rightarrow \quad (F \sharp_\rho K) \sim (G \sharp_\rho L).$$

Како у свакој класи из Σ_{triv} и Σ_{triv}^F постоји асимптотски константан оператор, видимо да услов асимптотске константности није суштински рестриктиван. Очигледно је да су, за различите ρ_1 и ρ_2 оператори $G \sharp_{\rho_1} L$ и $G \sharp_{\rho_2} L$ еквивалентни. Због тога ћемо користити и једноставнију ознаку $G \sharp L$, кадгод нам је од значаја само класа еквиваленције оператора. $\diamondsuit$

Тврђење 73. *Нека су K, F и L као у Дефиницији 71. Постоји изоморфизам*

$$f_\rho : \mathrm{Det}(K) \otimes \mathrm{Det}(F) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Det}(K \sharp_\rho F), \qquad g_\rho : \mathrm{Det}(F) \otimes \mathrm{Det}(L) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Det}(F \sharp_\rho L).$$

Доказ: Како је $\mathrm{Ker}(F_1,F_2) = \mathrm{Ker}(F_1) \times \mathrm{Ker}(F_2)$, $\mathrm{Coker}(F_1,F_2) = \mathrm{Coker}(F_1) \times \mathrm{Coker}(F_2)$ и $\mathrm{Det}(F) = (\Lambda^{\max}\mathrm{Ker}(F)) \otimes (\Lambda^{\max}\mathrm{Coker}(F))^*$, важи

$$\mathrm{Det}(F) = \mathrm{Det}(F_1) \otimes \mathrm{Det}(F_2).$$

Ако конструишемо изоморфизме

$$\begin{aligned} &\mathrm{Det}(K) \otimes \mathrm{Det}(F_1) \cong \mathrm{Det}(K \sharp_\rho F_1) \quad \text{и} \\ &\mathrm{Det}(F_2) \otimes \mathrm{Det}(L) \cong \mathrm{Det}(F_2 \sharp_\rho L), \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

имаћемо

$$\begin{aligned}&\operatorname{Det}(K\sharp F)=\operatorname{Det}\big((K\sharp_\rho F_1,F_2)\big)\cong\operatorname{Det}(K\sharp_\rho F_1)\otimes\operatorname{Det}(F_2)\cong\\&\operatorname{Det}(K)\otimes\operatorname{Det}(F_1)\otimes\operatorname{Det}(F_2)\cong\operatorname{Det}(K)\otimes\operatorname{Det}(F),\end{aligned}$$

што дефинише изоморфизам f. Изоморфизам g се конструише аналогно.

Вратимо се зато изоморфизму (5.2.11). Доказаћемо само постојање другог изоморфизма, постојање првог се доказује аналогно, уз евентуалне олакшице захваљујући једнодимензионом домену.

Уведимо нову ознаку $G := F_2$, да не бисмо користили двоструке индексе. Употребићемо поново помоћна пресликавања G_ψ, L_ϕ, као у доказу Тврђења 60. Нека су $W^{1,r}_F$, односно L^r_F, скупови свих пресликавања

$$u:\mathbb{R}\times[0,1]\to\mathbb{R}^{2n},u(s,0),u(s,1)\in\mathbb{R}^n\times\{0\}$$

класе $W^{1,r}$, односно L^r. Нека су

$$\psi:\mathbb{R}^k\to L^r_2,\quad \phi:\mathbb{R}^k\to L^r_F$$

линеарна пресликавања таква да су пресликавања

$$\begin{aligned}&\widehat{G}_\psi:\mathbb{R}^k\times W^{1,r}_2\to L^r_2,\quad \widehat{G}_\psi(h,w)=Gw+\psi h\quad\text{и}\\&\widehat{L}_\phi:\mathbb{R}^k\times W^{1,r}_F\to L^r_F,\quad \widehat{L}_\phi(h,u)=Lu+\phi h\end{aligned}$$

сурјективна. Дефининишимо

$$G_\psi(a,w):=(0,\widehat{G}_\psi(a,w)),\quad L_\phi(a,u):=(0,\widehat{L}_\phi(a,u)).$$

Из доказа Тврђења 60 следи да је $\operatorname{Det}(G_\psi)\cong\operatorname{Det}(G)$ и $\operatorname{Det}(L_\phi)\cong\operatorname{Det}(L)$. За довољно велико ρ конструишимо залепљени оператор

$$\widehat{G}_\psi\sharp_\rho\widehat{L}_\phi:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\times W^{1,r}_2\to L^r_2$$

на следећи начин. Можемо претпоставити да $\psi(a)$ и $\phi(a)$ имају носач у скупу $\{|s|\le R\}$ за неко $R>0$ и свако $a\in\mathbb{R}^k$ јер је скуп сурјективних

Фредхолмових оператора отворен, па постоји $\varepsilon > 0$ такво да $\|\psi-\chi\|_{\mathcal{L}} < \varepsilon \Rightarrow$ χ је Фредхолмов и сурјективан. За такво ε, посматрајмо оператор $\kappa_R\psi$ где је κ_R глатка функција једнака нули на $[-R+1, R-1]$ а јединици на $(-\infty,-R]\cup[R,+\infty)$. Његова норма тежи нули кад $R\to\infty$, па је $\chi := (1-\kappa_R)\psi$ тражени оператор за довољно велико R.

Дефинишимо, за довољно велико R

$$(\widehat{G}_\psi \sharp_\rho \widehat{L}_\phi)(a,b,w)(s,t) := (G\sharp_\rho L)w + \psi(a)(s,t) + \phi(b)(s-2\rho,t).$$

Захваљујући компактности носача пресликавања ψ и ϕ, горњи израз има слисла за довољно велико ρ, иако пресликавања $\psi(a)$ и $(G\sharp_\rho L)w$ с једне, и $\phi(b)$ с друге стране, нису априори дефинисана на истим скуповима. Доказ Тврђења 73 ће следити из следећег помоћног тврђења.

Тврђење 74. *Постоји доња граница ρ_1 таква да је, за свако $\rho\geq\rho_1$ оператор $\widehat{G}_\psi \sharp_\rho \widehat{L}_\phi$ сурјективан. Ако са Proj_ρ означимо пројекцију*[11] *у $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\times L^r$ на скуп $\mathrm{Ker}(\widehat{G}_\psi \sharp_\rho \widehat{L}_\phi)$, тада је пресликавање*

$$\varphi_\rho : \mathrm{Ker}(\widehat{G}_\psi)\times\mathrm{Ker}(\widehat{L}_\phi)\to\mathrm{Ker}(\widehat{G}_\psi \sharp_\rho \widehat{L}_\phi)$$

дато са

$$((a,w),(b,u))\mapsto \mathrm{Proj}_\rho(a,b,w\sharp^0_\rho u)$$

изоморфизам, где је $w\sharp^0_\rho u$ дефинисано у (4.3.15).

Доказ Тврђења 74 је потпуно аналоган доказу Тврђења 56 на страни 103, па га изостављамо. Вратимо се доказу Тврђења 73. Ако дефинишемо

$$\begin{aligned} G_\psi \sharp_\rho L_\phi :&\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\times W^{1,r}_2\to\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\times L^r_2\\ &(a,b,w)\mapsto\Big(0,0,(\widehat{F}_\psi \sharp_\rho \widehat{L}_\phi)(a,b,w)\Big),\end{aligned}$$

онда видимо да је $(G_\psi \sharp_\rho L_\phi) = (G\sharp_\rho L)_{\psi\oplus\phi_{-2\rho}}$, где је

$$\psi\oplus\phi_{-2\rho}(a,b)(s,t) = \psi(a)(s,t)+\phi(b)(s-2\rho,t).$$

[11] Ова пројекција је коректно дефинисана захваљујући коначној димензији језгра Фредхолмовог оператора.

Из доказа Тврђења 60 следи да постоји природни изоморфизам

$$\mathrm{Det}(G_\psi \sharp_\rho L_\phi) \cong \mathrm{Det}(G \sharp_\rho L). \tag{5.2.12}$$

Изоморфизам φ из Тврђења 74 индукује изоморфизам

$$\bigwedge^{\max}(\mathrm{Ker}\, \widehat{G}_\psi) \otimes \bigwedge^{\max}(\mathrm{Ker}\, \widehat{L}_\phi) \cong \bigwedge^{\max}(\mathrm{Ker}\, \widehat{G}_\psi \sharp_\rho \widehat{L}_\phi), \tag{5.2.13}$$

а како је

$$\left(\bigwedge^{\max} \mathbb{R}^k\right)^* \otimes \left(\bigwedge^{\max} \mathbb{R}^k\right)^* \cong \left(\bigwedge^{\max}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)\right)^*$$

то множењем (5.2.13) са $(\bigwedge^{\max} \mathbb{R}^k)^* \times (\bigwedge^{\max} \mathbb{R}^k)^*$, захваљујући услову $\mathrm{Ker}(G_\psi) \cong \mathrm{Ker}(\widehat{G}_\psi)$ добијамо

$$\mathrm{Det}(G_\psi) \otimes \mathrm{Det}(L_\phi) \cong \mathrm{Det}(G_\psi \sharp_\rho L_\phi).$$

Из (5.2.12) и услова $\mathrm{Det}(G_\psi) \cong \mathrm{Det}(G)$ добијамо

$$\mathrm{Det}(G) \otimes \mathrm{Det}(L) \cong \mathrm{Det}(G \sharp_\rho L),$$

за довољно велико ρ. Тиме је завршен доказ Тврђења 73. $\square$

Нека су дата два пара асимптотски константних оператора $G_0 \sim G_1 \in \Sigma^2_{\mathrm{triv}}$ и $L_0 \sim L_1 \in \Sigma^F_{\mathrm{triv}}$ који се „надовезују”, то јест, за које важи $G_0^+ = G_1^+ = L_0^- = L_1^-$. Нека су G^τ и L^τ путеви који их спајају, конструисани као у доказу Тврђења 69. Постоје такви ψ и ϕ за које су $\widehat{G}^\tau_\psi$ и $\widehat{L}^\tau_\phi$ сурјективни за све $\tau \in [0,1]$. Помоћу параметризоване верзије претходних аргумената, како сваки корак важи и за векторска раслојења, долазимо до изоморфизма векторских раслојења

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Det}(G_\psi) \otimes \mathrm{Det}(L_\phi) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & \mathrm{Det}(G_\psi \sharp_\rho L_\phi) \arrow[dl] \\
& {[0,1]} &
\end{tikzcd}$$

где је слој над $\tau \in [0,1]$ у раслојењу на левој страни $\mathrm{Det}(G_\psi^\tau) \otimes \mathrm{Det}(L_\phi^\tau)$, а на десној $\mathrm{Det}(G_\psi^\tau \sharp_\rho L_\phi^\tau)$. Захваљујући природним изоморфизмима типа $\mathrm{Det}(G_\psi) \cong \mathrm{Det}(G)$, добијамо изоморфизам раслојења

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Det}(G) \otimes \mathrm{Det}(L) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & \mathrm{Det}(G \sharp_\rho L) \arrow[dl] \\
& {[0,1]} &
\end{tikzcd}$$

у којима су слојеви, као и малопре, $\mathrm{Det}(G^\tau) \otimes \mathrm{Det}(L^\tau)$ и $\mathrm{Det}(G^\tau \sharp_\rho L^\tau)$. Закључујемо да се изоморфизам векторских простора f_ρ проширује на изоморфизам раслојења

$$\sharp_\rho : \mathrm{Det}([F]) \otimes \mathrm{Det}([L]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Det}([F \sharp_\rho L]), \tag{5.2.14}$$

где као и раније, ознаку $[F]$ користимо и за скуп оператора еквивалентних оператору F.

Напомена 75. Кажемо да се две оријентације o и o' (односно два сечења свуда различита од нуле) раслојења $\mathrm{Det}(f) \to X$ могу непрекидно деформисати једна до друге ако постоји пресликавање

$$o : [0,1] \times X \to \mathrm{Det}(f)$$

које је непрекидна фамилија оријентација и које их повезује. Прецизније o је непрекидно по обе променљиве, такво да је $o_\tau = o(\tau, \cdot)$ сечење различито од нуле за свако $\tau \in [0,1]$ и важи $o_0 = o$, $o_1 = o'$. Користићемо ознаку $o \simeq o'$ за две оријентације које се могу непрекидно деформисати једна до друге. $\diamondsuit$

Напомена 76. Нека су o_F и o_L оријентације раслојења $\mathrm{Det}[F]$ и $\mathrm{Det}[L]$. Тада је $o_F \sharp_{\rho_1} o_L \simeq o_F \sharp_{\rho_2} o_L$. Деформација која ово остварује је

$$o_\tau := o_F \sharp_{(\tau\rho_1 + (1-\tau)\rho_2)} o_L.$$

Користићемо и ознаку

$$o_F \sharp o_L := \sharp_\rho (o_F, o_L) \in \mathrm{Det}(F \sharp_\rho L)$$

где $\sharp$ на десној страни означава изоморфизам (5.2.14). $\diamondsuit$

Напомена 77. Нека су $o_F \simeq o'_F$ и $o_L \simeq o'_L$ оријентације раслојења $\mathrm{Det}[F]$ и $\mathrm{Det}[L]$. Тада је $o_F \sharp_\rho o_L \simeq o'_F \sharp_\rho o'_L$. Деформација која ово остварује је $o_\tau := (o_F)_\tau \sharp_\rho (o_L)_\tau$. $\diamondsuit$

На сличан начин се дефинише лепљење класа Фредхолмових оператора специјалног типа Σ^M_{triv} и класа оператора специјалног типа Σ_{triv}, као и одговарајућих оријентација. Позната је конструкција лепљења два оператора јединственог типа Σ^M_{triv} или Σ^F_{triv} (видети [24, 69]). Кадгод то има смисла, операција лепљења оријентација је асоцијативна, то јест, ако су три оператора специјалног типа (било ког од три поменута), K, F, L, компатибилна за лепљење, тада важи

$$(o_K \sharp o_F) \sharp o_L \simeq o_K \sharp (o_F \sharp o_L).$$

Наиме, ако су K, F и L такви, тада имамо неки од следећих случајева:

- $(K, F, L) \in \Sigma^M_{\mathrm{triv}} \times \Sigma^M_{\mathrm{triv}} \times \Sigma^M_{\mathrm{triv}}$
- $(K, F, L) \in \Sigma^M_{\mathrm{triv}} \times \Sigma_{\mathrm{triv}} \times \Sigma^F_{\mathrm{triv}}$
- $(K, F, L) \in \Sigma^F_{\mathrm{triv}} \times \Sigma^F_{\mathrm{triv}} \times \Sigma^F_{\mathrm{triv}}$.

Користећи сличне методе као досад, можемо конструисати глатко линијско раслојење E над $[0,1]$, које за граничне слојеве E_0 и E_1 има

$$E_0 = \mathrm{Det}((K \sharp_{\rho_1} F) \sharp_{\rho_2} L), \quad E_1 = \mathrm{Det}(K \sharp_{\rho_3} (F \sharp_{\rho_4} L))$$

и изоморфизам векторских раслојења

$$\begin{tikzcd} {[0,1] \times (\mathrm{Det}(K) \otimes \mathrm{Det}(F) \otimes \mathrm{Det}(L))} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

и тако извести својство асоцијативности.

Напомена 78. На исти начин се дефинишу класе еквиваленције и доказује одговарајућа контрактибилност у случају оператора мешовитог типа који има за прву компоненту оператор типа (5.2.7) а за другу оператор типа (5.2.6). Овакви оператори учествују у дефиницији многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(x, H, J; p, f, g)$ (видети (3.3.2) на страни 63). Користићемо следеће ознаке:

- Ξ^1_{triv} је скуп линеарних оператора
$$K \in \mathcal{L}\big(W^{1,r}([0,+\infty), \mathbb{R}^n \times \{0\}), L^r([0,+\infty), \mathbb{R}^n \times \{0\})\big)$$
облика (5.2.6), са истим особинама асимптотског оператора као и у случају Σ^1_{triv}, али на супротном крају ($s = +\infty$);

- Ξ^2_{triv} је скуп линеарних оператора
$$L \in \mathcal{L}\left(\widetilde{W}^{1,r}_2, \widetilde{L}^r_2\right)$$
облика (5.2.7) са одговарајућим оператором у $-\infty$, где су
$$\widetilde{W}^{1,r}_2 := \big\{u \in W^{1,r}((-\infty, 0] \times [0,1], \mathbb{R}^{2n}) \mid u(0,t), u(s,0), u(s,1) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}\big\}$$
$$\widetilde{L}^r_2 := \big\{u \in L^r((-\infty, 0] \times [0,1], \mathbb{R}^{2n}) \mid u(0,t), u(s,0), u(s,1) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}\big\};$$

- $\Xi_{\mathrm{triv}} := \Xi^2_{\mathrm{triv}} \times \Xi^1_{\mathrm{triv}}$;

- $\widetilde{\Xi}$ је скуп класа еквиваленције у односу на релацију еквиваленције дефинисану као у Дефиницији 68 на страни 125.

Лепљење специјалних оператора типа $\widetilde{\Xi}_{\mathrm{triv}}$ са специјалним операторима типа Σ^M_{triv} с једне, и Σ^F_{triv} с друге стране, као и лепљење одговарајућих оријентација се дефинише исто као и за операторе из $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{triv}}$. $\diamondsuit$

Дефиниција 79. *Кохерентна оријентација* на скупу $\Sigma_{\mathrm{triv}} \cup \Sigma^M_{\mathrm{triv}} \cup \Sigma^F_{\mathrm{triv}}$ је пресликавање σ које свакој класи еквиваленције $[F]$ придружује оријентацију $\sigma([F])$ раслојења $\mathrm{Det}([F]) \to [F]$, тако да, за сваки пар оператора (F, L) компатибилних за лепљење, важи
$$\sigma([F]) \sharp \sigma([L]) = \sigma([F] \sharp [L]).$$
$\diamond$

5.3 Оријентација и лепљење на многострукости

У овом поглављу ћемо применити резултате претходне конструкције на класу специјалних Фредхолмових оператора за нетривијални случај, када кодомен пресликавања није $\mathbb{R}^{2n}$, већ котангентно раслојење. Главна тешкоћа која се јавља приликом преласка на нетривијални случај је избор погодне класе тривијализација које обезбеђују добру дефинисаност свих релевантних појмова у нелинеарном случају.

И даље претпостављамо да је на T^*M задата стандардна симплектичка форма ω која у локалним координатама има запис

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j. \tag{5.3.1}$$

Поделићемо наставак анализе у неколико делова.

5.3.1 Оријентација непараметризованих комбинованих модулских простора

Нека је

$$\Omega := ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup ([0, +\infty) \times [0, 1]).$$

За два симплектичка векторска раслојења[12] $E \to \Omega$ и $F \to \Omega$ над Ω, означимо са $\mathrm{Sp}(E, F)$ векторско раслојење чији слој над тачком $z \in \Omega$ чине сва линеарна симплектичка пресликавања $E_z \to F_z$. У тривијалном случају $E = F = \Omega \times \mathbb{R}^{2n}$ имамо раслојење

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(n) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n}) \\ & & \downarrow \\ & & \Omega \end{array}$$

где је је $\mathrm{Sp}(n)$ означава групу симплектоморфизама простора $\mathbb{R}^{2n}$ у односу на стандардну симплектичку форму. Означимо са $\mathcal{G}^{\Omega}_{E,F}$ скуп свих сечења

[12]Векторско раслојење је симплектичко ако су влакна сипмплектички векторски простори, а функције преласка чувају симплектичку форму.

раслојења $\mathrm{Sp}(E,F)$, а са $\mathcal{G}^{\Omega}_{\mathbb{R}^{2n}}$ скуп свих сечења раслојења $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})$. Од значаја ће нам бити следећа помоћна лема.

Лема 80. *Нека је $\psi\in\mathcal{G}^{\Omega}_{\mathbb{R}^{2n}}$ такво да је $\psi(-\infty)=\psi(+\infty,t)=\mathrm{Id}$ и нека је $F=(F_1,F_2)\in\Sigma_{\mathrm{triv}}$. Тада је $F_\psi:=\psi\circ F\circ\psi^{-1}\in[F]$. Ако је o_F произвољна оријентација простора $\mathrm{Det}(F)$, а $\psi(o_F)$ оријентација оператора F_ψ индукована пресликавањем[13] ψ, тада се ове две оријентације могу непрекидно деформисати једна до друге, то јест, $\psi(o_F)\simeq o_F$.*

Доказ: Пре свега, приметимо да је $\psi\circ F\circ\psi^{-1}$ елемент скупа Σ_{triv}: ако је $w\in W^{1,r}$ тада $\psi\circ F\circ\psi^{-1}w\in L^r$, осим тога, директном рачуницом се проверава да је $\psi\circ F\circ\psi^{-1}$ одговарајућег специјалног облика (једна компонента облика (5.2.6) а друга (5.2.7)). Захваљујући асимптотским условима које задовољава ψ, важи $\psi\circ F\circ\psi^{-1}\in[F]$.

Како је ψ изоморфизам дуж влакана и важи $\psi\circ F=F_\psi\circ\psi$, то су добро дефинисана пресликавања

$$\begin{aligned}\psi\big|_{\mathrm{Ker}(F)}&:\mathrm{Ker}(F)\to\mathrm{Ker}(F_\psi)\quad\text{и}\\ \psi\big|_{\mathrm{Coker}(F)}&:\mathrm{Coker}(F)\to\mathrm{Coker}(F_\psi).\end{aligned}$$

Осим тога, како је

$$\begin{gathered}\mathrm{Ker}(F_\psi)=\psi(\mathrm{Ker}(F))\quad\text{и}\\ \mathrm{Coker}(F_\psi)=L^r/\operatorname{Im}(F_\psi)=\psi(L^r/\operatorname{Im}(F))=\psi(\mathrm{Coker}(F)),\end{gathered}\tag{5.3.2}$$

то су ова пресликавање и изоморфизми. Нека је

$$\begin{aligned}&\psi:\left(\bigwedge^{\max}\mathrm{Ker}(F)\right)\otimes\left(\bigwedge^{\max}\mathrm{Coker}(F)\right)^*\to\left(\bigwedge^{\max}\mathrm{Ker}(F_\psi)\right)\otimes\left(\bigwedge^{\max}\mathrm{Coker}(F_\psi)\right)^*\\ &\psi(\sigma):=\det\left(\psi\big|_{\mathrm{Ker}(F)}\right)\det\left(\psi\big|_{\mathrm{Coker}(F)}\right)\sigma.\end{aligned}$$

Претпоставимо за почетак да је оператор $F=(F_1,F_2)$ облика:

$$F_1=\frac{d}{ds}+\mathrm{Id},\qquad F_2=\frac{\partial}{\partial s}+J\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{Id}\,.\tag{5.3.3}$$

[13] Видети доказ у наставку за прецизну дефиницију оријентације $\psi(o_F)$.

Очигледно је да оријентација $\psi(\sigma)$ не зависи од хомотопске класе пресликавања ψ у простору $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})$. Како је раслојење $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})$ тривијално (јер је база Ω контрактибилан скуп), то је $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n}) \cong \Omega \times \mathrm{Sp}(n)$, па, како је $\pi_1(\mathrm{Sp}(n)) = \mathbb{Z}$ (видети [45]), закључујемо

$$\pi_1(\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})) \cong \pi_1(\mathrm{Sp}(n)) \cong \mathbb{Z}.$$

Зато је довољно да проверимо да тврђење важи ако је пресликавање ψ представник произвољне хомотопске класе, односно облика:

$$\psi(s,t) = \begin{bmatrix} e^{2\pi i k\phi(s)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{5.3.4}$$

где је ϕ глатка неопадајућа функција за коју важи

$$\phi(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0 \\ 1, & s \geq 1. \end{cases}$$

Ако дефинишемо $\psi_r(s,t) := \psi(\frac{s}{r},t)$, за $r > 0$, тада су ψ_r и ψ хомотопна пресликавања за свако r, тако да је довољно доказати тврђење за довољно велико r. Имамо да је $\psi_r \circ F \circ {\psi_r}^{-1} = (F_1^r, F_2^r)$, где је

$$F_1^r = \psi_r \circ \frac{\partial \psi_r^{-1}}{\partial s} + \mathrm{Id} + \frac{d}{ds} = F_1 + \Delta_r$$

и

$$F_2^r = \psi_r \circ \frac{\partial \psi_r^{-1}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} + J\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{Id} = F_2 + \Delta_r,$$

па је

$$(F_1^r, F_2^r) = (F_1, F_2) + (\Delta_r, \Delta_r).$$

Али

$$\Delta_r = \psi_r \circ \frac{\partial \psi_r^{-1}}{\partial s} = \psi_r \circ \frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} e^{-2\pi i k \phi(\frac{s}{r})} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{2\pi i k}{r}\phi'\left(\frac{s}{r}\right)\psi_r \circ \begin{bmatrix} e^{-2\pi i k \phi(\frac{s}{r})} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = -\frac{2\pi i k}{r}\phi'\left(\frac{s}{r}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

па норма пресликавања Δ_r тежи нули, кад $r \to +\infty$. Оператори F_1 и F_2 су изоморфизми; за оператор F_2 то је садржај Напомене 55. Што се тиче оператора F_1, како је његов спектрални ток једнак нули довољно је доказати да је он инјективан. Директним решавањем једначне $\dot{\gamma} = -\gamma$, из чињенице да $\gamma \in W^{1,r}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, закључујемо да мора бити $\gamma = 0$, ако је $F_1(\gamma) = 0$. Оператори $F = (F_1, F_2)$ и $F^r = (F_1^r, F_2^r)$ су хомотопни са фиксираним крајњим тачкама, и то преко линеарне хомотопије

$$\tau \mapsto F_\tau := (1-\tau)F + \tau F^r = F + \tau(\Delta_r, \Delta_r) \tag{5.3.5}$$

и, за довољно велико r, сви оператори хомотопије су инвертибилни, па је $\mathrm{Ker}(F_\tau) = \mathrm{Coker}(F_\tau) = 0$ и $\mathrm{Det}(F_\tau) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^*$. Одатле следи да је $o_F \simeq o_{F^r}$, хомотопију оријентација o_τ можемо изабрати да буде $o_\tau = [(1 \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes 1^*)]$.

Остало је да покажемо да доказ леме увек можемо да сведемо на специјални случај оператора облика (5.3.3). Претпоставимо, зато, да су F и G два оператора из Σ_{triv} која се могу непрекидном трансформацијом унутар Σ_{triv} превести један у други. Овде не подразумевамо да су крајеви фиксирани и једнаки. Означимо ову трансформацију са F_τ. Продужење оријентације o_F дуж лука F_τ дефинише оријентацију o_G оператора G. Исто важи и за F_ψ и G_ψ: продужење оријентације $\psi(o_F)$ дуж лука

$\psi \circ F_\tau \circ \psi^{-1}$ дефинише оријентацију $\psi(o_G)$ оператора G_ψ. Претпоставимо да смо доказали Лему за оператор G. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, dash] \arrow[d] & \psi \circ F \circ \psi^{-1} \\
G \arrow[r] & \psi \circ G \circ \psi^{-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Доња хоризонтална стрелица представља хомотопију из формуле (5.3.5) са фиксираним асимтотским крајевима. Вертикалне стрелице представљају хомотопију која не мора бити са фиксираним крајевима. Како за свако τ оператори F_τ и $\psi \circ F_\tau \circ \psi^{-1}$ имају исте крајеве (захваљујући асимптотским особинама пресликавања ψ), можемо их спојити линеарним хомотопијама са фиксираним асимптотским крајевима дуж испрекиданих линија. Имамо оријентацију – непрекидно сечење различито од нуле – на унији вертикалних и доњој хоризоналној страници квадрата. Малим померањима дуж испрекидане линије можемо ово сечење проширити на читав квадрат и стићи до непрекидне трансформације дуж горње хоризонталне линије која предводи оријентацију o_F у $\psi(o_F)$.

Како је лема доказана за оператор (5.3.3), претходна дискусија повлачи да је она доказана и за сваки оператор $F = (F_1, F_2)$ такав да је $F_1^- = \mathrm{Id}$, $F_2^+ = \mathrm{Id}$, будући да је он хомотопан са (5.3.3).

За сваки оператор $G = (G_1, G_2) \in \Sigma_{\mathrm{triv}}$ постоје оператори $K \in \Sigma_{\mathrm{triv}}^M$, $L \in \Sigma_{\mathrm{triv}}^F$, такви да важи

$$K^- = G_1^-, \quad K^+ = \mathrm{Id}, \quad L^- = \mathrm{Id}, \quad L^+ = G^+.$$

Нека је $F = (F_1, F_2)$ такав да је $F_1^- = \mathrm{Id}$, $F_2^+ = \mathrm{Id}$. Претпоставимо да је ψ асимптотски константно (на основу претходног разматрања видимо да ово не смањује општост) и да је

$$\psi = \mathrm{Id} \sharp \psi_1 \sharp \mathrm{Id}, \quad \text{где је} \quad \psi_1(-\infty) = \psi_1(+\infty, t) = \mathrm{Id}\,.$$

Овде операцију лепљења сечења која се надовезују дефинишемо на очигледан начин.[14] Из већ доказаног дела за специјалан облик оператора (5.3.3) и претходне дискусије имамо

$$o_G \simeq o_{K\sharp F\sharp L} \simeq o_K \sharp o_F \sharp o_L \simeq o_K \sharp \psi_1(o_F) \sharp o_L \simeq$$
$$(\mathrm{Id}\sharp \psi_1 \sharp \mathrm{Id})(o_K \sharp o_F \sharp o_L) \simeq \psi(o_{K\sharp F\sharp L}) \simeq \psi(o_G).$$

□

Означимо са $C^\infty(\Omega, T^*M)$ скуп свих парова $w = (\gamma, u)$ глатких пресликавања

$$\gamma : (-\infty, 0] \to M, \quad u : [0, +\infty) \times [0, 1] \to T^*M$$

таквих да важи:

$$\begin{cases} u(s,0), u(s,1), u(0,t) \in O_M, \\ \gamma(0) = u\left(0, \frac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{5.3.6}$$

За $w \in C^\infty(\Omega, T^*M)$ означимо са $\Sigma_w = \Sigma_{w^*(TT^*M)}$ скуп свих оператора $F = (F_1, F_2)$ за које постоји симплектичка тривијализација[15]

$$\psi : w^*(TT^*M) \to \Omega \times \mathbb{R}^{2n}$$

таква да је оператор

$$F_\psi = \psi \circ F \circ \psi^{-1} \in \Sigma_{\mathrm{triv}}.$$

Дефиниција 81. Нека је $w_1 = (\gamma_1, u_1)$, $w_2 = (\gamma_2, u_2) \in C^\infty(\Omega, T^*M)$, $F = (F_1, F_2) \in \Sigma_{w_1}$ и $G = (G_1, G_2) \in \Sigma_{w_2}$ За парове (F, w_1) и (G, w_2) (или скраћено, за операторе F и G) кажемо да су *еквивалентни:*

$$(F, w_1) \sim (G, w_2)$$

ако:

$$\gamma_1(-\infty) = \gamma_2(-\infty),\ u_1(+\infty, t) = u_2(+\infty, t),\ F_1^- = G_1^-,\ F_2^+ = G_2^+.$$

Означимо класу еквиваленције елемента (F, w) са $[F, w]$, а скуп класа еквиваленције са $\widetilde{\Sigma}$. ◇

[14] То јест, исто као и досадашња лепљења трајекторија и оператора, за сечења која су асимптотски константа. Из (5.3.4) следи да је свако сечење хомотопски еквивалентно таквом.

[15] То је тривијализација ψ за коју дуж влакана важи $\psi^*\omega_0 = \omega$, где је ω_0 стандардна сипмлектичка форма у $\mathbb{R}^{2n}$, а ω симплектичка форма на T^*M, видети (5.3.1).

Следећи корак је избор класе тривијализација које ће нам омогућити да оријентишемо еквивалентне операторе из Дефиниције 81 истовремено на јединствен и кохерентан начин.

Дефиниција 82. Нека је $(w_1, F) \sim (w_2, G)$ као у Дефиницији 81. Пар симплектичких тривијализација

$$\phi_{w_1} : w_1^* TT^*M \xrightarrow{\cong} \Omega \times \mathbb{R}^{2n}; \quad \psi_{w_2} : w_2^* TT^*M \xrightarrow{\cong} \Omega \times \mathbb{R}^{2n}$$

зовемо *допустивим* ако је $\phi_{w_1}(-\infty) = \psi_{w_2}(-\infty)$ и $\phi_{w_1}(+\infty, t) = \psi_{w_2}(+\infty, t)$ за свако $t \in [0, 1]$. $\diamond$

Посебно, ако су w_1, w_2, F, G, ϕ_{w_1} и ψ_{w_2} као у Дефиницији 82, тада су оператори $\phi_{w_1} F {\phi_{w_1}}^{-1}$ и $\psi_{w_2} G {\psi_{w_2}}^{-1}$ еквивалентни у тривијалном смислу (видети Дефиницију 68 на страни 125).

Напомена 83. Приметимо да пар допустивих тривијализација увек постоји. Наиме, $(w_1 \cdot w_2^{-1})^* TT^*M$ је симплектичко векторско раслојење над простором S који је хомотопски еквивалентан кружници $\mathbb{S}^1$:

$$\begin{array}{ccc} (w_1 \cdot w_2^{-1})^* TT^*M & & TT^*M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}^1 \simeq S & \xrightarrow{w_1 \cdot w_2^{-1}} & TT^*M \end{array}$$

Произвољно векторско раслојење над кружницом је или тривијално или директна сума тривијалног раслојења и Мебијусове траке (дакле неоријентабилно). Како је свако симплектичко раслојење над $\mathbb{S}^1$ оријентабилно, закључујемо да је $(w_1 \cdot w_2^{-1})^* TT^*M$ тривијално. Уз то, могуће је изабрати симплектичку тривијализацију, јер је, у $\mathbb{R}^{2n}$ свака симплектичка форма пулбек стандардне, при неком изоморфизму простора $\mathbb{R}^{2n}$ (видети [45]). За произвољну симплектичку тривијализацију ψ раслојења $(w_1 \cdot w_2^{-1})^* TT^*M$, узмимо да је $\psi_{w_1} := \psi\big|_{w_1}$ и $\psi_{w_2} := \psi\big|_{w_2}$. $\diamondsuit$

Следећа лема нам омогућава да појмове из претходног поглавља пренесемо на нелинеаран случај, уз помоћ допустивих тривијализација.

Лема 84. *Нека су $(w_1, F) \sim (w_2, G)$ као у Дефиницији 81 и (ϕ_{w_1}, ψ_{w_2}), $(\phi'_{w_1}, \psi'_{w_2})$ два пара допустивих тривијализација. Нека су o_F и o_G оријентације простора* $\mathrm{Det}(F)$ *и* $\mathrm{Det}(G)$*. Ако пар (ϕ_{w_1}, ψ_{w_2}) индукује оријентације*

$$\phi_{w_1}(o_G) \simeq \psi_{w_2}(o_F)$$

(које се могу непрекидно деформисати једна до друге) тривијализованих класа

$$[\phi_{w_1} \circ F \circ \phi_{w_1}^{-1}] = [\psi_{w_2} \circ G \circ \psi_{w_2}^{-1}] = [\phi'_{w_1} \circ F \circ \phi'^{-1}_{w_1}] = [\psi'_{w_2} \circ G \circ \psi'^{-1}_{w_2}],$$

тада исто важи и за пар $(\phi'_{w_1}, \psi'_{w_2})$*, то јест, тада је*

$$\phi'_{w_1}(o_G) \simeq \psi'_{w_2}(o_F). \tag{5.3.7}$$

Доказ: Посматрајмо криву

$$\chi := \phi_{w_1} \circ \phi'^{-1}_{w_1} \circ \psi'_{w_2} \circ \psi_{w_2}^{-1} : \Omega \times \mathbb{R}^{2n} \to \Omega \times \mathbb{R}^{2n}. \tag{5.3.8}$$

Како је, по претпоставци

$$\begin{aligned} \phi_{w_1}(-\infty) = \psi_{w_2}(-\infty), \quad \phi_{w_1}(+\infty, t) = \psi_{w_2}(+\infty, t) \\ \phi'_{w_1}(-\infty) = \psi'_{w_2}(-\infty), \quad \phi'_{w_1}(+\infty, t) = \psi'_{w_2}(+\infty, t), \end{aligned}$$

то крива χ задовољава услове Леме 80, па важи

$$\chi(\psi_{w_2}(o_F)) \simeq \psi_{w_2}(o_F). \tag{5.3.9}$$

По претпоставци важи

$$\psi_{w_2}(o_F) \simeq \phi_{w_1}(o_G). \tag{5.3.10}$$

Из (5.3.8), (5.3.9) и (5.3.10) следи

$$\phi_{w_1} \circ \phi'^{-1}_{w_1} \circ \psi'_{w_2}(o_F) \simeq \chi(\psi_{w_2}(o_F)) \simeq \psi_{w_2}(o_F) \simeq \phi_{w_1}(o_G).$$

Али одатле је

$$\psi'_{w_2}(o_F) \simeq \phi'_{w_1}(o_G).$$

□

Сада смо у могућности да оријентишемо класу Фредхолмових оператора у нетривијалном случају.

Дефиниција 85. Свака оријентација o_F оператора F индукује јединствену оријентацију класе еквиваленције $[F]$: за $G \sim F$ дефинишимо

$$o_F \simeq o_G$$

ако и само ако важи

$$\psi_{w_2}(o_F) \simeq \phi_{w_1}(o_G)$$

за неки (а самим тим за сваки) допустив пар тривијализација (ψ_{w_2}, ϕ_{w_1}).$\diamond$

У Поглављу 4.3.1, једначином (4.3.15) на страни 101, дефинисали смо пред-лепљење комбинованог објекта са пертурбованим холоморфним диском. Иста дефиниција је коректна и за $w \in C^\infty(\Omega, T^*M)$ (видети (5.3.6)), $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0,1], T^*M)$, где је $u(s,i) \in O_M$, за $i = 0,1$ и $w(+\infty, t) = v(-\infty, t)$ (без услова да су w и v решења одређених парцијалних једначина). На сличан начин дефинишемо и лепљење комбинованог објекта са објектом из $C^\infty(\mathbb{R}, O_M)$. Прецизније, нека је $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, O_M)$ а $\gamma \in C^\infty((-\infty, 0], M)$ и нека је $\alpha(+\infty) = \gamma(-\infty) = q$. Ако је β^+ глатка функција као у (4.3.13), дефинишимо:

$$\alpha \,\sharp_\rho \gamma(s) := \begin{cases} \alpha(s + 2\rho), & s \le -\rho - 1, \\ \exp_q(\beta(-s-\rho)\xi(s+2\rho)), & -\rho - 1 \le s \le -\rho, \\ q, & -\rho \le s \le -\frac{\rho}{2} - 1, \\ \exp_q(\beta(s + \frac{\rho}{2} + 1)\zeta(s)), & -\frac{\rho}{2} - 1 \le s \le -\frac{\rho}{2}, \\ \gamma(s), & -\frac{\rho}{2} \le s \le 0, \end{cases} \tag{5.3.11}$$

где је $\exp_q \xi(s) = \alpha(s)$, за $s \ge s_0$, а $\exp_q \zeta(s) = \gamma(s)$, за $s \le -s_0$. Сада дефинишимо, за $w = (\gamma, u) \in C^\infty(\Omega, T^*M)$:

$$\alpha \,\sharp\, w := (\alpha \,\sharp\, \gamma, u) \in C^\infty(\Omega, T^*M).$$

Као у мешовитом случају, означимо са $\Sigma^M_{\alpha^*(TT^*M)}$ скуп свих оператора K таквих да за неку симплектичку тривијализацију

$$\phi : \alpha^*(TT^*M) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$$

и

$$\widetilde{\phi} := \phi|_{TM}, \quad \widetilde{\phi} : \alpha^*(TT^*M) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

важи

$$\widetilde{\phi} K \widetilde{\phi}^{-1} \in \Sigma^M_{\mathrm{triv}};$$

а са $\Sigma^F_{v^*(TT^*M)}$ скуп свих оператора L таквих да за неку симплектичку тривијализацију

$$\varphi : v^*(TT^*M) \to \mathbb{R} \times [0,1] \times \mathbb{R}^{2n}$$

важи

$$\varphi K \varphi^{-1} \in \Sigma^F_{\mathrm{triv}}.$$

Користећи лепљење у тривијалном случају, дефинисаћемо лепљење Фредхолмових оператора[16] из Σ_w са операторима из $\Sigma^M_{\alpha^*(TT^*M)}$ и $\Sigma^F_{v^*(TT^*M)}$.

Дефиниција 86. Нека су α, w и v, $K \in \Sigma^M_{\alpha^*(TT^*M)}$, $F = (F_1, F_2) \in \Sigma_w$ и $L \in \Sigma^F_{v^*(TT^*M)}$ такви да важи

$$\begin{gathered} \alpha(+\infty) = w(-\infty), \quad w(+\infty, t) = v(-\infty, t), \\ K^+ = F_1^-,\ F_2^+ = L^-. \end{gathered}$$

Посматрајмо тривијализације:

$$\begin{aligned} &\phi_\alpha : \alpha^*TT^*M \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \\ &\psi_w : w^*TT^*M \to \Omega \times \mathbb{R}^{2n}, \\ &\varphi_v : v^*TT^*M \to (\mathbb{R} \times [0,1]) \times \mathbb{R}^{2n} \end{aligned}$$

настале на следећи начин. Нека је $x(t) = u(+\infty, t) = v(-\infty, t)$ и U нека отворена околина скупа $x([0,1])$. Глатка тривијализација

$$\Gamma : TT^*M\big|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^{2n}$$

индукује тривијализације ψ_w и φ_v раслојења w^*TT^*M и v^*TT^*M тако да важи

$$\Gamma\big|_{w([R,+\infty]\times[0,1])} = \psi_w\big|_{[R,+\infty]}, \quad \Gamma\big|_{v([-\infty,-R]\times[0,1])} = \varphi_v\big|_{[-\infty,-R]}$$

[16] Из једнакости (5.3.2) следи да су сви оператори из Σ, Σ_M и Σ_F Фредхолмови.

за довољно велико R (за које је $w([R,+\infty]\times[0,1])$, $v([-\infty,-R]\times[0,1])\subset U$). Дефинишимо

$$\psi\,\sharp\,_\rho\varphi(s,t):=\begin{cases}\psi(s,t), & 0\le s\le\frac{\rho}{2},\\ \Gamma_{w\,\sharp^0_\rho v}, & \frac{\rho}{2}\le s\le\rho+1,\\ \varphi(s-2\rho,t), & s\ge\rho+1\end{cases}$$

за $\rho\ge\max\{2R,R+1\}$ и слично у случају тривијализација ϕ_α и ψ_w. Очигледно је да се ове тривијализације надовезују, односно, да важи:

$$\phi_\alpha(+\infty)=\psi_w(-\infty),\quad \psi_w(+\infty,t)=\varphi_v(-\infty,t).$$

Коначно, дефинишимо лепљење оператора:

$$K\,\sharp_\rho\,F:=(\phi_\alpha\,\sharp_\rho\,\psi_w)^{-1}\circ(\phi(K)\,\sharp_\rho\psi(F))\circ(\phi_\alpha\,\sharp_\rho\psi_w)\in\Sigma_{\alpha\,\sharp^0_\rho w}$$

и, слично:

$$F\,\sharp_\rho L:=(\psi_w\,\sharp_\rho\varphi_v)^{-1}\circ(\psi(F)\,\sharp_\rho\varphi(L))\circ(\psi_w\,\sharp_\rho\varphi_v)\in\Sigma_{w\,\sharp^0_\rho v}.$$

◇

Као и у тривијалном случају, класа залепљених оператора не зависи од ρ па ћемо користити и ознаку $\sharp$ уместо $\sharp_\rho$ када радимо са класама.

Нека су α, $w=(\gamma,u)$, v, K, F, L, ϕ_α, ψ_w и φ_v као у Дефиницији 86. Ако су o_K, o_F и o_L три оријентације раслојења $\mathrm{Det}[K]$, $\mathrm{Det}[F]$ и $\mathrm{Det}[L]$, дефинишимо

$$o_K\,\sharp\,o_F:=(\phi_\alpha\,\sharp_\rho\,\psi_w)^{-1}\,(\phi_\alpha(o_K)\,\sharp_\rho\,\psi_w(o_F))$$

и, слично

$$o_F\,\sharp\,o_L:=(\psi_w\,\sharp_\rho\,\varphi_v)^{-1}\,(\psi_w(o_F)\,\sharp_\rho\,\varphi_v(o_L))\,.$$

Ознака $\sharp$ на левој страни претходних једнакости је оправдана чињеницом да класа оријентације не зависи од ρ.

Напомена 87. Нека су w и v елементи многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$ и $\mathcal{M}(x,y,H,J)$, односно решења једначина (2.1.9) на страни 23 и (2.1.6) на страни 21 редом. Нека су o_w и o_v оријентације класа $[u,D_u]$ и $[v,D_v]$. Оператори D_w и D_v су сурјективни, а лепљење трајекторија индукује изоморфизам

$$D\,\sharp_\rho:\mathrm{Ker}(D_w)\times\mathrm{Ker}(D_v)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Ker}(D_{w\,\sharp_\rho v})$$

(видети Поглавље 4.3.3). Овај изоморфизам индукује оријентацију у истој класи залепљене оријентације $o_w \sharp o_v$ описане у овом Поглављу. Наиме, операције $\sharp_\rho$ и $\sharp_\rho^0$ су хомотопне у простору $C^\infty(\Omega, T^*M)$. Хомотопија се остварује помоћу пресликавања

$$\begin{aligned}\mathcal{H} : \mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J) \times \mathcal{M}(x,y,H,J) \times [0,1] \to C^\infty(\Omega, T^*M),\\ (w,v,\tau) \mapsto \exp_{w\,\sharp_\rho^0 v}(\tau \cdot \Gamma(w,v,\rho)).\end{aligned}$$

У претходном изразу користили смо ознаке из Поглавља 4.3. Из саме конструкције лепљења оријентација $\sharp$ видимо да је ова операција дефинисана помоћу изоморфизма насталог из операције пред-лепљења трајекторија $\sharp_\rho^0$ и Фредхолмових оператора (видети Тврђења 56 на страни 103 и 74 на страни 132). Одавде следи да су залепљена оријентација с једне, и оријентација индукована пресликавањем $\hat{\sharp} = D\,\sharp_\rho^0$ с друге стране, у истој класи. Исто важи и за лепљење комбинованог објекта са објектом из $\mathcal{M}(p,q,f,g)$. $\diamondsuit$

Напомена 88. Као и у тривијалном случају, и овде целу конструкцију можемо извести за случај комбинованих оператора са доменом

$$\Omega' := ((-\infty, 0] \times [0,1]) \cup [0, +\infty)$$

који учествују у дефиницији многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(x,H,J;p,f,g)$. Користићемо следеће ознаке. За $w = (u,\gamma) \in C^\infty(\Omega', T^*M)$, такво да је $u(s,0)$, $u(s,1)$, $u(0,t)$, $\gamma(s) \in O_M$ дефинишимо $\Xi_w = \Xi_{w^*(TT^*M)}$ као скуп свих оператора $F = (F_2, F_1)$ за које постоји симплектичка тривијализација

$$\psi : w^*(TT^*M) \to \Omega' \times \mathbb{R}^{2n},$$

таква да је оператор

$$F_\psi = \psi \circ F \circ \psi^{-1} \in \Xi_{\mathrm{triv}},$$

где је Ξ_{triv} скуп дефинисан у Напомени 78. $\diamondsuit$

Напомена 89. Операција $\sharp$ је асоцијативна, то јест, важи:

$$(o_K \sharp o_F) \sharp o_L = o_K \sharp (o_F \sharp o_L)$$

кадгод су оператори K, F, и L компатибилни за лепљење. Ово следи из асоцијативности у тривијалном случају. $\diamondsuit$

Дефиниција 90. *Кохерентна оријентација* на скупу $\Sigma \cup \Sigma^M \cup \Sigma^F$ је пресликавање σ које свакој класи еквиваленције $[F]$ придружује оријентацију $\sigma([F])$ раслојења $\mathrm{Det}([F]) \to [F]$, тако да, за сваки пар оператора (F, L) компатибилних за лепљење, важи

$$\sigma([F]) \,\sharp\, \sigma([L]) = \sigma([F] \,\sharp\, [L]).$$

$\diamond$

5.3.2 Оријентација $R-$параметризованих комбинованих модулских простора

У конструкцији Пиуникин–Саламон–Шварцових хомоморфизама, као и у доказу да су они изоморфизми, учествују и многострукости пресликавања $\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)$ који се састоје од две градијентне трајекторије (придружене Морсовој функцији f) и једног пертурбованог холоморфног диска, холоморфног на крајевима. Прецизније, нека је:

$$\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J) :=$$
$$\left\{ (\gamma_-, u, \gamma_+, R) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma_- : (-\infty, 0] \to M,\ \gamma_+ : [0, +\infty) \to M, \\ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M, \\ \frac{d\gamma_\pm}{ds} = -\nabla f(\gamma_\pm), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\rho_R H}(u)) = 0, \\ \gamma_-(-\infty) = p,\ \gamma_+(+\infty) = q, \\ u(\partial(\mathbb{R} \times [0,1])) \subset O_M,\ u(\pm\infty, t) = \gamma_\pm(0) \end{array} \right\} \tag{5.3.12}$$

(видети и [36, 75]). Овде је $\rho_R : \mathbb{R} \to [0,1]$ глатка функција за коју важи

$$\rho_R = \begin{cases} 1, & |s| \leq R, \\ 0, & |s| \geq R+1. \end{cases}$$

Од значаја нам је и скуп

$$\mathcal{M}_R(p,q,f,g;H,J) := \left\{ (\gamma_-, \gamma_+, u) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\gamma_-, \gamma_+, u)\,\text{је решење једначине} \\ (5.3.12)\ \text{за фиксирано}\, R. \end{array} \right\} \tag{5.3.13}$$

Да бисмо дефинисали хомоморфизам (2.1.8) са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима, потребно је да оријентишемо и ова два простора. Конструкција је слична досадашњој. У тривијалном случају, дефинишемо релацију еквиваленције специјалне класе оператора

$$F = (F_1, F_2, F_3) \in \Theta := \Sigma^1 \times \Sigma^F \times \Xi^1 \tag{5.3.14}$$

(овде ћемо изостављати индекс triv да бисмо скратили запис) са доменом

$$\widetilde{\Omega} = ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times [0,1]) \cup ([0, +\infty) \times \{0\})$$

на следећи начин:

$$F = (F_1, F_2, F_3) \sim (G_1, G_2, G_3) = G \quad \text{ако и само ако} \quad F_1^- = G_1^- \text{ и } F_3^+ = G_3^+.$$

Коришћењем линеарне хомотопије као и досад, може се доказати да су класе екливаленције оператора овог типа, посматране као подскупови простора оператора са операторском нормом, контрактибилне. Дефиниција (пред)лепљења пресликавања из $C^\infty(\widetilde{\Omega}, T^*M)$ са пресликавањима из $C^\infty(\mathbb{R}, O_M)$, као и дефиниција лепљења одговарајућих Фредхолмових оператора је аналогна досадашњим. Конструкција лепљења оријентација (и у тривијалном и у нетривијалном амбијенту) у случају тројки специјалних оператора може се извести у потпуној аналогији са случајем парова.

Тангентни простор многострукости $\mathcal{M}_R(p, q, f, g; H, J)$ је језгро тројке оператора (F_1, F_2, F_3) од малопре. Случај тангентног простора многострукости $\mathcal{M}(R; p, q, f, g; H, J)$ је нешто другачији, она је скуп нула Фредхолмовог пресликавања F две променљиве: $R \in \mathbb{R}$ и $w_R = (\gamma_-, u, \gamma_+)$. Његова линеаризација D_2F по другој променљивој w_R је Фредхолмов оператор типа (5.3.14). Посматрајмо кратак тачан низ

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(D_2F) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Ker}(DF) \xrightarrow{d_2} T_R[R_0, \infty) \xrightarrow{d_3} \mathrm{Coker}(D_2F) \longrightarrow 0,$$

где су

$$\begin{aligned} d_1(k) &= (0, k), \\ d_2(h, k) &= h, \\ d_3(h) &= D_1F(h) \pmod{\mathrm{Im}(D_2F)}. \end{aligned}$$

Из Леме 61 следи да постоји канонски изоморфизам

$$\begin{aligned} &\bigwedge^{\max} (\mathrm{Ker}(D_2F(R, w_R))) \otimes \bigwedge^{\max} (T_R[R_0, +\infty)) \\ \xrightarrow{\cong} &\bigwedge^{\max} (\mathrm{Ker}(DF(R, w_R))) \otimes \bigwedge^{\max} (\mathrm{Coker}(D_2F(R, w_R))) \end{aligned}$$

за све $(R, w_R) \in \mathcal{M}(R; p, q, f, g; H, J)$. Одавде добијамо канонски изоморфизам

$$\mathrm{Det}(D_2F) \otimes \bigwedge^{\max} T_R[R_0, +\infty) \xrightarrow{\cong} \bigwedge^{\max}(\mathrm{Ker}(DF)).$$

Ако фиксирамо оријентацију $\frac{d}{dR}$ скупа $T_R[R_0, +\infty) \cong \mathbb{R}$, добијамо природни изоморфизам

$$\varphi : \mathrm{Det}(D_2F) \xrightarrow{\cong} \bigwedge^{\max} \mathrm{Ker}(DF). \tag{5.3.15}$$

Тако оријентација оператора D_2F индукује оријентацију тангентног простора $T_{(R,w_R)}\mathcal{M}(R; p, q, f, g; H, J)$. Конструкција лепљења трајекторија, оператора и оријентација изводи се аналогно непараметризованом случају. И овде су оријентације индуковане диференцијалом лепљења $D\sharp$ и залепљене оријентације еквивалентне.

Приметимо да можемо дефинисати лепљење оператора $G \in \Sigma$ са оператором $H \in \Xi$ и добити оператор из Θ (и то не само у непараметризованом, већ и у параметризованом случају – кад $R \to +\infty$; у Поглављу 4.2 дат је опис конвергенције у овом случају). Такође има смисла дефинисати лепљење оператора из Θ и оператора из Σ^M, резултат је оператор у Θ. И у овом случају је операција лепљења асоцијативна.

5.3.3 Кохерентна оријентација

У овом Поглављу ћемо показати да постоји кохерентна оријентација оператора мешовитог и јединственог типа истовремено. Фиксирајмо произвољну критичну тачку p_0 функције f и посматрајмо је као константну градијентну трајекторију. Оператор

$$K_0 = \frac{d}{ds} + A_0 \in \Sigma_{p_0^*TM},$$

где је A_0 симетрична недегенерисана матрица, јесте изоморфизам,[17] па је $\mathrm{Det}(K_0) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^*$. Фиксирајмо оријентацију

$$\sigma([p_0, K_0]) := 1 \otimes 1^* \tag{5.3.16}$$

[17]Видети доказ Леме 80.

раслојења $\mathrm{Det}(K_0)$.

Прво ћемо оријентисати класу пресликавања из $C^\infty(\mathbb{R}, O_M)$ и одговарајуће операторе. Овде ћемо следити конструкцију из [69]. Посматрајмо скупове

$$\mathcal{T}^- := \{[\gamma, K] \in \Sigma^M \mid \gamma(-\infty) = p_0,\ K^- = K_0\} \quad \text{и}$$
$$\mathcal{T}^+ := \{[\gamma, K] \in \Sigma^M \mid \gamma(+\infty) = p_0,\ K^+ = K_0\}.$$

Постоји бијекција између скупова $\mathcal{T}^-$ и $\mathcal{T}^+$:

$$\mathcal{T}^- \ni [\gamma, K] \mapsto [\gamma^{-1}, K^{-1}], \quad \text{где је} \quad \gamma^{-1}(s) := \gamma(-s),\ K^{-1} = K.$$

Изаберимо произвољну оријентацију скупа $\mathcal{T}^- \backslash \{[p_0, K_0]\}$. Оријентишимо скуп $\mathcal{T}^+ \backslash \{[p_0, K_0]\}$ тако да важи

$$\sigma([\gamma, F]) \sharp \sigma([\gamma^{-1}, F^{-1}]) \simeq \sigma([p_0, K_0]).$$

Нека је сада $[\gamma, F]$ произвољна класа, таква да је

$$\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, O_M), \quad F \in \Sigma^M_{\gamma * TT^*M}.$$

Постоје јединствене класе $[\alpha, F_1] \in \mathcal{T}^-$ и $[\beta, F_2] \in \mathcal{T}^+$ такве да је

$$\alpha(+\infty) = \gamma(-\infty), \quad \beta(-\infty) = \gamma(+\infty); \quad F_1^+ = F^-, \quad F_2^- = F^+.$$

Задајмо оријентацију класе $[\gamma, F]$ користећи услов

$$\sigma([\alpha, F_1]) \sharp \sigma([\gamma, F]) \sharp \sigma([\beta, F_2]) \simeq \sigma([p_0, K_0])$$

(за више детаља о оријентацији оператора овог, немешовитог, Морсовог типа видети Поглавље 3.2. у [69]).

Следећи корак је оријентисање пресликавања из $C^\infty(\mathbb{R} \times [0,1], T^*M)$ (са крајевима на нултом сечењу) и одговарајућих оператора (односно класа еквиваленције). Нека је $[u, K]$ класа еквиваленције пара (u, K), где је релација еквиваленције $\sim$ задата са:

$$(u_1, K_1) \sim (u_2, K_2) \quad \Leftrightarrow \quad u_1(\pm\infty, t) = u_2(\pm\infty, t) \text{ и } K_1^\pm = K_2^\pm.$$

Нека је:

$$\mathcal{P}^- = \{[w,F] \mid w=(\gamma,u),\ \gamma(-\infty)=p_0,\ F=(F_1,F_2)\in\Sigma_w,\ F_1^-=K_0\}.$$

Посматрајмо посебну класу $[w_0=(\gamma_0,u_0),F_0]$ из $\mathcal{P}^-$ за коју је F_0 изоморфизам и задајмо њену оријентацију са

$$\sigma([w_0,F_0]) := 1\otimes 1^*. \tag{5.3.17}$$

Нека је $x_0(t)=u_0(+\infty,t)$. Означимо са L_0^- оператор F_{02}^+ где је $F_0=(F_{01},F_{02})$. Скуп

$$\mathcal{S}^- := \{[u,K]\in\Sigma^F \mid u(-\infty,t)=x_0(t),\ K^-=L_0^-\}$$

садржи класу $[v_0,C_0]$ за коју важи $C_0^+=C_0^-$ и C_0 је изоморфизам.[18] Оријентишимо класу $[v_0,C_0]$ са

$$\sigma([v_0,C_0]) := 1\otimes 1^*, \tag{5.3.18}$$

а остатак скупа $\mathcal{S}^-$ произвољно. Оријентације класа из скупа

$$\mathcal{S}^+ := \{[u,K]\in\Sigma^F \mid u(+\infty,t)=x_0(t),\ K^+=L_0^-\}$$

су једнозначно одређене захтевом да за $[u_1,K_1]\in\mathcal{S}^-$, $[u_2,K_2]\in\mathcal{S}^+$ за које је $K_1^+=K_2^-$ и $u_1(+\infty,t)=u_2(-\infty,t)$ важи

$$\sigma([u_1,K_1])\,\sharp\,\sigma([u_2,K_2]) \simeq \sigma([v_0,C_0]).$$

Нека је сада $[u,L]$ произвољна класа у Σ^F. Постоје јединствене класе $[u_1,K_1]\in\mathcal{S}^-$ и $[u_2,K_2]\in\mathcal{S}^+$ за које важи

$$u_1(+\infty,t)=u(-\infty,t),\quad u(+\infty,t)=u_2(-\infty,t);\quad K_1^+=L^-,\quad L^+=K_2^-.$$

Оријентацију класе $[L]$ задајмо тако да буде испуњен ислов

$$\sigma([u_1,K_1])\sharp\sigma([u,L])\sharp\sigma([u_2,K_2]) \simeq \sigma([v_0,C_0])$$

[18] Један такав пар је (x_0,L_0^-), где x_0 схватамо као пресликавање које не зависи од s. Оператор L_0^- је изоморфизам јер, по претпоставци, F_0 припада скупу Σ_w. Видети и Напомену 55.

(видети Теорему 12 у [24] за више детаља о оријентацији немешовитог оператора типа Σ^F).

Затим оријентишимо класу мешовитих објеката. Нека је $w_0 = (\gamma_0, u_0)$ већ поменута фиксирана класа и $[w = (\gamma, u), F = (F_1, F_2)]$, где је $F \in \Sigma_w$. Постоје јединствене класе $[\alpha, K] \in \Sigma^M$, $[v, L] \in \Sigma^F$ оператора специјалног типа такве да је

$$\alpha(-\infty) = \gamma(-\infty), \quad \alpha(+\infty) = \gamma_0(-\infty) = p_0,$$
$$u_0(+\infty, t) = v(-\infty, t), \quad v(+\infty, t) = u(+\infty, t).$$

Дефинишимо оријентацију класе $[w, F]$ на следећи начин:

$$\sigma([w, F]) := \sigma([\alpha, K]) \sharp \sigma([w_0, F_0]) \sharp \sigma([v, L]).$$

Захваљујући условима (5.3.16), (5.3.18) и (5.3.17) ова дефиниција је конзистентна са дефиницијом оријентације класе $[w_0, F_0]$.

Ако је $F' \in \Xi_{w'}$, оријентишемо класу $[w', F']$ на сличан начин. Бирамо да оријентација фиксиране класе $[w_0^{-1}, F_0^{-1}]$, где је

$$w_0^{-1} = (u^{-1}, \gamma_0^{-1}), \quad \gamma_0^{-1}(s) := \gamma(-s), \quad u_0^{-1}(s, t) := u(-s, 1-t), \quad F^{-1} := (F_2, F_1),$$

буде $1 \otimes 1^*$ и оријентишемо остатак скупа Ξ помоћу услова:

$$\sigma([u, L]) \,\sharp\, \sigma([w_0^{-1}, F^{-1}]) \,\sharp\, \sigma([\gamma, K]) \simeq \sigma([w', F']),$$

где су $[u, L]$ и $[\gamma, K]$, слично као раније, јединствене класе које повезују, редом, $w_0^{-1}(-\infty, t)$ са $w'(-\infty, t)$, и $w'(+\infty)$ са $w_0^{-1}(+\infty)$, као и одговарајуће операторе.

Коначно, за произвољну класу $[w_R, F_R] \in \Theta$ постоје класе $[w_1, G_1] \in \widetilde{\Sigma}$ и $[w_2, G_2] \in \widetilde{\Xi}$ такве да је

$$[w_1, G_1] \sharp [w_2, G_2] = [w_R, F_R].$$

Дефинишимо $\sigma([w_R, F_R])$ као $\sigma([w_1, G_1]) \,\sharp\, \sigma([w_2, G_2])$. Ове две класе не морају бити јединствене (као досад), али оријентација залепљених класа не зависи од њихових избора. Заиста, нека су $[w_1, G_1]$, $[w_2, G_2]$ и $[w_1', G_1']$, $[w_2', G_2']$

два пара класа које испуњавају поменути услов и нека је

$$[w_1, G_1](+\infty) = [w_2, G_2](-\infty) = (x, G), \quad [w'_1, G'_1](+\infty) = [w'_2, G'_2](-\infty) = (x', G').$$

Постоји јединствена класа $[u, K] \in \Sigma^F$ која повезује (x, G) и (x', G'). Тада имамо:

$$\begin{aligned}
&\sigma([w_1, G_1]) \,\sharp\, \sigma([w_2, G_2]) \simeq \sigma([w'_1, G'_1]) \,\sharp \sigma([u, K]) \sharp\, \sigma([w_2, G_2]) \simeq \\
&\sigma([w'_1, G'_1]) \,\sharp\, \sigma([u, K]) \,\sharp\, \sigma([u^{-1}, K^{-1}]) \sharp\, \sigma([w'_2, G'_2]) \simeq \sigma([w'_1, G'_1]) \,\sharp\, \sigma([w'_2, G'_2]).
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Овде смо са $[u^{-1}, K^{-1}]$ означили јединствену класу за коју важи

$$u^{-1}(\pm\infty) = u(\mp\infty), \quad (K^{-1})^{\pm} = K^{\mp}.$$

Последња једнакост у изразу (5.3.19) важи захваљујући претходној конструкцији кохерентне оријентације скупа Σ^F. Заиста, ако је $[u, K] \in \Sigma^F$, нека је $[v, L]$, $[w, F] \in \Sigma^F$ јединствене класе за које важи

$$\begin{aligned}
&(u, K)(-\infty, t) = (v, L)(+\infty, t), \; (u, K)(+\infty, t) = (w, F)(-\infty, t), \\
&(v, L)(-\infty, t) = (v_0, C_0)(-\infty, t), \; (w, F)(+\infty, t) = (v_0, C_0)(+\infty, t),
\end{aligned}$$

то јест $(v, L) \in \mathcal{S}^-$, $(w, F) \in \mathcal{S}^+$. Из

$$\begin{aligned}
&\sigma\left(([v, L] \,\sharp\, [u, K] \,\sharp\, [w, F]) \,\sharp\, ([v, L] \,\sharp\, [u, K] \,\sharp\, [w, F])^{-1}\right) \simeq 1 \otimes 1^* \\
&\sigma([v, L] \,\sharp\, ([v, L]^{-1})) \simeq 1 \otimes 1^* \quad \sigma([w, F] \,\sharp\, ([w, F])^{-1}) \simeq 1 \otimes 1^*
\end{aligned}$$

следи

$$\sigma([u^{-1}, K^{-1}]) \,\sharp\, \sigma([u, K]) \simeq 1 \otimes 1^*.$$

Одавде закључујемо да је дефиниција коректна.

Означимо са Λ скуп класа еквиваленције пресликавања и оператора свих поменутих типова: једнодимензионих трајекторија, дводимензионих дискова, комбинованих објеката (сва три типа) и $R-$параметризованих комбинованих објеката. Са C_Λ означимо скуп свих кохерентних оријентација на Λ (односно скуп свих класа еквиваленције, где је релација еквиваленције релација $\simeq$ дефинисана у Напомени 75). Скуп C_Λ је непразан захваљујући претходној конструкцији. Посматрајмо групу

$$\Gamma := \{f \in \{-1,1\}^\Lambda \mid f([w,F] \sharp [u,L]) = f([w,F])f([u,L])\}$$

у којој је групна операција дефинисана множењем тачка-по-тачка. Овде претпостављамо да су класе $[w,F]$ и $[u,L]$ било ког типа допустивог за лепљење.

Тврђење 91. *Група* Γ *дејствује слободно и транзитивно на скупу* C_Λ *са*

$$(f \bullet \sigma)([w,F]) = f([w,F])\sigma([w,F]). \tag{5.3.20}$$

Доказ: Непосредно се проверава да је једначином (5.3.20) дефинисано дејство и да је оно слободно, односно, да важи $(\exists\,\sigma)\,(f \bullet \sigma \simeq \sigma) \Rightarrow f \equiv 1$. Докажимо још и транзитивност. Треба да проверимо да за свака два елемента σ_1 и σ_2 скупа C_Λ постоји елемент f групе Γ, такав да је $\sigma_1 \simeq f \bullet \sigma_2$. Нека су σ_1 и σ_2 две кохерентне оријентације. Дефинишимо f тако да важи $\sigma_1 \simeq f \bullet \sigma_2$. Потребно је да проверимо да је овакво f заиста елемент скупа Γ. Нека су класе $[u,K]$ и $[v,L]$ компатибилне за лепљење. Важи:

$$\begin{aligned}
\sigma_1([u,K]) \sharp \sigma_1([v,L]) &\simeq \sigma_1([u,K] \sharp [v,L]) \\
&\simeq f([u,K] \sharp [v,L])\sigma_2([u,K] \sharp [v,L]) \\
&\simeq f([u,K] \sharp [v,L])\sigma_2([u,K]) \sharp \sigma_2([v,L]) \\
&\simeq f([u,K] \sharp [v,L])f([u,K])f([v,L])\sigma_1([u,K]) \sharp \sigma_1([v,L])
\end{aligned}$$

што управо значи да је

$$f([u,K] \sharp [v,L]) = f([u,K])f([v,L])$$

то јест, $f \in \Gamma$. $\square$

5.3.4 Канонска оријентација и дефиниција карактеристичних знакова

У овом поглављу конструисаћемо канонску оријентацију и упоредити је са кохерентном, дефинисаном у претходном поглављу. На тај начин ћемо придружити знак + или − свакој изолованој трајекторији која учествује у конструкцији изоморфизма (2.1.8) на страни 22. Овакво упоређивање канонске и кохерентне оријентације првобитно су, за случај Флорове хомологије, користили Флор и Хофер у [25], а затим, за случај Морсове, Шварц у [69].

Канонску оријентацију модулских простора задајемо само на њиховим нуладимезнионим компонентама. Овде посматрамо *само решења* једначине (2.1.9) на страни 23 (односно (3.3.2) на страни 63), а не ширу класу објеката, као што смо чинили у случају кохерентне оријентације. Елемент језгра оператора $F = (F_1, F_2)$, комбиновани објекат w, јесте изолована трајекторија (односно елемент нуладимензионе компоненте) ако и само ако линеаризација $D_w F$ оператора F има тривијално језгро. У том случају је детерминантно раслојење, $\mathrm{Det}[w, F]$, тривијално, па ћемо оријентисати канонски све изоловане комбиноване класе, оријентацијом $1 \otimes 1^*$.

Такође нам је потребна оријентација изолованих некомбинованих објеката (то јест, објеката јединственог типа) – градијентних трајекторија и (пертурбованих) холоморфних дискова. У овом случају имамо и дејство групе $\mathbb{R}$, па су изоловане трајекторије оне које припадају једнодимензионом (а не нуладимензионом, као малопре) језгру одговарајућег оператора. Нека су $\gamma \in \mathrm{Ker}(K)$ и $u \in \mathrm{Ker}(L)$ две такве трајекторије, са $\dim \mathrm{Ker}(D_\gamma K) = \dim \mathrm{Ker}(D_u L) = 1$. Оријентације коју задају токови, одређене са

$$
\begin{aligned}
0 \neq \frac{d\gamma}{ds} &\in \mathrm{Ker}(D_\gamma K) \quad \text{за } \mathcal{M}(p, q, f, g) \quad \text{и} \\
0 \neq \frac{\partial u}{\partial s} &\in \mathrm{Ker}(D_u L) \quad \text{за } \mathcal{M}(x, y, H, J)
\end{aligned}
$$

прогласићемо канонским за овај случај. Означаваћемо претходне три канонске оријентације са $[w_s]$, $[\gamma_s]$ и $[u_s]$.

Дефинишимо карактеристичне знаке $\tau(\gamma)$, $\tau(u)$ и $\tau(w)$ као бројеве из скупа $\{-1, 1\}$ за које важи:

$$
\sigma([w]) \simeq \tau(w)[w_s], \quad \sigma([\gamma]) \simeq \tau(\gamma)[\gamma_s], \quad \sigma([u]) \simeq \tau(u)[u_s].
$$

Следећа теорема нам даје опис оријентације крајева границе једнодимензионе многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$. Захваљујући њој, моћи ћемо да конструишемо изоморфизам (2.1.8) на страни 22 и са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима (видети Поглавље 6.2)

Теорема 92. *Нека је $m_f(p)=(\mu_H(x)+\frac{n}{2})+1$. Претпоставимо да једнодимензиона многострукост $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$ има само једну некомпактну компоненту повезаности, односно, да је $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)\approx(-1,1)$. Границу многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$ чини један од следећа три пара:*
1. $(\gamma^1,w^1)\in\widehat{\mathcal{M}}(p,r,f,g)\times\mathcal{M}_{R_0}(r,f,g;x,H,J)$ и $(\gamma^2,w^2)\in\widehat{\mathcal{M}}(p,r',f,g)\times\mathcal{M}_{R_0}(r',f,g;x,H,J)$;
2. $(w^1,u^1)\in\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;y,H,J)\times\widehat{\mathcal{M}}(y,x,H,J)$ и $(w^2,u^2)\in\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;y',H,J)\times\widehat{\mathcal{M}}(y',x,H,J)$;
3. $(\gamma^1,w^1)\in\widehat{\mathcal{M}}(p,r,f,g)\times\mathcal{M}_{R_0}(r,f,g;x,H,J)$ и $(w^2,u^2)\in\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;y,H,J)\times\widehat{\mathcal{M}}(y,x,H,J)$.
Наведеним могућностима (редом) одговарају следеће једнакости:

1. $\tau(\gamma^1)\tau(w^1)=-\tau(\gamma^2)\tau(w^2)$;
2. $\tau(w^1)\tau(u^1)=-\tau(w^2)\tau(u^2)$;
3. $\tau(\gamma^1)\tau(w^1)=\tau(w^2)\tau(u^2)$.

Доказ: Доказ да је тополошка граница многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)$ једнака описаном скупу је сличан доказу Теореме 40 (видети [75, 35, 34]). Докажимо да у одговарајућим случајевима важе одговарајуће релације међу карактеристичним знацима.

Случај 1. Важи

$$
\begin{aligned}
[\gamma^1_s]\sharp[w^1_s] &\overset{(i)}{\simeq} \Big(\tau(\gamma^1)\sigma([\gamma^1])\Big)\sharp\Big(\tau(w^1)\sigma([w^1])\Big)\\
&\overset{(ii)}{\simeq} \tau(\gamma^1)\tau(w^1)\Big(\sigma([\gamma^1])\sharp\sigma([w^1])\Big)\\
&\overset{(iii)}{\simeq} \tau(\gamma^1)\tau(w^1)\Big(\sigma([\gamma^1\sharp w^1])\Big)\\
&\overset{(iv)}{\simeq} \tau(\gamma^1)\tau(w^1)\Big(\sigma([\gamma^2\sharp w^2])\Big)\\
&\overset{(v)}{\simeq} \tau(\gamma^1)\tau(w^1)\Big(\sigma([\gamma^2])\sharp\sigma([w^2])\Big),
\end{aligned}
\tag{5.3.21}
$$

и затим:

$$\tau(\gamma^1)\tau(w^1)\Big(\sigma([\gamma^2])\sharp\sigma([w^2])\Big) \overset{(vi)}{\simeq}$$
$$\tau(\gamma^1)\tau(w^1)\Big(\tau(\gamma^2)[\gamma^2_s]\sharp\tau(w^2)[w^2_s]\Big) \overset{(vii)}{\simeq}$$
$$\tau(\gamma^1)\tau(w^1)\tau(\gamma^2)\tau(w^2)\Big([\gamma^2_s]\sharp[w^2_s]\Big).$$

Једнакости (i) и (vi) су саме дефиниције карактеристичних знакова τ; (ii) и (vii) следе из дефиниције лепљења оријентација. Једнакости (iii) и (v) следе из чињенице да је оријентација σ кохерентна; коначно, једнакост (iv) је тачна јер је $\gamma_1\sharp w_1 \sim \gamma_2\sharp w_2$. Тврђење за овај случај ће следити из

$$[\gamma^1_s]\sharp[w^1_s] \simeq -[\gamma^2_s]\sharp[w^2_s]. \tag{5.3.22}$$

Да бисмо доказали (5.3.22), посматрајмо скуп

$$\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J) \approx (-1,1) \tag{5.3.23}$$

и претпоставимо да је његова оријентација дата са $\frac{d}{ds} \in T_s(-1,1)$. Имајући у виду идентификацију (5.3.23), закључујемо да лепљење можемо схватити као пресликавање

$$\sharp : \{\gamma^1\} \times \{w^1\} \times (\rho_0,+\infty) \to (-1,-1+\varepsilon).$$

Све изоловане тачке облика $\{w^1\}$ су канонски и на исти начин оријентисане, тако да лепљење можемо посматрати и као пресликавање

$$\sharp : \{\gamma^1\} \times (\rho_0,+\infty) \to (-1,-1+\varepsilon).$$

Како је γ^1 у $\widehat{\mathcal{M}}(p,r,f,g)$, а $\mathcal{M}(p,r,f,g) = \widehat{\mathcal{M}}(p,r,f,g)\times\mathbb{R}$, $\gamma^1 \in \widehat{\mathcal{M}}(p,r,f,g)$ одговара трајекторији $\gamma^1\times\mathbb{R} \in \mathcal{M}(p,r,f,g)$. Изједначавањем $\mathbb{R} \approx (\rho_0,+\infty)$ помоћу било ког пресликавања које чува оријентацију, добијамо идентификацију

$$(\rho_0,+\infty) \approx \{\gamma^1\}\times(\rho_0,+\infty) \approx \{\gamma^1\}\times\mathbb{R}$$

и то тако да важи следеће придруживање

$$\mathrm{Det}(D_{\gamma^1}K) \ni [\gamma^1_s] \leftrightsquigarrow \frac{d}{d\rho} \in T_\rho(\rho_0,+\infty).$$

Узимајући у обзир све претходне идентификације и Напомену 87 на страни 147 видимо да је $\sharp$ пресликавање

$$\sharp : (\rho_0, +\infty) \to (-1, -1+\varepsilon)$$

које мења оријентацију, пошто тачка $+\infty$ одговара тачки -1. Аналогно, за други пар γ^2 и w^2, лепљење (означимо га са $\sharp'$) може бити схваћено као пресликавање

$$\sharp' : (\rho_0, +\infty) \to (1-\varepsilon, 1),$$

које чува оријентацију јер тачки $+\infty$ овога пута одговара тачка 1. Одавде следи (5.3.22).

Случај 2. је потпуно аналоган Случају 1.

Случај 3. Користећи исте аргументе као у (5.3.21) видимо да важи

$$[\gamma^1]\sharp[w^1] \simeq \tau(\gamma^1)\tau(w^1)\tau(w^2)\tau(u^2)\Big([w^2]\sharp[u^2]\Big),$$

тако да је остало да проверимо да важи

$$[\gamma^1]\sharp[w^1] \simeq [w^2]\sharp[u^2]. \tag{5.3.24}$$

Имамо исте идентификације као у Случају 1:

$$\sharp : (\rho_0, +\infty) \to (-1, -1+\varepsilon), \qquad \sharp' : (\rho_0, +\infty) \to (1-\varepsilon, 1).$$

Али за лепљење $\sharp$, γ^1 је трајекторија на првом месту у изразу (5.3.11), а за лепљење $\sharp'$, u^2 је на другом месту у (4.3.14), где се ρ појављује са супротним знаком. Тако имамо још једну промену оријентације у односу на Случај 1, па (5.3.24) важи. $\square$

Чињеница да је пресликавање Ψ дефинисано у (2.1.8) на страни 22 изоморфизам следи из анализе границе многострукости $\mathcal{M}(R; p, q, f, g; H, J)$ дефинисане једначином (5.3.12) (видети [36]). Да бисмо то доказали и у случају хомологија за $\mathbb{Z}-$ коефицијентима, потребно је да задамо канонску оријентацију нуладимензионих компоненти ових, помоћних многострукости $\mathcal{M}_R(p,q,f,g;H,J)$ и $\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)$. Све те нуладимензионе компоненте оријентишимо канонски, на исти начин, са $1 \otimes 1^*$.

Као и раније, означимо са $\tau(\cdot)$ карактеристичне знаке који дају однос између канонске и кохерентне оријентације.

Напомена 93. За $m_f(p) = m_f(q)$, $\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)$ је једнодимензиона многострукост и њен тангентни простор је нула одговарајућег Фредхолмовог оператора, означимо га са DF. Тада је $DF = (D_1F, D_2F)$, где су $D_1 = D_R$ и $D_2 = D_{w_R}$ изводи по R и w_R редом. Ако је R регуларна вредност пресликавања

$$\pi : \mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J) \to [R_0,+\infty)$$

тада је D_2F сурјективно. Подсетимо се изоморфизма (5.3.15) између $\mathrm{Det}(D_2F)$ и $\Lambda^{\max}\mathrm{Ker}(DF)$. Он идентификује канонску оријентацију $1 \otimes 1^*$ скупа $[D_2F]$ са оном оријентацијом простора

$$\mathrm{Ker}\, DF = T_{(R,w)}\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)$$

која се слика (пресликавањем π) на канонску оријентацију $\frac{d}{dR}$ скупа $[R_0,+\infty)$. $\diamondsuit$

У Глави 4 доказали смо да, ако је $m_f(p) = m_f(q)$, границу једнодимензионе многострукости $\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)$ чине

$$\partial\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J) = \partial_1 \cup \partial_2 \cup \partial_3 \cup \partial_4, \tag{5.3.25}$$

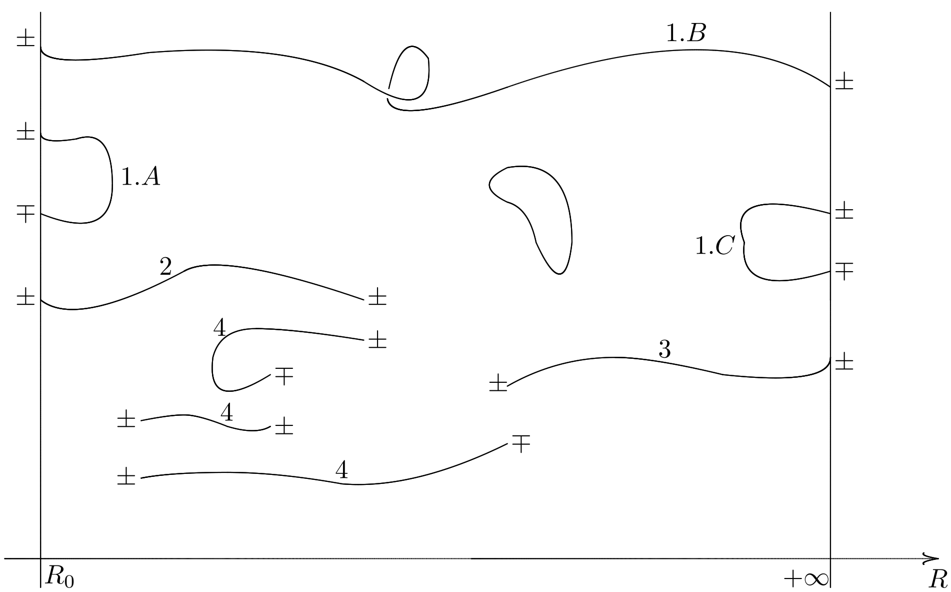
где су (видети и Слику 5.1):

$$\begin{aligned}
\partial_1 &= \mathcal{M}_{R_0}(p,q,f,g;H,J),\\
\partial_2 &= \bigcup_{m_f(r)=m_f(p)-1} \widehat{\mathcal{M}}(p,r,f,g) \times \mathcal{M}(R;r,q,f,g;H,J),\\
\partial_3 &= \bigcup_{m_f(r)=m_f(q)+1} \mathcal{M}(R;p,r,f,g;H,J) \times \widehat{\mathcal{M}}(r,q,f,g),\\
\partial_4 &= \bigcup_{\mu_H(x)=m_f(p)} \mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J) \times \mathcal{M}_{R_0}(x,H,J;q,f,g).
\end{aligned}$$

На Слици 5.1 крајеви дужи који леже на левој вертикалној линији чине елементе скупа ∂_1; крајеви на десној чине ∂_4; крајеви у унутрашњости чине скуп $\partial_2 \cup \partial_3$.

Повезана некомпактна компонента скупа $\mathcal{M}(R; p, q, f, g; H, J)$ је идентификована са једним од следећа четири интервала:

1. $[0, 1]-$ оба краја припадају скупу $\partial_1 \cup \partial_4$;
2. $[0, +\infty)-$ један крај је у ∂_1, а други у $\partial_2 \cup \partial_3$;
3. $(-\infty, 1]-$ један крај је у $\partial_2 \cup \partial_3$, а други у ∂_4;
4. $(-\infty, +\infty)-$ оба краја припадају скупу $\partial_2 \cup \partial_3$.



Слика 5.1: Једнодимензиона многострукост са крајем $\mathcal{M}(R; p, q, f, g; H, J)$

Дискутоваћемо посебно сваки од наведена четири случаја (видети и Слику 5.1 за илустрацију сваког случаја). Да бисмо поједноставили запис, увек ћемо означавати крајеве (било ког типа) повезане компоненте многострукости $\mathcal{M}(R; p, q, f, g; H, J)$ са w^1 и w^2.

Случај 1. Разликујемо следећа три подслучаја.

Случај 1.А. Оба краја, w^1 и w^2, су у ∂_1. Из (5.3.15) следи да кохерентне оријентације изолованих трајекторија из $\mathcal{M}_{R_0}(p,q,f,g;H,J)$ индукују кохерентну оријентацију једнодимензионе компоненте $\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)$, а из Напомене 93 да можемо идентификовати канонску оријентацију са $\pi_*^{-1}(\frac{d}{dR})$. Закључујемо:

$$\tau(w^1) = -\tau(w^2).$$

Случај 1.B. Крајеви w^1 и w^2 припадају различитим скуповима ∂_1 и ∂_4. Тада је $w^2 = (u^1, u^2) \in \mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J) \times \mathcal{M}_{R_0}(x,H,J;q,f,g)$. Означимо са $(R_1, w^{R_1}) := u^1 \sharp u^2$; (R_1, w^{R_1}) припада нуладимензионој компоненти скупа $\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)$. Из конструкције кохерентне оријентације дате у Поглављу 5.3.3 имамо

$$\sigma(u^1) \sharp \sigma(u^2) \simeq \sigma((R_1, w^{R_1})) \simeq \sigma(w^{R_1})$$

када је R_1 регуларна тачка пресликавања π. Важи

$$\tau(u^1)\tau(u^2)[u_s^1] \sharp [u_s^2] \simeq \sigma(u^1) \sharp \sigma(u^2) \simeq \sigma(w^{R_1}) \simeq \tau(w^{R_1})[w_s^{R_1}] \simeq \tau(w^{R_1})[u_s^1] \sharp [u_s^2].$$

Последња једнакост је тачна јер су све канонске оријентације које разматрамо $1 \otimes 1^*$. Због тога је

$$\tau(w^{R_1}) = \tau(u^1)\tau(u^2).$$

Али из Напомене 93 следи

$$\tau(w^{R_1}) = \tau(w^1),$$

одакле закључујемо:

$$\tau(w^1) = \tau(u^1)\tau(u^2).$$

Случај 1.C. Оба краја, $w^1 = (u^1, v^1)$ и $w^2 = (u^2, v^2)$, су у ∂_4. На исти начин као у претходном случају, користећи конструкцију кохерентне оријентације и Напомену 93, закључујемо да је

$$\sigma([u^1]) \sharp ([v^1]) \simeq \sigma([u^2]) \sharp \sigma([v^2]),$$

и

$$[u_s^1] \sharp [v_s^1] \simeq -[u_s^2] \sharp [v_s^2],$$

па je

$$\tau(u^1)\tau(v^1) = -\tau(u^2)\tau(v^2).$$

Случај 2. Крај $w^1 \in \partial_1$ из $\mathcal{M}_{R_0}(p,q,f,g;H,J)$ индукује кохерентну оријентацију једнодимензионе компоненте $\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)$:

$$\varphi(\sigma(w^1)) \simeq \sigma(\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)). \tag{5.3.26}$$

. Из Напомене 93 да можемо идентификовати канонску оријентацију (означимо је са σ_R) са $\pi_*^{-1}(\frac{d}{dR})$:

$$\varphi([w_s^1]) \simeq \sigma_R. \tag{5.3.27}$$

Ако је други крај, w^2, у скупу ∂_2, тада, из разлога[19] објашњених у доказу Теореме 92, канонска оријентација елемената u^2 и v^2 (где су u^2 и v^2 делови изломљене трајекторије w^2, $w^2 = (u^2, v^2)$) индукује исту ту оријентацију σ_R, па је:

$$\sigma(\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)) \simeq \sigma(u^2) \sharp \sigma(v^2) \simeq \tau(u^2)\tau(v^2)[u_s^2] \sharp [v_s^2] \simeq \tau(u^2)\tau(v^2)\sigma_R. \tag{5.3.28}$$

Како је

$$\varphi(\sigma(w^1)) \simeq \tau(w^1)\varphi([w_s^1]) \simeq \tau(w^1)\sigma_R,$$

из (5.3.26), (5.3.27) и (5.3.28) закључујемо

$$\tau(w^1) = \tau(u^2)\tau(v^2).$$

С друге стране, ако је $w^2 \in \partial_3$, $w^2 = (u^2, v^2)$, трајекторија v^2 је она која задаје канонску оријентацију тачке w^2 (за разлику од претходног случаја), а она је друга компонента у процесу лепљења, па имамо

$$\tau(w^1) = -\tau(u^2)\tau(v^2).$$

[19]Мисли се на правац параметра лепљења ρ.

Случај 3. Овде су оба краја изломљена, али је $w^1 = (u^1, v^1)$ елемент скупа $\partial_2 \cup \partial_3$ а $w^2 = (u^2, v^2)$ скупа ∂_4. Као у Случају 1.C. имамо $\tau(w^R) = \tau(u^2)\tau(v^2)$. Сада на исти начин као у Случају 2. закључујемо да важи:

$$\begin{aligned} \tau(u^1)\tau(v^1) &= \tau(u^2)\tau(v^2) \quad \text{ако је } w^2 \in \partial_3, \quad \text{а} \\ -\tau(u^1)\tau(v^1) &= \tau(u^2)\tau(v^2) \quad \text{ако је } w^2 \in \partial_2. \end{aligned}$$

Случај 4. Ова ситуација је слична оној у Теореми 92. Ако су и $w^1 = (u^1, v^1)$ и $w^2 = (u^2, v^2)$ елементи или скупа ∂_2 или скупа ∂_3 тада важи:

$$\tau(u^1)\tau(v^1) = -\tau(u^2)\tau(v^2),$$

а ако су елементи различитих скупова, тада је:

$$\tau(u^1)\tau(v^1) = \tau(u^2)\tau(v^2).$$

Тиме смо описали границу многострукости $\mathcal{M}(R; p, q, f, g; H, J)$, односно одговарајуће карактеристичне знаке. За примене ове класификације у конструкцији Пиуникин–Саламон–Шварцовог изоморфизма са целобројним коефицијентима видети Поглавље 6.2.

ГЛАВА 6

ПРИМЕНЕ

6.1 Увод

У овом раду разматрали смо просторе комбинованих објеката са више улаза и излаза. Простори некомбинованих објеката са крајевима на неколико генератора (истог типа) имају важну улогу у разним конструкцијама у Морсовој и Флоровој теорији. Простори јединственог типа са крајевима на два генератора учествују у дефиницији оператора ∂. Простори са крајевима на три генератора дефинишу кохомолошки производ, а са крајевима на више генератора, производе вишег реда (Месијеве производе). Тополошки опис границе вишедимензионих компоненти (то јест, правилности приликом губљења компактности – распадање) је кључни део доказа да је $\partial^2 = 0$ (у случају два краја), затим, доказа да су кохомолошки производи добро дефинисани, да комутирају са извесним природним изоморфизмима у (ко)хомологији, итд. Мешовити објекти учествују у конструкцијама које повезују ове две теорије, пре свега у конструкцији изоморфизма између Морсове и Флорове хомологије. Мешовити објекти са више улаза и излаза, као и опис њихове тополошке границе, представљају кључни корак у доказима функторијалности изоморфизма између Морсове и Флорове хомологије у односу на поменуте алгебарске операције, чинећи их тако изорфизмима алгебарских структура.

Месијеви производи се у Морсовој у Флоровој теорији дефинишу помоћу објеката јединственог типа (дрвета у Морсовом и „панталона” у Флоровом случају). Међутим, они не снабдевају аутоматски Морсову и Флорову кохомологију алгебарском структуром, и то из следећег разлога. У доказима добре дефинисаности и асоцијативности ових производа користи се анализа многострукости дрвета (или панталона) и границе њених компоненти одређених димензија. Као што смо већ видели, Фредхолмова теорија, неопходна за такву анализу, ограничава скуп параметара на генерички подскуп. Ако посматрамо многострукост Морсових дрвета (видети једначину (6.1.8) на страни 172 и Слику 6.2 на страни 174), скуп параметара је скуп уређених $(m+1)-$ торки Морсових функција. Ако бисмо покушали да дефинишемо Месијев производ на Морсовој хомологији за дату Морсову функцију, параметар који би одговарао многострукости таквих дрвета би био облика $(f, f, \dots, f)$. Међутим, скуп оваквих уређених $(m+1)-$ торки чини дијагоналу у скупу свих $(m+1)-$ торки Морсових функција, а то је скуп строго позитивне кодимензије, који може да буде и дисјунктан са дозвољеним, генеричким подскупом параметара. Зато је многострукост дрвета могуће посматрати само за (априори) различите Морсове функције. Иако су све Морсове (ко)хомологије међу собом изоморфне, није очигледно како поменути производ може да обезбеди производ у једној кохомолошој групи. Исто важи и за Флорову (ко)хомологију.

У својој магистарској тези, Т. Симчевић је доказала да производи са два улаза, односно кохомолошки – кап (енг. cup) производи, комутирају са ПСС изоморфизмима. У вези с тим је З. Петровић поставио питање да ли тај резултат даје изоморфизам прстена. Одговор је потврдан (видети Теорему 95 на страни 181), али, због претходне дискусије, не на самим Морсовим и Флоровим кохомологијама за конкретну Морсову функцију и Хамилтонијан. Због тога ћемо радити на нивоу Морсове и Флорове кохомологије многострукости (уместо Морсове и Флорове кохомологије појединачних Морсових функција и Хамилтонијана), које дефинишемо као инверзне лимесе кохомологија свих Морсових функција и Хамилтонијана. Да би се резултат Т. Симчевић применио на овај случај, потребно је доказати и добру дефинисаност кохомолошких производа на кохомологији многострукости (то јест, на инверзном лимесу).

У Поглављу 6.1.1 дефинисани су Месијеви производи у Морсовој и Флоровој теорији. У Поглављу 6.1.2 оправдана је конструкција ових производа на инверзним лимесима, задата је алгебарска структура на кохомологијама многострукости и доказано својство изоморфизама алгебарских структура ПСС изоморфизама.

У Поглављу 6.2 конструисани су ПСС изоморфизми са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима. Ова конструкција је директна примена резултата из Главе 5.

6.1.1 Месијеви производи

За почетак, скицирајмо конструкцију Морсових кохомолошких група $HM^*(f)$. Коланчасти комплекс $CM^*(f)$ се дефинише стандардно, као $\mathrm{Hom}(CM_*(f),\mathbb{Z}_2)$, а когранични оператор δ се задаје условом:

$$\langle \delta a, \alpha\rangle := \langle a, \partial\alpha\rangle. \tag{6.1.1}$$

Како је $m_f(p) = n - m_{-f}$, то је добро дефинисан изоморфизам

$$i : CM_*(f)\cong CM_{n-*}(-f), \quad i : p \mapsto p.$$

Помоћу њега и дуалности $CM_*(f)\cong CM^*(f)$ добијамо изоморфизам

$$\sigma_f : CM_{n-*}(-f) \xrightarrow{\cong} CM^*(f),$$

за који важи:

$$\sigma_f \circ \partial = \delta \circ \sigma_f. \tag{6.1.2}$$

Докажимо једнакост (6.1.2) на генераторима. Подсетимо се да се гранични оператор у Морсовој хомологији (за Морсову функцију f) дефинише као:

$$\partial : CM_k(f) :\longrightarrow CM_{k-1}(f), \quad \partial(p) := \sum_q n_f(p,q)q,$$

је $n_f(p,q)$ број решења градијентне једначине:

$$\begin{cases} \gamma : \mathbb{R} \to M, \\ \frac{d\gamma}{dt} + \nabla f(\gamma) = 0, \\ \gamma(-\infty) = p, \ \gamma(+\infty) = q. \end{cases}$$

Нека су $p \in CM_{n-k}(-f)$, $\alpha \in CM_{k+1}(f)$ произвољни генератори. Тада је

$$\langle \delta \circ \sigma_f(p), \alpha \rangle = \langle \sigma_f(p), \partial\alpha \rangle = \left\langle \sigma_f(p), \sum_{\beta \in \mathrm{Crit}_k(f)} n_f(\alpha,\beta)\beta \right\rangle =$$

$$\sum_{\beta \in \mathrm{Crit}_k(f)} n_f(\alpha,\beta) \langle \sigma_f(p), \beta \rangle = n_f(\alpha, i^{-1}(p)).$$

Последња једнакост важи јер је, из саме дефиниције пресликавања σ_f:

$$\langle \sigma_f(p), \beta \rangle = \begin{cases} 1, & i(\beta) = p, \\ 0, & i(\beta) \neq p. \end{cases}$$

С друге стране имамо:

$$\langle \sigma_f(\partial(p)), \alpha \rangle = \left\langle \sigma_f \left(\sum_{q \in \mathrm{Crit}_{n-k-1}(-f)} n_{-f}(p,q)q \right), \alpha \right\rangle =$$

$$\sum_{q \in \mathrm{Crit}_{n-k-1}(-f)} n_{-f}(p,q) \langle \sigma_f(q), \alpha \rangle = n_{-f}(p, i(\alpha)).$$

Како је

$$n_f(\alpha, i^{-1}(p)) = n_{-f}(p, i(\alpha)),$$

то је једнакост (6.1.2) доказана, одакле следи да се пресликавање σ_f спушта на ниво хомологије и кохомологије:

$$\sigma_f : HM_{n-*}(-f) \xrightarrow{\cong} HM^*(f). \tag{6.1.3}$$

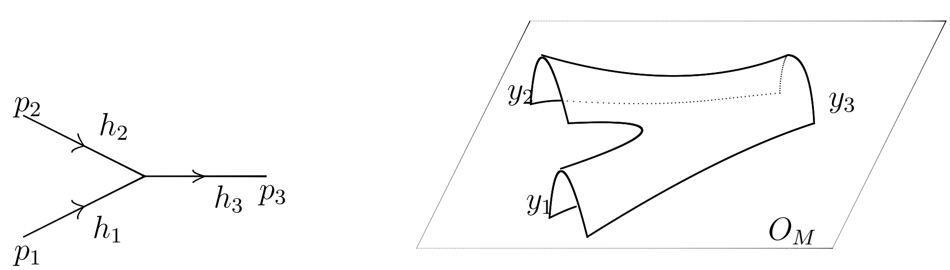
Подсетимо се сада дефиниције кохомолошког (cup) производа у Морсовој кохомологији. Нека је T дрво са три ивице. Идентификоваћемо ивице e_1 и e_2 са $(-\infty, 0]$ (и зваћемо их *улазећим*), а e_3 са $[0, +\infty)$ (и зваћемо је *излазећом* ивицом). Нека су f_j, за $j = 1, 2, 3$, три Морсове функције на M и нека је $h_j := -f_j$. Посматрајмо пресликавање $I : T \to M$ такво да је, за $\gamma_j := I|_{e_j}$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_j}{ds} = -\nabla h_j(\gamma_j), \\ \gamma_j(-\infty) = p_j, \ j = 1, 2, \\ \gamma_3(+\infty) = p_3, \end{cases} \tag{6.1.4}$$

где су p_j критичне тачке функција за које је $m_{h_1}(p_1) = n - k$, $m_{h_2}(p_2) = n - l$ $m_{h_3}(p_3) = n - (k + l)$ (видети Слику 6.1). Уведимо ознаке $\vec{h} := (h_1, h_2, h_3)$, $\vec{p} := (p_1, p_2, p_2)$ и са $\mathcal{M}(\vec{p}, \vec{h}, g)$ означимо скуп свих пресликавања I која задовољавају једначину (6.1.4). Тада је

$$\mathcal{M}(\vec{p}, \vec{h}, g) = W^u(h_1, p_1) \cap W^u(h_2, p_2) \cap W^s(h_3, p_3),$$

где $W^u(h, p)$ (односно $W^s(h, p)$) означава нестабилну (односно стабилну) многострукост критичне тачке p Морсове функције h. За генерички избор Морсових функција, скуп $\mathcal{M}(\vec{p}, \vec{h}, g)$ јесте глатка коначнодимензиона многострукост. За горњи избор Морсових индекса она је димензије нула и компактна (видети [57, 76]).



Слика 6.1: Кохомолошки производи: дрво у Морсовој и „панталоне” у Флоровој теорији

Означимо са $n(\vec{p},\vec{h},g)$ кардиналност скупа $\mathcal{M}(\vec{p},\vec{h},g)$ модуло 2. Нека је l_M пресликавање дефинисано на следећи начин:

$$\begin{aligned} &l_M : CM_k(h_1)\otimes CM_l(h_2)\to CM_{k+l-n}(h_3),\\ &l_M(p_1\otimes p_2) := \sum_{m_{h_3}(p_3)=m_{h_1}(p_1)+m_{h_2}(p_2)-n} n(\vec{p},\vec{h},g)p_3. \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Нека су $a_1\in CM^k(f_1)$, $a_2\in CM^l(f_2)$ коциклови, дефинишимо

$$a_1\cup_M a_2 := \sigma_{f_3}\left(l_M(\sigma_{f_1}^{-1}(a_1)\otimes\sigma_{f_2}^{-1}(a_2))\right)\in CM^{k+l}(f_3).$$

Ако су a_1 и a_2 коциклови, помоћу анализе многострукости дрвета димензије један, може се проверити да је $a_1\cup_M a_2$ такође коцикл, као и да $\cup_M$ не зависи од избора коциклова a_1 и a_2 унутар исте кохомолошке класе (видети и [76]).

На сличан начин се дефинишу Флорове кохомолошке групе: коланчасти комплекс чине групе $CF^*(H) := \mathrm{Hom}(CF_*(H),\mathbb{Z}_2)$ а когранични оператор се дефинише као у (6.1.1). Коришћењем трансформације:

$$\begin{aligned} &x\mapsto y, && y(t) := x(1-t)\\ &H\mapsto G, && G(p,t) := -H(p,1-t)\\ &J\mapsto \widetilde{J}, && \widetilde{J}(p,t) := J(p,1-t), \end{aligned}$$

слично као у Морсовом случају, добија се пресликање које успоставља Поенкареову дуалност:

$$\sigma_H : HF_{n-*}(\widetilde{H}) \xrightarrow{\cong} HF^*(H) \tag{6.1.6}$$

(видети [57] за детаље). Производ у Флоровој кохомологији се конструише уз помоћ „пара панталона”, која представљају решења једначине (3.3.1) на страни 62 за $m=2$, $k=1$ (видети и Слику 6.1). Прецизније, ако уведемо ознаку $\overrightarrow{G} := (G_1,G_2,G_3)$ и $\vec{y} := (y_1,y_2,y_3)$, тада је $\mathcal{M}(\vec{y},\overrightarrow{G},J)$

скуп пресликавања $u : \Sigma \to T^*M$, за које је ($u_j := u \circ \phi_j$, видети (3.1.1)):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial s} + J\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} - X_{G_j}(u)\right) = 0 \\ u_j(-\infty, t) = y_j(t),\ j = 1, 2; \quad u_3(+\infty, t) = y_3(t) \\ u(\partial\Sigma) \subset O_M \\ \overline{\partial}(u|_{\Sigma_0}) = 0. \end{cases} \tag{6.1.7}$$

У овом случају је, за генеричке изборе, скуп $\mathcal{M}(\vec{y}, \overrightarrow{G}, J)$ глатка многострукост димензије

$$d = \left(-\mu_{G_3}(y_3) + \frac{n}{2}\right) + \left(\mu_{G_1}(y_1) - \frac{n}{2}\right) + \left(\mu_{G_2}(y_2) - \frac{n}{2}\right),$$

компактна у димензији нула. За $\mu_{G_1}(y_1) + \frac{n}{2} = n - k$, $\mu_{G_2}(y_2) + \frac{n}{2} = n - l$ и $\mu_{G_3}(y_3) + \frac{n}{2} = n - (k+l)$ (то јест, за $d = 0$) означимо са $n(\vec{y}, \overrightarrow{G}, J)$ кардинални број скупа $\mathcal{M}(\vec{y}, \overrightarrow{G}, J)$ модуло 2 и дефинишимо

$$l_F(y_1 \otimes y_2 \otimes) := \sum_{\vec{y}} n(\vec{y}, \overrightarrow{G}, J) y_3 \in CF_{n-(k+l)}(G_3).$$

За дато $a_1 \in CF^k(H_1) \cong CF_{n-k}(G_1)$ и $a_2 \in CF^l(H_2) \cong CF_{n-l}(G_2)$:

$$a_1 \cup_F a_2 := \sigma_{H_3}\left(l_F(\sigma_{H_1}^{-1}(a_1) \otimes \sigma_{H_2}^{-1}(a_2))\right) \in CF^{k+l}(H_3)$$

(видети [57] за више детаља).

Једно од уопштења кохомолошког производа су производи вишег реда, односно, производи који имају више од два улаза. Такви производи се у Морсовој кохомологији конструишу на следећи начин. Нека је T дрво са $m{+}1$ ивицом, једним унутрашњим и $m{+}1$ спољашњих темена (видети Слику 6.2). Идентификоваћемо ивице e_j, за $j = 1, \ldots, m$ (улазеће) са $(-\infty, 0]$, а ивицу e_{m+1} (излазећа) са $[0, +\infty)$. Нека су f_j, за $j = 1, \ldots, m+1$, Морсове функције на M, и $h_j := -f_j$. Означимо, као и раније, $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{m+1})$, $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$. Нека је $\mathcal{M}(\vec{p}, \vec{h}, g)$ скуп свих пресликавања $I : T \to M$, таквих да, за $\gamma_j := I|_{e_j}$, $j = 1, \ldots, m+1$, важи:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_j}{ds} = -\nabla h_j(\gamma_j) \\ \gamma_j(-\infty) = p_j,\ j = 1, \ldots, m \\ \gamma_{m+1}(+\infty) = p_{m+1} \end{cases} \tag{6.1.8}$$

(видети Слику 6.2). Како је

$$\mathcal{M}(\vec{p},\vec{h},g)=\mathrm{ev}^{-1}(\Delta),$$

где је

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}:\,&W^u(h_1,p_1)\times\ldots\times W^u(h_m,p_m)\times W^s(h_{m+1},p_{m+1})\to M^{m+1}\\ &(\gamma_1,\ldots,\gamma_{m+1})\mapsto(\gamma_1(0),\ldots,\gamma_{m+1}(0)),\end{aligned}$$

то је, до на генеричке изборе, $\mathcal{M}(\vec{p},\vec{h},g)$ глатка подмногострукост кодимензије n у $W^u(h_1,p_1)\times\ldots\times W^u(h_m,p_m)\times W^s(h_{m+1},p_{m+1})$. Како је

$$\dim W^u(h_j,p_j)=m_{h_j}(p_j),\quad \dim W^s(h_{m+1},p_{m+1})=n-m_{h_{m+1}}(p_{m+1})$$

и $m_f(p)=n-m_{-f}(p)$, димензија многострукости $\mathcal{M}(\vec{p},\vec{h},g)$ је

$$d:=\dim\mathcal{M}(\vec{p},\vec{h},g)=m_{f_{m+1}}(p_{m+1})-m_{f_1}(p_1)-\ldots-m_{f_m}(p_m).$$

Претпоставимо да је $d=0$, односно, да важи

$$p_j\in CM^{k_j}(f_j),\ \text{за}\quad j=1,\ldots,m,\quad p_{m+1}\in CM^{k_1+\ldots+k_m}(f_{m+1}),$$

и означимо са $n(\vec{p},\vec{h},g)$ кардиналност $\mathcal{M}(\vec{p},\vec{h},g)$ модуло 2. Може се доказати да се граница многострукости $\mathcal{M}(\vec{p},\vec{h},g)$ идентификује са унијом изломљених обеката (од којих је један дрво, а други градијентна трајекторија). У случају који разматрамо, до оваквих ломљења не може да дође, из димензионих разлога. Наиме, ако су $q_j\in\mathrm{Crit}(h_j)$, $j=1,\ldots,m+1$, темена дрвета који чини део изломљеног објекта (при чему се барем један од q_j не поклапа са p_j, то јест, до ломљења је заиста дошло), имамо да је

$$\begin{aligned}&\emptyset\neq\widehat{\mathcal{M}}(p_j,q_j,h_j,g)\ \text{за барем неко}\ j=1,\ldots,m\ \text{или}\\ &\emptyset\neq\widehat{\mathcal{M}}(p_{m+1},q_{m+1},h_{m+1},g).\end{aligned}$$

Одатле следи да је

$$\begin{aligned}&m_{f_j}(p_j)<m_{f_j}(q_j)\ \text{за барем једно}\ j=1,\ldots,m,\ \text{или}\\ &m_{f_{m+1}}(p_{m+1})>m_{f_{m+1}}(q_{m+1})\ \text{и}\\ &m_{f_{m+1}}(q_{m+1})\geq m_{f_1}(q_1)+\ldots+m_{f_m}(q_m),\end{aligned}$$

што је у контрадикцији са једнакошћу

$$m_{f_{m+1}}(p_{m+1}) = m_{f_1}(p_1) + \ldots + m_{f_m}(p_m)$$

која важи у димензији нула. То значи да је многострукост $\mathcal{M}(\vec{p}, \vec{h}, g)$, када је нуладимензиона, компактна, односно коначан скуп тачака, па израз $n(\vec{p}, \vec{h}, g)$ има смисла.

Дефинишимо

$$l_M(p_1 \otimes \ldots \otimes p_m) := \sum_{\vec{p}} n(\vec{p}, \vec{h}, g) p_{m+1} \in CM_{n-(k_1+\ldots+k_m)}(h_{m+1}).$$

Анализом границе многострукости типа $\mathcal{M}(\vec{p}, \vec{h}, g)$ димензије један, може се доказати да важи

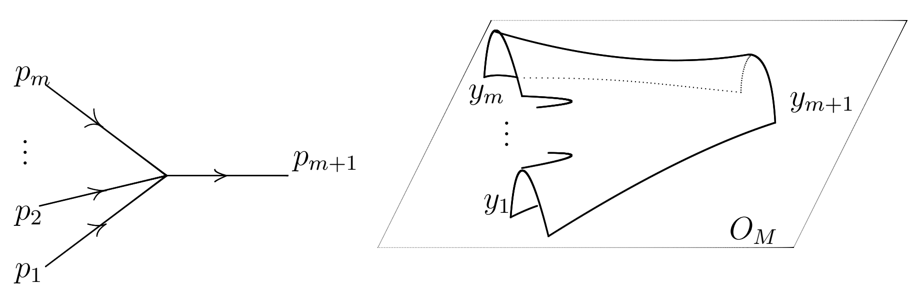
$$\partial_M \circ l_M = l_M \circ (\partial_M \otimes \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id} + \ldots + \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id} \otimes \partial_M),$$

па се пресликавање l_M спушта и на ниво хомологије

$$l_M : HM_{n-k_1}(h_1) \otimes \ldots \otimes HM_{n-k_m}(h_m) \to HM_{n-(k_1+\cdots+k_m)}(h_{m+1}).$$

Дефинишимо

$$\mathcal{O}_M : HM^{k_1}(f_1) \otimes \ldots \otimes HM^{k_m}(f_m) \to HM^{k_1+\cdots+k_m}(f_{m+1}),$$
$$\mathcal{O}_M := \sigma_{f_{m+1}} \circ l_M \circ (\sigma_{f_1}^{-1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{f_m}^{-1}).$$



Слика 6.2: Производи вишег реда у Морсовој и Флоровој теорији

Слично се дефинишу производи вишег реда у Флоровој теорији, помоћу броја решења једначине (3.3.1), за $k = 1$ (видети Слику 6.2). Поступком сличним оном у Морсовом случају долазимо до производа

$$\mathcal{O}_F : HF^{k_1}(H_1) \otimes \ldots \otimes HF^{k_m}(H_m) \to HF^{k_1+\ldots+k_m}(H_{m+1}).$$

6.1.2 Морсова и Флорова (ко)хомологија многострукости као инверзни лимес

Описаћемо укратко Морсову (ко)хомологију многострукости M, дату у [69], која је независна од Морсове функције, помоћу природног изоморфизма између Морсових (ко)хомологија за различите Морсове функције. Нека су f^α и f^β две Морсове функције. Канонски изоморфизам

$$T^{\alpha\beta} : HM_*(f^\alpha) \to HM_*(f^\beta)$$

се дефинише на следећи начин. Нека је $f_s^{\alpha\beta}$ глатка хомотопија између функција f^α и f^β, то јест, глатка функција дефинисана на $M \times \mathbb{R}$ таква да је

$$f_s^{\alpha\beta}(\cdot) = \begin{cases} f^\alpha(\cdot), & s \le -T, \\ f^\beta(\cdot), & s \ge T, \end{cases}$$

за неко фиксирано $T > 0$. За критичне тачке p^α функције f^α и p^β функције f^β, такве да је $m_{f^\alpha}(p^\alpha) = m_{f^\beta}(p^\beta)$, означимо са $n(p^\alpha, p^\beta, g)$ кардиналност (модуло 2) скупа[1]

$$\mathcal{M}(p^\alpha, p^\beta, f_s^{\alpha\beta}, g) := \left\{ \gamma : \mathbb{R} \to M \mid \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla(f_s^{\alpha\beta}(\gamma)), \gamma(-\infty) = p^\alpha, \gamma(+\infty) = p^\beta \right\}.$$

Сада дефинишимо

$$T^{\alpha\beta}(p^\alpha) := \sum_{m_{f^\alpha}(p^\alpha) = m_{f^\beta}(p^\beta)} n(p^\alpha, p^\beta, g) p^\beta.$$

[1] Из Фредхолмове теорије, Сард–Смејлове и Арцела–Асколијеве теореме следи да је, за овакав избор индекса и генеричке изборе Морсових функција, скуп $\mathcal{M}(p^\alpha, p^\beta, f_s^{\alpha\beta}, g)$ глатка компактна многострукост димензије нула, дакле коначан скуп тачака.

Анализом погодно одабраних једнодимензионих многострукости и њихових граница, доказује се да је пресликавање $T^{\alpha\beta}$ добро дефинисано на нивоу хомологије, да је оно изоморфизам, као и да важи

$$T^{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}_{HM_*(f^\alpha)}, \quad T^{\beta\gamma} \circ T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\gamma} \tag{6.1.9}$$

(видети [69] за доказе).

Користећи изоморфизам σ_f дефинисан у (6.1.3) можемо да дефинишемо природни изоморфизам између Морсових кохомологија за различите изборе Морсових функција:

$$\widetilde{T}^{\alpha\beta} := \sigma_{f^\beta} \circ T^{\alpha\beta} \circ {\sigma_{f^\alpha}}^{-1} : HM^*(f^\alpha) \xrightarrow{\cong} HM^*(f^\beta). \tag{6.1.10}$$

Изоморфизам $\widetilde{T}^{\alpha\beta}$ је дефинисан и на нивоу ланаца, јер то важи и за пресликавања σ_{f^β}, $T^{\alpha\beta}$ и σ_{f^α}.

Морсова кохомологија $HM^*(M)$ се дефинише као инверзни лимес Морсових кохомолошких група $HM^*(f)$ у односу на изоморфизме $\widetilde{T}^{\alpha\beta}$. Прецизније, посматрајмо производ

$$\widetilde{HM}^k(M) = \prod_{f^\alpha \text{ Морсова}} HM^k(f^\alpha)$$

и дефинишимо

$$HM^k(M) := \left\{ (\dots, a_k^\alpha, \dots, b_k^\beta \dots) \in \widetilde{HM}^k(M) \mid \widetilde{T}^{\alpha\beta}\,(a_k^\alpha) = b_k^\beta \right\}.$$

Из услова (6.1.9) следи да је $HM^k(M)$ добро дефинисано. Очигледно је да важи $HM^k(M) \cong HM^k(f)$ за сваку Морсову функцију f за коју је Морсова кохомологија добро дефинисана.

Месијеви производи описани у Поглављу 6.1.1 задају производе на Морсовој кохомологији многострукости. Докажимо то за случај кохомолошког производа ($k = 2$), општи случај се доказује аналогно. Потребно је да проверимо да кохомолошки производ не зависи од избора класа релације еквиваленције[2]

$$\{a_k^\alpha\} \sim \{b_k^\beta\} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{T}^{\alpha\beta}(a_k^\alpha) = b_k^\beta \quad \text{за све } a^\alpha, b^\beta, \tag{6.1.11}$$

односно, да се два пара еквивалентних елемената сликају (са $\cup_M$) у еквивалентне елементе. То је, очигледно, еквивалентно услову да дијаграм

$$\begin{array}{ccc} HM^k(f_1^\beta) \otimes HM^l(f_2^\beta) & \xrightarrow{\cup_\beta} & HM^{k+l}(f_3^\beta) \\ \widetilde{T}_1^{\alpha\beta} \otimes \widetilde{T}_2^{\alpha\beta} \uparrow & & \widetilde{T}_3^{\alpha\beta} \uparrow \\ HM^k(f_1^\alpha) \otimes HM^l(f_2^\alpha) & \xrightarrow{\cup_\alpha} & HM^{k+l}(f_3^\alpha) \end{array} \tag{6.1.12}$$

комутира. Овде $\widetilde{T}_j^{\alpha\beta}$ означавају природне изоморфизме између $HM^*(f_j^\alpha)$ и $HM^*(f_j^\beta)$ дефинисане у (6.1.10) на страни 176. Пошто смо изоморфизме $\widetilde{T}_j^{\alpha\beta}$ дефинисали уз помоћ изоморфизама $T_j^{\alpha\beta}$ и σ_{f_j}, посматраћемо следећи дијаграм:

$$\begin{array}{ccccccc} H_*(h_1^\beta) \otimes H_*(h_2^\beta) & \xrightarrow{\sigma_{f_1^\beta} \otimes \sigma_{f_2^\beta}} & H^*(f_1^\beta) \otimes H^*(f_2^\beta) & \xrightarrow{\cup_\beta} & H^*(f_3^\beta) & \xrightarrow{\sigma_{f_3^\beta}^{-1}} & H_*(f_3^\beta) \\ T_1^{\alpha\beta} \otimes T_2^{\alpha\beta} \uparrow & & \widetilde{T}_1^{\alpha\beta} \otimes \widetilde{T}_2^{\alpha\beta} \uparrow & & \widetilde{T}_3^{\alpha\beta} \uparrow & & T_3^{\alpha\beta} \uparrow \\ H_*(h_1^\alpha) \otimes H_*(h_2^\alpha) & \xrightarrow{\sigma_{f_1^\alpha} \otimes \sigma_{f_2^\alpha}} & H^*(f_1^\alpha) \otimes H^*(f_2^\alpha) & \xrightarrow{\cup_\alpha} & H^*(f_3^\alpha) & \xrightarrow{\sigma_{f_3^\alpha}^{-1}} & H_*(f_3^\alpha). \end{array}$$

Користили смо скраћену ознаку H за HM, а симбол $*$ за одговарајућу димензију. Због начина на који смо дефинисали производе $\cup_M$ и $\cup_F$ и изоморфизме $\widetilde{T}$, довољно је да докажемо комутативност дијаграма:

$$\begin{array}{ccc} HM_{n-k}(h_1^\beta) \otimes HM_{n-l}(h_2^\beta) & \xrightarrow{l_\beta} & HM_{n-(k+l)}(h_3^\beta) \\ T_1^{\alpha\beta} \otimes T_2^{\alpha\beta} \uparrow & & T_3^{\alpha\beta} \uparrow \\ HM_{n-k}(h_1^\alpha) \otimes HM_{n-l}(h_2^\alpha) & \xrightarrow{l_\alpha} & HM_{n-(k+l)}(h_3^\alpha) \end{array} \tag{6.1.13}$$

где је

$$l_\alpha := l_M(\vec{h}_\alpha), \quad l_\beta := l_M(\vec{h}_\beta)$$

(видети дефиницију (6.1.5)). Да бисмо доказали да важи

$$l_\beta \circ \left(T_1^{\alpha\beta} \otimes T_2^{\alpha\beta}\right) = T_3^{\alpha\beta} \circ l_\alpha$$

[2] Из услова (6.1.9) следи да је $\sim$ релација еквиваленције.

довољно је (како су сва пресликавања дефинисана и на нивоу ланаца) да конструишемо пресликавање

$$K : CM_{n-*_1}(h_1) \otimes CM_{n-*_2}(h_2) \to CM_{n-(*_1+*_2)+1}(h_3)$$

за које важи

$$l_\alpha - T_3^{\alpha\beta^{-1}} \circ l_\beta \circ \left(T_1^{\alpha\beta} \otimes T_2^{\alpha\beta}\right) + K \circ (\partial_1 \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \partial_2) + \partial_3 \circ K = 0. \qquad (6.1.14)$$

За фиксирано $T > 0$, означимо са $h_{s,i}^{\alpha\beta} : M \to \mathbb{R}$ глатку функцију такву да важи

$$h_{s,j}^{\alpha\beta}(\cdot) = \begin{cases} h_j^\alpha(\cdot), & s \leq -T-1, \\ h_j^\beta(\cdot), & s \geq -T, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \qquad h_{s,3}^{\alpha\beta}(\cdot) = \begin{cases} h_3^\beta(\cdot), & s \leq T, \\ h_3^\alpha(\cdot), & s \geq T+1. \end{cases}$$

За критичну тачку p_j^α функције h_j^α, означимо $\vec{p}^{\,\alpha} := (p_1^\alpha, p_2^\alpha, p_3^\alpha)$, $\vec{h}_s^{\,\alpha\beta} := (h_{s,1}^{\alpha\beta} h_{s,2}^{\alpha\beta}, h_{s,3}^{\alpha\beta})$ и посматрајмо следеће скупове

$$\mathcal{M}_T(\vec{p}^{\,\alpha}, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta}, g) := \left\{ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma_j : (-\infty, 0] \to M,\ j = 1, 2,\ \gamma_3 : [0, +\infty) \to M, \\ \frac{d\gamma_j}{ds} = -\nabla h_{s,i}^{\alpha\beta}(\gamma_j(s)), \\ \gamma_j(-\infty) = p_j^\alpha,\ j = 1, 2,\ \gamma_3(+\infty) = p_3^\alpha, \\ \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_3(0) \end{array} \right\} \qquad (6.1.15)$$

и

$$\mathcal{M}(T, \vec{p}^{\,\alpha}, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta}, g) := \left\{ (T, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \mid (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathcal{M}_T(\vec{p}^{\,\alpha}, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta}, g) \right\}. \qquad (6.1.16)$$

За $m_{h_j^\alpha}(p_1^\alpha) = n - k$, $m_{h_2^\alpha}(p_2^\alpha) = n - l$ $m_{h_3^\alpha}(p_3^\alpha) = n - (k + l)$ скуп $\mathcal{M}_T(\vec{p}^{\,\alpha}, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta})$ је глатка компактна многострукост димензије нула, а $\mathcal{M}(T, \vec{p}^{\,\alpha}, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta})$ је глатка једнодимензиона многострукост. Осим тога, њена тополошка, нуладимензиона граница је описана са

$$\partial\left(\mathcal{M}(T, \vec{p}^{\,\alpha}, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta}, g)\right) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5,$$

где је

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \mathcal{M}_{T_0}(\vec{p}^{\,\alpha}, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta}, g),\\
\mathcal{B}_2 &= \bigcup_{q_1^\alpha} \widehat{\mathcal{M}}(p_1^\alpha, q_1^\alpha, h_1^\alpha, g) \times \mathcal{M}\left(T, (q_1^\alpha, p_2^\alpha, p_3^\alpha), \vec{h}_s^{\,\alpha\beta}, g\right),\\
\mathcal{B}_3 &= \bigcup_{q_2^\alpha} \widehat{\mathcal{M}}(p_2^\alpha, q_2^\alpha, h_2^\alpha, g) \times \mathcal{M}\left(T, (p_1^\alpha, q_2^\alpha, p_3^\alpha, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta}, g\right),\\
\mathcal{B}_4 &= \bigcup_{q_3^\alpha} \mathcal{M}\left(T, (p_1^\alpha, p_2^\alpha, q_3^\alpha), \vec{h}_s^{\,\alpha\beta}, g\right) \times \widehat{\mathcal{M}}(q_3^\alpha, p_3^\alpha, h_3^\alpha, g),\\
\mathcal{B}_5 &= \bigcup_{p_j^\beta} \mathcal{M}(p_1^\alpha, p_1^\beta, h_{1,s}^{\alpha\beta}, g) \times \mathcal{M}(p_2^\alpha, p_2^\beta, h_{2,s}^{\alpha\beta}, g) \times \mathcal{M}(\vec{p}^{\,\beta}, \vec{h}^{\,\beta}, g) \times \mathcal{M}(p_3^\beta, p_3^\alpha, h_{3,s}^{\alpha\beta}, g).
\end{aligned} \tag{6.1.17}$$

Уније се узимају по свим критичним тачкама за које су одговарајуће многострукости у изразу димензије нула. Индекси 1, 2, 3, α и β указују на Морсову функцију о којој је реч.[3] Прва четири типа границе одговарају случају када је T ограничено, док се пети тип $\mathcal{B}_5$ јавља када је T неограничено. Аргументи су слични као у Глави 4. Ако дефинишемо пресликавање K помоћу броја објеката скупа $\mathcal{M}(T, \vec{p}^{\,\alpha}, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta})$ (када је, наравно, он димензије нула), а пресликавање F_{T_0} помоћу броја елемената скупа $\mathcal{M}_{T_0}(\vec{p}^{\,\alpha}, \vec{h}_s^{\,\alpha\beta})$ (у димензији нула), закључујемо:

- број елемената скупа $\mathcal{B}_1$ дефинише пресликавање F_{T_0};
- број елемената скупа $\mathcal{B}_2$ дефинише пресликавање $K \circ (\partial_1 \otimes \mathrm{Id})$;
- број елемената скупа $\mathcal{B}_3$ дефинише пресликавање $K \circ (\mathrm{Id} \otimes \partial_2)$;
- број елемената скупа $\mathcal{B}_4$ дефинише пресликавање $\partial_3 \otimes K$;
- број елемената скупа $\mathcal{B}_5$ дефинише пресликавање $(T_3^{\alpha\beta})^{-1} \circ l_\beta \circ \left(T_1^{\alpha\beta} \otimes T_2^{\alpha\beta}\right)$.

Помоћу хомотопије $\vec{h}_\lambda$, $\lambda \in [0,1]$ између $\vec{h}_s^{\,\alpha\beta}$ и $\vec{h}^{\,\alpha}$, коришћењем сличних аргумената кобордизама као и малопре, закључујемо да су пресликавања F_{T_0} и l_α иста на нивоу хомологије. Одатле следи да је израз (6.1.14) тачан, што повлачи добру дефинисаност кохомолошког производа на Морсовој кохомологији многострукости $HM^*(M)$.

[3] То јест, p_j^α, q_j^α су критичне тачке функција h_j^α, а p_j^β, q_j^β су критичне тачке функција h_j^β.

Дефиниција Флорове хомологије многострукости $HF^*(T^*M)$ као инверзног лимеса је потпуно аналогна Морсовом случају. Кохомолошки (као и Месијев) производ $\cup_F$ описан у Поглављу 6.1.1 се може дефинисати и на скупу $HF^*(T^*M)$, то јест, дијаграм

$$\begin{array}{ccc} HF^k(H_1^\beta)\otimes HF^l(H_2^\beta) & \xrightarrow{\cup_\beta} & HF^{k+l}(H_3^\beta) \\ \widetilde{S}_1^{\alpha\beta}\otimes\widetilde{S}_2^{\alpha\beta}\uparrow & & \widetilde{S}_3^{\alpha\beta}\uparrow \\ HF^k(H_1^\alpha)\otimes HF^l(H_2^\alpha) & \xrightarrow{\cup_\alpha} & HF^{k+l}(H_3^\alpha) \end{array}$$

комутира. Овде су

$$\widetilde{S}_j^{\alpha\beta}: HF^*(H_j^\alpha)\to HF^*(H_j^\alpha)$$

природни изоморфизми између Флорових кохомолошких група, добијени помоћу природних изоморфизама у хомологији $S^{\alpha\beta}$ и изоморфизама σ_{H_j} на исти начин као у Морсовом случају (видети страну 176).

У својој магистарској тези, Т. Симчевић је доказала следећу теорему.

Теорема 94. **[76]** *Нека су f_j, $j=1,2,3$, Морсове функције на M, а H_j, $j=1,2,3$, Хамилтонијани са компактним носачем дефинисани на T^*M. Постоје изоморфизми*

$$\tau_j: HM^*(f_j)\xrightarrow{\cong} HF^*(H_j),\quad j=1,2,3,$$

индуковани Пиуникин–Саламон–Шварцовим изоморфизмима (2.1.8), такви да дијаграм

$$\begin{array}{ccc} HF^k(H_1)\otimes HF^l(H_2) & \xrightarrow{\cup_F} & HF^{k+l}(H_3) \\ \tau_1\otimes\tau_2\uparrow & & \tau_3\uparrow \\ HM^k(f_1)\otimes HM^l(f_2) & \xrightarrow{\cup_M} & HM^{k+l}(f_3) \end{array} \tag{6.1.18}$$

комутира.

Доказ Теореме 94 је дат у [76]. Изоморфизме τ_j дефинишемо на нивоу ланаца тако да следећи дијаграм комутира:

$$\begin{array}{ccc} CF_{n-*}(G_j) & \xrightarrow{\sigma_{H_j}} & CF^*(H_j) \\ \psi_j\uparrow & & \tau_j\uparrow \\ CM_{n-*}(h_j) & \xrightarrow{\sigma_{f_j}} & CM^*(f_j), \end{array}$$

односно,

$$\tau_j := \sigma_{H_j}\circ\psi_j\circ\sigma_{f_j}^{-1}. \tag{6.1.19}$$

Теорема 94 и претходна разматрања нам омогућавају да докажемо следеће тврђење.

Теорема 95. *Пиуникин–Саламон–Шварцов изоморфизам дефинисан у (2.1.8) индукује изоморфизам прстенова*

$$\mathcal{T} : (HM^*(M), \cup_M) \to (HF^*(T^*M), \cup_F)\,.$$

Доказ: Из услова комутативности дијаграма (2.1.10) (доказане у [36]) и дефиниција пресликавања τ, $\widetilde{T}$ и $\widetilde{S}$ директно следи комутативност дијаграма

$$\begin{array}{ccc} HF^*(H^\alpha) & \xrightarrow{\widetilde{S}^{\alpha\beta}} & HF^*(H^\beta) \\ \tau_\alpha \uparrow & & \tau_\beta \uparrow \\ HM^*(f^\alpha) & \xrightarrow{\widetilde{T}^{\alpha\beta}} & HM^*(f^\beta). \end{array} \tag{6.1.20}$$

То значи да τ дефинисано једначином (6.1.19) индукује хомомофизам $\mathcal{T}$ дефинисан на $HM^*(M)$ са вредностима у $HF^*(T^*M)$. Инверзни ПСС изоморфизам (за хомологије), дефинисан једначином

$$\phi : CF_k(H) \to CM_k(f), \quad x \mapsto \sum_{m_f(p)=k} n(x, H, J; p, f, g)p,$$

где је $n(x, H, J; p, f, g)$ број решења једначине (3.3.2) индукује изоморфизам у кохомологији, означимо га са δ. Прецизније:

$$\delta := \sigma_f \circ \phi \circ \sigma_H^{-1}.$$

Као у случају пресликавања τ, закључујемо да δ индукује хомоморфизам

$$\mathcal{S} : HF^*(T^*M) \to HM^*(M).$$

Из $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}$ следи да важи $\delta \circ \tau = \mathrm{Id}$. Добијамо:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{T}([a]) = \mathcal{S}([\tau(a)]) = [\delta(\tau(a))] = [a],$$

и, на исти начин:

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{S} = \mathrm{Id}\,.$$

Закључујемо да су $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ заиста изоморфизми.

Из комутативности дијаграма (6.1.18) и (6.1.12) следи

$$\mathcal{T}([a]\cup_M [b]) = [\tau(a\cup_M b)] = [\tau(a)\cup_F \tau(b)] = [\tau(a)]\cup_F [\tau(b)] = \mathcal{T}([a])\cup_F \mathcal{T}([b]).$$

Тиме је доказ Теореме завршен. $\square$

И Месијеви производи се добро понашају у односу на Пиуникин–Саламон–Шварцов изоморфизам.

Теорема 96. *Дијаграм*

$$\begin{array}{ccc} HF^{k_1}(H_1)\otimes\ldots\otimes HF^{k_m}(H_m) & \xrightarrow{\mathcal{O}_F} & HF^{k_1+\ldots+k_m}(H_{m+1}) \\ \tau_1\otimes\ldots\otimes\tau_m\uparrow & & \tau_{m+1}\uparrow \\ HM^{k_1}(f_1)\otimes\ldots\otimes HM^{k_m}(f_m) & \xrightarrow{\mathcal{O}_M} & HM^{k_1+\ldots+k_m}(f_{m+1}). \end{array} \tag{6.1.21}$$

комутира, где су $\tau_j : HM^*(f_j)\xrightarrow{\cong} HF^*(H_j)$ дефинисани у (6.1.19).

Доказ: Користимо идеју доказа Теореме 94, датог у [76]. Из дефиниције пресликавања τ_j следи да дијаграм (6.1.21) комутира ако и само ако комутира дијаграм

$$\begin{array}{ccc} HF_{n-k_1}(G_1)\otimes\ldots\otimes HF_{n-k_m}(G_m) & \xrightarrow{l_F} & HF_{n-(k_1+\ldots+k_m)}(G_{m+1}) \\ \psi_1\otimes\ldots\otimes\psi_m\uparrow & & \psi_{m+1}\uparrow \\ HM_{n-k_1}(h_1)\otimes\ldots\otimes HM_{n-k_m}(h_m) & \xrightarrow{l_M} & HM_{n-(k_1+\ldots+k_m)}(h_{m+1}). \end{array} \tag{6.1.22}$$

Како су сва пресликавања у дијаграму (6.1.22) дефинисана и на нивоу ланчастих комплекса, да би важило

$$l_M = \psi_{m+1}\circ l_F\circ(\psi_1\otimes\ldots\otimes\psi_m)$$

на нивоу хомологије, довољно је да, на нивоу ланаца важи

$$\psi_{m+1}\circ l_F\circ(\psi_1\otimes\ldots\otimes\psi_m)-l_M = K\circ(\partial_1\otimes\mathrm{Id}\otimes\ldots\otimes\mathrm{Id}+\ldots+\mathrm{Id}\otimes\ldots\otimes\mathrm{Id}\otimes\partial_m)+\partial_{m+1}\circ K \tag{6.1.23}$$

за неко пресликавање дефинисано на скупу

$$\bigoplus_j CM_{n-k_1}(h_1)\otimes\ldots\otimes CM_{n-k_j+1}(h_j)\otimes\ldots\otimes CM_{n-k_m}(h_m)$$

са вредностима у $CM_{n-(k_1+\ldots+k_m)+1}(h_{m+1})$. Пресликавање

$$\psi_{m+1}\circ l_F\circ(\psi_1\otimes\ldots\otimes\psi_m)$$

је на генератору $p_1\otimes\ldots\otimes p_m$ дефинисано са

$$\begin{aligned}&p_1\otimes\ldots\otimes p_m\mapsto\\&\sum_{p_{m+1}}\sum_{x_{m+1}}\left(\prod_{j=1}^m n(p_j,h_j;x_j,G_j)\right)n\left(\vec{x},\overrightarrow{G},J\right)n(x_{m+1},G_{m+1},J;p_{m+1},h_{m+1},g)p_{m+1},\end{aligned}\tag{6.1.24}$$

где је $\vec{x}:=(x_1,\ldots,x_{m+1})$, $\overrightarrow{G}:=(G_1,\ldots,G_{m+1})$. Суме и производ се се врше по оним p_{m+1} и x_{m+1} за које горњи израз има смисла, односно, где су све многострукости од значаја димензије нула. Фиксирајмо тачке p_j из горњег израза, за $j=1,\ldots,m+1$, означимо са $\vec{p}:=(p_1,\ldots,p_{m+1})$ и посматрајмо многострукост $\mathcal{M}(R;\vec{p},\vec{h},g;\overrightarrow{G},J)$. Из Теореме 41 следи да је

$$\partial\left(\mathcal{M}(R;\vec{p},\vec{h},\overrightarrow{G})\right)=\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_1\cup\ldots\cup\mathcal{B}_{m+1}\cup\mathcal{B}_{R_0},$$

где су

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0&=\bigcup_{\vec{x}}\left(\bigotimes_{j=1}^m\mathcal{M}_{R_0}(p_j,h_j,g;x_j,G_j,J)\right)\times\mathcal{M}\left(\vec{x},\overrightarrow{G},J\right)\times\\&\quad\ \mathcal{M}_{R_0}(x_{m+1},G_{m+1},J;p_{m+1},h_{m+1},g)\\\mathcal{B}_j&=\textstyle\bigcup_{q_j}\widehat{\mathcal{M}}(p_j,q_j,h_j,g)\times\mathcal{M}\left(R;\vec{p}_j,\vec{h},g;\vec{G},J\right),\quad j=1,\ldots,m\\\mathcal{B}_{m+1}&=\textstyle\bigcup_{q_{m+1}}\mathcal{M}\left(R;\vec{p}_{m+1},\vec{h},g;\vec{G},J\right)\times\widehat{\mathcal{M}}(q_{m+1},p_{m+1},h_{m+1},g)\\\mathcal{B}_{R_0}&=\mathcal{M}_{R_0}(\vec{p},\vec{h},g;\vec{G},J),\end{aligned}$$

уз ознаку

$$\vec{p}_j:=(p_1,\ldots,p_{j-1},q_j,p_{j+1},\ldots,p_{m+1}).$$

Уније се узимају по свим $\vec{x}$ и q_j таквим да су све многострукости димензије нула. Видимо да бројање елемената скупа $\mathcal{B}_0$ задаје пресликавање $\psi_{m+1}\circ l_F\circ(\psi_1\otimes\ldots\otimes\psi_m)$. Како бројање елемената скупа $\widehat{\mathcal{M}}(p_j,q_j,h_j,g)$ одговара граничном оператору у Морсовој хомологији, видимо да ћемо пресликавање K дефинисати помоћу броја елемената скупа $\mathcal{M}\left(R;\vec{p}_j,\vec{h},g;\vec{G},J\right)$, прецизније

$$K(r_1 \otimes \ldots \otimes r_m) := \sum_{r_{m+1}} n(R; \vec{r}, \vec{h}, g; \overrightarrow{G}, J) r_{m+1}$$

при чему се сумирање врши по свим r_{m+1} за које важи

$$m_{h_{m+1}}(r_{m+1}) = n - (m_{h_1}(r_1) + \ldots + m_{h_m}(r_m)) + 1.$$

Ако дефинишемо пресликавање F_0 као

$$\begin{aligned} F_0 : &CM_{n-k_1}(h_1) \otimes \ldots \otimes CM_{n-k_m}(h_m) \to CM_{n-(k_1+\ldots+k_m)}(h_{m+1}) \\ &(r_1 \otimes \ldots \otimes r_m) \mapsto \sum_{r_{m+1}} n_{R_0}(\vec{r}, \vec{h}, g; \overrightarrow{G}, J) r_{m+1}, \end{aligned} \tag{6.1.25}$$

где је $n_{R_0}(\vec{r}, \vec{h}, g; \overrightarrow{G}, J)$ број елемената (модуло 2) скупа $\mathcal{M}_{R_0}(\vec{p}, \vec{h}, g; \vec{G}, J)$, закључујемо да следећи скупови одређују следећа пресликавања:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{B}_0 & \rightsquigarrow & \psi_{m+1} \circ l_F \circ (\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_m) \\ \mathcal{B}_j & \rightsquigarrow & K \circ (\mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id} \otimes \partial_j \otimes \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id}),\ j = 1, \ldots, m \\ \mathcal{B}_{m+1} & \rightsquigarrow & \partial_{m+1} \circ K \\ \mathcal{B}_{R_0} & \rightsquigarrow & F_0. \end{array}$$

Како је број крајева једнодимензионе многострукости паран, то је њихов збир модуло два једнак нули, односно, важи:

$$\psi_{m+1} \circ l_F \circ (\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_m) - F_0 = K \circ (\partial_1 \otimes \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id} + \ldots + \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id} \otimes \partial_m) + \partial_{m+1} \circ K.$$

Зато су пресликавања $\psi_{m+1} \circ l_F \circ (\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_m)$ и F_0 ланчасто хомотопна, па су једнака на нивоу хомологије. Да бисмо доказали (6.1.23), потребно је да докажемо да су пресликавања F_0 и l_M такође ланчасто хомотопна. И овде се користе аргументи кобордизама. Наиме, хомоморфизам F_0 дефинисан у (6.1.25) не зависи од избора Хамилтонијана $\vec{G}$. Заиста, нека су $\vec{G}_0$ и $\vec{G}_1$ две (генеричке) $(m+1)-$ торке Хамилтонијана, и нека је $\vec{G}_\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ (генеричка) глатка хомотопија која их спаја. Нека су F_0 и F_1 хомоморфизми ланчастих комплекса који одговарају, редом, Хамилтонијанима $\vec{G}_0$ и $\vec{G}_1$. Посматрајмо простор

$$\mathcal{M}_{R_0}(\lambda, \vec{p}, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J) := \{(\vec{\gamma}, u, \lambda) \mid (\vec{\gamma}, u, \lambda) \in \mathcal{M}_{R_0}(\vec{p}, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J)\}.$$

За исти избор Морсових индекса критичних тачака као и малопре, димензија многострукости $\mathcal{M}_{R_0}(\lambda, \vec{p}, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J)$ је једнака један. Из конвергенције ка изломљеним трајекторијама и лепљења се може извести да је руб ове многострукости скуп

$$\partial\left(\mathcal{M}_{R_0}(\lambda, \vec{p}, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J)\right) = \bigcup_{j=1}^{m+1} \mathcal{B}_j,$$

где су

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= \mathcal{M}_{R_0}(\vec{p}, \vec{h}, g; \vec{G}_0, J) - \mathcal{M}_{R_0}(\vec{p}, \vec{h}, g; \vec{G}_1, J),\\
\mathcal{B}_j &= \bigcup_{q_j} \widehat{\mathcal{M}}(p_j, q_j, h_j, g) \times \mathcal{M}_{R_0}\left(\lambda, \vec{p}_j, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J\right), \text{ за } j = 1, \ldots, m,\\
\mathcal{B}_{m+1} &= \bigcup_{q_{m+1}} \mathcal{M}_{R_0}\left(\lambda, \vec{p}_{m+1}, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J\right) \times \widehat{\mathcal{M}}(q_{m+1}, p_{m+1}, h_{m+1}, g).
\end{aligned}$$

Као и раније, закључујемо да је

$$F_1 - F_0 = L \circ (\partial_1 \otimes \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id} + \ldots + \mathrm{Id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id} \otimes \partial_m) + \partial_{m+1} \circ L,$$

где је пресликавање

$$\begin{aligned}
L : \bigoplus_j CM_{n-k_1}(h_1) \otimes \ldots \otimes CM_{n-k_j+1}(h_j) \otimes \ldots \otimes CM_{n-k_m}(h_m)\\
\to CM_{n-(k_1+\ldots+k_m)+1}(h_{m+1})
\end{aligned}$$

дефинисано са

$$L(r_1 \otimes \ldots \otimes r_m) := \sum_{r_{m+1}} n_{R_0}\left(\lambda, \vec{r}, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J\right) r_{m+1}.$$

Овде $n_{R_0}\left(\lambda, \vec{r}, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J\right)$ означава број елемената (модуло 2) многострукости $\mathcal{M}_{R_0}\left(\lambda, \vec{r}, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J\right)$, а сумирање се врши по свим r_{m+1} за које је ова многострукост димензије нула. Одавде следи да су F_0 и F_1 ланчасто хомотопна пресликавања. Изаберимо сада хомотопију између $\vec{G}$ и $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$. Пресликавање (6.1.25) је ланчасто хомотопно пресликавању дефинисаном помоћу броја комбинованих објеката који се састоје од градијентних трајекторија и *холоморфних* дискова са границом на нултом сечењу. Применом Стоксове формуле, као у (4.2.8) на страни 79, закључујемо да такви дискови морају бити константна пресликавања, па је број оваквих комбинованих објеката једнак броју пресликавања (6.1.8) која дефинишу пресликавање l_M. □

Из Теореме 96 може се извести (сличним резоновањем као у доказу Теореме 95) да ПСС изоморфизам представља изоморфизам алгебарских структура између Морсове и Флорове хомологије, у односу на Месијеве производе. Прецизније, важи следећа теорема.

Теорема 97. *Пиуникин–Саламон–Шварцов изоморфизам дефинисан у (2.1.8) индукује изоморфизам алгебарских структура*

$$\mathcal{T} : (HM^*(M), \mathcal{O}_M) \to (HF^*(T^*M), \mathcal{O}_F) .$$

6.2 ПСС изоморфизам са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима

Једначином (2.1.8) на страни 22 дефинисан је Пиуникин–Саламон–Шварцов хомоморфизам који је изоморфизам на нивоу хомологија са $\mathbb{Z}_2-$ коефицијентима. У овом поглављу дајемо конструкцију тог пресликавања на хомологији са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима. Дефинишимо хомоморфизам

$$\Psi : CM_k(f) \to CF_k(H), \quad \Phi : CF_k(H) \to CM_k(f)$$

на следећи начин. За p и x генераторе Морсовог, односно Флоровог комплекса,[4] дефинишимо:

$$p \mapsto \sum_{w \in \mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)} \tau(w)x, \qquad x \mapsto \sum_{w \in \mathcal{M}_{R_0}(x,H,J;p,f,g)} \tau(w)p.$$

Проширимо пресликавања Ψ и Φ до ланчастих комплекса по линерaности. Хомоморфизми Ψ и Φ индукују хомоморфизме на нивоу хомологија ако је

$$\Psi \circ \partial_M = \partial_F \circ \Psi, \quad \Phi \circ \partial_F = \partial_M \circ \Phi. \tag{6.2.1}$$

[4] То јест, p је критична тачка Морсове функције, а x Хамилтонијан са крајевима на нултом сечењу.

Прва једнакост у (6.2.1) је еквивалентна са

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma^1\in\widehat{\mathcal{M}}(p,r,f,g)}\left(\sum_{w^1\in\mathcal{M}_{R_0}(r,f,g;x,H,J)}\tau(w^1)\tau(\gamma^1)\right)= \\
&\sum_{w^2\in\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;y,H,G)}\left(\sum_{u^2\in\widehat{\mathcal{M}}(y,x,H,G)}\tau(u^2)\tau(w^2)\right).
\end{aligned}\tag{6.2.2}$$

Доказ једнакости (6.2.2) следи из идентитета

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;x,H,J)= &\bigcup\widehat{\mathcal{M}}(p,r,f,g)\times\mathcal{M}_{R_0}(r,f,g;x,H,J)\cup \\
&\bigcup\mathcal{M}_{R_0}(p,f,g;y,H,J)\times\widehat{\mathcal{M}}(y,x,H,J),
\end{aligned}\tag{6.2.3}$$

чињенице да се тачке из границе једнодимензионе многострукости увек јављају у пару и Теореме 92 на страни 158. Опис тополошке границе дат у (6.2.2) изводи се помоћу аргумената (конвергенција ка изломљеним елементима и лепљење) сличним онима у Глави 4 (видети и [35]). Доказ другог идентитета у (6.2.1) изводи се аналогно.

У доказу чињенице да су Ψ и Φ изоморфизми учествују следећа пресликавања (видети и [75, 36] за случај хомологија са $\mathbb{Z}_2-$коефицијентима):

$$F:CM_k(f)\to CM_k(f),\quad p\mapsto\sum_{m_f(q)=k}n_{R_0}(p,q,f,g;H,J)q,\tag{6.2.4}$$

где је $n_{R_0}(p,q,f,g;H,J)$ број елемената скупа $\mathcal{M}_{R_0}(p,q,f,g;H,J)$ и

$$K:CM_k(f)\to CM_{k+1}(f),\quad p\mapsto\sum_{m_f(q)=k+1}n(R;p,q,f,g;H,J)q,$$

где је $n(R;p,q,f,g;H,J)$ број тачака у $\mathcal{M}(R;p,q,f,g;H,J)$. Да бисмо доказали да је $\Phi\circ\Psi=\mathrm{Id}$, потребно је да проверимо да важи:

$$\sum_{(w_1,w_2)\in\partial_4}\tau(w_1)\tau(w_2)-\sum_{w_{R_0}\in\partial_1}\tau(w_{R_0})=\sum_{(u,\gamma_2)\in\partial_3}\tau(u)\tau(\gamma_2)-\sum_{(\gamma_1,v)\in\partial_2}\tau(\gamma_1)\tau(v),\tag{6.2.5}$$

где су скупови ∂_j, $j=1,\ldots,4$ дати у једначини (5.3.25) на страни 161. Из (6.2.5) следи

$$\phi\circ\psi-F=\partial_M\circ K-K\circ\partial_F,$$

то јест $\phi \circ \psi$ је ланчасто хомотопно пресликавању то F (које је, пак, ланчасто хомотопно идентитету).

Из класификације граничних тачака многострукости $\mathcal{M}(R; p, q, f, g; H, J)$ дате на крају Поглавља 5.3.4 следи да у изразу (6.2.5), и на левој и на десној страни, бројимо само оне тачке које су крајеви или скупа $[0, +\infty)$ или скупа $(-\infty, 1]$, и то управо са карактеристичним знацима као у изразу (6.2.5).

Доказали смо да, за *дату, истовремену* кохерентну оријентацију свих простора који су од значаја (комбинованих, јединствених, параметризованих, непараметризнованих), постоји изоморфизам између Морсове и Флорове хомологије са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима. Такође смо доказали да таква кохерентна оријентација постоји. Поставља се питање да ли постоји таква истовремена кохерентна оријентација свих објеката (и последично, изоморфизам) у случају да су две кохерентне оријентације Морсове и Флорове хомологије *унапред задате.* Одговор је потврдан, а аргументи су следећи.

Нека су σ^M и σ^F две дате кохерентне оријентације оператора у Морсовој и Флоровој хомологији, редом. Нека су p_0, K_0, $\mathcal{P}^-$, w_0, F_0, x_0, v_0 и C_0 као у Поглављу 5.3.3, и σ кохерентна оријентација описана тамо. Нека је

$$\sigma_1 := \sigma|_{\Sigma^M} \quad \sigma_2 := \sigma|_{\Sigma^F}.$$

Како су σ_1 и σ^M (односно σ_2 и σ^F) две кохерентне оријентације скупа Σ^M (односно Σ^F), можемо изабрати $f^M \in \Gamma^M$, $f^F \in \Gamma^F$ такве да важи

$$f^M \bullet \sigma^M = \sigma_1 \quad f^F \bullet \sigma^F = \sigma_2,$$

где су Γ^M, Γ^F групе трансформација које дејствују на скупу кохерентних оријентација за Морсов и Флоров случај (на исти начин као у (5.3.20) на страни 156). Можемо конструисати продужење $f \in \Gamma$ за које важи

$$f|_{C^M_\Lambda} = f^M, \quad f|_{C^F_\Lambda} = f^F,$$

где су C_Λ^M и C_Λ^F скупови кохерентних оријентација за Морсов и Флоров случај. Ово продужење је једнозначно одређено вредношћу функције f на w_0, пошто су скупови Σ^M и Σ^F (као и скупови C_Λ^M и C_Λ^F) дисјунктни. Изаберимо зато $f([w_0, F_0]) := 1$ и продужимо f до C_Λ тако да важи

$$f|_{C_\Lambda^M} = f^M, \quad f|_{C_\Lambda^F} = f^F, \quad f([w,F]\sharp[u,L]) = f([w,F])f([u,L]),$$

за све $[w,F]$, $[u,L]$ компатибилне за лепљење. Директном провером видимо да је $f \in \Gamma$. Дефинишимо оријентацију са

$$\sigma' := f \bullet \sigma.$$

Из конструкције следи да је σ' кохерентна и да се поклапа са σ^M и σ^F на C_Λ^M и C_Λ^F. Тако смо доказали следећу теорему.

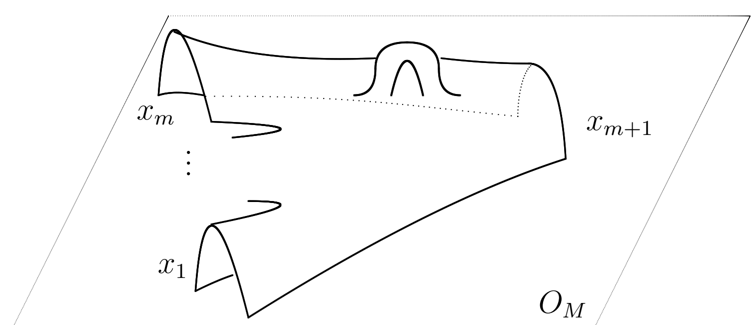
Теорема 98. *За две дате кохерентне оријентације скупова Σ^M и Σ^F који дефинишу Морсову и Флорову хомологију $HM_*(f,\mathbb{Z})$ и $HF_*(H,\mathbb{Z})$ са $\mathbb{Z}-$ коефицијентима, постоји кохерентна оријентација скупа Λ (скупа свих објеката и оператора од значаја) која се поклапа са датим оријентацијама на одговарајућим класама. Ова оријентација индукује изоморфизам између $HM_*(f,\mathbb{Z})$ и $HF_*(H,\mathbb{Z})$.*

6.3 Закључци и могући правци даљег истраживања

Споменимо на крају неколико могућих праваца у којима би описана истраживања могла природно да се наставе.

6.3.1. (Ко)хомологије са целобројним коефицијентима. У Поглављу 6.2 конструисали смо ПСС изоморфизам хомологија са $\mathbb{Z}-$коефицијентима користећи кохерентну оријентацију дефинисану у Поглављу 5.3.3. Поставља се питање да ли је овај изоморфизам функторијалан, односно да ли комутира са канонским изоморфизмима у Морсовој и Флоровој хомологији са $\mathbb{Z}-$коефицијентима (чија је конструкција дата у [69, 24]). Такође је природно питање да ли су простори комбинованих објеката оријентабилни, и то тако да су Месијеви производи добро дефинисани и на кохомологијама са целобројним коефицијентима. И на крају, да ли је могуће уопштити конструкцију ПСС изоморфизама као изоморфизама алгебарских структура, на кохомологијама са целобројним коефицијентима? Да би се ова конструкција извела, потребно је дефинисати лепљење и задати оријентацију која комутира са лепљењем на још неким модулским просторима, осим описаних (у ауторовој магистарској тези [75] констрисани су помоћни модулски простори коришћени у доказу комутативности дијаграма (2.1.10) на страни 23). Осим тога, потребно је и извести конструкцију описану у Поглављу 5.3.3 која би обухватила и ове помоћне просторе, осим већ разматраних. Како ова анализа представља додатан обиман технички (и не само технички) посао, ми је овде само помињемо и одлажемо као тему посебног рада.

6.3.2. Површи вишег рода. Друго природно уопштење би био опис комбинованих модулских простора који укључују Риманову површ са границом, али *вишег рода* (видети Слику 6.3). Простори (псеудо)холоморфних пресликавања затворене Риманове површи рода $\mathbf{g}$ која за кодомен имају симплектичку многострукост проучавани су раду Громова у [30] (видети и књигу Мекдаф–Саламона [44]). Случај Риманових површи рода $\mathbf{g}$ са цилиндричним крајевима (као једином границом) описан је у докторској дисертацији М. Шварца [70].



Слика 6.3: Риманова површ вишег рода са границом

У раду Ј.–Г. Оа [57] дата је димензија многострукости Флорових „панталона" у котангентном раслојењу, са крајевима на нултом сечењу, родом $\mathbf{g}$ и асимптотским крајевима у Хамилтоновим путевима. Анализа границе оваквих простора не би се суштински разликовала од анализе у случају рода нула, јер се губљење компактности, односно „ломљење" трајекторија увек одвија ван компактног дела домена, тако да коначан број ручки који задају род не би имао никаквог утицаја. Иста ствар важи и за лепљење. Питање је какву би примену имао аналоган закључак изведен о тополошкој граници одговарајуће једнодимензионе многострукости. Наиме, на самом крају доказа Теореме 94, користили смо чињеницу да холоморфних (непертурбованих) дискова са границом на нултом сечењу нема (односно, да су они обавезно константни). Исти резон може да се примени и у случају дискова са строго позитивним родом. Међутим, тада долазимо до необичног закључка о димензији границе многострукости типа $\mathcal{M}_{R_0}(\lambda, \vec{p}, \vec{h}, g; \vec{G}_\lambda, J; \mathbf{g})$ у којој, овог пута, учествује Риманова површ рода $\mathbf{g}$) – димензија једне њене границе, облика $\mathcal{M}_{R_0}(\vec{p}, \vec{h}, g; \vec{G}, J; \mathbf{g})$, зависи од рода, док димензија друге, облика $\mathcal{M}_{R_0}(\vec{p}, \vec{h}, g; \vec{0}, J; \mathbf{g}) = \mathcal{M}(\vec{p}, \vec{h}, g)$, не зависи. Занимљиво би било објаснити овај феномен.

6.3.3. Општа симплектичка многострукост. Треће могуће уопштење односи се на амбијентну многострукост: да ли је (и у којим случајевима) могуће доказати претходне резултате у случају опште симплектичке многострукости (наравно, са оним ограничењима која су потребна да би Флорова хомологија уопште могла да се дефинише)? У раду [1], Алберс је конструисао ПСС морфизме у случају *монотоних* Лагранжевих подмогострукости,[5] са минималним Масловљевим бројем[6] већим или

[5] Лагранжева подмногострукост $L \subset P$ је монотона уколико постоји $c > 0$ такво да је $\int \omega^* u = c\mu_L(u)$, за свако $u \in \pi_2(P, L)$, где је μ_L пресликавање дефинисано помоћу Масловљеве класе μ; видети и Оов рад [55] у ком је дефинисана Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке у овом, општијем случају.

[6] Минимални Масловљев број је генератор подгрупе $\mu(\pi_2(P, L)) \subset \mathbb{Z}$, где је μ Масловљева класа.

једнаким 2. Ови морфизми су дефинисани само у одређеним димензијама, претпоставке о монотоности и минималном Масловљевом броју контролишу појаву мехурова. Леклерк је у раду [41] проучавао Флорову хомологију као модул над прстеном Морсове хомологије, са претпоставком $\omega|_{\pi_2(P,L)} = \mu|_{\pi_2(P,L)} = 0$, захваљујући којој је онемогућена појава мехурова. Што се тиче резултата изложених у овој тези, главну тешкоћу у њиховом уопштењу на случај општије симплектичке многострукости представља сама конструкција кохомолошких и Месијевих производа. У општој симплектичкој многострукости градуација, односно, Масловљев индекс, не може да се дефинише као у случају котангентог раслојења. У случају монотоних затворених Лагранжевих многострукости L_0 и L_1, које се секу трансверзално, могуће је задати *релативну* градуацију[7] на скупу $L_0 \cap L_1$ и то само модуло $NZD(\Sigma_0, \Sigma_1)$, где је Σ_j минимални Масловљев број у односу на подмногострукост L_j. У случају када је L_1 Хамилтонова деформација многострукости L_0, то јест када је $L_1 = \phi_1^H(L_0)$, поново (као у случају котангентног раслојења) постоји идентификација скупа $L_0 \cap L_1$ са скупом Хамилтонијанових путева који полазе и завршавају се на L_0. Овај случај изгледа најпогодније за примену метода сличних описаним, за почетак, за конструкцију Месијевих производа на сличан начин.

6.3.4. Релативна Флорова (ко)хомологија. Као што смо споменули у Глави 1, једно од уопштења Флорове хомологије у котангентном раслојењу је њена релативна верзија, описана у [62]. Ако је $N \subset M$ затворена глатка подмногострукост, тада је њено *конормално раслојење*:

$$\nu^* N := \{\xi \in T_N^* M \mid \xi(X) = 0, \text{ за свако } X \in TN\}$$

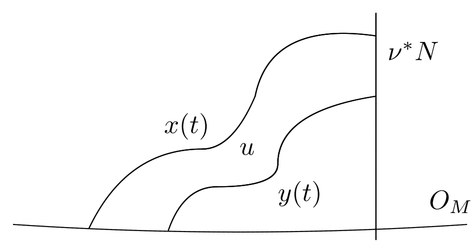
Лагранжева подмногострукост у T^*M. У случају када је подмногострукост N затворена, Позниак [62] је за генераторе ланчастог комплекса узимао пресечне тачке $\nu^* N \cap \phi_1^H(O_M)$, док је гранични оператор дефинисао

[7] То јест, вештачки прогласити фиксирану пресечну тачку x_0 за елемент степена нула, а остале тачке градуисати помоћу x_0, видети радове Флора [22] и Витербоа [71] за детаље.

помоћу броја решења система

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)) = 0 \\ u(s,0) \in 0_M, \ u(s,1) \in \nu^* N \\ u(-\infty, t) = \phi_t^H((\phi_1^H)^{-1})(x) =: x(t), \ u(+\infty, t) = \phi_t^H((\phi_1^H)^{-1})(y) =: y(t), \\ x, y \in \nu^* N \cap \phi_1^H(O_M) \end{cases} \tag{6.3.1}$$

(видети Слику 6.4). Може се доказати (видети [62]) да је $\partial^2 = 0$ и да је овако дефинисана хомологија изоморфна је сингуларној хомологији подмногострукости N. У случају $N = M$, важи $\nu^* N = O_M$, то јест, ова конструкција заиста уопштава претходну. Највећа тешкоћа у уопштењу конструкције ПСС изоморфизма на овај случај представља гранични услов $u\left(0, \frac{1}{2}\right) = \gamma(0)$ који се јавља у једначини (2.1.9). Наиме, „тунели” који учествују у дефиницији оператора диференцирања имају један крај на нултом сечењу, а други на конормалном раслојењу, тако да није очигледно који би објекат у овом случају имао улогу „полутунела” из једначине (2.1.9) на страни 23.



Слика 6.4: Пертурбовани холоморфни диск са границама на O_M и $\nu^* N$

6.3.5. Функторијалност у операцијама на хомологијама. Нека је $A \subset M$ затворена подмногострукост многострукости M и нека је $l = \dim A$. Посматрајмо скуп

$$\mathcal{M}^A(p, q, f, g) := \{\gamma \in \mathcal{M}(p, q, f, g) \mid \gamma(0) \in A\}$$

(видети Слику 6.5). Захваљујући трансверзалности, малим петурбацијама скупа A (уколико је потребно), може се постићи да скуп $\mathcal{M}^A(p, q, f, g)$ постане глатка многострукост. Ако је $m_f(p) - m_f(q) = n - l$, тада је

$\mathcal{M}^A(p,q,f,g)$ димензије нула и компактна, дакле коначан скуп тачака. У том случају, нека $n_A(p,q,f,g)$ означава број елемената скупа $\mathcal{M}^A(p,q,f,g)$. Означимо са $CM_*(f)$ скуп свих формалних комбинација критичних тачака индекса $*$ Морсове функције f и дефинишимо пресликавање

$$\psi_A : CM_{n-l+r}(f) \to CM_r(f)$$

задајући његове вредности на генераторима:

$$\psi_A(p) := \sum_{m_f(q)=r} n_A(p,q,f,g)q.$$

Може се доказати (видети [47, 69]) да важи

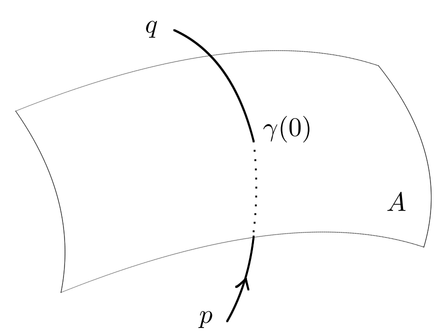
$$\partial_M \circ \psi^A = \psi^A \circ \partial_M,$$

па је пресликавање ψ_A дефинисано и на хомологијама, то јест:

$$\psi_A : HM_{n-l+r}(f) \to HM_r(f)$$

(видети и [8]).

Пресликавање ψ_A назива се и *кеп (*cap*) производом.* Помоћу аргумената кобордизама сличним оним описаним у Поглављу 6.1.2, може се доказати да важи $T^{\alpha\beta} \circ \psi_A = \psi_A \circ T^{\alpha\beta}$, па је кеп производ добро дефинисан и на Морсовој хомологији многострукости $HM_*(M)$.



Слика 6.5: Кеп производ ψ_A

На сличан начин се дефинишу и кеп производи у Флоровој теорији. Скуп $\mathcal{M}^A(x,y,H,J)$ дефинишемо као $\mathrm{ev}^{-1}(a)$ где је

$$\mathrm{ev} : \mathcal{M}(x,y,H,J) \to O_M \cong M, \quad \mathrm{ev}(u) = u\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Једно од могућих наставака овог рада је испитивање функторијалности оваквих производа у односу на ПСС изоморфизам.

6.3.6. Хоферова геометрија и Флорова хомологија. Споменимо на крају још један правац у ком би изложена истраживања могла да се наставе. У Глави 1 смо описали на који начин проласци кроз критичне тачке Морсове функције одговарају додавању ћелија одговарајућих димензија, односно, на који начин се топологија многострукости описује праћењем промене скупова $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$ на Слици 1.1. Бесконачнодимензиона аналогија ових филтрирања доводи до следеће конструкције. Нека је $HF_*^\lambda(H)$ Флорова хомолошка група генерисана само оним Хамилтоновим путевима x с крајевима на нултом сечењу за које важи:

$$\mathcal{A}_H(x) = \int_x pdq - Hdt \leq \lambda.$$

Означимо са $F_H : H_*^{\text{sing}}(M) \xrightarrow{\cong} HF_*(H)$ изоморфизам између Флорове и сингуларне хомологије. Нека је $a \in H_*^{\text{sing}}(M)$ и $j_*^\lambda : HF_*^\lambda(H) \hookrightarrow HF_*(H)$ пресликавање индуковано инклузијом. О је дефинисао симплектичке инваријанте $\rho(a, H)$ као

$$\rho(H, a) := \inf\{\lambda \mid F_H(a) \in \mathrm{Im}(j_*^\lambda) \subset HF_*(H)\}.$$

Ове инваријанте су добро дефинисане и зависе само од Лагранжеве многострукости $\phi_H(O_M)$ (видети [51, 56, 57] за детаље). Ова конструкција се може схватити као бесконачнодимензионо уопштење раније Витербоове конструкције дате у [72] (видети и радове Л. Полтеровича и М. Биалија [9, 61]). Помоћу ових инваријанти О [56] је доказао недегенерисаност Хоферове метрике (видети и [51, 48, 46]). Р. Леклерк је у раду [41] наставио изучавање инваријатни ρ и дефинисао инваријанте вишег реда. Кохомолошки кап производ дефинисан помоћу Флорових панталона је коришћен у доказу извесних својстава инваријанти ρ која су у вези са неједнакошћу троугла у Хоферовој метрици (видети [57]).

Један од могућих праваца даљег рада је истраживање улоге Месијевих производа (вишег реда) у Хоферовој геометрији.

6.3.7. Закључак. У овој глави смо изложили технике кободизама које су се заснивале на карактеризацији тополошке границе многострукости комбинованих објеката, која је била резултат претходних глава овог рада. Овај резултат је увек следио из могућих начина губљења компактности (распадања) у обратног процеса – лепљења. Да би ове конструкције биле коректно засноване, дефинисали смо Банахове многострукости и одговарајуће Фредхолмове операторе. Верујемо да је уопштења и наставке поменуте у овом поглављу могуће извести користећи сличне поступке, уз одговарајуће модификације појединих аргумената.

Литература

[1] P. Albers, *A Lagrangian Piunikin – Salamon – Schwarz morphism and two comparison homomorphisms in Floer homology*, Preprint, arXiv:math.SG/0512037, 2005.

[2] V.I. Arnold, *On a characteristic class entering into conditions of quantization*, Functional Anal. Appl. **1**, 1–8, 1967.

[3] N. Aronszajn, *A unique continuation theorem for elliptic differential equations or inequalities of the second order*, J. Math. Pures Appl., **36**, 235–239, 1957.

[4] M. Audin, J. Lafontaine, *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Birkhäuser, Basel, 1994.

[5] A. Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui presérvent une forme symplectique*, Comm. Math. Helv., **53**, 174–227, 1978.

[6] A. Banyaga, D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology, Kluwer Texts in the Mathematical Sciences, Kluwer Academic Publishers*, **29**, 2004.

[7] J.-F. Barraud, O. Cornea, *Homotopical Dynamics in Symplectic Topology*, Morse Theoretic Methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology, NATO Science Series,P. Biran, O. Cornea and F. Lalonde (editors), Springer, 109 - 148, 2006.

[8] M. Betz, R. Cohen, *Graph moduli spaces and cohomology operations*, Turkish J. Math, **18**, 23–41, 1994.

[9] M. Bialy and L. Polterovich, *Geodesics of Hofer's Metric on the Group of Hamiltonian Diffeomorphisms*, Duke Math. J., **76**, 273–292, 1994.

[10] R. Bott, *Marston Morse and his mathematical works*, Bull. Amer. Math. Soc., **3**, 907–950, 1980.

[11] R. Bott, *Lectures on Morse theory, old and new*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **7**, 331–358, 1982.

[12] R. Bott, *Morse theory indomitable*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **68**, 99–114, 1988.

[13] S.K. Donaldson, *The orientation of Yang - Mills modulispaces and four manifold topology*, J. Diff. Geom., **26**, 397–428, 1987.

[14] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer *The geometry of Four - Manifolds* (Oxf. Math. Monogr.) Oxford: Clarendon 1990.

[15] Y. Eliashberg, L. Polterovich, *Bi-invariant Metrics on the Group of Hamiltonian Diffeomorphisms*, Inter. J. Math., **4**, 727–738, 1993.

[16] Y. Eliashberg, M. Gromov, *Convex symplectic manifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math., **52**, 135–162, 1991.

[17] A. Floer, *Proof of the Arnold conjecture for surfaces and gebneralizations to certain Kähler manifolds*, Duke Math. J., **53**, 1–32, 1986.

[18] A. Floer, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Differential Geometry, **30**, 207–221, 1989.

[19] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geometry, **28**, 513–547, 1988.

[20] A. Floer, *The unregularized gradient flow of the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math., **41**, 775–813, 1988.

[21] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorfic spheres*, Comm. Math. Phys., **120**, 575–611, 1989.

[22] A. Floer, *A relative Morse index for the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math., **41**, 393–407, 1988.

[23] A. Floer, *Construction of monopoles on asymptotically flat manifolds*, H. Hofer, C. Taubes, A. Weinstein, and E. Zehnder (editors), The Floer Memorial Volume, Progress in Mathematics, Birkhauser Verlag, **133**, 1995.

[24] A. Floer, H. Hofer, *Coherent orientations for periodic orbit problems in symplectic geometry*, Mathematische Zeitschrift, **212**, 13–38 1993.

[25] A. Floer, H. Hofer, *Symplectic homology I: Open sets in* $\mathbf{C}^n$, Mathematische Zeitschrift, **215**, 37–88, 1994.

[26] A. Floer, H. Hofer, K. Wysocki, *Applications of symplectic homology I*, Mathematische Zeitschrift **217**, 577–606, 1994.

[27] K. Fukaya, Y.-G. Oh, *Zero - loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy*, Asian Journal of Mathematics, **1**, 96–180, 1997.

[28] K. Fukaya, K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov–Witten invariants*, Topology, **38**, No.1, Elsevier, 933–1048, 1999.

[29] D. Gilbarg, N.S Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of the Second Order*, Spinger–Verlag, 1983.

[30] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Inventiones Math., **82**, 307–347, 1985.

[31] M. Hirsh, *Differntial topology*, Springer–Verlag, New York, 1976.

[32] H. Hofer, D. Salamon, *Rational Floer homology and the general Arnold conjecture*, Preprint, 1998.

[33] R. Kasturirangan, Y.-G. Oh, *Floer homology for open subsets and a relative version of Arnold's conjecture*, Math. Z., **236**, 151–189, 2001.

[34] J.Katić, *Gluing and Piunikhin – Salamon – Schwarz isomorphism for Lagrangian Floer homology*, Matematički Vesnik, **59**, 211–228, 2007.

[35] J. Katić, *Compactification of mixed moduli spaces in Morse-Floer theory*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **38**, No.3, 923–939, 2008.

[36] J. Katić, D. Milinković, *Piunikin – Salamon – Schwarz isomorphisms for Lagrangian intersectios*, Differential Geometry and Its Applications, **22**, pp. 215–227, 2005.

[37] J. Katić, D. Milinković, *Topological invariants of smooth manifolds via Classical Mechanics and Cauchy - Reimann operator*, Sveske fizičkih nauka, **20**, Institute of Physics, Belgrade, 263–273, 2007.

[38] W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Grundl. der Math. Wiss. **230**, Springer, 1976.

[39] S. Kobayashi, K. Nomizu, *The foundations of differential geometry I–II*, Wiley, New York, 1963.

[40] H.B. Lawson Jr, M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.

[41] R. Leclercq, *Spectral invariants in Lagrangian Floer theory*, arXiv:math.SG/0612325v1, 2006.

[42] G. Liu, G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, Journal of Differential Geometry, **49**, 1–74, 1998.

[43] D. McDuff, *Symplectic manifolds with contact type boundaries*, Invent. Math., **103**, 651–671, 1991.

[44] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, AMS, University Lecture Series, **6**, 1994.

[45] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995.

[46] D. Milinković, J. Katić, *On Hofer's geometry of the space of Lagrangian submanifolds*, Proceedings of the Conference Contemporary Geometry and Related Topics, Belgrade 2005, Matematički fakultet, Beograd, 337–351, 2006.

[47] D. Milinković, *Morse Homology for Generating Functions of Lagrangian Submanifolds*, Trans. AMS, **351**, 3953–3974, 1999.

[48] D. Milinković, *On Equivalence of Two Constructions of Invariants of Lagrangian Submanifolds*, Pacific J. Math, Vol. 195, **2**, 371–415, 2000.

[49] D. Milinković, *Geodesics on the space of Lagrangian submanifolds in cotangent bundles*, Proc. Am. Math. Soc., **129**, No.6, 1843–1851, 2001.

[50] D. Milinković, *Action Spectrum and Hofer's Distance between Lagrangian Submanifolds*, Differential Geometry and Its Applications , **17**, 69–81, 2002.

[51] D. Milinković and Y. - G. Oh, *Generating Functions versus Action Functional. Stable Morse Theory versus Floer Theory.*, In: Lalonde, François (ed.), Geometry, topology, and dynamics. Proceedings of the CRM workshop, Montreal, Canada, June 26–30, 1995. Providence, RI: American Mathematical Society. CRM Proc. Lect. Notes. **15**, 107–125, 1998.

[52] D. Milinković, Z. Petrović, *Generalized (co)homology and Morse complex*, Matematičhki Vesnik, **59**, 153–160, 2007.

[53] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.

[54] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism Theorem*, Princeton University Press, 1965.

[55] Y.-G. Oh, *Floer homology of Lagrangian intersections and pseudo - holomorpohic discs I*, Comm. Pure Appl. Math., **46**, 949–993, 1993.

[56] Y.-G. Oh, *Symplectic Topology as the Geometry of Action Functional I - Relative Floer Theory on the Cotangent Bundle*, J. Diff. Geometry, **45**, 499–577, 1997.

[57] Y.-G. Oh, *Symplectic Topology as the Geometry of Action Functional II - Pants Product and Cohomological Invariants*, Comm. Anal. Geom., **7**, 1–55, 1999.

[58] Y.-G. Oh, *Removal of Boundary Singularities of Pseudo-holomorfic curves with Lagrangian boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math., **45**, 121–139, 1992.

[59] T.H. Parker, J.G. Wolfson, *Pseudoholomorphic maps and bubble trees*, Journ. Geom. Anal., **3**, 63–98, 1993.

[60] S. Piunikhin, D. Salamon, M. Schwarz, *Symplectic Floer–Donaldson theory and quantum cohomology*, in: Contact and symplectic geometry, Publ. Newton Instit., **8**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 171–200, 1996.

[61] L. Polterovich, *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphism*, Birkhäuser Verlag, 2001.

[62] M. Poz̀niak, *Floer homology, Novikov rings and clean intersections*, Ph.D. thesis, University of Warwick, 1994.

[63] R.M. Range, *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, Graduate texts in Mathematics, **108**, Springer Verlag, New York, 1986.

[64] J. Robbin, D. Salamon, *The Maslov index for paths*, Topology, **32**, 827–844, 1993.

[65] J. Robbin, D. Salamon, *The spectral flow and the Maslov index*, Bull. London Math. Soc., **27**, 1–33, 1995.

[66] D. Salamon, *Lectures on Floer homology*, in: Symplectic Geometry and Topology (L. Traynor and Ya. Eliashberg, eds.), IAS Park City Math. Series, AMS, **7**, 1999.

[67] S. Smale, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Ann. of Math., **87**, 213–221, 1973.

[68] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw–Hill, New York, 1966.

[69] M. Schwarz, *Morse Homology*, Birkhäuser, 1993.

[70] M. Schwarz, S^1 *– cobordism operations in Floer homology*, Ph. D. Thesis, ETH Zürich, 1995.

[71] C. Viterbo, *Intersection de sous-varités Lagrangiennes fonctionnalles d'action et indice des systèmes Hamiltonines*, Bull. Soc. Math. Fr., **115**, 361–390, 1987.

[72] C. Viterbo, *Symplectic Topology as the Geometry of generating functions*, Math. Annalen, **292**, 685–710, 1992.

[73] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom. **17**, 661–692, 1982.

[74] В. Драговић, Д. Милинковић, *Анализа на многострукостима*, Математички факултет, Београд, 2003.

[75] J. Катић, *Градијентне трајекторије, холоморфни дискови и комутативност дијаграма у Морс – Флоровој теорији*, Магистарски рад одбрањен на Математичком факултету Универзитета у Београду, 2004.

[76] Т. Симчевић, *Кохомолошки производ уведен помоћу градијентних трајекторија и холоморфних дискова*, Магистарски рад одбрањен на Математичком факултету Универзитета у Београду, 2007.

Индекс

Индекс симбола: