Математички факултет

Мастер рад

Лагранжеви и Лежандрови кобордизми

Аутор:

Филип Броћић

Ментор:

Дарко Милинковић

У Београду, 2019. године

Садржај

1 Увод **1**

2 Симплектичка и контактна геометрија **3**

2.1 Лагранжеве и Лежандрове подмногострукости 10

2.2 Вајнштајнове многострукости 15

3 Лагранжеви и Лежандрови кобордизми **18**

3.1 Лагранжеви кобордизми 18

3.2 Лежандрови кобордизми 22

4 Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке **24**

4.1 Монотоне Лагранжеве подмногострукости 26

4.2 Инваријантност за некомпактне Хамилтонове деформације 28

4.3 Инваријантност за монотоне Лагранжеве кобордизме 33

5 Квантна хомологија и спектралне инваријанте **35**

5.1 Квантна хомологија за монотоне Лагранжеве подмногострукости 35

5.2 Квантни производ 38

5.3 Спектралне инваријанте за монотоне Лагранжеве подмногострукости . 40

5.4 Квантна валуација 42

6 Метричке инваријанте Лагранжевих подмногострукости **47**

6.1 Кобордизам метрика 47

6.2 Спектралне инваријанте и кобордизми 53

Литература **56**

1 Увод

Теорија кобордизама у топологији је актуелна од када постоји потреба за класификацијом многострукости. Наиме, како је проблем класификације многострукости произвољне димензије до на хомеоморфизам јако ригидан и тежак проблем (еквивалентан проблему речи) природно се појављује потреба за флексибилнијом релацијом еквиваленције.

Две затворене многострусти M, N димензије n су кобордантне ако постоји компактна многострукост W димензије $n+1$ таква да је њена граница ∂W хомеоморфна дисјкунтној унији $M \sqcup N$. Поенкаре [1] је у низу револуционарних радова покушао да дефинише теорију хомологије помоћу кобордизама, касније је Атија уочио да су кобордизми генералисана хомолошка теорија, односно да задовољава „само”неке од Ајленберг[2]-Стинродових[3] аксиома . Том [4] у својој тези долази до фасцинантног резултата, он успева да класификује све многострукости до на неоријентисани кобордизам користећи карактеристичне класе векторских раслојења. Прецизније он показује да је градуисани прстен класа кобордантних многострукости Ω изоморфан полиномијалној алгебри $\mathbb{Z}_2[x_2, x_4, x_5, x_6, ...]$, где генератор x_i степена i постоји за $i \neq 2^k - 1$. Уколико је i парно тада је x_i репрезентовано са $\mathbb{R}P^i$, а за непарно i генератори су раслојења на $\mathbb{R}P^m$ са фибром $\mathbb{C}P^l$ ([24]).

Арнолд[5] је у својим радовима [9], [10] увео појам *Лагранжевих*[6] *и Лежандровних*[7] кобордизама мотивисан таласним фронтом у физици. Лагранжев кобордизам између Лагранжевих подмногострукости L и L' у M је Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C} \times M$ чија је граница $(R, 0) \times L \sqcup (-R, 0) \times L'$. У наредном периоду теорија Лагранжевих кобордизама није развијана, Ељашберг[8] и Аудин[9] су покушали да класификују кобордизме алгебарски по угледу на Тома. О[10] у [40] примењује интересантну технику за инваријантност Флорове Хомологије при Хамилтоновим деформацијама са не-компактним носачем што ћемо касније и изложити. Наиме он је уместо по-

[1] Henri Poincaré (1854-1912) - француски математичар, зачетник теорије кобордизама
[2] Samuel Eilenberg (1913-1998) - пољско-амерички математичар, оснивач теорије категорија
[3] Norman Steenrod (1910-1971) - амерички математичар
[4] René Thom (1923-2002) - француски матемаичар
[5] Владимир Игоревич Арнольд (1937-2010) - руски математичар, творац симплектичке топологије
[6] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) - италијански математичар
[7] Adrien-Marie Legendre (1752-1833) - француски математичар
[8] Яков Матвеевич Элиашберг (1946-) - руско-амерички математичар, познат по великим доприносима симплектичкој топологији
[9] Michèle Audin (1954-) - француски математичар
[10] Yong-Geun Oh (1961-) - корејски математичар

кретног граничног услова

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + J_t\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_{\rho(s)}}\right) = 0 \\ u(s,0) \in L, \quad u(s,1) \in L_{\rho(s)} \end{cases}$$

посматрао једначину са једним граничним условом - Лагранжев кобордизам, али у проширеном простору, чиме успева да сведе проблем на познат случај када решења пертуробоване Коши-Риманове једначине остају у фиксираном компакту.

Уназад пар година Биран[11] и Корнеа[12] су у радовима [12], [13] оживели Лагранжеве кобордизме као област. У [12] су показали да Лагранжеви кобордизми чувају најзаступљенији алат у Симплектичкој топологији - Флорову хомологију, односно природно је поистоветити кобордантне Лагранжеве подмногострукости и посматрати инваријанте до на „кобордизамčхто је доста флексибилније од Хамилтонових деформација. Прецизније они показују да за тројку N, L, L' монотоних Лагранжевих подмногострукости, где су L и L' кобордантне, важи

$$HF_*(N,L) \cong HF_*(N,L').$$

Користећи те резултате и мотивисани Хоферовом метриком за Лагранжеве подмногострукости, Корнеа и Шелукин[13] у [19] дефинишу (псеудо)-метрику на простору Лагранжевих подмногострукости. Бизго[14] у [17] доводи у везу кобордизме и спектралне инваријанте, односно показује да је кобордизам-метрика ограничена одоздо спектралном метриком. Такође показује да се асимптотске спектралне инваријанте чувају Лагранжевим кобордизмима.

Желео бих да се захвалим свом ментору, професору др. Дарку Милинковићу, на предлогу теме и помоћи у изради тезе. Његов ентузијазам и несебично дељење знања су много допринели у формирању мог математичког укуса и приступу математици. Такође, желео бих да се захвалим члановима комисије Јелени Катић и Александри Маринковић на корисним сугестијама и посвећености при читању текста. Захваљујем се Вукашину Стојисављевићу, Јовани Николић, Игору Уљаревићу и Максиму Стокићу. Дискусије са њима су ми доста помогли у писању тезе.

[11] Paul Biran (1969-) - израелски математичар
[12] Octavian Cornea (1966-) - румунски математичар
[13] Egor Shelukhin
[14] Mads Bisgaard

2 Симплектичка и контактна геометрија

Симплектичка и контактна *структура* су мотивисане физиком, прецизније класичном механиком и оптиком. Уколико посматрамо кретање у $\mathbb{R}^n$ индуковано потенцијалном енергијом $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, укупна енергија је дата са $H = \frac{||p||^2}{2m} + V(q)$ где је p импулс а q координата положаја. Тада је одговарајући *Хамилтонов* систем, или у овом случају други Њутнов закон у проширеном систему, дат са

$$\begin{aligned} q' &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ p' &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\nabla V(q). \end{aligned} \tag{1}$$

Систем ћемо звати Хамилтоновим и ако глатка функција H није укупна енергија система, а функцију H називамо *Хамилтонијаном.* Уколико посматрамо 2-форму $\omega_{st} = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$ на $\mathbb{R}^{2n}$, и векторско поље X_H одређено са

$$i_{X_H}\omega_{st} = dH,$$

диференцијална једначина $\gamma' = X_H(\gamma)$ има исти запис као и систем (1). Форму ω_{st} називамо стандардном *симплектичком* формом на $\mathbb{R}^{2n}$.

Дефиниција 2.1. Нека је M глатка многострукост и ω 2-форма. (M, ω) је *симплектичка* ако важи

1) $d\omega = 0$,

2) $(\forall p \in M)\ (\forall X \in T_pM \setminus 0)(\exists Y \in T_pM)\ \omega_p(X, Y) \neq 0.$

Први услов је затвореност форме, а други недегенерисаност. Због недегенерисаности и антисиметричности ω симплектичке многострукости морају бити парне димензије! Наредна лема нам даје еквивалентан услов недегенерисаности.

Лема 2.1. Нека је ω 2-форма на $2n$ димензионој многоструости M. Форма ω је недегенерисана ако и само ако је $w^{\wedge n} \neq 0$.

Доказ. Ако је ω недегенерисана, за свако $p \in M$ постоји база $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$ векторског простора T_pM таква да је

$$\omega(X_i, X_j) = 0, \quad \omega(Y_i, Y_j) = 0, \quad \omega(X_i, Y_j) = \delta_{ij}.$$

Тада је

$$\omega_p^{\wedge n}(X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n) \neq 0.$$

Заиста, у дуалној бази форма је записана $\omega_p = \sum dx_i \wedge dy_i$, па је

$$\omega_p^{\wedge n} = n! dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n.$$

Претпоставимо сада да је $\omega_p^{\wedge n} \neq 0$ и нека постоји $X \neq 0$ тако да је $\omega_p(X, Y) = 0$ за свако $Y \in T_pM$, како је $i_X\omega^{\wedge n} = n\ i_X\omega \wedge \omega^{\wedge n-1}$ следи да је $i_X\omega^{\wedge n} = 0$ што је супротно претпоставци!

□

Из леме видимо да осим парности димензије постоји још једна опструкција: да би многострукост била симплектичка мора бити оријентабилна! Наводимо сада пар основних примера симплектичких многострукости.

Примери 2.1.

1) $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$,

2) $(\Sigma, dVol_\Sigma)$, где је Σ оријентабилна површ, а $dVol_\Sigma$ форма запремин,

3) Нека је M глатка многострукост и T^*M њено котангетно раслојење. Посматрајмо природну пројекцију $\pi : T^*M \to M$. Лиувилова форма λ на T^*M дата је са

$$\lambda(X_p) = p(\pi_*(X_p)), \quad X_p \in T_pT^*M,$$

тада је $\omega = -d\lambda$ симплектичка форма.

Једина сфера која поседује симплектичку структуру је $\mathbb{S}^2$, односно из Стоксове[15] формуле можемо закључити да затворена симплектичка многострукост има нетривијалну другу Де-Рамову[16] кохомологију.

Тврђење 2.1. Нека је (M, ω) затворена симплектичка многострукост, тада је $H^2_{dR}(M) \neq 0$.

Доказ. Претпоставимо супротно, нека је $H^2_{dR}(M) = 0$, односно свака затворена 2-форма је тачна, тада постоји $\eta \in \Omega^1(M)$ таква да је $d\eta = \omega$. Како је $d(\eta \wedge \omega^{\wedge(n-1)}) = d\eta \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = \omega^{\wedge n}$ имамо

$$\int_M \omega^{\wedge n} = \int_M d(\eta \wedge \omega^{\wedge(n-1)}) = \int_{\partial M} \eta \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = \int_\emptyset \eta \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = 0$$

што је контрадикција са чињеницом да је $\omega^{\wedge n}$ форма запремине (оријентације). □

[15] George Stokes (1819-1903) - ирски математичар
[16] Georges de Rham (1903-1990) - швајцарски математичар

Како је $H^2_{dR}(\mathbb{S}^{2n}) = 0$ за $n > 1$ видимо да је заиста једина сфера која допушта симплектичку структуру $\mathbb{S}^2$. Аналогно се показује да за свако $k \in \{1, ..., n\}$ мора да важи $H^{2k}_{dR}(M) \neq 0$, тако на пример $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ не поседује симплектичку структуру.

Интересантно је да, иако је реч о многосрукостима, симплектичке многострукости се локално не разликују, односно занимају нас њихове глобалне особине. О томе говори Дарбуова теорема.

Теорема 2.1 (Дарбу)**.** Нека је (M, ω) симплектичка, тада за сваку тачку $p \in M$ постоји њена околина $\mathcal{U}_p \subset M$ и дифеоморфизам $\phi_p : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathcal{U}_p$ такав да важи

$$\phi_p^* \omega = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots dp_n \wedge dq_n$$

Доказ. Како је проблем локалне природе можемо сматрати да је $M = \mathbb{R}^{2n}$ и $p = 0$ и да је $\omega(0) = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots dp_n \wedge dq_n$. Посматрајмо фамилију затворених форми

$$\omega_t = t\omega_{st} + (1 - t)\omega,$$

ако постоји фамилија дифеоморфизама таква да важи

$$\phi_t^* \omega_t = \omega_{st}$$

проблем је решен и тражени дифеоморфизам је ϕ_1. Користећи Картанову формулу добијамо

$$d(i_{X_t} \omega_t) = \omega - \omega_{st},$$

где је $X_t = \frac{d}{dt}\phi_t \circ \phi_t^{-1}$. Како је свака затворена форма тачна то постоји $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ тако да је $d\alpha = \omega - \omega_{st}$, па ако постоји векторско поље такво да је

$$i_{X_t} \omega_t = \alpha$$

имамо и фамилију ϕ_t. Како је недегенерисаност отворено својство, а интервал $[0, 1]$ компактан то је и фамилија форми ω_t, $t \in [0, 1]$ недегенерисана. Закључак следи из чињенице да недегенерисана 2-форма индукује изоморфизам

$$\omega : TM \to T^*M.$$

$\square$

Симплектичке многострукости смо видели као уопштење фазног простора у класичној механици, односно котангентно раслојење T^*M многострукости M на којој је за-дат систем има канонску симплектичку форму $\omega = -d\lambda$ где је λ Лиувилова 1-форма.

Ако посматрамо $\mathbb{R}^{2n}$ и Хамилтонијан $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Из закона одржања енергије знамо да су решење Хамилтоновог система садржана у нивоима $H^{-1}(c)$ за неко $c \in \mathbb{R}$, уколико је c регуларна вредност Хамилтнојана H тада $H^{-1}(c)$ хиперповрш у $\mathbb{R}^{2n}$, то из очигледних разлога није симплектичка многострукост, али неке од хиперповрши поседују *контактну* структуру која је на неки начин јако блиска симплектичкој.

Симплектичка форма ω на многострукости M је у свакој тачки недегенерисано антисиметрично билинеарно пресликаване, због тога T_pM мора бити парне димензије, па самим тим и многострукост M. Како су хипероиврши у $\mathbb{R}^{2n}$ непарне димензије природно је посматрати хиперравни у тангентном простору јер су оне димензије $2n-2$ и билинеарне форме чије су рестрикције на хиперраван недегенерисане и антисиметричне. Али како изабрати 2-форму и фамилију хиперравни тако да у свакој тачки хиперповрши буду задовољени тражени услови?

Дефиниција 2.2. Нека је M n-димензиона глатка многострукост. Дистрибуција димензије k је фамилија k-димензионих потпростора $\Delta_p \subset T_pM$ за коју важи да $\forall p \in M$ има околину и $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_p)$ сечења таква да $\forall q \in \mathcal{U}_p$ вектори $X_1(q), ..., X_k(q)$ чине базу за Δ_q.

Услов да векторска поља локално разапињу дистрипуцију нам заправо говори да се ти потпростори тангентног простора правилно понашају, односно да је дистрибуција глатко векторско подраслојење тангнентног раслојења. Нама су интересантне дистрибуције кодимензије 1, односно димензије $n-1$ где је n димензија многострукости, у том случају имамо следеће тврђење:

Тврђење 2.2. Нека је M Риманова глатка многострукост са Римановом метриком g и ξ дистрибуција кодимензије 1. За сваку тачку $p \in M$ постоји околина $\mathcal{U}_p$ те тачке и диференцијална 1-форма α_p таква да је $\ker(\alpha_p\big|_{\mathcal{U}_p}) = \xi\big|_{\mathcal{U}_p}$. Форма α постоји глобално акко је TM/ξ тривијално линијско раслојење.

Доказ. Захваљујући Римановој структури можемо да дефинишемо ортогонални комплемент дистрибуције ξ:

$$\xi^\perp := \{ \quad X \in TM \quad | \quad \forall p \in M \quad g_p(X(p), Y) = 0, \quad \forall Y \in \xi_p\}$$

Из глаткости Риманове метрике видимо да је $\xi^\perp$ глатко линијско раслојење, а лако можемо да закључимо и да је $TM = \xi \bigoplus \xi^\perp$.
Како је $\xi^\perp$ линијско раслојење, то за сваку тачку $p \in M$ постоји локална тривијализација $h : \xi^\perp\big|_{\mathcal{U}_p} \to \mathcal{U}_p \times \mathbb{R}$ па је $X(q) := h^{-1}(q, 1)$ сечење линијског раслојења које нигде није нула, форма $\alpha_p := g(X, \cdot)$ задовољава услове тврђења.

Покажимо сада други део.
$\Rightarrow)$
Ако форма α постоји глобално, одабиром векторског поља X за које важи

$$\alpha(X) > 0 \text{ и } g(X, X) = 1$$

добијамо тривијализацију линијског раслојења $\xi^\perp \cong TM/\xi$. $\Leftarrow)$

Уколико је раслојење тривијално, постоји векторско поље X које нигде није нула, па је

$$\alpha := g(X, \cdot)$$

добро дефинисана форма која глобално задаје дистрибуцију ξ.

$\square$

Када имамо дистрибуцију ξ кодимензије 1 на многострукости M, знамо да је она локално задата формом α и можемо да захтевамо недегенерисаност форме $d\alpha\big|_\xi$, тиме намећемо услов парности димензије дистрибуције а и самим тим добијамо да је многострукост непарне димензије што одговара нашој идеји структуре на хиперповршима.

Дефиниција 2.3. Нека је M глатка многострукост димензије $2n + 1$. Кажемо да дистрибуција ξ задаје контактну структуру уколико је $\forall p \in M$ $d\alpha_p\big|_\xi$ недегенерисана 2-форма у некој околини тачке p, где је α_p 1-форма која локално задаје дистрибуцију ξ. Контактна многострукост је пар (M, ξ) где је M глатка многострукост, а ξ дистрибуција која задаје контактну структуру.

Форме чије језгро задаје контактну структуру називамо контактним формама. Јасно је да се такве форме разликују до на глатку функцију $f : M \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, па како је

$$df\alpha\big|_\xi = df \wedge \alpha\big|_\xi + fd\alpha\big|_\xi,$$

пошто је $\xi = \ker(\alpha)$ први сабирак је нула тако да је $d\alpha\big|_\xi$ недегенерисана акко је $df\alpha\big|_\xi$ недегенерисана односно дефиниција је коректна јер не зависи од избора диференцијалне форме.

Ако пажљивије погледамо теорему Фробенијуса о интеграбилности дистрибуције видимо да је услов недегенерисаности рестрикције 2-форме еквивалентан томе да дистрибуција није интеграбилна, зато се контактна структура назива још и максимално не интеграбилна дистрибуција кодимензије 1. Као што смо видели да симплектичка форма ω задаје форму оријентације ω^n на симплектичкој многострукости овде важи слична ствар локално. Уколико контактна форма постоји глобално она ће индуковати форму оријентације на контактној многострукости.

Тврђење 2.3. Нека је (M, ξ) контактна многострукост и нека је $\{\alpha_p\}_{p\in M}$ фамилија форми које задају локално контактну структуру. Форма $d\alpha_p\big|_\xi$ је недегенерисана на околини $\mathcal{U}_p$ тачке p акко форма $\alpha_p \wedge (d\alpha_p)^n$ задаје форму оријентације на $\mathcal{U}_p$.

Доказ овог тврђења је сличан аналогном тврђењу за симплектичке многострукости те га изостављамо. Такође, ако је контактна дистрибуција ξ кооријентабилна тј. постоји глобално дефинисана контактна форма α тврђење нам гарантује да је M оријентабилна. Оно нам даје и оперативнији начин за проверу да ли је форма контактна, што илуструјемо на стандардним примерима контактних многострукости:

Пример 2.1.

1) $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st} = \ker(dz + \sum_{i=1}^n p_i dq_i)$ је контактна многострукост, контактну структуру ξ_{st} називамо стандардном.

2) $(\mathbb{R}^3, \xi_{ot} = \ker(\cos r dz + r \sin r d\phi))$ где су (r, ϕ, z) цилиндричне координате је контактна многострукост, ова контактна структура се доста разликује од контактне структуре у претходном примеру за $n = 1$ што ћемо видети касније.

3) Нека је M глатка многострукост, T^*M је симплектичка многострукост са симплектичком формом $\omega = -d\lambda$, где је Лиувилова форма у локалним кординатама задата са $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$. Пројективизацијом сваког слоја добијамо пројективно котангентно раслојење PT^*M где је сваки слој дифеоморфан $\mathbb{R}P^{n-1}$ где је $n = dimM$. Контактну структуру задаје дистрибуција $\xi = \ker\lambda$, приметимо да иако λ није добро дефинисана форма на PT^*M њено језгро јесте.

4) $(S^{2n-1}, \xi = \ker(\sum_{i=1}^{n} q_i dp_i - p_i dq_i))$ је контактна многострукост, контактна форма је задата у R^{2n} и заправо је једнака $i_Y\omega$ где је $Y = \sum_{i=1}^{n} p_i \partial_{p_i} + q_i \partial_{q_i}$ а $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$. Форма $i_Y\omega$ је контактна јер је:

$$i_Y\omega \wedge (di_Y\omega)^{n-1} = i_Y\omega \wedge (2\omega)^{n-1} = 2^{n-1} i_Y\omega \wedge \omega^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{n} i_Y\omega^n \neq 0$$

$i_Y\omega^n\big|_{S^{2n-1}}$ је форма запремине на сфери зато што је ω^n форма запремина у $\mathbb{R}^{2n}$ а векторско поље Y је трансверзално на S^{2n-1}.

5) Нека је (M, α) контактна многострукост, тада је $(M \times \mathbb{R}, d(e^t\alpha))$ симплектичка многострукост.

6) Нека је $(M, -\mathrm{d}\lambda)$ тачна симплектичка многострукост, тада је $(M \times \mathbb{R}, \lambda + dt)$ контактна.

За поседовање контактне структуре немамо толике рестрикције као у случају симплектичке многострукости где због Стоксове теореме важи $H^{2k}_{dR}(M) \neq 0 \ \ \forall k \in \{1, ..., n\}$ за затворену многострукост M. Из претходног примера под 3) за $M = \mathbb{R}^n$ видимо да за непарне n контактна многострукост може да буде и неорјентабилна. Такође за разлику од симплектчке геометрије где само S^2 поседује симплектичку структуру, у контактној геометрији све сфере непарне димензије допуштају контактну структуру што смо видели у примеру 2.1. Ипак постоје одређени услови које контактна структура намеће.

Тврђење 2.4. Нека је (M, ξ) повезана контактна многострукост димензије $2n+1$. Ако је n непарно M је оријентабилна.

Доказ. Нека је $(\mathcal{U}_i, \rho_i)$ разбијање јединице где је покривање $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ локално коначно, изабрано тако да је $\xi^\perp\big|_{\mathcal{U}_i}$ тривијално раслојење. Из тврђења 2.1 знамо да постоји форма α_i која задаје контактну структуру ξ на $\mathcal{U}_i$. Све форме које задају ξ се могу добити као $f\alpha_i$ за неку глатку функцију $f : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, приметимо следеће:

$$f\alpha_i \wedge (df\alpha_i)^n = f\alpha_i \wedge (df \wedge \alpha_i + fd\alpha_i)^n = f^{n+1}\alpha_i \wedge (d\alpha_i)^n$$

Како је n непарно, имамо да је

$$sgn(\alpha_i \wedge (d\alpha_i)^n) = sgn(f\alpha_i \wedge (d(f\alpha_i))^n)$$

што значи да знак локалне форме оријентације не зависи од избора контактне форме α_i, а због повезаности имамо да је знак исти за свако $i \in \mathbb{N}$. Па је фиксирањем неког избора контактних форми α_i:

$$\Omega = \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i \alpha_i \wedge (d\alpha_i)^n$$

добро дефинисана форма оријентације на M. $\square$

Када год задајемо неке нове објекте, или објектима додајемо нову структуру, занима нас шта су морфизми у тој категорији, односно интересују нас симетрије тих објеката које чувају структуру, у нашем случају контактну дистрибуцију или ако је контактна многострукост коoријентабилна контактну форму.

Дефиниција 2.4. Нека су $(M_1, \xi_1))$ и (M_2, ξ_2) контактне многострукости и нека је $\phi : M_1 \to M_2$ дифеоморфизам. Уколико важи:

$$\phi_* \xi_1 = \xi_2$$

кажемо да је ϕ контактоморфизам. Ако је још $\xi_1 = \ker \alpha_1$ и $\xi_2 = \ker \alpha_2$, ϕ је контактно морфизам ако важи:

$$\phi^* \alpha_2 = f \alpha_1$$

за неку глатку функцију $f : M_1 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, уколико је $f \equiv 1$ за контактоморфизам кажемо да је *стриктан.*

2.1 Лагранжеве и Лежандрове подмногострукости

Нека је (M, ω) симплектичка многострукост, у овом одељку ћемо дефинисати неке потпросторе који су од великог значаја у изучавању симплектичких многострукости и њихових симетрија.

Дефиниција 2.5. Нека је $N \subset M$ подмногострукост, кажемо да је N

1.) изотропна ако је $TN \subset (TN)^\omega$,

2.) коизотропна ако је $(TN)^\omega \subset TN$,

3.) Лагранжева ако је $TN = (TN)^\omega$.

Како за симплектички векторски простор (V, Ω) и векторски попростор $W \leq V$ важи

$$\dim W + \dim W^{\Omega} = \dim V$$

видимо да ако је димензија симплектичке многострукости M $2n$ онда димензија Лагранжеве подмногострукости мора бити n. подмногострукост $L \subset M$ можемо да посматрамо и као улагање $i : L \to M$.

Лема 2.2. Нека је L многострукост димензије n, (M, ω) симплектичка многострукост димензије $2n$ и $i : L \to M$ улагање. подмногострукост $i(L)$ је Лагранжева акко $i^*\omega = 0$.

Доказ.

$$\begin{aligned} Ti(L) = (Ti(L))^{\omega} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall Y_1, Y_2 \in Ti(L) \;\; \omega(Y_1, Y_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall X_1, X_2 \in TL \;\; \omega(i_* X_1, i_* X_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall X_1, X_2 \in TL \;\; i^*\omega(X_1, X_2) = 0. \end{aligned}$$

□

Примери 2.2.

1.) Нека је $J = \begin{bmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ и $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ таква да је $A^T J A = J$ и нека је $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^{2n}$, тада је $A\mathbb{R}^n$ Лагранжева у $(\mathbb{R}^{2n}, \Sigma_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i)$.

2.) Ако је Σ оријентабилна површ тада је свака крива на Σ Лагранжева.

3.) Нека је $L = \mathcal{O}_M = \{(q, p) \in T^*M \mid p = 0\}$, тада је L Лагранжева у $(T^*M, -d\lambda)$. Ако је $\alpha \in \Omega^1(M)$ затворена форма, тада је $\alpha(M) \subset T^*M$ Лагранжева.

4.) Нека је C у (M, ω) крива, тада је C изотропна у M.

5.) Нека је N у (M, ω) хиперповрш тада је N коизотропна у M.

6.) Нека је N подмногострукост од M, тада је

$$\nu^* N := \{(q, p) \in T^*M \mid q \in N, \;\; p(X) = 0, \, \forall X \in T_q N\}$$

Лагранжева у $(T^*M, -d\lambda)$.

Пресликавање $i : L \to M$ се назива имерзија уколико је $i_* : T_pL \to T_{i(p)}M$ мономорфизам за свако $p \in L$. Како је *pull − back* диференцијалне форме дефинисан за произвољно глатко пресликавање можемо посматрати и *Лагранжеве имерзије* као имерзије $i : L \to M$ n-димензионе многострукости L у симплектичку многострукост (M, ω) димензије $2n$ такве да је $i^*\omega = 0$. Полтерович је за дату Лагранжеву имерзију L у [45] описао конструкцију Лагранжеве подмногострукости $\widetilde{L}_\epsilon$ која је произвољно близу $i(L)$ у смислу да је за произвољно $\epsilon > 0$ постоји $\widetilde{L}_\epsilon$ таква да је

$$d(\widetilde{L}, i(L)) < \epsilon.$$

Метрика d на M је индукована Римановом метриком, а

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid (a, b) \in A \times B\}$$

је растојање између два скупа. Следећа лема нам описује поступак у случају симплектичког векторског простора и трансверзалних Лагранжевих потпростора.

Лема 2.3. Нека су L_1, L_2 два Лагранжева потпростора у $\mathbb{R}^{2n}$ таква да је $L_1 \pitchfork L_2$. Тада постоји Лагранжева подмногострукост L таква да је $L \setminus B(0; 3) = (L_1 \cup L_2) \setminus B(0; 3)$.

Доказ. Изаберимо такве симплектичке координате да важи $L_1 = \mathbb{R}^n$ и $L_2 = i\mathbb{R}^n$ и посматрајмо скуп у $\mathbb{R}^{2n}$

$$\widetilde{L} = \{e^t q + ie^{-t} q \mid t \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R}^n, ||q|| = 1\}.$$

Није тешко видети да је $\tilde{L}$ Лагранжева подмногострукост, нека је $\jmath(t, q) = e^t q + ie^{-t} q$ пресликавање из $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ у $\mathbb{R}^{2n}$. Тада је

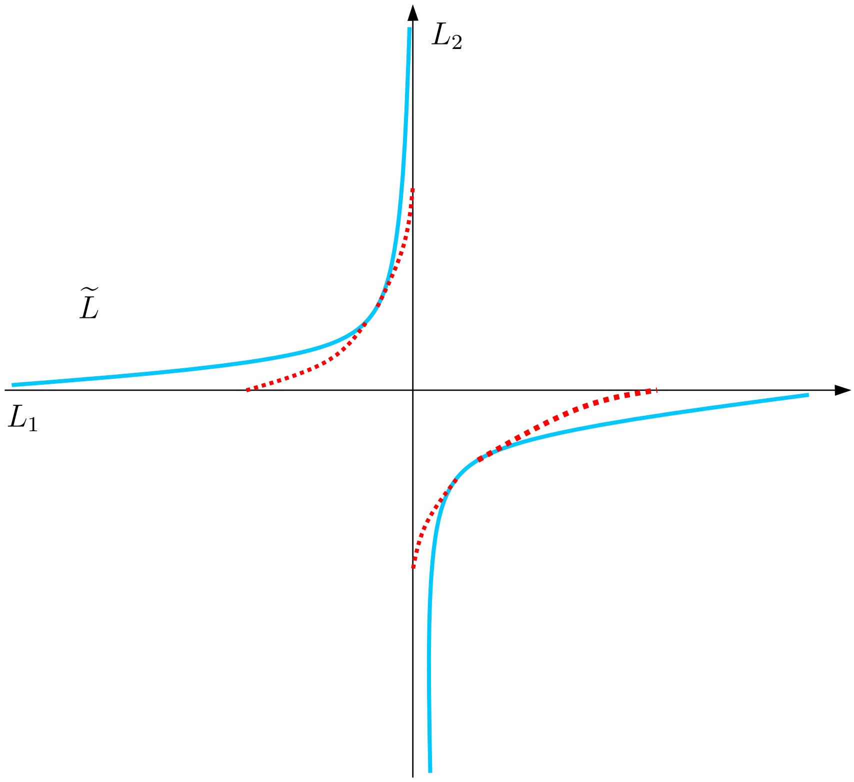
$$\jmath^*\omega = \sum_{i=0}^{n} (-e^{-t} q_i dt + e^{-t} dq_i) \wedge (e^t q_i dt + e^t dq_i)) = \sum_{i=0}^{n} 2q_i dq_i \wedge dt = 0$$

а последња једнакост важи јер је $\sum q_i^2 = 0$. Уколико посматрамо $\mathbb{R}^n \setminus B(0; 1)$ приметимо да део $\widetilde{L}$ можемо видети као график диференцијала функције са $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, аналогно је $\widetilde{L}$ график функције $S' : i\mathbb{R}^n \setminus B(0; 1) \to \mathbb{R}$ и то је $S'(x) = S(-ix)$. Дефинишимо

$$L = \begin{cases} \left(q, \frac{\partial}{\partial q}(\rho(q) S(q)\right), & q \in \mathbb{R}^n \setminus B(0; 1), \\ \quad (q, p), & (q, p) \in \widetilde{L} \cap B(0; 1), \\ \left((\frac{\partial}{\partial p}(\rho(-ip) S(-ip), p\right), & p \in i\mathbb{R}^n \setminus B(0; 1). \end{cases}$$

Где је $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ глатка функција таква да је

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(0,1) \\ 0, & x \in B(0,2)^C. \end{cases} \quad .$$



Слика 1: Лагранжева хирургија у $\mathbb{R}^2$

L је тражена Лагранжева подмногострукост. Због одсецања са ρ важи поклапање ван $B(0;3)$, Лагранжевост на скупу $B(0,3) \setminus B(0;1)$ важи јер је L локално график тачне форме, а на скупу $B(0,1)$ јер је $\widetilde{L}$ Лагранжева.

$\square$

Даље је лако уопштити ово тврђење на симплектичке многострукости помоћу Дарбуових карата, наиме посматрамо Дарбуове карте које не садрже друге (само)пресеке и „исправљају" Лагранжеве многострукости.

Теорема 2.2 (Полтерович 1991 [45])**.**

1.) Нека је L компактна и $i : L \to M$ Лагранжева имерзија чији су самопресеци p_i, $i \in \{1, ..., n\}$ двоструки и трансверзални. Тада за свако $\epsilon > 0$ постоји компактна Лагранжева подмногострукост $\widetilde{L}$ која се ван $\bigcup B(p_i, \epsilon)$ поклапа са $i(L)$ таква да

$$d(i(L), \widetilde{L}) < \epsilon.$$

2.) Нека су L_1 и L_2 две компактне Лагранжеве подмногострукости које се секу трансверзално у $p_i,\ i \in \{1, ..., n\}$, тада за свако $\epsilon > 0$ постоји компактна Лагранжева подмногострукост L која се ван $\bigcup B(p_i, \epsilon)$ поклапа са $L_1 \cup L_2$ таква да је

$$d(L_1 \cup L_2, L) < \epsilon.$$

Лагранжеве подмногострукости су згодне за детектовање *симетрија* Симплектичких многострукости.

Дефиниција 2.6. За дифеоморфизам $\phi : M \to M$ симплектичких многострукости кажемо да је симплектоморфизам ако важи

$$\phi^* \omega = \omega.$$

Главни примери симплектоморфизама су *Хамилтонови* дифеормофизми. Односно ако је X_H Хамилтоново векторско поље придружено функцији $H : M \to \mathbb{R}$ и ϕ_t^H дато са

$$\frac{d}{dt}\phi_t^H = X_H \circ \phi_t^H,\ \ \phi_0^H = Id,$$

тада је ϕ_t^H симплектоморфизам за свако $t \in \mathbb{R}$. Доказ тога се може видети из Картанове формуле

$$\frac{d}{dt}\phi_0^{H*}\omega = \phi_0^{H*}(d(i_{X_H}\omega) + i_{X_H}d\omega) = \phi_0^{H*}(d(dH)) = 0.$$

Добијамо да је $\phi_0^{H*}\omega$ константа форма у $\Omega^2(M)$ а како је $\phi_0^{H*}\omega = \omega$ то је ϕ_t^H симплектоморфизам.

Лема 2.4. Дифеоморфизам ϕ је симплектоморфизам ако и само ако је график од ϕ Лагранжева подмногострукост у $(M \times M, \omega \oplus -\omega)$.

Доказ. График од ϕ је Лагранжева акко је $\Phi^*(\omega \oplus -\omega) = 0$ где је $\Phi : M \to M \times M$ дато са $\Phi(x) = (x, \phi(x))$.

$$\Phi^*\omega \oplus -\omega = 0 \Leftrightarrow id^*\omega - \phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow \phi^*\omega = \omega.$$

□

У контактној геометрији од интереса су подмногострукости L чији је тангентни простор TpL у свакој тачки $p \in L$ Лагранжев потпростор од контактне дистрибуције ξ. Ми дајемо еквивалентну дефиницију која је стандардна у литератури.

Дефиниција 2.7. Нека је (M, ξ) контактна многострукост. подмногострукост L је *Лежандрова* уколико је интегрална подмногострукост дистрибуције ξ највеће димензије.

Заиста, то да је интегрална подмногострукост је еквивалентно условима $\alpha(TL) = 0$ и $d\alpha\big|TL = 0$. Како је $d\alpha$ симплектичка форма на ξ највећа димензија за коју важи $d\alpha\big|TL = 0$ је управо половина димензије векторског простора ξ_p а то баш значи да је TpL Лагранжев подпростор.

Примери 2.3.

1.) Посматрајмо скуп $L = \{(q_1, q_2, ..., q_n, 0, ..., 0) \mid q_i \in \mathbb{R} \;\; \forall i \in \{1, .., n\}\}$, L је Лежандрова у $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$.

2.) Нека је $(M, -d\lambda)$ симплектичка могострукост и L Лагранжева подмногострукост од M. Тада је L Лежандрова у $(M \times \mathbb{R}, \ker(\lambda + \mathrm{d}t))$

2.2 Вајнштајнове многострукости

Инваријанта као што је Флорова хомологија захтева контролу J-холоморфних кривих, а то је сигурно обезбеђено у компактним симплектичким многострукостима. C^0 оцена за J-холоморфне криве се може показати и у случају многострукости која је *конвексна* у бесконачности што су дефинисали Ељашберг и Громов[17] у [20].
За векторско поље X на M кажемо да је комплетно ако генерише ток ϕ_t дефинисан за свако t.

Дефиниција 2.8. Векторско поље X на симплекткичкој многострукости (W, ω) се назива *Лиувивиловим* ако важи

$$\mathcal{L}_X \omega = \omega.$$

Приметимо да из Картанове формуле и затворености форме ω следи

$$\omega = \mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega) + i_X d\omega = d(i_X \omega),$$

односно ако на многострукости постоји Лиувилово векторско поље, она мора бити тачна, а то значи да W не може бити затворена, односно или има границу или није компактна.

[17]Михаил Леонидевич Громов (1943-) - руски математичар, творац теорије холоморфних кривих

Дефиниција 2.9. Симплектичка многострукост (W,ω) је *Вајнштајнова многострукост* уколико постоји комплетно Лиувилово векторско поље X и својствена[18] Морсова[19] субхармонијска функција $\phi : W \to \mathbb{R}$ таква да су $\nabla\phi(p)$ и $X(p)$ колинеарни за свако $p \in W$.

Главни примери Вајнштајнових многострукости су:

Примери 2.4.

1) $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st}, X, \phi)$ где је

$$X = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq n}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \quad \text{и} \quad \phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{1\leq i\leq n}(x_i^2 + y_i^2).$$

2) $(T^*M, \omega = -d\lambda, X, \phi)$ где је X јединствено решење једначине

$$i_X\omega = -\lambda$$

и функција ϕ је дата са

$$\phi(x) = ||x||_g^2$$

у где је норма на дуалном простору индукована произвољном Римановом метриком g. Односно у локалним координатама имамо

$$X = \sum_{1\leq i\leq n} p_i\frac{\partial}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \phi(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \sum_{1\leq i\leq n} p_i^2$$

Стим што функција ϕ не може бити Морсова јер је скуп критичних тачака једнак многострукости M, а критичне тачке Морсове функције су изоловане. Проблем се решава посматрањем функције $\phi'(q,p) = \phi(q,p) + f(q)$ где је $f : M \to \mathbb{R}$ $\;C^2$ мала Морсова функција на M.

3) Ако су $(W_1, \omega_1, X_1, \phi_1)$ и $(W_2, \omega_2, X_2, \phi_2)$ Вајнштајнове многострукости тада је и $(W_1 \times W_2, \omega_1 \oplus \omega_2, X_1 \oplus X_2, \phi_1 + \phi_2)$ Вајнштајнова.

Теорема 2.3. Ако је (W, ω, X, ϕ) Вајнштајнова многострукост и p критична тачка функције ϕ, и ψ_t решење једначине

$$\frac{d}{dt}\psi_t = -\nabla\phi \circ \psi_t, \quad \psi_0 = id.$$

Тада је

[18] Непрекидна функција $f : X \to Y$ је својствена ако за сваки компактан скуп $K \in Y$ важи да је $f^{-1}(K)$ је такође компактан.

[19] Функција $f : M \to \mathbb{R}$ је Морсова уколико је $df(M) \pitchfork \mathcal{O}_M$

1) $W_p^u(\phi) := \{x \in W \mid \lim_{t \to -\infty} \psi_t(x) = p\}$ изотропна подмногострукост,

2) $W_p^s(\phi) := \{x \in W \mid \lim_{t \to +\infty} \psi_t(x) = p\}$ коизотропна подмногострукост.

Доказ. Погледати [18]. $\square$

Одавде следи да индекс критичних тачака Морсове функције ϕ није већи од $\dim W/2$.

3 Лагранжеви и Лежандрови кобордизми

3.1 Лагранжеви кобордизми

Лагранжев и Лежандров кобордизам је дефинисао Арнолд у [9], [10] мотивисан геометријском оптиком односно таласним фронтом. Наиме, у различитим тренуцима трагови фронта тополошки нису исти али јесу граница таласног фронта између два тренутка, тј. кобордантни су. Оригинално, Арнолд је навео за нијансу другачију дефиницију, ми пратимо излагање из [12].

Дефиниција 3.1. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и нека су $L'_1, .., L'_{k_+}$ и $L_1, ..., L_{k_-}$ Лагранжеве подмногострукости. Кажемо да су уређене фамилије Лагранжевски кобордантне ако постоји Лагранжева подмногострукост $V \subset (T^*\mathbb{R} \times M, \omega_{st} \oplus \omega)$ где је $\omega_{st} = dq \wedge dp$ и бројеви $\beta_- < \beta_+$ такви да је

$$V \cap ((\beta_-, \beta_+) \times \mathbb{R})^c \times M = \bigcup_{i=1}^{k_-} (-\infty, \beta_-] \times \{i\} \times L_i \cup \bigcup_{i=1}^{k_+} [\beta_+, +\infty) \times \{i\} \times L'_i.$$

Пишемо $V : (L'_1, ..., L'_{k_+}) \rightsquigarrow (L_1, ..., L_{k_-})$. Уколико је $k_- = k_+ = 1$ за кобордизам кажемо да је *прост.*

Пример 3.1 (Хамилтонова суспензија)**.** Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и нека су L_0 и L_1 Лагранжеве подмногострукости које су изотопне Хамилтоновим током ϕ^t_H тојест $\phi^1_H(L_0) = L_1$. Узмимо Хамилтонијан $H : M \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ такав да је $H(x, t) = 0$ на $t \in [0, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1]$. Тада је

$$V_H = \{(t, s, x) \mid x \in \phi^t_H(L_0), s = -H(x, t), t \in [0, 1]\}$$

Лагранжев кобордизам између L_0 и L_1. Посматрајмо пресликавање $i : [0, 1] \times L_0 \to T^*\mathbb{R} \times M$ дато са

$$i(t, x) = (t, -H(\phi^t_H(x), t), \phi^t_H(x)).$$

Очигледно је i глатко, инјективно и важи $i([0, 1] \times L_0) = V_H$. Како је $T[0, 1] \times L_0 \cong T[0, 1] \times TL_0$ и пошто је L_0 Лагранжева добијамо

$$i^*\omega_{st} \oplus \omega \left(\frac{\partial}{\partial t}, X_p\right) = \omega_{st} \oplus \omega \left(i_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), i_*(X_p)\right) =$$

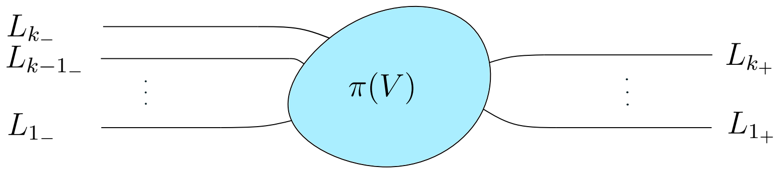
$$= \omega_{st} \oplus \omega \left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H(\phi^t_H(x), t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p} - dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi^t_H(x), t\right)\frac{\partial}{\partial p} + X_H, -dH(\phi^t_{H*}X_p, t)\frac{\partial}{\partial p} + \phi^t_{H*}X_p\right) = 0,$$

а такође важи

$$
\begin{aligned}
i^*\omega_{st} \oplus \omega\,(X_p, Y_p) &= \omega_{st} \oplus \omega\left(-dH(\phi^t_{H*}X_p, t)\frac{\partial}{\partial p} + \phi^t_{H*}X_p, -dH(\phi^t_{H*}Y_p, t)\frac{\partial}{\partial p} + \phi^t_{H*}Y_p\right) \\
&= \omega_{st} \oplus \omega\left(\phi^t_{H*}X_p, \phi^t_{H*}Y_p\right) = \omega\left(\phi^t_{H*}X_p, \phi^t_{H*}Y_p\right) = {\phi^t_H}^*\omega(X_p, Y_p) = 0.
\end{aligned}
$$

Овиме смо доказали да V_H заиста јесте Лагранжева.

Из овог примера видимо да су две Лагранжеве подмногострукости L_0 и L_1 Лагранжевски кобордантне ако су у истој орбити при дејству групе $Ham(M, \omega)$ на простор свих Лагранжевих подмногострукости. Касније ћемо видети пример Лагранжевих подмногострукости које нису глатко изотопне али јесу лагранжевски кобордантне.



Слика 2: Пројекција Лагранжевог кобордизма на $\mathbb{C}$.

Други пример Лагранжевог кобордизма потиче од Лагранжеве хирургије 2.2.

Пример 3.2 (Траг хирургије)**.** Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и L_1 и L_2 две повезане Лагранжеве подмногострукости. Тада хирургија задаје Лагранжев кобордизам

$$V : L_1 \sharp L_2 \rightsquigarrow (L_1, L_2).$$

Размотримо за почетак случај симплектичког векторског простора. Нека је $V = \mathbb{R}^{2n}$ и $L_1 = \mathbb{R}^n$, $L_2 = i\mathbb{R}^n$. Дефинишимо

$$\widetilde{L} := \{(a(t) + ib(t))(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \mid t \in \mathbb{R},\ x_i \in \mathbb{R}, \sum x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1},$$

где су a и b функције дате са $a(t) = t,\ \ t \leq -1,\ a(t) = 0,\ \ t \in [0, 1]\ a(t) = -t,\ \ t \geq 2$ и $b(t) = 0,\ \ t \leq -1,\ b(t) = t,\ \ t \in [1/2, 1]$ и $b(t) = 2,\ \ t \geq 2$. $\widetilde{L}$ је Лагранжева и важи да је

$$\partial(\widetilde{L} \cap [-1, 0] \times [0, 1] \times \mathbb{C}^n) = \{(-1, 0)\} \times L_1 \cup \{(0, 1)\} \times L_2 \cup \{(0, 0)\} \times L_1 \# L_2.$$

На тај начин смо добили кобордизам $V : L_1 \sharp L_2 \rightsquigarrow (L_1, L_2)$ у случају Лагранжевих векторских подпростора који је заправо унија многострукости $\widetilde{L}$ и $\gamma \times L_1 \# L_2$. γ је тако изабрана да V буде глатка многострукост, почиње у координатном почетку и за $x \geq 1$ се поклапа са x осом. Уколико се L_1 и L_2 секу трансверзално у коначно много тачака, можемо изабрати Дарбуове карте у тим тачкама тако да буду дисјунктне. Потом за свако $p \in L_1 \cap L_2$ понављамо поступак за T_pL_1 и T_pL_2 у T_pM. Тиме добијамо тражени кобордизам.

Први и тривијалан пример кобордизма је цилиндар $M \times [0,1]$. Када није реч о Лагранжевим кобордизмима, није тешко замислити пример „не-тривијалног" кобордизма између кружнице и две дисјунктне кружнице (сфера са три исечена диска). Траг хирургије нам даје сличну ствар: уколико имамо две повезане Лагранжеве подмногострукости њихова хирурхија ће сигурно бити повезана за $n \geq 2$. Тада је траг хирургије пример повезаног Лагранжевог кобордизма који на левом крају има две повезане многострукости, а на другом крају једну повезану многострукост. Такође интересантан је пример повезаног Лагранжевог кобордизма који има само по један крај, али је један крај повезан а други неповезан.

Пример 3.3 (Прост кобордизам са једним повезаним и једним неповезаним крајем)**.** Нека су L и L' дисјунктне Лагранжеве подмногострукости од (M, ω) такве да постоји $\phi_H \in Ham(M, \omega)$ такво да је $L \cap \phi_H(L') \neq \emptyset$ и $L \pitchfork \phi_H(L')$. Нека је V_H Лагранжева суспензија за L' и Хамилтонијан $H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ који индукује ϕ_H. Ако посматрамо глатку криву γ у $\mathbb{C}$ такву да је

$$\gamma(t) = t - i\rho(t),$$

где је $\rho(t) = 0,\ \ t < -1$, $\rho(t) = 1,\ \ t > 0$ и $\rho'(t) > 0,\ \ t \in (-1, 0)$. Посматрајмо скуп

$$V := V_H \cup \gamma \times L$$

и приметимо да је V Лагранжев кобордизам $V : (\phi_H(L'), L) \rightsquigarrow L \cup L'$. Уколико природно надовежемо траг хирургије за многострукости $\phi_H(L')$ и L добијамо тражени Лагранжев кобордизам који је прост, на једном крају је повезана Лагранжева подмногострукост $\phi_H(L')\#L$ а на другом крају неповезана $L \cup L'$.

Нас ће занимати одређене класе Лагранжевих подмногострукости и Лагранжеви кобордизми који имају исте тополошке рестрикије. За те потребе уводимо *Масловљев* индекс који је игра кључну улогу у заснивању Флорове теорије.

Нека је $\mathcal{L}(V) := \{L \subset V \mid L$је Лагранжев векторски потпростор$\}$. Познато је да важи

$$\mathcal{L}(V) \cong U(n)/O(n).$$

Доказ се може наћи у [36]. Та идентификација нам говори да сваки Лагранжев потпростор се може видети као слика $Z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, где је $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Матрице X, Y су такве да је $X + iY \in U(n)$ и та репрезентација је јединствена до на дејство групе $O(n)$. Стога, ако имамо петљу $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{L}(V)$ можемо дефинисати

$$\mu(\gamma) := \deg\left(\det{}^2(X(t) + iY(t))\right).$$

Где је deg степен пресликавања $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Квадрат детерминанте узимамо зато што је $\det(O(n)) = \{-1, 1\}$, па нам дефиниција не зависи од избора петље у $U(n)$. А да је $\det^2(X(\cdot) + iY(\cdot)) : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ следи из чињенице да је $\det(U(n)) = \mathbb{S}^1$.

Пресликавање μ индукује пресликавање $\mu : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}$. Уколико је $[u] \in \pi_2(M, L)$, u можемо изабрати тако да буде глатко. Како је u пресликавање диска то постоји унитарна тривијализација Ψ раслојења $u^*TM \cong \mathbb{D} \times \mathbb{C}^n$. Тако добијамо петљу Лагранжевих потрпростора у $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$

$$\Psi(T_{u(\cdot)}L) : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^{2n}.$$

Можемо да дефинишемо $\mu([u]) := \mu(\Psi(T_{u(\cdot)}L))$. Симплектичка форма ω индукује такође пресликавање $\omega : \pi_2(M, L) \to \mathbb{R}$ на следећи начин

$$\omega([u]) := \int_{\mathbb{D}} u^*\omega.$$

Дефиниција 3.2. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и L Лагранжева подмногострукост.

1.) Скуп свих Лагранжевих многострукости у (M, ω) означавамо са $\mathcal{L}^g(M)$, а скуп свих простих Лагранжевих кобордизама са $\mathcal{L}^g_{cob}(\mathbb{C} \times M)$.

2.) Кажемо да је L *слабо монотона* ако је

$$\omega = \rho\mu, \text{ на } \pi_2(M, L),$$

где је $\rho \in \mathbb{R}$. Скуп свих слабо монотоних Лагранжевих подмногострукости у (M, ω) са коефицијентом монотоности ρ означавамо са $\mathcal{L}^{w-m(\rho)}(M)$, а скуп свих слабо монотоних Лагранжевих кобордизама $\mathcal{L}^{w-m(\rho)}_{cob}(\mathbb{C} \times M)$.

3.) Кажемо да је L *монотона* ако је

$$\omega = \rho\mu, \text{ на } \pi_2(M, L),$$

где је $\rho > 0$ и за минималан Масловљев број

$$N_L := \min\{\mu(u) \mid u \in \pi_2(M, L) \text{ и } \omega(u) > 0\}$$

важи $N_L \geq 2$. Скуп свих монотоних Лагранжевих подмногострукости са коефицијентом монотоности ρ означавамо са $\mathcal{L}^{m(\rho)}(M)$, а скуп свих монотоних простих Лагранжевих кобордизама са $\mathcal{L}_{cob}^{m(\rho)}(\mathbb{C} \times M)$.

4.) Нека је M тачна тј. $\omega = d\lambda$. Кажемо да је L тачна Лагранжева ако важи $\lambda\big|_L = df$. Скуп свих тачних Лагранжевих подмногострукости означавамо са $\mathcal{L}^e(M)$ а скуп свих тачних Лагранжевих кобордизама $\mathcal{L}_{cob}^e(\mathbb{C} \times M)$.

5.) Скуп свих Хамилтонових деформација од L означавамо са $\mathcal{L}^L(M)$ а скуп свих Лагранжевих суспензија између многострукости $L_1, L_2 \in \mathcal{L}^L(M)$ са $\mathcal{L}_{cob}^L(\mathbb{C} \times M)$

У дефиницији смо ишли хронолошки од флексибилних ка ригидним тополошким рестрикцијама. Разматрање ових класа Лагранжевих подмногострукости је стандардно у симплектичкој топологији у наредној глави ћемо видети да нам тачност и монотоност помажу у компактности модулских простора потребних за заснивање Флорове хомологије, као и да Флорова хомологија не зависи од избора елемента из $\mathcal{L}^L(M)$. Слаба монотност ће нам обезбедити недегенерисаност метрике коју дефинишемо у глави 6.

Напомена 3.1. У теорији Лагранжевих кобордизама интересантна је хипотеза која тврди да уколико су две тачне Лагранжеве подмногострукости кобордантне тачним Лагранжевим кобордизмом, онда су оне у истој орбити при $Ham(M, \omega)$ дејству тј. постоји $\phi \in Ham(M, \omega)$ тако да важи $\phi(L_0) = L_1$. Ова хипотеза за тачне кобордизме је уско повезана са чувеном хипотезом да је свака тачна затворена Лагранжева подмногострукост $L \subset T^*M$ Хамилтонова деформација нултог сечења.

3.2 Лежандрови кобордизми

Дефиниција 3.3. Нека су L_0 и L_1 Лежандрове подмногострукости од $(M, \ker \alpha)$. $V \subset M \times \mathbb{R}$ је *Лежандров* кобордизам између L_0 и L_1 ако је V Лагранжева подмногострукост од $(M \times \mathbb{R}, d(e^t \alpha))$ и важи

$$V \cap M \times (-R, R)^C = L_0 \times (-\infty, -R] \cup L_1 \times [R, +\infty),$$

за неко $R > 0$.

Пример 3.4. Нека је $\psi_t : M \to M$ глатка фамилија контактоморфизама таква да је $\psi_t = id$ за $t \leq \epsilon$ и $\psi_t = \psi_1$ за ≥ 1 нека је L Лежандрова у M. Тада је

$$V := \{(x,t) \mid x \in \psi_t(L)\}$$

Лежандров кобордизам. Уочимо пресликавање $\jmath : L \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$

$$\jmath(x,t) = (\psi_t(x), t).$$

Лако се добија да је $\jmath^*\omega(X_p, \partial_t) = 0$ за сваки вектор $X_p \in T_pL$. Такође, пошто је L Лежандрова и контактоморфизми сликају Лежандрове подмногострукости у Лежандрове важи

$$\jmath^*\omega(X_p, Y_p) = 0, \ \ \forall X_p, Y_p \in T_pL.$$

Одатле можемо да закључимо да је $\jmath^*\omega = 0$ а то је еквивалентно услову да је $V = \jmath(L \times \mathbb{R})$ Лагранжева.

4 Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке

Посматрајмо симплектичку многострукост (M, ω) и две Лагранжеве подмногострукости L и L_0. Дефинисаћемо инваријанту ове тројке, која је у случају $L = L_0$ изоморфна са $\mathrm{H}_*(L; \mathbb{Z}_2)$ уз одређене тополошке рестрикције на M и L. Идеја је да имитирамо Морсову теорију за „Морсову"функцију на бесконачно димензионом простору. Проблем је што су индекси критичних тачака бесконачни, те њихова разлика није добро дефинисана, али испоствља се да градуација може добро да се дефинише помоћу релативног Масловљевог индекса. Уколико претпоставимо да је $\omega = d\lambda$ можемо да дефинишемо функционал дејства на простору путева који почињу на L и завршавају на L_0, придружен глаткој функцији $H \in C^\infty(M \times [0,1])$:

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = \int_{[0,1]} \gamma^* \lambda - \int_0^1 H(\gamma(t), t)dt$$

Критичне тачке функционала $\mathcal{A}_H$ су Хамилтонови путеви

$$x' = X_{H_t},\ x(0) \in L,\ x(1) \in L_0.$$

Уколико посматрамо градијент функционала $\mathcal{A}_H$ у односу на метрику:

$$\langle \xi, \eta \rangle_{L_2} = \int_0^1 \omega(\xi(t), J\eta(t))dt$$

добијамо:

$$\nabla \mathcal{A}_H(x)(t) = J\left(x'(t) - X_H\left(x(t)\right)\right).$$

па се решења негативне градијентне једначине могу видети као путеви на простору путева односно пресликавања $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ која задовољавају:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)\right) = 0$$

У овом случају векторско поље не дефинише ток на простору путева јер на бесконачно димензионим просторима не важи теорема о продужењу решења. Сада можемо дефинисати ланчасти комплекс за две Лагранжеве подмногострукости као $\mathbb{Z}_2$ векторски простор генерисан Хамилтоновим путевима са почетком на L и крајем на L_0, градуисан Масловљевим индексом:

$$CF_k(L, L_0) = \bigoplus_{x \in Crit(\mathcal{A}_H),\, \mu_L(x) = k} \mathbb{Z}_2 < x >$$

Ако су x, y две критичне тачке од $\mathcal{A}_H$ дефинишемо:

$$\mathcal{M}(x,y) = \begin{cases} u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)\right) = 0, \\ u(s,0) \in L,\, u(s,1) \in L_0, \\ u(-\infty,t) = x(t),\, u(+\infty,t) = y(t) \\ E(u) = \iint\limits_{\mathbb{R}\times[0,1]} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 dsdt < \infty \end{cases}$$

модулски простор $\mathcal{M}(x,y)$ је многострукост димензије $\mu_L(x) - \mu_L(y)$, како имамо $\mathbb{R}$ дејство дато са $(s,u) \mapsto u(\cdot + s, \cdot)$ добијамо:

$$\widehat{\mathcal{M}}(x,y) := \mathcal{M}(x,y)/\mathbb{R}$$

У нама релевантним случајевима када је $\mu_L(y) - \mu_L(x) = 1$ или $\mu_L(y) - \mu_L(x) = 2$ из Громовљеве компактности добија се да је модулски простор компактна многострукост са границом. Граница је простор изломљених пертурбованих холоморфних трака:

$$\bigcup_{z \in Crit(\mathcal{A}_H)} \mathcal{M}(x,z) \times \mathcal{M}(z,y)$$

односно у случају $\mu_L(y) - \mu_L(x) = 1$ $\widehat{\mathcal{M}}(x,y)$ је коначан скуп тачака па смо у позицији да дефинишемо гранични оператор:

$$\partial : CF_k(L,L_0) \to CF_{k-1}(L,L_0),$$

$$\partial(x) = \sum_{\substack{y \in Crit(\mathcal{A}_H), \\ \mu_L(y) = k-1}} n(x,y) y \tag{2}$$

где је $n(x,y) = \sharp_2 \widehat{\mathcal{M}}(x,y)$ број елемената коначног скупа $\widehat{\mathcal{M}}(x,y)$ по модулу 2. Пошто је

$$\partial(\partial x) = \sum_{\mu_L(y)=k-2} \sum_{\mu_L(z)=k-1} n(x,z) n(z,y) y = \sum_{\mu_L(y)=k-2} \sharp_2 \partial \widehat{\mathcal{M}}(x,y) y = 0$$

где последња једнакост важи зато што је граница једнодимензионе многострукости паран број тачака. Добијамо да је добро дефинисана хомологија ланчастог комплекса $(CF_*(L,L_0), \partial)$:

$$HF_k(L,L_0) = \frac{\ker(\partial : CF_k \to CF_{k-1})}{\operatorname{im}(\partial : CF_{k+1} \to CF_k)}.$$

4.1 Монотоне Лагранжеве подмногострукости

Нека је (M, ω) затворена симплектичка (или Вајнштајнова), L затворена Лагранжева подмногострукост и $H \in C^\infty([0,1] \times M)$. За L кажемо да је монотона ако је

$$\omega(u) = \rho\mu(u), \quad \forall u \in \pi_2(M, L).$$

где је $\rho > 0$, μ Масловљева класа и

$$N_L := \min \{\mu(A) \mid A \in \pi_2(M, L), \omega(A) \geq 0\},$$

минималан Масловљев број, и захтевамо $N_L \geq 2$. Посматрајмо простор

$$\mathcal{P}_0 := \{x \in C^\infty([0,1]; M) \mid [x] = 0 \in \pi_1(M, L)\}.$$

Како важи $\pi_2(M, L) \cong \pi_1(\mathcal{P}_0)$, ми овде имамо ситуацију да функционал дејства заправо није примитивна функција за диференцијалну 1-форму $\alpha_H : T\mathcal{P}_0 \to \mathbb{R}$

$$\alpha_H(\xi) = \int_0^1 \omega(\xi(t), \pi(\xi)'(t))dt$$

где је $\pi : T\mathcal{P}_0 \to \mathcal{P}_0$ природна пројекција. Приметимо да је ово аналог Наиме испоставља се да та форма није тачна за разлику када важи $\pi_2(M, L) = 0$, тако да у овој ситуацији не радимо Морсову теорију на бесконачно димензионој Банаховој многострукости, већ пратимо Новиковљеве идеје уопштења Морсове теорије на затворене 1-форме.

Напомена 4.1. Простор $\mathcal{P}_0$ није Банахова многострукост, једна опција је посматрати затворење тог простора у простору Собољева

$$W^{k,p}([0,1]; M).$$

Флорову хомологију за монотоне Лагранжеве подмногострукости можемо сматрати, на хеуристичком нивоу, Новиковљевом хомологијом простора путева $\mathcal{P}_0$ и форме α_H. Нека је $x \in \mathcal{P}_0$, и посматрајмо $\widehat{x} : D_+ \to M$ пресликавање из горњег полудиска у M такво да важи $\widehat{x}(e^{i\pi t}) = x(t)$, $t \in [0,1]$ и $x([-1,1] \times \{0\}) \subset L$. Тада је са

$$\mathcal{A}_H([x, \hat{x}]) = \int_0^1 H(x(t), t)dt - \int_D \hat{x}^*\omega,$$

дефинисана функција на простору

$$\widehat{\mathcal{P}_0} = \left\{(x,\widehat{x}) \mid x \in \mathcal{P}_0,\ \widehat{x}: D_+ \to M,\ \widehat{x}(e^{i\pi t}) = x(t),\ t \in [0,1],\ \widehat{x}([-1,1]\times\{0\}) \subset L\right\}/\sim,$$

где је $\widehat{x} \sim \widehat{x}'$ ако важи $\widehat{x}(e^{i\pi t}) = \widehat{x}'(e^{i\pi t}),\ t \in [0,1]$ и $[\widehat{x}\sharp(-\widehat{x})'] = 0 \in \pi_2(M,L)$. Лепљење се обавља дуж горњег полукруга. Ради једноставности уведимо ознаку $\widetilde{x} = [x,\widehat{x}]$. Критичне тачке ове функције ће бити класе $\widetilde{x}$ такве да је x Хамилтонов пут који почиње и завршава на L.

Да бисмо могли да дефинишемо гранични оператор уведимо Новиковљев прстен Лоранових полинома Λ

$$\Lambda = \mathbb{Z}_2[t,t^{-1}], \quad \deg t = -N_L,$$

а ланчасти комплекс ће бити слободан модул над Λ генерисан са критичним тачкама функције $\mathcal{A}_H$

$$CF_*(L;H,J) = \bigoplus_{\widetilde{x}\in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_H)} \Lambda\langle\widetilde{x}\rangle.$$

Модулски простор у овом случају дефинишемо мало другачије

$$\mathcal{M}(\widetilde{x},\widetilde{y};A;H,J) = \begin{cases} u: \mathbb{R}\times[0,1] \to M, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)\right) = 0, \\ \forall s\ \ u(s,0),\ u(s,1) \in L\ , \\ u(-\infty,t) = x(t),\ u(+\infty,t) = y(t) \\ [\widehat{x}\sharp u\sharp - \widehat{y}] = A \in \pi_2(M,L). \end{cases}$$

Такође имамо $\mathbb{R}$ дејство, тако да је $\widehat{\mathcal{M}}(\widetilde{x},\widetilde{y};A;H,J) = \mathcal{M}(\widetilde{x},\widetilde{y};A;H,J)/\mathbb{R}$.

Теорема 4.1 (O 1993)**.** Постоји скуп $\mathcal{J}^{reg}$ скоро-комплексних структура који је друге категорије у $\mathcal{J}$ за које је

$$\mathcal{M}(\widetilde{x},\widetilde{y};A;H,J)$$

многострукост димензије $\mu_{rel}(x) - \mu_{rel}(y) - \mu(A)$

Доказ. Доказ погледати у [38], [21], [23], [37]. □

Одатле добијамо да је $\widehat{\mathcal{M}}(\widetilde{x},\widetilde{y};A;H,J)$ димензије $\mu_{rel}(x) - \mu_{rel}(y) - \mu(A) - 1$ и испоставља се да је за $\mu_{rel}(x) - \mu_{rel}(y) = \mu(A) + 1$ компактна многострукост димензије 0, односно коначан скуп тачака па можемо дефинисати

$$d\widetilde{x} = \sum_{\substack{\widetilde{y}\in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_H),\ A\in\pi_2(M,L),\\ \mu_{rel}(x)-\mu_{rel}(y)=\mu(A)+1}} \sharp_2 \widehat{\mathcal{M}}(\widetilde{x},\widetilde{y};A;H,J)\,\widetilde{y}\,t^{\mu(A)/N_L}.$$

Услов да је $N_L \geq 2$ нам омогућава да избегнемо појаву мехурова у компактификацији модулског простора за случај $\mu_{rel}(x)-\mu_{rel}(y)=\mu(A)+2$. Одсуство мехурова је битно за доказ да је d заиста диференцијал, односно да важи $d^2=0$.

Дефиниција 4.1. Нека је $H \in C^\infty([0,1]\times M)$ и J регуларна скоро-комплексна структура. Флорова Хомологија Лагранжеве подмногострукости је дата са

$$HF_*(L;H,J) = \frac{\mathrm{Ker}(d : CF_*(L;H,J)\to CF_{*-1}(L;H,J))}{\mathrm{Im}(d : CF_{*+1}(L;H,J)\to CF_*(L;H,J))}.$$

4.2 Инваријантност за некомпактне Хамилтонове деформације

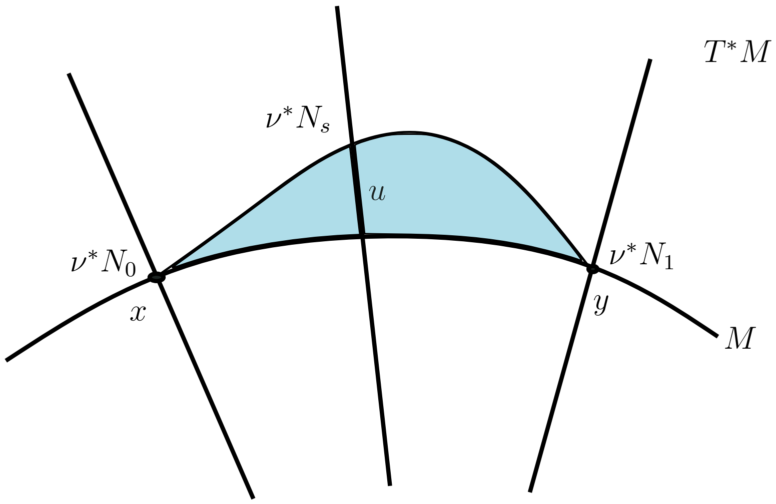
Нека су L и L_0 Лагранжеве подмногострукости које се секу трансверзално. Нека је $L_1=\phi_H(L_0)$ Хамилтонова деформација L_0 таква да су L и L_1 такође у трансверзалном положају. Ово поглавље се бави конструкцијом пресликавања

$$\Phi_L : HF_*(L,L_0)\to HF_*(L,L_1)$$

и скицом доказа да је Φ_L изоморфизам. У [21] Флор је доказао у компактном случају. Овде илуструјемо конструкцију из [40] користећи Лагранжев кобордизам помоћу којег се превазилази проблем Хамилтонијана чији носач није нужно компактан.
Пресликавање Φ_L ћемо дефинисати бројањем пертурбованих J-холоморфних трака са „покретним"граничним условом (слика 3).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + J_t\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_{\rho(s)}}\right) = 0 \\ u(s,0)\in L, \quad u(s,1)\in L_{\rho(s)}, \\ u(-\infty,\cdot)\in Crit(\mathcal{A}_{H_{\rho(0)}}), \quad u(+\infty,\cdot)\in Crit(\mathcal{A}_{H_{\rho(1)}}) \end{cases} \tag{3}$$

где је $\rho:\mathbb{R}\to[0,1]$ монотона, глатка функција одсецања таква да је $\rho(0)=0$ и $\rho(1)=1$. Функција ρ није произвољна, за детаље погледати [29]. Да бисмо могли да користимо модификације Громовљеве теореме компактности за простор решења једначине (3) важно је да слике остају у компактном скупу. Заиста, уколико бисмо имали низ решења за који не постоји компакт који их садржи, тај низ не може да има конвергенан подниз у C^0 топологији, тим пре би била нарушена C^1 конвергенција, видети слику (4.2). Наредна теорема даје потребне C^0 оцене за Хамилтонијане са компактним носачем.



Слика 3: Покретни гранични услов у T^*M.

Теорема 4.2 (C^0 оцена [40])**.** Нека је (M, ω) симплектичка многострукост која је Вајнштајнова у бесконачности. Ако важи

1.) Постоји компактан скуп K_J такав да фамилија скоро комплексних структура J_t не зависи од t ван K_J, тј. $J_t = J, \ \forall t \in [0, 1]$.

2.) $\mathcal{L}_X J\big|_{M \setminus K_J} = 0$, где је X Лиувилово векторско поље.

3.) $H : M \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ има компактан носач.

4.) $L \cap L_0$ је компактан и L_0 је конична[20] у бесконачности.

Тада постоји компакт $K \subset M$ такав да је

$$\mathrm{Im} u \subset K$$

за сва решења једначине (3).

У доказу теореме користи се јаки принцип максимума из теорије парцијалних једначина:

[20]Нека је W Вајнштајнова многострукост. $L \subset W$ је конична ако је $L \cap \phi^{-1}(R)$ Лежандрова у $\phi^{-1}(R)$ за свако $R \geq R_0$, где је R_0 веће од свих критичних вредности.

Тврђење 4.1 (Јаки принцип максимума)**.** Нека је $u : \Omega \to \mathbb{R}$ неконстантна субхармонијска функција. Уколико је $\partial\Omega$ многострукост, и ако u достиже максимум у $x_0 \in \partial\Omega$ тада је:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) > 0.$$

где је $\mathbf{n}$ спољашњи вектор нормале у тачки x_0.

Доказ. Погледати [25]. □

Доказ теореме 4.2. Уочимо скуп

$$K = \text{supp}H \cup \text{supp}J_t$$

где је $\text{supp}J_t$ затворење скупа на коме је $J_t \neq J$ за неко $t \in [0,1]$.
Посматрајмо функцију

$$\phi \circ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

Уколико је $\text{Im}(u) \cap K^C \neq \emptyset$ онда је $\phi \circ u$ субхармонијска ван K, у смислу да посматрамо рестрикцију од $\phi \circ u\big|_{u^{-1}(K^C)}$. Из класичне хармонијске анализе закључујемо да не достиже максимум на унутрашњости ван тог компакта.

Претпоставимо да функција достиже максимум на граници ван K у $(s_0, 1)$ и да важи

$$\phi(u(s_0, 1)) > \sup_{L \cap L_0} \phi.$$

Из јаког принципа максимума 4.1 имамо да је

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \circ u)(s_0, 1) > 0$$

јер је $\frac{\partial}{\partial t}$ спољна нормала дела границе $\{t = 1\}$ траке $\mathbb{R} \times [0,1]$ и $\phi \circ u$ није константна, јер је $R_0 = \phi(u(s_0, 1)) > \max\{\phi(u(-\infty, t), \phi(u(+\infty, t))\}$. Пошто је u решење једначине (3) имамо да важи

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s_0, 1) = J\frac{\partial u}{\partial s}(s_0, 1).$$

Имајући у виду гранични услов $u(s, 1) \in L_0$ ван $\text{supp}H$, важи

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s_0, 1) \in T_{u(s_0,1)}L_0.$$

Добијамо да је

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(u(s_0,1))) = d\phi\left(\frac{\partial u}{\partial t}(s_0,1)\right) = d\phi\left(J\frac{\partial u}{\partial s}(s_0,1)\right). \tag{4}$$

Како је $(s_0, 1)$ тачка максимума важи

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\phi(u(s_0,1))\right) = d\phi\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s_0,1)\right) = 0,$$

односно добијамо

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s_0,1) \in T\phi^{-1}(R_0).$$

Како је L конична то важи да је $L \cap \phi^{-1}(R_0)$ Лежандрова у $\phi^{-1}(R_0)$
Избор скоро комплексне структуре нам је такав да се рестрикује на скоро комплексну структуру контаткне дистрибуције ξ контактне многострукости $\phi^{-1}(R_0)$. Односно важи да је

$$J(TL \cap T\phi^{-1}(R_0)) \subset T\phi^{-1}(R_0)$$

а то је онда и $J\frac{\partial u}{\partial s}(s_0, 1) \in T\phi^{-1}(R_0)$, па је из (4) $\frac{\partial}{\partial t}(\phi \circ u)(s_0, 1) = 0$ што је контрадикција.

□

Касније преласком на шири простор $M \times \mathbb{C}$ моћи ћемо да применимо претходну теорему и на случај са некомпактним носачем.

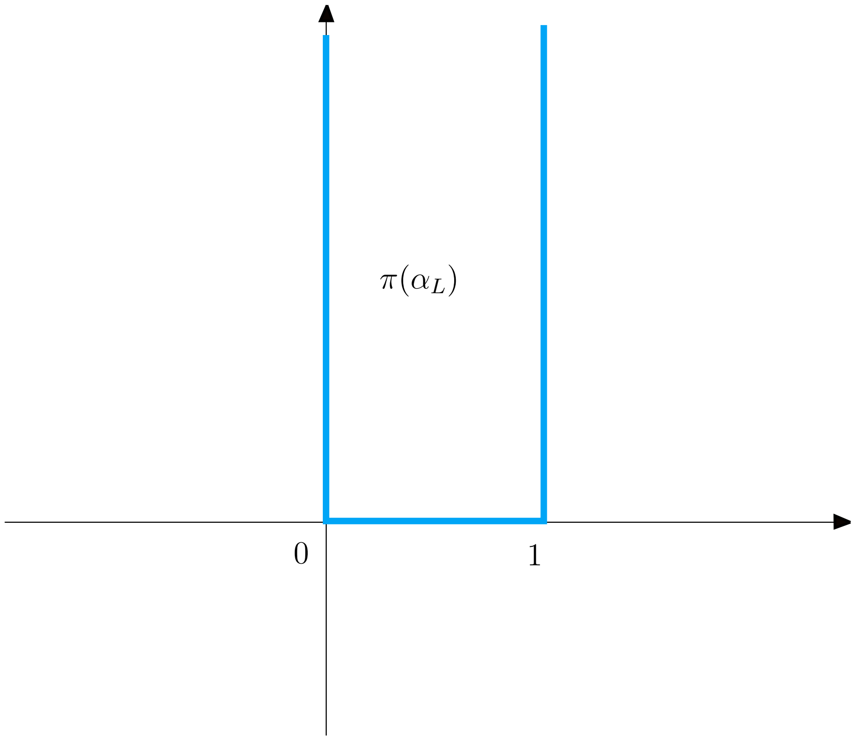
Желимо да конструишемо хомоморфизам

$$\Phi_{\beta_H} : HF_*(L, L_0) \to HF_*(L, L_1),$$

користећи Хамилтонову суспензију β_H дефинисану у поглављу 3.1. Односно посматраћемо пресликавања $\widetilde{u} : \mathbb{R} \times [0,1] \in M \times \mathbb{C}$ таква да је

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial s} + \widetilde{J}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = 0, \\ \widetilde{u}(s,0) \in \alpha_L \quad , \widetilde{u}(s,1) \in \beta_H, \\ \widetilde{u}(-\infty) = \widetilde{x} = (x,0,0), \quad \widetilde{u}(+\infty) = \widetilde{y} = (y,0,0) \end{cases}$$

где је $\widetilde{J} = J \times i$ и $\alpha_L = L \times (\{0\} \times [0, +\infty) \cup [0,1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0, +\infty))$. Како α_L није глатка мораћемо да посматрамо њене глатке апроксимације, и да наше пресликавање дефинишемо као директан лимес по апроксимацијама. Овде те детаље изостављамо и дајемо скицу конструкције Φ_{β_H}. Дефинишимо апроксимације $\alpha_\epsilon = L \times \upsilon_\epsilon$ где је υ_ϵ као на слици 5.



Слика 4: Пројекција сингуларне многострукости α_L.

Посматрајмо модулски простор

$$\mathcal{M}_\epsilon(x,y;J)=\begin{cases}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial s}+\widetilde{J}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}=0,\\ \widetilde{u}(s,0)\in\alpha_\epsilon \quad ,\widetilde{u}(s,1)\in\beta_H,\\ \widetilde{u}(-\infty)=\widetilde{x}=(x,0,0),\quad \widetilde{u}(+\infty)=\widetilde{y}=(y,0,0)\end{cases}$$

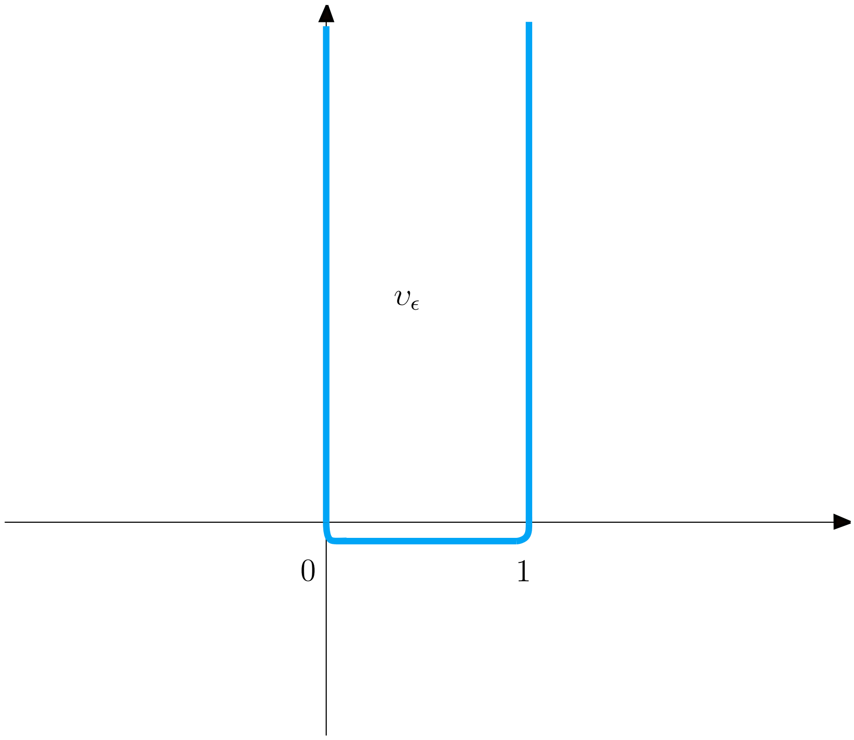
који је многострукост за генеричко J и такође поседује $\mathbb{R}$ дејство. Означимо

$$\widehat{\mathcal{M}}_\epsilon(x,y;J):=\mathcal{M}_\epsilon(x,y;J)/\mathbb{R},$$

када је $\dim\widehat{\mathcal{M}}_\epsilon(x,y;J)=0$ то је коначан скуп тачака и можемо дефинисати

$$\Phi_{\beta_H,\epsilon}x=\sum_{y\in L\cap L_1}\sharp_2\widehat{\mathcal{M}}_\epsilon(x,y;J)\,y.$$

За погодан избор Хамилтонијана H испоставља се да је β_H трансверзално и на α_ϵ и на регуларни ниво од $\widetilde{\phi}=\phi+\frac{1}{2}(s^2+t^2)$ у бесконачности. Такве Хамилтонијане H називамо допустивим. Сада смо у позицији да применимо теорему 4.2 на Лагранжеве подмногострукости α_ϵ и β_H која нам даје компактност модулских простора



Слика 5: Пројекција апроксимације α_ϵ

потребних да покажемо да је

$$\Phi_{\beta_{H,\epsilon}} \circ d_0 = d_1 \circ \Phi_{\beta_{H,\epsilon}},$$

и да изоморфизам не зависи од избора Хамилтонијана.

Теорема 4.3. [40] Нека је $d_0 : CF_*(L, L_0) \to CF_{*-1}(L, L_0)$ и $d_1 : CF_*(L, L_1) \to CF_{*-1}(L, L_1)$ и нека је H допустив. Тада пресликавање $\Phi_{\beta_{H,\epsilon}} : CF_*(L, L_0) \to CF_*(L, L_1)$ дефинише хомоморфизам када $\epsilon \to 0$

$$\Phi_{\beta_H} : HF_*(L, L_0) \to HF_*(L, L_1),$$

и више, то је изоморфизам који не зависи од избора апроксимација α_ϵ и допустивог Хамилтонијана H.

Доказ. Скица доказа је изложена у [40] за детаље погледати [29], [5]. □

4.3 Инваријантност за монотоне Лагранжеве кобордизме

У овом поглављу наводимо резултат до кога су дошли Биран и Корнеа у [12]. Нека су L, L_1, L_2 повезане и монотоне Лагранжеве подмногострукти са истим коефицијентом монотоности ρ, притом L_1 и L_2 су компактне.

Теорема 4.4. [12] Нека су L_1, L_2 и L монотоне Лагранжеве подмногострукости од (M, ω) и нека је $V : L_2 \to L_1$ Лагранжев кобордизам који је монотона Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C} \times M$ са коефицијентом монотоности ρ који се поклапа са коефицијентом монотоности од L_1, L_2 и L. Тада постоји изоморфизам

$$\Phi_V : HF_*(L, L_1) \to HF_*(L, L_2).$$

Аутори у том раду конструишу Флорову хомологију за Лагранжеве кобордизме. За ту конструкцију је потребан пажљив одабир скоро комплексне структуре и Хамилтонијана који имају носач на унији компактног скупа и довољно малих трака око крајева пројекције кобордизма. На тим тракама се притом захтева да Хамилтонијан буде линеаран како би Хамилтонове деформације сликале Лагранжев кобордизам у Лагранжев кобордизам са дисјунктним крајевима. Флорову хомологију за Лагранжеве кобордизме су касније Корнеа и Шелукин користили у доказу тврђења 6.1 које омогућује да се покаже недегенерисаност метрике. Више о томе у глави 6.

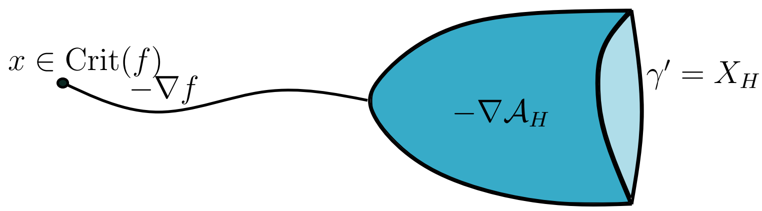
5 Квантна хомологија и спектралне инваријанте

5.1 Квантна хомологија за монотоне Лагранжеве подмногострукости

Уколико је симплектичка многострукост асферична, односно уколико важи да је $\omega\big|_{\pi_2(M)} = 0$, доста информација о Флоровој хомологији за периодичне орбите је садржано у Морсовој хомологији, што је практичније за рачун јер је гранични оператор дефинисан обичном диференцијалном једначином, док је у Флоровој теорији дефинисан помоћу пертурбоване Коши-Риманове парцијалне диференцијалне једначине. Да би Флорова теорија била дефинисана за монотоне симплектичке многострукости потребно је посматрати комплекс који је слободни модул над Новиковљевим прстеном у чијој конструкцији учествују не тривијални хомолошки елементи који припадају слици при Хуревићевом хомоморфизму $h_* : \pi_2(M) \to H_2(M)$. Квантна хомологија за затворену симплектичку многострукост (M, ω) се дефинише као

$$QH_*(M) := HM_*(M) \otimes \Lambda$$

где је $\Lambda = \mathbb{Z}_2[t, t^{-1}]$ градуисани прстен Лоранових полинома, и $\deg t = -2C_M$ а $C_M = \min\{c_1(A) > 0 \mid A \in \pi_2(M)\}$ је минималан Чернов број. У раду [44] су Пјуникин, Саламон и Шварц конструисали изоморфизам квантне (ко)хомологије и Флорове (ко)хомологије бројећи објекте комбинованог типа (слика 6). За детаље конструкције Квантне хомологије амбијентне многострукости и поменутог изоморфизма погледати [37], [5] и [44].



Слика 6: Полу-градијентне трајекторије.

У раду [15] су Биран и Корнеа дефинисали квантну хомологију за монотоне Лагранжеве подмногострукости, која је уопштење Квантне хомологије за монотону симплектичку многострукост (M, ω) у смислу да важи

$$QH_*(\triangle) \cong QH_*(M)$$

где је $\triangle = \{(p,p) \mid p \in M\}$ дијагонала у $(M \times M, \omega \oplus -\omega)$ која је Лагранжева. Ми ћемо овде пратити излагање из прегледног чланка [14].

Нека је $L \subset (M, \omega)$ монотона Лагранжева подмногострукост и нека је $f : L \to \mathbb{R}$ Морсова функција, g Риманова метрика на L а $J \in \mathcal{J}$ скоро-комплексна структура на M. Дефинишемо комплекс ове тројке

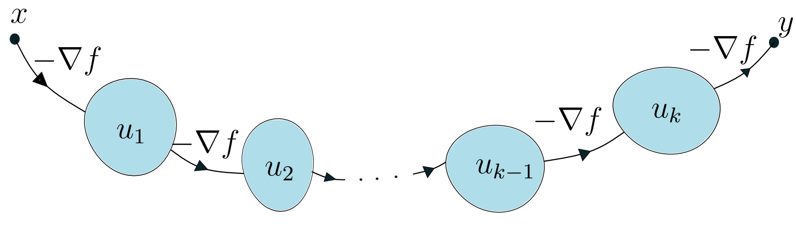
$$QC(f, g, J) = \mathbb{Z}_2\langle \mathrm{Crit}(f) \rangle \otimes \Lambda \tag{5}$$

где је $\Lambda = \mathbb{Z}_2[t^{-1}, t]$ и $\deg t = -N_L$. $N_L = \min\{\mu(A) > 0 \mid A \in \pi_2(M, L)\}$ је минималан Масловљев број. Означимо са $H_2^D(M, L)$ слику релативног Хуревићевог хомоморфизма $h_* : \pi_2(M, L) \to H_2(M, L)$. Фиксирајмо $x, y \in \mathrm{Crit}(f)$ и $A \neq 0 \in H_2^D(M, L)$ и посматрајмо скуп свих различитих k-торки J-холоморфних дискова који су спојени негативним градијентним током ϕ_t функције f, а тачка са границе крајњих дискова припада респективно нестабилној многострукости од x односно стабилној од y . Прецизније посматрајмо модулски простор "бисерних"трајекторија (слика 7).

$$\mathcal{M}_{prl}(x, y; A; f, g, J) = \begin{cases} u_i : (D, \partial D) \to (M, L),\ du_i \neq 0,\ J \circ du_i = du_i \circ i \ \ 1 \leq i \leq k,\ k \in \mathbb{N}, \\ u_1(-1) \in W_x^u(f), u_k(1) \in W_y^s(f), \\ (\forall 1 \leq i \leq k-1)\ (\exists 0 < t_i < +\infty)\ \ \phi_{t_i}(u_i(1)) = u_{i+1}(-1), \\ [u_1] + \cdots + [u_k] = A. \end{cases}$$

У случају када је $A = 0$ дефинишемо $\mathcal{M}_{prl}(x, y; 0; f, g, J)$ као скуп негативних градијентних трајекторија које спајају x и y, јер тада нема не константних J-холоморфних дискова. Кажемо да су две k-торке $(u_1, ..., u_k)$ и $(u'_1, ..., u'_k)$ еквивалентне ако постоје $\sigma_i \in \mathrm{Aut}(D)$ такви да је $\sigma_i(-1) = -1$, $\sigma_i(1) = 1$ и $u_i = u'_i \circ \sigma_i$ $\forall 1 \leq i \leq k$, јасно је да је поменута релација релација еквиваленције и дефинишимо

$$\widehat{\mathcal{M}}_{prl}(x, y; A; f, g, J) = \mathcal{M}_{prl}(x, y; A; f, g, J)/\sim .$$



Слика 7: Елемент из $\mathcal{M}_{prl}(x, y; A; f, g, J)$

Када је $A = 0$ имамо стандардно дефинисано дејство транслацијама и када посечемо добијамо простор непараметризованих градијентних трајекторија. У [15] је доказана трансверзалност и компактност модулских простора $\widehat{\mathcal{M}}_{prl}(x, y; A; f, g, J)$ и да важи

$$\delta_{prl}(x, y; A) := \dim_{virt} \widehat{\mathcal{M}}_{prl}(x, y; A; f, g, J) = m_f(x) - m_f(y) + \mu(A) - 1,$$

где је $m_f : \mathrm{Crit}(f) \to \mathbb{Z}^+$ Морсов индекс критичне тачке, а μ Масловљева класа. Уколико је пар (f, g) Морс-Смејлов и $\delta_{prl}(x, y; A) = 0$ важи да је за генеричко J $\mathcal{M}_{prl}(x, y; A; f, g, J)$ коначан скуп тачака, те је добро дефинисан број елемента по модулу 2 и можемо дефинисати

$$d(x) = \sum_{y \in \mathrm{Crit}(f), A \in H_2^D(M,L)} \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_{prl}(x, y; A; f, g, J)\, y t^{\mu(A)/N_L}. \tag{6}$$

Приметимо да у случају $H_2^D(M, L) = 0$ имамо да је Квантни комплекс заправо Морсов комплекс, а диференцијал (6) је Морсов диференцијал па заправо добијамо Морсову хомологију. У том случају је познато да је Флорова Хомологија за Лагранжеве пресеке изоморфна Морсовој хомологији од L [21]. У раду [30] су Катић и Милинковић конструисали изоморфизам типа PSS у случају када је $M = T^*L$

$$PSS : HM_*(L) \to HF_*(L)$$

који је касније Алберс [8] уопштио. Следећи резултат је аналог рада [44] са Лагранжеву Флорову хомологију

Теорема 5.1 (Биран - Корнеа 2007, Заполски 2015)**.**

1.) Пресликавање d дефинисано са (6) је диференцијал, односно важи $d^2 = 0$.

2.) Хомологија ланчастог комплекса $(QC(f, g, J), d)$, у ознаци $QH(L)$ не зависи од избора генеричког пара $\mathcal{D} = (f, g, J)$.

3.) Постоји изоморфизам типа PSS,

$$PSS_*^{H,J} : QH_*(L) \to HF_*(L; H; J). \tag{7}$$

Доказ. Скицу доказа можете погледати у [14] а за више детаља погледати [15], [48]. □

До истих резултата користећи другачије технике је касније дошао и Заполски у [48], а убрзо након тога је заједно са Леклерком у [32] уопштио дефиницију спектралних инваријанти за Лагранжеве подмногострукости и на монотон случај користећи изоморфизам (7). Тој теми посвећујемо секцију (5.3).

5.2 Квантни производ

У овој секцији ћемо да дефинишемо аналог кап производа из Морсове хомологије у Квантној хомологији за Лагранжеву подмногострукост L димензије n. Нека су $f_1, f_2, f_3 : L \to \mathbb{R}$ Морсове функције, g Риманова метрика на L и J скоро-комплексна структура, посматрајмо скуп

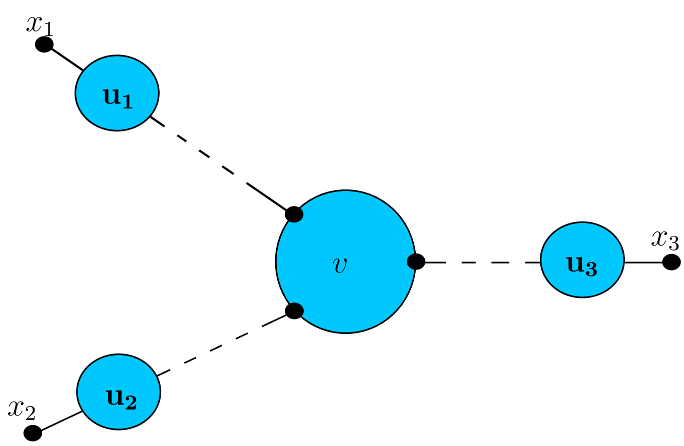
$$\mathcal{M}_{tree}(x_1, x_2, x_3; A; g, J) = \begin{cases} \mathbf{u_i} \in \mathcal{M}_{prl}(x_i, y_i; B_i; f_i, g, J),\ y_i \in \mathrm{Crit}(f_i),\ i \in \{1,2,3\}, \\ v : (D, \partial D) \to (M, L),\ J \circ dv = dv \circ i,\ v(e^{2i\pi/3}) = y_i, \\ B_1 + B_2 + B_3 + [v] = A. \end{cases}$$

и дефинишимо пресликавање

$$\star : QC_*(f_1, g, J) \otimes QC_*(f_2, g, J) \to QC_*(f_3, g, J),$$
$$x \star y = \sum_{z, A, \dim \widehat{\mathcal{M}}_{tree}(x,y,z;A)=0} \sharp_2 \widehat{\mathcal{M}}_{tree}(x, y, z; A)\ z\ t^{\mu(A)/N_L},$$

Лема 5.1. [15][48][14] $\dim_{virt} \widehat{\mathcal{M}}_{tree}(x, y, z; A; g, J) = m_{f_1}(x) + m_{f_2}(y) - m_{f_3}(z) + \mu(A) - n.$

Доказ. Доказ се може наћи у [15]. □



Слика 8: Елемент модулског простора $\mathcal{M}_{tree}(x_1, x_2, x_3; A; g, J)$

Испоставља се је ово пресликавање степена $-n$ и да је добро дефинисано на нивоу хомологије

Теорема 5.2. [15][48][14][Биран - Корнеа 2007]

1.) Пресликавање $\star$ је ланчасто и у хомологији индукује

$$\star : QH_i(L) \otimes QH_j(L) \to QH_{i+j-n}(L)$$

које не зависи од избора Морсовнких фуција f_i, Риманове метрике g и скоро-комплексне структуре J.

2.) $(QH_*(L), \star, [L])$ је асоцијативна алгебра са јединицом $[L]$, где је $[L] \in QH_n(L)$ класа многострукости L реализована као класа јединственог максимума x неке Морсове функције f.

3.) Ако је $\bullet : CF_*(L) \times CF_*(L) \to CF_*(L)$ Флоров производ индукован бројањен холоморфних троуглова тада је

$$PSS_* : (QH_*(L), \star) \to (HF_*(L), \bullet)$$

изоморфизам градуисаних алгебри.

4.) Ако су L и L' монотоно кобордантне, тада кобордизам $V : L' \rightsquigarrow L$ индукује пресликавање

$$\Phi_V : QH_*(L) \to QH_*(L').$$

Φ_V је изоморфизам градуисаних алгебри, специјално важи $\Phi_V([L]) = [L']$.

Доказ. За 1.) – 3.) погледати [14], [15], за 4.) погледати [12]. $\square$

Егзистенција Морсове функције са јединственим максимумом и минимумом на повезаној затвореној многострукости је класична ствар, доказ се може погледати у [35]. Идеја је да се изабере једна тачка p_0 индекса 0 и да се градијентним трајекторијама споји са осталим тачкама индекса 0 преко тачака индекса 1. Добија се граф који је контрактибилан. Морсова функција се деформише тако да све тачке индекса 1 које припадају графу имају вредност мању од фиксираног $c \in \mathbb{R}$ а остале тачке индекса 1 да имају врадности веће од c. Тада је $f^{-1}((-\infty, c])$ дифеоморфан затвореној лопти, и на њој f заменимо са растојањем од p_0 која је Морсова и има јединствени минимум p_0. Аналогна конструкција пролази и за максимум. Ознака $[L]$ потиче из Морсове теорије, јер када функција има јединствен максимум, та критична тачка одговара фундаменталној класи многострукости при изоморфизму са сингуларном хомологијом. Доказ да избор не зависи од Морсове функције f захтева одређене пертурбације и аналитичке техникалије. Посматрајмо сада конкретну Морсову функцију f са јединственим максимумом x. Из дефиниције имамо да је

$$x \star x = \sum \#_2 \widehat{\mathcal{M}}_{tree}(x, x, z, A) t^{\mu(A)/N_L}.$$

Из леме 5.1 добијамо да је $dim_{virt} \widehat{\mathcal{M}}_{tree}(x, x, z, A) = 2|x| - |z| + \mu(A) - n = n - |z| + \mu(A)$. Како је $\mu(A) \geq 0$, и треба да важи $n - |z| + \mu(A) = 0$ закључујемо да је $|z| = n$ и

$\mu(A) = 0$ због димензије од L. Како f има јединствени максимум то је $z = x$. Пошто је $\mu(A) = 0$ то се $\widehat{\mathcal{M}}_{tree}(x, x, x, 0)$ састоји од троуглова непараметризованих негативних градијентних трајекторија, у овом случају је то константна трајекторија $\gamma(t) = x$ и тиме добијамо

$$x \star x = x.$$

5.3 Спектралне инваријанте за монотоне Лагранжеве подмногострукости

Спектралне инваријанте у контексту симплектичке топологије је увео Витербо [47] помоћу генеришућих функција, потом су О [43], Леклерк [31] дефинисали спектралне инваријанте у Лагранжевој Флоровој хомологији. Овде ћемо пратити излагање из [32] где су Заполски и Леклерк дефинисали спектралне инваријалне у већој општости.

Нека је (M, ω) затворена симплектичка многострукост, L затворена повезана монотона Лагранжева подмногострукост, N_L минималан Масловљев број и $H : M \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ Хамилтонијан. Функционал дејства је дат са

$$\mathcal{A}_H([x, \hat{x}]) = \int_0^1 H(x(t), t)dt - \int_D \hat{x}^*\omega.$$

где је x пут који почиње и завршава се на L а $\hat{x} : D_+ \to M$ је пресликавање из горњег полудиска у M за које важи да је рестрикција на горњи полукруг је x, а пречник се слика у L. Односно важи да је $\hat{x}(e^{i\pi t}) = x(t)$, $t \in [0, 1]$ и $\hat{x}(s, 0) \in L$, $s \in [-1, 1]$. Кажемо да су два пресликавања $\hat{x}$ и $\hat{x'}$ еквивалентна ако је $[\hat{x}\sharp - \hat{x'}] = 0 \in \pi_2(M, L)$, елемент $\tilde{x} := [x, \hat{x}]$ је репрезент класе дате релације еквиваленције. Како је $[x, \hat{x}]$ критична тачка функционала дејства ако и само ако је x Хамилтонов пут, ми за генераторе Флорове Хомологије узимамо скуп $\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_H)$ а функционал дејства користимо као филтрацију.

Тврђење 5.1. [21][43] Нека је

$$CF_*(L; H; J)^a = \{\tilde{x} \in CF_*(L; H, J) \mid \mathcal{A}_H(\tilde{x}) < a\}$$

тада је диференцијал Флорове хомологије добро дефинисан на $CF_*(L; H, J)^a$, односно функционал дејства опада дуж пертурбованих J-холоморфних трака. Хомологију тог комплекса означавамо $HF^a_*(L; H, J)$.

Доказ. Нека је $u : \mathbb{R} \times [0,1]$ такво да

$$\frac{\partial u}{\partial s}+J\left(\frac{\partial u}{\partial t}-X_H\right)=0,\ \ u(\pm\infty,t)=x_\pm(t),\ \ u(\mathbb{R}\times\{0,1\})\subset L,\ \ \widehat{x_-}\sharp u\sharp-\widehat{x_+}=0\in\pi_2(M,L).$$

Тада је

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_H(\widetilde{x_+})-\mathcal{A}_H(\widetilde{x_-}) &= \int_0^1 H(x_+(t),t)dt-\int_{D_+}\widehat{x_+}^*\omega-\int_0^1 H(x_-(t),t)dt+\int_{D_+}\widehat{x_-}^*\omega\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}H(u(s,t),t)dtds-\int_{D_+}\widehat{x_+}^*\omega+\iint\limits_{\mathbb{R}\times[0,1]}u^*\omega+\int_{D_+}\widehat{x_-}^*\omega-\iint\limits_{\mathbb{R}\times[0,1]}u^*\omega\\
&= \iint\limits_{\mathbb{R}\times[0,1]}\omega\left(\frac{\partial u}{\partial s},X_H\circ u\right)dsdt-\iint\limits_{\mathbb{R}\times[0,1]}\omega\left(\frac{\partial u}{\partial s},\frac{\partial u}{\partial t}\right)dsdt\\
&= \iint\limits_{\mathbb{R}\times[0,1]}\omega\left(\frac{\partial u}{\partial s},X_H\circ u\right)dsdt-\iint\limits_{\mathbb{R}\times[0,1]}\omega\left(\frac{\partial u}{\partial s},J\frac{\partial u}{\partial s}+X_H\circ u\right)dsdt=-E(u)<0.
\end{aligned}$$

Где смо користили да је $\iint\limits_D \widehat{x_-}\sharp u\sharp-\widehat{x_-}^*\omega=0$. Односно добијамо да за све елементе $\widetilde{x_+}$ у суми

$$\partial_H\,\widetilde{x_-}=\sum_{\dim\widehat{\mathcal{M}}(\widetilde{x_-},\widetilde{x_+},H,J)=0}\sharp_2\widehat{\mathcal{M}}(\widetilde{x_-},\widetilde{x_+},H,J)\,\widetilde{x_+}$$

важи да је $\mathcal{A}_H(\widetilde{x_+})<\mathcal{A}_H(\widetilde{x_-})<a$, то јест $\partial_H\,\widetilde{x_-}\in CF_*(L;H,J)^a$. □

Напомена 5.1. У симплектичкој топологији су заступљене различите конвенције што се тиче знакова. За стандардну симплектичку форму на $\mathbb{R}^2$ може се узети $dp\wedge dq$ и $dq\wedge dp$. Аналогно се и у дефиницији Хамилтоновог векторског поља $i_{X_H}\omega=dH$ и $i_{X_H}\omega=-dH$. Иако смо у уводу користили избор знакова мотивисани физиком, сада смо у доказу користили другу дефиницију Хамилтоновог векторског поља $i_{X_H}\omega=-dH$. Тај избор знака је стандардан у Флоровој теорији.

Природна инклузија $i^a : CF_*^a(L;H,J)\to CF_*(L;H,J)$ индукује хомоморфизам на нивоу хомологије

$$i_*^a : HF_*^a(L;H,J)\to HF_*(L;H,J). \tag{8}$$

Сада смо у позицији да помоћу PSS_* изоморфизма и филтрације дефинишемо бројеве - спектралне инваријанте.

Дефиниција 5.1. Нека је $PSS_*^{H,J}: QH_*(L)\to HF_*(L;H;J)$ изоморфизам из (5.1), где је $H\in C^{+\infty}(M\times[0,1])$, и i_*^a хомоморфизам (8). Дефинишемо за $\alpha\neq 0\in QH_*(L)$

$$l(\alpha;H,J):=\inf\{a\mid PSS_*^{H,J}(\alpha)\in\mathrm{Im}(i_*^a)\}. \tag{9}$$

и $l(0; H, J) = -\infty$. Уколико је $\alpha = [L]$ дефинишемо $l_+(H, J) := l([L]; H, J)$

Испоставља се да су спектралне инваријанте C^0 непрекидне односно важи

Тврђење 5.2. [43][31][32] Нека су $H, K \in C^{+\infty}(M \times [0, 1])$ и $J^H, J^K \in \mathcal{J}$, тада важи

$$\int_0^1 \min_M (H_t - K_t)dt \leq l(\alpha; H, J^H) - l(\alpha; K, J^K) \leq \int_0^1 \max_M (H_t - K_t)dt.$$

Доказ. Доказ погледати у [32]. □

Приметимо да из Тврђења 5.2 следи да спектрална инваријанта не зависи од регуларне скоро комплексне структуре J те пишемо $l(\alpha; H)$. Уочимо сада $H \in C^0(M \times [0, 1])$ и низ $H^n \in C^{+\infty}(M \times [0, 1])$ такав да $H_t^n \xrightarrow{C^0} H_t$, односно такође из (5.2) можемо дефинисати спектралне инваријанте за непрекидне функције

$$l(\alpha; H) := \lim_{n \to +\infty} l(\alpha; H_n).$$

Заиста, лимес постоји јер је низ $l(\alpha; H_n)$ Кошијев у $\mathbb{R}$, а није тешко видети да не лимес не зависи од избора низа H_n.

5.4 Квантна валуација

Уведимо једну помоћну инваријанту у Квантној хомологији $QH_*(L)$. Нека је $\omega(\pi_2(M, L)) = \mathrm{A}\mathbb{Z}$ и $C = \sum_{y,B} c_{y,B} t^{\mu(B)/N_L} \in QC_*(f; g; J)$. Дефинишемо валуацију од C као:

$$\nu(C) := \frac{1}{\mathrm{A}} \max\{-\omega(A) \mid c_{y,A} \neq 0 \in \mathbb{Z}_2\},$$

а потом и валуацију за $\alpha \in QH_*(L)$

$$\nu(\alpha) := \inf\{\nu(C) \mid [C] = \alpha \in QH_*(L)\}.$$

Интересантно је да у дефиниције валуације користимо неку конкретну функцију $f : L \to \mathbb{R}$ а сама величина не зависи од избора. Доказ инваријантности дефиниције у односу на избор функције f је сличан доказу инваријантности Флорове хомологије у односну на Хамилтонове деформације, стога га због техничке сложености изостављамо, доказ погледати у [32]. У духу секције (5.3) валуацију можемо интуитивно схватити као спектралну инваријанту за Хамилтонијан $H = 0$ и функционал

$$\mathcal{A}_0 : \{(y, A) \mid y \in \mathrm{Crit}(f),\ A \in \pi_2(M, L)\} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}_0((y, A)) = -\omega(A).$$

Дефинишемо филтрирани квантни комплекс $QC^a_*(f;g;J)$ као модул генерисан са генераторима из $x \in QC_*(f;g;J)$ таквим да је $\mathcal{A}_0(x) < a$ и онда је

$$\nu(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{A}} \inf\{a \mid \alpha \in \mathrm{Im}(i^a_* : QH^a_*(L) \to QH_*(L))\}.$$

Тврђење 5.3. [32] Нека је $H \in C^\infty(M \times [0,1])$ и $\alpha \in QH_*(L)$, тада важи

$$\int_0^1 \min_M H_t dt \leq l(\alpha; H) - \nu(\alpha)\mathrm{A} \leq \int_0^1 \max_M H_t dt.$$

специјално $l(\alpha; 0) = \nu(\alpha)\mathrm{A}$.

Доказ. Нека је (H, J) регуларни пар за Флорову хомологију од L и $(f; g; J')$ регуларна тројка за Квантну хомологију. Ако покажемо да за произвољно $\epsilon > 0$ постоји пертурбација (H^s, J^s) тако да се пресликавање $PSS : QC_*((f;g;J')) \to CF_*(L; H, J)$, рестрикује за свако $a \in \mathbb{R}$ на

$$PSS^a : QC^a_*((f;g;J')) \to CF^{a+b}_*(L; H, J)$$

где је $b = \int_0^1 \max_M H_t dt + \epsilon$ доказ следи из комутативности дијаграма

$$\begin{array}{ccc} QH^a_*(f;g;J') & \xrightarrow{PSS_*} & HF^{a+b}_*(L;H,J) \\ {\scriptstyle i^a_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i^{a+b}_*} \\ QH_*(f;g;J') & \xrightarrow{PSS_*} & HF_*(L;H,J) \end{array}$$

Јер из дефиниције спектралних инваријанти и валуације видимо да важи

$$l(\alpha; H) \leq \nu(\alpha)\mathrm{A} + b = \nu(\alpha)\mathrm{A} + \int_0^1 \max_M H_t dt + \epsilon.$$

Пошто неједнакост важи за произвољно ϵ добијамо тражену неједнакост. Потребно је још доказати да PSS „повећава"филтрацију за b. Нека су $q \in Crit(f)$, $A \in \pi_2(M, L)$.

$$PSS(q, A) = \sum \#_2\mathcal{M}(q, \widetilde{x}, A)[\widetilde{x}, \widehat{x}],$$

те је потребно доказати да је $\mathcal{A}_H([\widetilde{x}, \widehat{x}]) < -\omega(A) + b$ за све елементе $[\widetilde{x}, \widehat{x}]$ за које је $\#_2\mathcal{M}(q, \widetilde{x}, A) \neq 0$. Другим речима за такве $[\widetilde{x}, \widehat{x}]$ постоје J-холоморфна пресликавања $u_i : (D, \partial D) \to (M, L)$, $1 \leq i \leq k$ и трака која задовољава Флорову једначину $u : \mathbb{R}\times[0,1] \to M$ са пертурбацијом (H^s, J^s). Они су спојени негативним градијентним трајекторијама функције f и важи $[A\#u_1\# \cdots \#u_k\#u(-\widehat{x})] = 0 \in \pi_2(M, L)$. Одатле добијамо

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_H([\widetilde{x},\widehat{x}]) &= \int_0^1 H(x(t),t)dt - \int_D \hat{x}^*\omega \\
&= \mathcal{A}_H([x,\hat{x}]) = \int_0^1 H(x(t),t)dt - \omega(A) - \sum_{i=1}^{k}\int_D u_k^*\omega - \int u^*\omega \\
&\leq -\omega(A) + \int_0^1 H(x(t),t)dt - \int u^*\omega.
\end{aligned}
$$

Пертурбација (H^s, J^s) је таква да за $s \leq 0$ важи $(H^s, J^s) = (0, J_0)$, а за $s \geq 1$ је $(H^s, J^s) = (H, J)$. И више, постоји неопадајућа функција $\beta : \mathbb{R} \to [0,1]$ таква да је $\beta(s) = 0$ за $s \leq 0$ и $\beta(s) = 1$ за $s \geq 1$. Такође је

$$
\max_{(x,t)}\left(\frac{\partial H^s(x,t)}{\partial s} - \beta'(s)H(x,t)\right) < \epsilon \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\beta'(s)ds \leq 1.
$$

Приметимо да је

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 H(x(t),t)dt - \int u^*\omega = \mathcal{A}_H([\widetilde{x},u]) - \mathcal{A}_0([u(-\infty),u(-\infty)]) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{ds}\mathcal{A}_{H^s}(u(s))ds = -\int_{-\infty}^{+\infty}||\nabla\mathcal{A}_{H^s}(u(s))||ds + \iint_{\mathbb{R}\times[0,1]}\frac{\partial H^s}{\partial s}(u(s,t),t)dsdt \\
&= \iint_{\mathbb{R}\times[0,1]}\frac{\partial H^s}{\partial s}(u(s,t),t)dsdt.
\end{aligned}
$$

Пресликавање u уједно схватамо као и криву у простору путева која задовољава негативну градијентну једначину пертурбованог функционала дејства, и као решење пертурбоване Флорове једначине. Како је

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}\times[0,1]}\frac{\partial H^s}{\partial s}(u(s,t),t)dsdt &< \iint_{\mathbb{R}\times[0,1]}\beta'(s)H(u(x,t),t)dsdt + \epsilon \\
&\leq \int_0^1 \max_{x\in M} H(x,t)dt + \epsilon,
\end{aligned}
$$

то важи

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_H([\widetilde{x},\widehat{x}]) &\leq -\omega(A) + \int_0^1 H(x(t),t)dt - \int u^*\omega \\
&< -\omega(A) + \int_0^1 \max_{x\in M} H(x,t)dt + \epsilon = -\omega(A) + b.
\end{aligned}
$$

□

Теорема 5.3. [43][31][32][Заполски - Леклерк 2015] Нека је L затворена монотона Лагранжева у (M,ω) са минималним Масловљевим бројем $N_L \geq 2$. Функција

$$l : QH_*(L) \times C^0(M \times [0,1]) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

има следеће особине

Коначност - $l(\alpha; H) = -\infty$ ако и само ако је $\alpha = 0$.

Спектралност - Ако је $H \in C^\infty(M \times [0,1])$ и $\alpha \neq 0$, $l(\alpha; H) \in \operatorname{Spec}(H : L)$, где је $\operatorname{Spec}(H : L) = \mathcal{A}_H(\operatorname{Crit}(\mathcal{A}_H))$.

Симплектичка инваријантност - Нека је $\psi \in \operatorname{Symp}(M,\omega)$, $L' = \psi(L)$ и $l' : QH_*(L') \times C^0(M \times [0,1]) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ тада је

$$l(\alpha; H) = l'(\psi_*(\alpha); H \circ \psi^{-1}).$$

Нормализација - Нека је c функција времена тада важи

$$l(\alpha; H + c) = l(\alpha; H) + \int_0^1 c(t)dt.$$

специјално $l(\alpha; 0) = \nu(\alpha)N_L$ и $l_+(0) = 0$.

Непрекидност - За свако H, K и $\alpha \neq 0$

$$\int_0^1 \min_M(H_t - K_t)dt \leq l(\alpha; H, J^H) - l(\alpha; K, J^K) \leq \int_0^1 \max_M(H_t - K_t)dt.$$

Монотоност - Ако је $H \leq K$ тада је $l(\alpha; H) \leq l(\alpha; K)$.

Неједнакост троугла - За свако α, β важи $l(\alpha \star \beta; H\sharp K) \leq l(\alpha; H) + l(\beta; K)$.

Контрола - Ако је $H_t\big|_L \leq c(t) \quad (\geq)$ тада

$$l(\alpha; H) = \int_0^1 c(t)dt - \nu(\alpha)\mathrm{A} \quad (\geq),$$

тако да за свако H важи

$$\int_0^1 \min_L H_t dt \leq l(\alpha; H) - \nu(\alpha)\mathrm{A} \leq \int_0^1 \max_L H_t dt,$$

специјално је $l_+(H) = \int_0^1 c(t)dt$.

Ненегативност $l_+(H) + l_+(\overline{H}) \geq 0$,

Максимум $l(\alpha; H) \leq l_+(H) + \nu(\alpha)\mathrm{A}$.

Доказ. Доказ можете погледати у [32]. $\square$

Није тешко увидети и да важи следећа лема

Лема 5.2. [32] Нека је $[L] \in QH_n(L)$ јединични елемент у односу на квантни производ, тада је $\nu([L]) = 0$.

Доказ. У теореми 5.2 смо видели да је $[L]$ репрезентована јединственим максимум x Морсове функције $f : L \to \mathbb{R}$. Како је $\mathcal{A}_0(x, 0) = 0$ то имамо да је

$$\nu([L]) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid [L] \in \mathrm{Im}(i_*^a)\} \leq 0.$$

Пошто важи да је $[L] \star [L] = [L]$ добијамо из неједнакости троугла да важи

$$l([L] \star [L]; 0) \leq l([0]; 0) + l([0]; 0),$$

а како је из својства Лагранжеве контроле $l([L]; 0) = \nu([L])$А добијамо да је $\nu([L]) \geq 0$ па важи $\nu([L]) = 0$. $\square$

6 Метричке инваријанте Лагранжевих подмногострукости

6.1 Кобордизам метрика

У симплектичкој топологији је од великог значаја разумети и разликовати Лагранжеве подмногострукости, и њихове међусобне положају амбијентној симплектичкој многострукости. Сваки помак у виду конструкције инваријанти Лагранжевих подмногострукости је од великог значаја за развој области. На простору Хамилтонових дифеоморфизама је уведена Хоферова норма којом је мотивисано увођење метрике на орбити $\mathcal{L}^{L_0} = \{\phi(L_0) \mid \phi \in Ham(M, \omega)\}$

$$d_H(L, L') = \inf_{\substack{\phi \in Ham(M,\omega) \\ \phi(L)=L'}} \int_0^1 (\max_{x \in \phi_H^t(L)} H(x,t) - \min_{x \in \phi_H^t(L)} H(x,t))dt.$$

Корнеа и Шелукин су у раду [19] мотивисани Хоферовом метриком за Лагранжеве подмногострукости дефинисали псеудометрике на просторима Лагранжевих подмногострукости које су у одређеним случајевима недегенерисана.

Дефиниција 6.1. Нека је $V : L \rightsquigarrow L'$ прост Лагранжев кобордизам. *Контура* кобордизма $ou(V) \subset \mathbb{C}$ је комплемент неогреаничених компоненти повезаности из комплемента $\pi(V)$, где је $\pi : \mathbb{C} \times M \to \mathbb{C}$ пројекција. Односно

$$ou(V) = \left(\bigcup_{\substack{x \in \pi(V)^c, \\ \mathrm{diam} C_x = +\infty}} (C_x) \right)^c.$$

У случају суспензије (пример 3.1) приметимео да је

$$ou(V_H) = \{(t,s) \in \mathbb{C} \mid -\max_{x \in \phi_H^t(L)} H(x,t) \leq s \leq -\min_{x \in \phi_H^t(L)} H(x,t)\} \cup (-\infty, 0] \times \{0\} \cup [1, +\infty) \times \{0\}.$$

Заиста, како је

$$V_H = \{(t, -H(\phi_H^t(x), t), \phi_H^t) \mid x \in L, t \in [0,1]\}$$

за фиксирано t, s координата варира између $-\max_{x \in \phi_H^t(L)} H(x,t)$ и $-\min_{x \in \phi_H^t(L)} H(x,t)\}$. Остатак x-осе потиче од проширења V_H до некомпактне многострукости без границе.

Како је контура кобордизма унија компактног скупа који, осим у случају тривијалног кобордизма, није нигде густ можемо посматрати њену *меру* односно површину.

Дефиниција 6.2. Сенка Лагранжевог кобордизма $V : L \rightsquigarrow L'$ је површина контуре $ou(V)$:

$$\mathcal{S}(V) = Area(ou(V)).$$

Приметимо да је

$$\inf_{\substack{H \in ham(M,\omega), \\ \phi_H^1(L)=L'}} \mathcal{S}(V_H) = d(L, L'),$$

отуда потиче и дефиниција псеудометрике из [19].

Дефиниција 6.3. Пресликавање $d_c : \mathcal{L}^* \times \mathcal{L}^* \to [0, +\infty]$ је дато са:

$$d_c(L, L') = \inf_{V : L \rightsquigarrow L', V \in \mathcal{L}_c^*(\mathbb{C} \times M)} \mathcal{S}(V).$$

Теорема 6.1. [19][Корнеа - Шелукин 2015]

1.) Пресликавање $d_c : \mathcal{L}^* \times \mathcal{L}^* \to [0, +\infty]$ је метрика уколико је $\mathcal{L}^*$ скуп слабо-монотоних, монотоних или тачних затворених Лагранжевих подмногострукости.

2.) На скупу $\mathcal{L}^{L_0}$ свих Хамилтонових деформација L_0 d_c је једнака Хоферовој метрици за Лагранжеве подмногострукости.

3.) Уколико нема рестрикција на Лагранжеве подмногострукости d_c је псеудо метрика, и више:

$$d_c(L, L') = 0 \Leftrightarrow (\exists V : L \rightsquigarrow L').$$

4.) Постоји M и L, L' монотоне тако да је $d_c^m(L, L') = +\infty$, а $d_c^{w-m}(L, L') < +\infty$.

Приметимо да у сваком случају се инфимум у метрици d_c узима по свим кобордизмима који су исте класе као и саме многострукости. Како је Хоферова метрика за Лагранжеве многострукости недегенерисана имамо да је $d_c^L(L, \phi_H(L)) > 0$ ако је $L \neq \phi_H(L)$, али ипак важи да је $d_c(L, \phi_H(L)) = 0$. Тај феномен се дешава јер ће постојати Лагранжев кобордизам $V : \phi_H(L) \rightsquigarrow L$ произвољно мале сенке који није суспензија ни за један Хамилтонијан G који генерише многострукост $\phi_H(L)$!

За доказ теореме потребне су нам две метричке инваријанте које ће нам служити као доња оцена за сенку кобордизма. Прва је *Громовљева* релативна ширина од L и L' коју су дефинисали Баро и Корнеа у раду [11]

$$\rho(L,L') = \sup\left\{\frac{\pi r^2}{2} \;\middle|\; \exists\, e_r : B^{2n}(0,r) \to (M,\omega),\; e_r^{-1}(L) = \mathbb{R}^n \cap B^{2n}(0,r), \right.$$
$$\left. e_r(B^{2n}(0,r)) \cap L' = \emptyset \right\}.$$

Ова инваријанта нам даје колико велику лопту можемо симплектички да уложимо тако да не сече L' а реални део (уз идентификацију са $\mathbb{C}^n$) се слика у L. За наше потребе је довољно приметити да је овај број строго позитиван кад год су L и L' различите. Сличну бројевну инваријанту је користио Леклерк у раду [31] за доказ оцене одоздо Хоферове метрике за Лагранжеве пресеке.

Друга је минимална енергија J-холоморфних дискова и сфера, односно могућа вредност енергије мехурова (који су опструкција за компактност модулских простора).

$$\delta(L,J) = \inf\left\{\omega(u) \;\middle|\; u : (\mathbb{D}^2,\mathbb{S}^1) \to (M,L) \text{ или } u : \mathbb{S}^2 \to M \text{ и } du \circ i = J \circ du\right\}$$

Ова инваријанта се може дефинисати и за Лагранжеве кобордизме уз пажљиви избор скоро-комплексне структуре која је контролисана у бесконачности.

Тврђење 6.1. [19] Нека је $V : L \rightsquigarrow L'$ прост Лагранжев кобордизам. Тада за свако $\epsilon > 0$ постоји скоро комплексна структура $J \in \mathcal{J}(\mathbb{C}\times M)$ тривијална у бесконачности таква да важи

$$\mathcal{S}(V) \geq \min\{\rho(L,L') - \epsilon, \delta(V,J)\}.$$

Доказ. Идеја је конструисати одређену J-холоморфну траке помоћу дејства Морсове хомологије на Флорову. Њена енергија ће бити ограничена у терминина сенке кобордизма, а из изопериметријских неједнакости ће следити неједнакости са инваријантама ρ и δ. Због техничке сложености не излажемо детаље. Комплетан доказ тврђења се може пронаћи у раду [19]. □

Доказ Теореме. 2.) Као што смо већ коментарисали, јасно је да важи

$$\mathcal{S}(V_H) = \int_0^1 (\max_{x\in\phi_H^t(L)} H(x,t) - \min_{x\in\phi_H^t(L)} H(x,t))dt$$

те је

$$d_c^{L_0}(L,L') = d_H(L,L').$$

1.) Ако је (V,ω) слабо монотон кобордизам са коефицијентом монотоности ρ онда је

$$\delta(V,J) \geq \min\{|\rho|,|\tau|\}$$

где је τ коефицијент монотоности многострукости M (слабо монотоне Лагранжеве многострукости постоје само у слабо монотоним симплектичким многострукостима). Заиста, ако је u J-холоморфни диск, онда је

$$\omega_{st} \oplus \omega(u) = \rho\mu(u)$$

како је $\mu \in \mathbb{Z}$ и $\omega_{st} \oplus \omega(u) > 0$ то је и $\omega_{st} \oplus \omega(u) >= \rho$, аналогно и за J-холоморфне сфере. Даље, ако уопште нема неконстантних J-холоморфних дискова и сфера онда је $\delta(V,J) = +\infty$ те свакако важи $\delta(V,J) \geq \min\{|\rho|,|\tau|\}$.
Применом тврђења и чињенице да је V слабо-монотона са коефицијентом монотоности ρ добијамо

$$\mathcal{S}(V) \geq \min\{\rho(L,L') - \epsilon, \delta(V,J)\} \geq \min\{\rho(L,L') - \epsilon, |\rho|, |\tau|\} > 0$$

односно добијамо процену независну од V, узимајући инфимум добијамо да за $L \neq L'$ важи

$$d_c(L,L') \geq \min\{\rho(L,L') - \epsilon, |\rho|, |\tau|\} > 0$$

те је метрика недегенерисана. Симетричност и неједнакост троугла се лако показују. Доказ за монотон случај је идентичан. Уколико је L слабо тачна или тачна не постоје неконстантне J-холоморфне сфере и дискови због формуле Енергије и Стоксове теореме. Ако је L слабо тачна, односно ако је $\omega\big|_{\pi_2(M,L)} = 0$ имамо да је и $\omega\big|_{\pi_2(M)} = 0$ а како важи

$$E(u) = \int_\Sigma u^*\omega = \frac{1}{2}\int_\Sigma ||du||^2 d\Sigma$$

видимо да ако је $\omega(u) = 0$ онда је u константно те је $\delta(V,J) = +\infty$ па важи

$$\mathcal{S}(V) \geq \rho(L,L') - \epsilon.$$

3.) Ако постоји кобордизам $V : L \rightsquigarrow L'$, можемо да га посматрамо и као улагање $e : V \to \mathbb{C} \times M$. Уочимо пресликавање $\widetilde{e} : \mathbb{C} \times M \to \mathbb{C} \times M$

$$\widetilde{e}(x+iy,p) = (x+i\epsilon y, p).$$

Композиција $e_\epsilon = \widetilde{e} \circ e$ није Лагранжева подмногострукост од $\mathbb{C} \times M$, али има смисла посматрати њену сенку. Односно важи

$$\mathcal{S}(e_\epsilon(V)) = \epsilon\mathcal{S}(V).$$

Ако успемо да нађемо дистрибуцију Лагранжевих потпростора у $\widetilde{e}^* T(\mathbb{C}\times M)$ према Громовљевом h-принципу знамо да је e_ϵ C^0 лимес Лагранжевих имерзија. Другим речима постоји низ e_ϵ^n такав да

$$\sup_{x\in V} d(e_\epsilon^n(x), e_\epsilon(x)) \overset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0,$$

где је d метрика на $\mathbb{C}\times M$ индукована Римановом метриком $\omega(\cdot, J\cdot)$. Одатле можемо да закључимо да постоји $N \in \mathbb{N}$ такво да је

$$\mathcal{S}(e_\epsilon^N(V)) \leq \mathcal{S}(e_\epsilon(V)) + \epsilon$$

Да бисмо дошли до Лагранжевог кобордизма потребно је да пертурбујемо Лагранжеву имерзију тако да су тачке самопресека двоструке и да је пресек трансверзалан, након чега можемо применити Лагранжеву хирургију. У хирургији можемо додавати произвољно мале ручке тако да се сенка промени највише за унапред задато $\delta > 0$. Односно добили смо Лагранжев кобордизам $\widetilde{V} : L \rightsquigarrow L'$ такав да је

$$\mathcal{S}(\widetilde{V}) \leq \mathcal{S}(e_\epsilon^N(V)) + \epsilon.$$

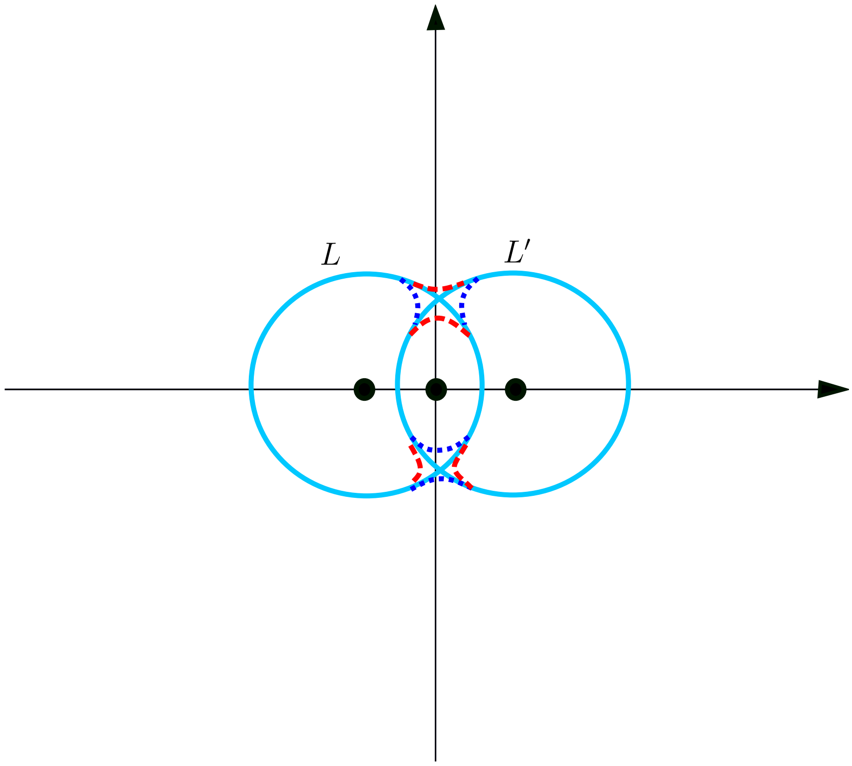
Када спојимо добијене неједнакости, добијамо да важи

$$\mathcal{S}(\widetilde{V}) \leq \mathcal{S}(e_\epsilon^N(V)) + \epsilon \leq \mathcal{S}(e_\epsilon(V)) + 2\epsilon = \epsilon\mathcal{S}(V) + 2\epsilon.$$

Пуштајући $\epsilon \to 0$ видимо да је $d_c^g(L, L') = 0$.

4.) Посматрајмо $M = \mathbb{C} \setminus \{-2/3, 0, 2/3\}$ са стандардном симплектичком формом. Нека су $L = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1/2| = 1\}$ и $L' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1/2| = 1\}$ два круга у M. Свака оријентабилна многострукост димензије 2 је симплектичка и свака крива у њој је Лагранжева подмногострукост због антисиметричности симплектичке 2-форме. Другим речима L и L' су Лагранжеве, и њихов минималан масловљев број је 2.
Хирургијом добијамо две различите монотоне Лагранжеве подмногострукости, које су Лагранжево кобордантне. За доказ да је тај кобордизам слабо-монотон погледати [27].

Поменути кобордизам не може бити монотон. Ако уочимо Лагранжеву подмно-



Слика 9: Хирургија Лагранжевих многострукости

гострукост $N = \{(0, y) \mid y > 0\}$, како су $L\sharp L'$ и $L'\sharp L$ монотоне то су дефинисане Флорове хомологије пара $HF_*(N, L\sharp L')$ и $HF_*(N, L'\sharp L)$. Када би постојао монотони кобордизам $V : L\sharp L' \rightsquigarrow L\sharp L'$ према резултату из [12]

$$HF_*(N, L\sharp L') \cong HF_*(N, L'\sharp L).$$

То је немогуће јер је $L\sharp L' \cap N = \emptyset$. Пошто свак хамилтонова деформација од $L'\sharp L$ мора сећи N важи

$$0 = HF_*(N, L\sharp L') \cong HF_*(N, L'\sharp L) \neq 0,$$

што је контрадикција.
Како не постоји монотон кобордизам између $L\sharp L'$ и $L'\sharp L$ то је $d_c^m(L\sharp L', L'\sharp L) = \infty$. Пошто је траг хирургије слабо-монотон кобордизам, због недегенерисаности d_c^{w-m} имамо

$$0 < d_c^{w-m}(L\sharp L', L'\sharp L) < \infty.$$

$\square$

6.2 Спектралне инваријанте и кобордизми

Ако је L' Хамилтонова деформација од L очигледно важи

$$d_c(L, L') \leq d_H(L, L').$$

Дефинишимо *спектралну метрику* за монотоне Лагранжеве подмногострукости L и L' као величину

$$d_s(L, L') = \sup\{|l_+^L(\phi) - l_+^{L'}(\phi)| \mid \phi \in \widetilde{Ham}(M, \omega)\}.$$

Тврђење 6.2 (О 1997, Шварц 2000, Бизго 2017 [43] [17])**.** Спектрална метрика d_s је недегенерисана метрика на скупу монотоних Лагранжевих подмногострукости.

Користећи спектралне инваријанте изведене из Флорове хомологије за котангентна раслојења О је у [43] увео спектралну норму за Хамилтонове дифеоморфизме са компактним носачем и доказао да је недегенерисана. Доказ да је спектрална метрика за монотоне Лагранжеве подмногострукости такође недегенрисана може се извести сличним методама као у [43], ми пратимо излагање из [17]. Поред недегенерисаности спектралне норме Бизго доказује неједнакости између спектралне норме и кобордизам метрике. Прецизније важи следећа теорема.

Теорема 6.2 (Бизго 2017 [17])**.** Нека су L и L' монотоне Лагранжеве подмногострукости од (M, ω) и нека је $V : L' \rightsquigarrow L$ монотон Лагранжев кобордизам. Тада важи

$$|l^L(\alpha, \phi) - l^{L'}(\Phi_V(\alpha), \phi)| \leq \mathcal{S}(V),$$

за свако $\alpha \in QH_*(L) \setminus \{0\}$ и $\phi \in \widetilde{Ham}(M, \omega)$. Изоморфизам Φ_V је из 5.2.

Доказ. Погледати [17]. □

У теореми 5.2 део 4.) нам говори да је $\Phi_V([L]) = [L']$, тиме као директну последицу добијамо

Тврђење 6.3 ([17])**.** Нека су L и L' монотоне Лагранжеве подмногострукости које су монотоно кобордантне, тада је

$$d_s(L, L') \leq d_c(L, L').$$

Тврђење 6.2 нам заједно са 6.3 нам даје још један доказ недегенерисаности кобордизам метрике за случај монотоних подмногострукости.

Видели смо да је природно посматрати Лагранжеве подмногострукости до на кобордизам, јер кобордизми чувају разне инваријанте релевантне у Симплектичкој топологији. Из тих разлога важно је имати неки опипљив алат за детекцију када су две Лагранжеве подмногострукости монотоно кобордантне или не. у раду [17] аутор показује да кобордизам чува *асимптотску спектралну инваријанту*, а она је "лакше"израчунљива од осталих познатих инваријанти.

Дефиниција 6.4. Нека је L монотона Лагранжева подмногострукости. *Асимптотска спектрална инваријанта* је пресликавање $\sigma_L : \widetilde{Ham}(M,\omega) \to \mathbb{R}$ дато са

$$\sigma_L(\phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{l_+^L(\phi^n)}{n}.$$

Теорема 6.3. [17] Нека су L и L' монотоно кобордантне многострукости тада је

$$\sigma_L = \sigma'_L.$$

Доказ.

$$|\sigma_L(\phi) - \sigma_{L'}(\phi)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|l_+^L(\phi^n) - l_+^{L'}(\phi^n)|}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{d_c(L,L')}{n} = 0.$$

□

Уколико посматрамо две дисјкунктне монотне Лагранжеве подмногострукости L и L' и ако је $H : M \to \mathbb{R}$ *нормализован* Хамилтонијан такав да је $H\big|_L = c$ и $H\big|_{L'} = c'$ тада је

$$\sigma_L(\phi_H) = c \ne c' = \sigma_{L'}(\phi_H).$$

Заиста, из својства контроле из 5.3 ако је H нормализован и једнак константи c на L тада је $l_+^L(\phi_H) = c$. Није тешко проверити да је нормализован Хамилтонијан који генерише ϕ_H^n константан дуж L и једнак је nc. Сада можемо закључити да важи $\sigma_L(\phi_H) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{l_+^L(\phi_H^n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nc}{n} = c$. Као последицу добијамо следеће тврђење.

Тврђење 6.4. Нека су L и L' монотоне Лагранжеве подмногострукости од (M,ω). Ако је $L \cap L' = \emptyset$ тада не постоји монотон Лагранжев кобордизам $V : L \rightsquigarrow L'$.

За доказ тврђења 6.2 користићемо следећу лему.

Лема 6.1. [17] Нека је L монотона Лагранжева подмногострукост са коефицијентом монотоности ρ таква да је $QH_*(L) \ne 0$. Нека је U Вајнштајнова околина и $b : U \to L$ пресликавање индуковано пројекцијом $\pi : T^*L \to L$. Ако је h Морсова функција таква да је $\max h < \frac{\rho N_L}{2}$ таква да је dh садржана у звездоликом скупу Y унутар Вајнштајнове околине од T^*L. Дефинишимо Хамилтонијан $H := \varphi b * h$ где је φ

одсецајуча функција са компактним носачем и $\phi\big|_Y = 1$. Тада постоји $q \in Crit_n(h)$ таква да је

$$l_+(H) = h(q)$$

Доказ. Идеја се заснива на пазљивом одабиру критичне тачке која генерише $[L]$ и чињенице да су спектралне критичне вредности функционала дејства.Доказ погледати у [17]. $\square$

Доказ тврђења 6.2. Нека су L и L' различите и нека је $b : U \to L$ индуковано пројекцијом. Изаберимо $x \in L \setminus L'$ и Морсову функцију $f : L \to \mathbb{R}$ такву да је $Crit_n(f) = \{x\}$. Нека је $B \subset L \setminus L'$ Морсова карта у x и нека је $h : B \to \mathbb{R}$ функција са компактним носачем и јединственим максимумом у q таква да је $0 < h(q) < \frac{\rho N_L}{2}$. Могуће је изабрати h такво да је $dh\big|_B \cap (U \cap L') = \emptyset$. Нека је $\varphi : U \to \mathbb{R}$ одсецајућа функција таква да је $\varphi\big|_{b^{-1}(B)\cap L'} = 0$. Посматрајмо Хамилтонијан

$$H^\epsilon = \phi b^*(h + \epsilon f) \in C_c^\infty(M).$$

Како је $H^0\big|_{L'} = 0$ из теореме 5.3, прецизније својства контроле спектралних инваријанти, следи да је $l_+^{L'}(H^0) = 0$. Из леме, за свако $\epsilon > 0$ довољно мало имамо да је

$$l_+^L(H^\epsilon) = h(q) + \epsilon f(q).$$

Како $H^\epsilon \overset{C^0}{\to} H^0$ то је из непрекидности спектралних инваријанти

$$l_+^L(H^0) = h(q).$$

Сада можемо да закључимо

$$d_s(L, L') \geq |l_+^L(\phi_{H^0}) - l_+^{L'}(\phi_{H^0})| = |l_+^L(H^0) - l_+^{L'}(H^0)| = h(q) > 0,$$

чиме смо доказали недегенерисаност спектралне метрике. $\square$

Литература

[1] В. Драговић, Д. Милинковић - *Анализа на многострукостима.* МФ, Београд, 2003.

[2] J. Ђуретић - *Геодезијске линије у Хоферовој метрици.* мастер рад, Београд, 2010.

[3] Д. Милинковић - *Мини курс о симплектичким многострукстима*, скрипта, `http://poincare.matf.bg.ac.rs/~milinko/skripta/simplekticke.pdf`

[4] Д. Милинковић - *Увод у рачун на многострукостима*, скрипта, `http://poincare.matf.bg.ac.rs/~milinko/skripta/globalna.pdf`

[5] J. Николић - *Алгебарска својства спектралних инваријанти у Флоровој хомологији.* докторска теза, Београд, 2017.

[6] В. Стојисављевић - *Спектралне инваријанте у Флоровој хомологији.* мастер рад, Београд, 2015

[7] И. Уљаревић - *Симплектичке многострукости и критичне тачке функција.* мастер рад, Београд, 2011

[8] P. Albers - *A Lagrangian Piunikhin-Salamon-Schwarz Morphism and Two Comparison Homomorphisms in Floer Homology.* IMRN, 2008.

[9] V.I. Arnol'd - *Lagrange and Legendre cobordisms. I.* FAP, 14(3):1-13, 1980.

[10] V.I. Arnol'd - *Lagrange and Legendre cobordisms. II.* FAP, 14(4):8-17, 1980.

[11] J.F. Barraud, O. Cornea - *Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence.* AoM, 166:657-722, 2007.

[12] P. Biran, O. Cornea - *Lagrangian Cobordism. I.* JAMS, 29(2):295-340, 2012.

[13] P. Biran, O. Cornea - *Lagrangian Cobordism and Fukaya categories* GFA, 24(6):1731-1830, 2014.

[14] P. Biran, O. Cornea - *Lagrangian Quantum Homology.* `arxiv.org/pdf/0808.3989`, 2008.

[15] P. Biran, O. Cornea - *Quantum structures for Lagrangian submanifolds.* `arxiv.org/pdf/0708.4221`, 2007.

[16] P. Biran, O. Cornea, E. Shelukhin - *Lagrangian Shadows and Triangulated Categories.* `arxiv.org/pdf/1806.06630`, 2018.

[17] M. R. Bisgaard - *Invariants of Lagrangian cobordisms via spectral numbers.* `arxiv.org/pdf/1605.06144`, 2017.

[18] K. Cieliebak, Y. Eliashberg - *From Stein to Weinstein and Back.* AMS, Colloquium Publications, 2010.

[19] O. Cornea, E. Shelukhin - *Lagrangian cobordism and metric invariants.* JDG, 112(1):1-45, 2019.

[20] Y. Eliashberg, M. Gromov - *Convex Symplectic Manifolds* PSPM, 52(2):135-162, 1991.

[21] A. Floer - *Morse theory for Lagrangian intersections.* JDG, 28(3):513-547, 1988.

[22] A. Floer - *Symplectic Fixed points and Holomorphic Spheres.* CMP, 120:575-611, 1989.

[23] A. Floer - *Witten's complex and infinite-dimensional Morse theory.* JDG, 30(1):207-221, 1989.

[24] D.S. Freed - *Bordism: old and new.* lecture notes, Texas, 2012.

[25] D. Gilbarg, N. S. Trudinger - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.*, Springer, 2001.

[26] M. Gromov - *Pseudo holomorphic curves in Symplectic manifolds.* Invetiones, 82:307-347, 1985.

[27] L. Haug - *Lagrangian antisurgery.* `arxiv.org/pdf/1511.05052`, 2015.

[28] L. Haug - *The Lagrangian cobordism group of* T^2. `arxiv.org/pdf/1310.8056`, 2014.

[29] R. Kasturirangan, Y.G. Oh - *Floer homology of open subsets and a relative version of Arnold's conjecture.* Math. Z., 236:151–1892001.

[30] J. Katić, D. Milinković - *Piunikhin–Salamon–Schwarz isomorphisms for Lagrangian in- tersections.* DGA, 22:215-228, 2005.

[31] R. Leclercq - *Spectral invariants in Lagrangian Floer theory.* JMD, 2(2):259-286, 2008.

[32] R. Leclercq, F. Zapolsky - *Spectral invariants for monotone Lagrangians.* JTA, 10(3):627-700, 2018.

[33] D. Milinković - *Geodesics on the space of lagrangian submanifolds in cotangent bundles.* PAMS, 129(6), 2001.

[34] J. Milnor, J.D Stasheff - *Characteristic classes.* PUP, Princeton, 1974.

[35] J. Milnor - *Morse theory.* AMS, Princeton, 1960.

[36] D. McDuff, D. Salamon - *Introduction to Symplectic Topology.* OUP, third edition, Oxford, 2017.

[37] D. McDuff, D. Salamon - *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology.* AMS, second edition, 2012.

[38] Y.G. Oh - *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic discs I.* CPAM, 46(7):949-993, 1993.

[39] Y.G. Oh - *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic discs II.* CPAM, 46(7):995-1012, 1993.

[40] Y.G. Oh - *Floer homology and its continuity for non-compact Lagrangian submanifolds.* TJM, 25:103-124, 2001.

[41] Y.G. Oh - *Symplectic topology and Floer homology. Vol. 1.* CUP, Cambridge, 2015

[42] Y.G. Oh - *Symplectic topology and Floer homology. Vol. 2.* CUP, Cambridge, 2015

[43] Y.G. Oh - *Symplectic topology as the geometry of action functional. I.*, JDG, 46(3):499-577, 1997.

[44] S. Piunikhin, D. Salamon, M. Schwartz - *Symplectic Floer-Donaldson theory and quantum cohomology.* PNI, 8:171-200, Cambridge, 1996.

[45] L. Polterovich - *The surgery of Lagrange submanifolds.* GFA, 1(2):198-210, 1991.

[46] M. Schwarz - *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds.* PJoM, 2000.

[47] C. Viterbo - *Symplectic topology as the geometry of generating functions.* MA, 292:685-710, 1992.

[48] F. Zapolsky - *The Lagrangian Floer-quantum-PSS package and canonical orientations in Floer theory.*, `arxiv.org/pdf/1507.02253`, 2015.