Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Спољашњи диференцијални системи

Студент: Ђорђе Николић

Ментор: др Јелена Катић

У Београду, 2019. године

Садржај

Предговор

Диференцијална једначина се дефинише у стандардним курсевима (видети [8]) као проблем налажења фамилија кривих које су тангентне на дато векторско поље. Дуалан приступ је следећи. Уместо векторског поља дата је диференцијална форма, а проблем се састоји у налажењу фамилије кривих чије тангентне векторе поништава дата диференцијална форма. Општије, на овај начин се могу посматрати и парцијалне диференцијалне једначине. Док је први начин више геометријског типа, овај приступ више наглашава алгебарску страну теорије.

У првој глави је изложена мотивација за увођење метода спољашњих диференцијалних система кроз познате примере из обичних диференцијалних једначина као и парцијалних диференцијалних једначина.

У другој глави детаљно уводимо алгебарски апарат потребан за рад са спољашњим диференцијалним системима. Дефинисаћемо спољашње диференцијалне системе и навешћемо неколико значајних примера. Доказом Фробенијусове теореме лакше ћемо разумети најједноставније примере спољашњих диференцијалних система. Главна литература је књига Р.Брајанта [10].

У трећој глави доказаћемо Дарбуову и Пфафову теорему. Уз то, наводимо неколико примера.

У четвртој глави уводимо нове примере помоћу уведених техника. Користимо примере из лекција Брајанта, као и из других књига и радова који су наведени у списку литературе.

Додатак служи као увод у контактну и симплектичку геометрију. Дате су дефиниције и основна тврђења која су потребна за разумевање, пре свега, првог поглавља овог рада, као и неких примера.

1 Мотивација - дуални приступ решавању диференцијалних и парцијалних диференцијалних једначина

У првом поглављу ћемо одраније познате чињенице и методе решавања обичних диференцијалних једначина као и парцијалних диференцијалних једначина уопштити и допунити. Наша намера је да одређене обичне диференцијалне једначине или парцијалне диференцијалне једначине некако поједноставимо, свођењем на неке једноставније једначине или смештајући их у неки други простор.

Главна идеја овог рада је како да геометријски проблем, што јесте решавање обичних диференцијалних и парцијалних једначина, претворимо у алгебарски проблем, тј. преведемо на језик диференцијалних форми.

Први део овог поглавља посвећен је обичним диференцијалним једначинама, а други део парцијалним диференцијалним једначинама. Главна литература коришћена у овом поглављу је [9],[3]и[1].

1.1 Једначина која раздваја променљиве

На основном курсу диференцијалних једначина сусрели смо се са такозваном једначином која *раздваја променљиве*:

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}. \tag{1.1}$$

Функције f и g су реалне и непрекидне, са тим да g не може бити нула ни у једној тачки свог домена.

Ова једначина јесте дата на језику векторских поља, међутим ми желимо да је преведемо на језик диференцијалних форми. То радимо на следећи начин.

Једначину $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ помножимо диференцијалном 1-формом $g(y)dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Добијамо следећу једнакост:

$$g(y)dy = f(x)dx. \tag{1.2}$$

Њу смемо да интегралимо и са леве и са десне стране. Према томе, долазимо до решења. На језику диференцијалних форми, тангентни простор на интегралну криву је језгро форме $g\,dy - f\,dx$.

1.2 Једначина са тоталним диференцијалом

Претходна једначина, која раздваја променљиве, специјалан је случај наредне једначине:

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{1.3}$$

Претпоставимо да су функције f и g непрекидне и дефинисане у просто-повезаној области D у равни $\mathbb{R}^2$. Ако употребимо исти трик као и за једначину (1.1) тада је:

$$f(x,y)dx - g(x,y)dy = 0. \tag{1.4}$$

Приметимо да су тангентни простори интеграционе криве једначине (1.3) језгра диференцијалне форме $f\,dx - g\,dy$, тј. једначине (1.4). Добили смо диференцијалну једначину са тоталним диференцијалом. Да бисмо могли тако да је решимо неопходан и довољан услов је:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0. \tag{1.5}$$

Претходан услов је произашао из Шварцове леме.

Ако претходни услов није задовољен тражимо функцију $\mu(x,y)$ тако да форма

$$\mu(x,y)f(x,y)dx - \mu(x,y)g(x,y)dy = 0$$

буде тачна, односно да новонастале функције задовољавају услов (1.5). Приметимо да множењем форме (1.4) са функцијом $\mu(x,y)$ нисмо изашли из идеала генерисаног формом (1.4). Било би лепо када бисмо могли некако брже, само из идеала, да видимо решење ове једначине.

Главна мотивација овог и претходног потпоглавља јесте управо то, да проблем у векторском облику пребацимо у алгебарски облик, где ћемо моћи боље да га разумемо.

1.3 Неки примери и њихова „позната” решења

У овом потпоглављу ћемо разрадити прво наредне примере диференцијалних једначина на класичан начин, да бисмо у наредном ове наизглед различите примере, решили елегантније:

1) $(y')^2 = x$;

2) $(y')^2 = y$;

3) Клероова једначина $y = xy' + f(y')$.

Пример 1.1. Посматрајмо прву једначину:

$$(y')^2 = x.$$

Она суптилно даје две различите диференцијалне једначине, а то су $y' = \sqrt{x}$ и $y' = -\sqrt{x}$. Поступком „раздвајања промењљивих” као на почетку добијамо да оне задовољавају односе $dy = \sqrt{x}\,dx \quad \text{и} \quad dy = -\sqrt{x}\,dx$.

Интеграцијом претходних релација и квадрирањем добијамо да су решења почетне једначине дата са

$$9(y+c)^2 = 4x^3, c \in \mathbb{R}.$$

Пример 1.2. Сада посматрамо другу једначину:

$$(y')^2 = y.$$

Као и код прве једначине овде су суптилно задате две једначине $y' = \sqrt{y}$ и $y' = -\sqrt{y}$. Преласком на диференцијалне форме добијамо облик $\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$ и $-\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$.
Интеграцијом као и малопре добијамо $2\sqrt{y} = x + C, C \in \mathbb{R}$.

Пример 1.3. Дошли смо и до Клероове једначине:

$$y = xy' + f(y').$$

Пошто је ово почетак и занима нас само као мотивација, узећемо један пример за функцију f, нпр. $f(p) = -\frac{p^2}{2}$. Дакле, решавамо једначину

$$y = xy' - \frac{(y')^2}{2}.$$

Као и у претходна два примера, решавањем квадратне једначине по y' добијамо два „решења” ове једначине.

$$y' = \frac{2x \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = 4(x^2 - 2y).$$

1.4 Обједињење претходних примера и њихово збирно разрешење

У овом поглављу посматрамо општу једначину, тј. једначине облика

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.6}$$

за глатку функцију $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$

Уведимо смену $p = y^{'} = \frac{dy}{dx}$. Тродимензиони простор са координатама (x, y, p) је 1-џет простор функције y (видети први додатак за дефиницију џет простора)

Скуп

$$\Sigma := \{(x, y, p) \mid F(x, y, p) = 0\} \tag{1.7}$$

у $\mathbb{R}^3$ јесте површ. Можемо је сматрати глатком, јер малом пертурбацијом долазимо до глатке површи.

Желимо да конструишемо векторско поље на површи Σ чије ће интегралне криве у простору (x, y, p) на неки начин дати информацију о решењу (1.6). Потражићемо га као пресек $T\Sigma$ (јер интегралне криве треба да леже на Σ) и равни $\Pi_A = ker(\xi_A)$, где је $\xi = dy - pdx$ контактна форма (видети први додатак за дефиницију контактне форме) у $\mathbb{R}^3$ (јер желимо да $p = \frac{dy}{dx}$).

Ако се тангентна раван $T_A\Sigma$ не поклапа са контактном равни Π_A у пресеку те две равни ће бити права.

Према томе, одредили смо векторско поље X.

Посматрајмо сад пројекцију: $\pi : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^2, \quad \pi(x, y, p) = (x, y)$ у вертикалном правцу.

Дефиниција 1.1. Тачка $A \in \Sigma$ је *регуларна* ако није критична тачка пресликавања π.

Другим речима, тангентна раван у тачки A на површи Σ није ортогонална на (x, y) раван.

Скуп критичних вредности пресликавања π називамо *дискриминантном кривом.*

По Теореми о имплицитној функцији околина регуларне тачке A јесте график глатке функције $p = v(x, y)$.

Теорема 1.1. *Пројекција π слика интегралне криве на Σ векторског поља X у околини регуларне тачке у интегралне криве једначине*

$$\frac{dy}{dx} = v(x, y) \tag{1.8}$$

у околини пројекције исте тачке.

Доказ:
По дефиницији, пројекција контактне равни на (x, y) раван јесте права линија. Према томе, пошто је π локални дифеоморфизам, векторско поље диференцијалне једначине (1.6) у околини регуларне тачке $A \in \Sigma$ пројектује се у векторско поље диференцијалне једначине (1.8). Самим тим се и интегралне криве сликају једне у друге. $\square$

Напомена 1.1. У општем случају, пројекције интегралних кривих нису увек интегралне криве.

(1) $(y')^2 = x$; Површ $\Sigma : p^2 - x = 0$. је параболички цилиндар. Дискриминантна крива је y-оса.

$$\begin{gathered} p^2 = x \quad (\text{једначина површи } \Sigma), \\ 2pdp = dx \quad (\text{тангентна раван на површ } \Sigma), \\ dy = pdx \quad (\text{једначина контактне равни}). \end{gathered}$$

Лакше је да видимо шта се догађа у координатама (p, y), интегралне криве су одређене једначином $dy = 2p^2dp$. Према томе, интегралне криве на Σ су дате са $y = \frac{2}{3}p^3 + C, \quad x = p^2$

(2) $(y')^2 = y$; Површ $\Sigma : p^2 - y = 0$. је параболички цилиндар. Дискриминантна крива је x-оса.

$$\begin{gathered} p^2 = y \quad (\text{једначина површи } \Sigma), \\ 2pdp = dy \quad (\text{тангентна раван на површ } \Sigma), \\ dy = pdx \quad (\text{једначина контактне равни}). \end{gathered}$$

Радимо у стандардним координатама (x, y), интегралне криве су одређене једначином $p(2dp - dx) = 0$. Према томе, интегралне криве на Σ могу бити $x = 2p + C, \quad y = p^2$ или $p = 0, \quad y = 0$.

(3) (Клероова једначина)
$y = xy' + f(y')$; Површ $\Sigma : px + f(p) = y$.

$$
\begin{gathered}
px + f(p) = y \quad \text{(једначина површи } \Sigma\text{)}, \\
pdx + xdp + f^{'}dp = dy \quad \text{(тангентна раван на површ } \Sigma\text{)}, \\
dy = pdx \quad \text{(једначина контактне равни)}.
\end{gathered}
$$

Из друге и треће једначине следи $(x + f^{'})dp = 0$. Тачке за које важи $x + f^{'} = 0$ јесу критичне тачке $(\frac{\partial F}{\partial p} = -(x + f'(p)) = 0)$, а тачке за које важи $dp = 0$, односно $p = const = c$ су регуларне.

Према томе, решења јесу $y = cx + f(c)$. На пресеку са дискриминантном кривом решење није дефинисано јер су тангентна и контактна раван подударне.

1.5 Исправљивост векторског поља

Пре него што опишемо општу методу карактеристика, навешћемо нека тврђења која ће нам бити потребна за даљи рад.

Нека је X векторско поље на M,

$$
X : M \to TM, \quad X(x) \in T_xM. \tag{1.9}
$$

У интересу нам је да радимо са што једноставнијим векторским пољем. Посматрамо локалну варијанту:

$$
M = U \subset \mathbb{R}^n \quad X : U \to \mathbb{R}^n. \tag{1.10}
$$

Следећа дефиниција ће нам бити од користи у доказу Теореме о исправљивости векторског поља.

Нека је $\varphi : M \to N$, глатко пресликавање. Векторско поље $Y = \varphi_* X$ на многострукости N се дефинише као:

$$
(\varphi_* X)(\varphi(x)) := d\varphi(x)(X(x)) \in T_{\varphi(x)}N. \tag{1.11}
$$

Када пресликавање φ није сурјективно, наравно да векторско поље Y није дефинисано. Међутим, ми ћемо посматрати случај кад је φ дифеоморфизам. Тада је:

$$Y = (\varphi_* X)(y) := d\varphi(y) X(\varphi^{-1}(y)). \tag{1.12}$$

Векторско поље X на M задаје диференцијалну једначину

$$\frac{d\varphi_t}{dt}(x) = X(\varphi_t(x)), \quad \varphi_0 = Id. \tag{1.13}$$

Векторско поље Y на N задаје диференцијалну једначину

$$\frac{d\phi_t}{dt}(y) = Y(\phi_t(y)), \quad \phi_0 = Id. \tag{1.14}$$

Следећи став нам даје однос токова ϕ_t и φ_t.

Став 1.1. $\phi_t = \varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}$

Доказ:

Нека је $\psi_t = \varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$.

Желимо да докажемо да је $\psi_t = \phi_t$.

Прво проверавамо почетни услов: $\psi_0 = \varphi \circ \varphi_0 \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} = Id$

Затим рачунамо векторско поље које задаје ток ψ_t:

$$\frac{d\psi_t}{dt}(y) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}(y))$$
$$= d\varphi(\varphi_t \circ \varphi^{-1}(y)) \frac{d}{dt}(\varphi_t \circ \varphi^{-1}(y)) = d\varphi(\varphi^{-1} \circ \psi_t(y)) X(\varphi_t \circ \varphi^{-1}(y))$$
$$= d\varphi(\varphi^{-1} \circ \psi_t(y)) X(\varphi^{-1} \circ \psi_t(y)) = (\varphi_* X)(\psi_t(y)) = Y(\psi_t(y)).$$

Према томе, из Теореме о јединствености решења, следи да је $\psi_t = \phi_t$.

□

У складу са претходним ознакама је и следећа теорема:

Теорема 1.2. (о исправљивости векторских поља) *Нека је X векторско поље на многострукости M. Ако $X(x_0) \neq 0$ за неко $x_0 \in M$ онда постоји околина U_{x_0} и дифеоморфизам $\varphi : U_{x_0} \to V_{y_0}, y_0 = \varphi(x_0)$ тако да је:*

$$\varphi_* X = e_1 = (1, 0, ..., 0).$$

Доказ:

Познато је

$$\frac{d\varphi_t}{dt}(x) = X(\varphi_t(x)), \quad \varphi_0 = Id. \tag{1.15}$$

Одредимо хиперраван E, тд. $x_0 \in E$ и $L(X(x_0), E) = \mathbb{R}^n$.

Дефинишемо пресликавање $\psi : (t, x_2, ..., x_n) \to \varphi_t(0, x_2, ..., x_n)$. Пресликавање ψ је дифеоморфизам (локални) јер је $d\psi(x_0)$ недегенерисана матрица.

Уочимо да је $\psi_*(\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(0, x_2, ..., x_n) = X$.

Поставимо $\varphi := \psi^{-1}$ и то је управо тражено пресликавање. □

Сада можемо да радимо много лакше са векторским пољима. Наиме, једначина

$$\frac{d\varphi_t}{dt}(x) = X(\varphi_t(x)) \tag{1.16}$$

се трансформише у

$$\frac{d\phi_t}{dt} = e_1 \tag{1.17}$$

где је

$$\phi_t(x) = x + te_1 \tag{1.18}$$

што је значајно једноставније за рад.

Напомена 1.2. Аналогно тврђење не важи за диференцијалне форме.
Заиста, нека је дата произвољна $1-$форма α на многострукости M. Питамо се да ли је могуће да постоји нека карта око произвољне тачке тако да је $\alpha = dx_1$. Ако би то било тачно, тада:

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha) = f^*(d(dx_1)) = f^*(0) = 0, \tag{1.19}$$

одакле следи да је затвореност диференцијалне форме неопходан услов за њену исправљивост. У трећем поглављу, доказаћемо да је овај услов довољан.

1.6 Општа метода карактеристика

Проблем 1.1. За векторско поље F на многострукости M ($U \subset \mathbb{R}^n$) потребно је одредити интегралну подмногострукост $N \subset M$ тд. $(\forall x \in N) \quad F(x) \in T_xN$. Ово је опште постављен проблем. Касније ћемо се више бавити неким специфичним случајевима.

Пример 1.4. Нека је дата линеарна хомогена парцијална једначина

$$\sum_{j=1}^{n} a_j u_{x_j} = 0.$$

Решење ове једначине, као график функције, се налази у простору $\mathbb{R}^{n+1}$. Векторско поље које одговара нашем проблему је $F = (a_1(x), ..., a_n(x), 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Јасно је да је $F \in T\Gamma_u$ где је $\Gamma_u = \{(x_1, ..., x_n, u(x_1, ..., x_n))\}$, зато што функцију u можемо да видимо као $x_{n+1} = u(x_1, \ldots, x_n)$. Затим: $\Gamma_u = \{x_{n+1} = u(x_1, \ldots, x_n)\}$-$= \{f = 0\}$ за $f = u - x_{n+1}$ где је $\nabla f = (u_{x_1,...,u_{x_n}}, -1) \perp F$ па знамо да $F \in T\Gamma_u$.

Дефиниција 1.2. *Кошијев проблем* векторског поља F са почетном $k-$димензионом многострукошћу Γ је проблем проналажења $(k+1)-$димензионе интегралне подмногострукости векторског поља F која садржи почетну многострукост Γ.

Дефиниција 1.3. Тачку $x \in \Gamma$ називамо *карактеристичном тачком* ако $F_x \in T_x\Gamma$.

Теорема 1.3. *Ако тачка $x \in \Gamma$ није карактеристична тада постоји околина $U_x \subset \Gamma$ и јединствено решење Кошијевог проблема на $U_x \subset N$.*

Доказ:

Претпоставка је локалног типа и инваријантна у односу на дифеоморфизам. Зато можемо да исправимо векторско поље. Дакле, довољно је да посматрамо:

$$F = e_1 = (1, 0, ..., 0) \tag{1.20}$$

Сада лако видимо да је јединствено локално решење дато са

$$N = \{x + te_1 \mid x \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}\}. \tag{1.21}$$

□

Проблем 1.2. Сада посматрамо другачији задатак, нека је дата многострукост M и фамилија хиперравни $E_x^{n-1} \subset T_xM$ где је $\dim M = n$. Питање је да ли постоји $N \subset M$ тако да

$$T_xN = E_x^{n-1} \quad \text{за} \quad (\forall x \in N). \tag{1.22}$$

Ако постоји, кажемо да је E_x^{n-1} интеграбилна дистрибуција.
Фамилију $E_x^{n-1}, x \in M$ можемо да одредимо бар на два различита начина. Први

је преко диференцијалних форми

$$E_x^{n-1} = \ker \alpha_x, \quad \alpha \in \Omega^1(M)$$

што може бар локално да се схвати.

Други начин је преко векторског поља

$$(\forall x \in M) \quad V_x \perp E_x^{n-1}. \tag{1.23}$$

Најпознатији пример неинтеграбилне 1−форме зове се контактна форма и дат је у $\mathbb{R}^3$. Наравно, за форму α кажемо да је интеграбилна ако $\ker \alpha$ задаје интеграбилну дистрибуцију.

Теорема 1.4. *Форма $\alpha = dz - ydx$ у $\mathbb{R}^3$ није интеграбилна.*

Доказ:

Нека је $\Pi_x = \ker \alpha_x$, $\gamma \subset \Pi_x$ произвољна крива, C_γ је цилиндар, односно унија интегралних кривих векторског поља V_x кроз γ.
Претпоставимо да је α интеграбилна, и означимо са N њену интегралну површ кроз координатни почетак.

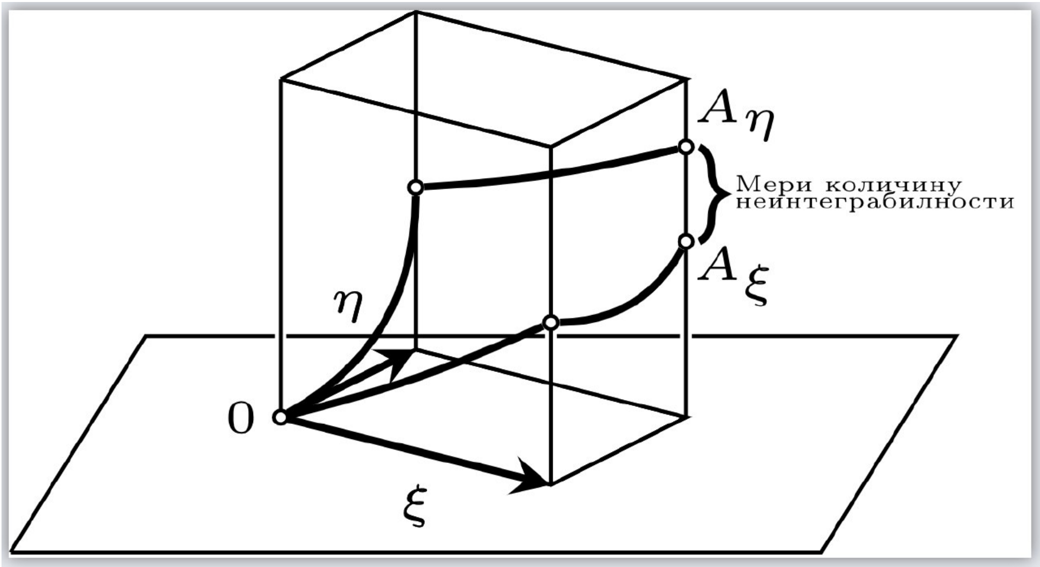
Нека је $F_x := T_x C_\gamma \cap \Pi_x$ векторско поље и $\tilde{\gamma}$ интегрална крива за F_x. Тада је $\tilde{\gamma} = C_\gamma \cap N$.

За γ ћемо изабрати мали паралелограм у околини координатног почетка у $\mathbb{R}^2$, тј. за пар вектора (ξ, η) у хоризонталној равни посматрајмо паралелограм одређен са тачком O и ивицама ξ и η. Многострукост N је локално график функције $z = \varphi(x, y)$ јер су у близини $(0,0,0)$ dx и dy линеарно независни на TN. Зато је $\tilde{\gamma} = \varphi(\gamma)$ у близини нуле.

Постоје две путање којима можемо да стигнемо до супротног темена паралелограма у равни. Када подигнемо те две путање на N, долазимо до исте тачке A_ξ и A_η, јер и у равни O_{xy} долазимо до исте тачке, а N је график (ово све важи под претпоставком да N постоји). Зато, ако покажемо да функција $f : \Pi_x \mapsto \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$f(\xi, \eta) := \int_{A_\xi}^{A_\eta} \alpha, \tag{1.24}$$

није једнака нули, доказали смо да α није интеграбилна ни у једној околини нуле. Слично се може показати да α није интеграбилна ни у једној околини произвољне тачке.



Посматрамо Тејлоров развој функције f у тачки $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f(\xi,\eta) &= f(0,0) + f_\xi^{'}(0,0)\xi + f_\eta^{'}(0,0)\eta + \omega(\xi,\eta) + \sigma(\xi,\eta)^2 \\ &= \omega(\xi,\eta) + \sigma(\xi,\eta)^2. \end{aligned}$$

Тврдимо да је $\omega = d\alpha$. Морамо да рачунамо:

$$\omega(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) + \sigma(\xi,\eta)^2 = \int_{A_\xi}^{A_\eta} \alpha + \sigma(\xi,\eta)^2.$$

Желимо да израчунамо интеграл:

$$\int_{A_\xi}^{A_\eta} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha$$

где је γ_1 затворена крива, а γ_2 унија 4 интегралне криве векторског поља F_x. Други интеграл је очигледно нула, остаје да израчунамо само први.

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \iint_D d\alpha = \iint_\Pi d\alpha + (4 \text{ интеграла по бочним странама}),$$

где је $\gamma_1 = \partial D$.

Знамо да је $d\alpha = dx \wedge dy$, па нам је олакшан рачун:

$$\iint_\Pi d\alpha = \iint_\Pi dx \wedge dy = d\alpha(\xi,\eta).$$

Интеграли $\iint d\alpha$ по бочним странама су реда величине ξ^3.

Тиме смо доказали да је $\omega(\xi, \eta) = d\alpha(\xi, \eta)$, што смо и тврдили.

Пошто је α контактна форма, знамо да је $d\alpha\ |_{\ker\alpha} \neq 0$ што нам јасно даје да функција f није нула, па форма α није интеграбилна. $\square$

Напомена 1.3. Постоји још један, лакши начин, да докажемо да форма α није интеграбилна, односно да није $d\alpha = 0$ кад год је $\alpha = 0$. Претходна прича је еквивалента са тим да је

$$\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$$

што је Фробенијусов услов (видети 2.7).

У нашем примеру имамо

$$\alpha \wedge d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz \text{ што није идентички једнако нули у целом простору } \mathbb{R}^3.$$

Претходна проблематика само је специјалан случај следећег проблема. Задата је дистрибуција равни $E_x \in T_x M$ у тангентном простору многострукости M. Тражимо N тако да је N површ и за све $x \in N$ важи $T_x N = E_x$.

Дефиниција 1.4. Нека је M^{2n+1} контактна многострукост, а α контактна форма. $\Pi_x = \ker \alpha_x$ је хиперраван, док је E^{2n} глатка хиперповрш у M. За E кажемо да је *некарактеристична* ако су тангентна раван $T_x E^{2n}$ и Π_x трансверзалне у свакој тачки $x \in E$ (ознака $\Pi_x \pitchfork E^{2n}$).

Дефиниција 1.5. Пресек тангетне равни некарактеристичне хиперповрши са контактном равни у контактној многострукости називамо *карактеристичном равни* у тачки:

$$P_x = T_x E \cap \Pi_x.$$

Дефиниција 1.6. *Карактеристичан правац* l_x у некарактеристичној тачки x хиперповрши у контактном простору јесте симплектички комплемент карактеристичне равни у контактној равни; l_x је симплектички комплемент од:

$$P_x^{2n-1} = T_x E^{2n} \cap \Pi_x^{2n} \text{ у } \Pi_x^{2n}.$$

Дефиниција 1.7. Интегралне криве поља карактеристичних праваца на некаракеристичној хиперповрши E у контактној многострукости M називамо *карактеристикама хиперповрши* E.

Нека је $N^k \subset E^{2n}$ $k-$димензиона интегрална многострукост поља контактних равни.

Дефиниција 1.8. Тачка $x \in N^k$ назива се *некарактеристичном* ако тангентна раван T_xN не садржи карактеристичан правац l_x.

Дефиниција 1.9. *Кошијев проблем* за хиперповрш E^{2n} у контактној многострукости M^{2n+1} са почетном многострукошћу N^{n-1} јесте одређивање интегралне многострукости Y^n поља контактних равни, тако да $N^{n-1} \subset Y^n \subset E^{2n}$.

Кошијев проблем је решив под одређеним условима.

Теорема 1.5. *Нека је x некарактеристична тачка почетне многострукости N^{n-1}. Тада постоји околина U тачке x, тако да постоји решење $E^{2n} \cap U$ Кошијевог проблема са почетним условом $N^{n-1} \cap U$ које је локално јединствено. Многострукост Y^n састоји се од карактеристика које пролазе кроз тачке почетне многострукости N^{n-1}.*

Скица доказа теореме:

Доказ можемо грубо поделити у 4 корака:

1) Y^n је глатка многострукост димензије n;

2) $Y^n \subset E^{2n}$;

3) $T_xN \subset \Pi_x$;

4) Јединственост конструисане многострукости Y^n.

Доказ се доста ослања на следећу лему, која је интересантна сама за себе.

Лема 1.1. *Нека је V векторско поље, а $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ тако да је $V \in \ker\alpha$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(А) $\xi \in \ker\alpha \implies d\alpha(V, \xi) = 0$;

(Б) Ток векторског поља V чува језгро 1-форме α.

Доказ леме:

Шта значи да ток векторског поља „чува језгро α"?

$$\xi \in \ker \alpha \implies \Phi_{t*}\xi \in \ker \alpha. \tag{1.25}$$

По Теореми о исправљивости векторског поља (1.2), векторско поље V можемо да видимо у облику $V = e_1$. Форму α можемо да запишемо у облику $\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)dx_j$. Заменом добијамо: $\alpha(V) = a_1(x) = 0 \implies \alpha(x) = \sum_{j=2}^{n} a_j(x)dx_j$.

(А) $\implies$ (Б):

$$V = e_1$$
$$\frac{d\Phi_t}{dt}(x) = e_1$$
$$\Phi_t(x) = x + te_1$$
$$\Phi_{t*}(\xi)(\Phi_t(x)) = d\Phi_t(x)(\xi(x)) = \xi(x)$$
$$\xi \in \ker \alpha \implies \Phi_{t*}(\xi) \in \ker \alpha$$
$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$
$$0 = \alpha_x(\xi) = \sum_{j=2}^{n} a_j(x)\xi_j \overset{?}{\implies} (\forall t)\ d\Phi_t(x)(\Phi_{t*}) = \sum_{j=2}^{n} a_j(x+te_1)\xi_j = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{d}{dt}\sum_{j=2}^{n} a_j(x+te_1)\xi_j = 0$$
$$\sum_{j=2}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_1}\xi_j = 0,$$

а ово последње је управо $d\alpha(V,\xi)$ (видети доказ другог смера).

(Б) $\implies$ (А):

$$\alpha(\xi) = 0 \implies d\alpha(V,\xi) = 0?$$
$$d\alpha = \sum_{j=2}^{n} d(a_j(x)) \wedge dx_j$$
$$dx_i \wedge dx_j(V,\xi) = \det \begin{bmatrix} dx_i(V) & dx_i(\xi) \\ dx_j(V) & dx_j(\xi) \end{bmatrix}$$
$$d\alpha(V,\xi) = \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j(V,\xi).$$

За $V = e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ имамо

$$dx_k \wedge dx_j(V,\xi) = \det \begin{bmatrix} dx_k(\frac{\partial}{\partial x_1}) & dx_k(\xi) \\ dx_j(\frac{\partial}{\partial x_1}) & dx_j(\xi) \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

па је

$$d\alpha(V,\xi) = \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j(V,\xi)$$

$$= \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \det \begin{bmatrix} dx_k(\frac{\partial}{\partial x_1}) & dx_k(\xi) \\ 0 & dx_j(\xi) \end{bmatrix} = \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_1} \xi_j = 0.$$

$\square$

1.7 Лагранж-Шарпијев метод

Вратићемо се сада на нелинеарну парцијалну диференцијалну једначину првог реда функције $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$,

$$F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0. \tag{1.27}$$

Целу једначину ћемо видети као хиперповрш E^{2n} у многострукости $M^{2n+1} = J(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 1-џетова са стандардном контактном структуром (видети први додатак). Са $(x_1, ..., x_n, u, p_1, ..., p_n)$ означићемо локалне координате у простору 1-џетова. Сада једначину (1.27) можемо да видимо у облику:

$$F(x, u, p) = 0. \tag{1.28}$$

Решавање једначине (1.28) своди се на одређивање интегралних површи поља контактних равни у E^{2n} које су 1-графови функција. Проблем се своди на одређивање карактеристика, а потом на решавање обичних диференцијалних једначина.

Став 1.2. *Обичне диференцијалне једначине којима су одређене карактеристике једначине (1.28) су:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p, \\ \dot{p} &= -F_x - pF_u, \\ \dot{u} &= pF_p. \end{aligned}$$

Доказ:

Посматрајмо многострукост задату са $F(x,u,p)=0$ у $\mathbb{R}^{2n+1}$. Нека је (X,U,P) вектор који припада једној од тангентних равни многострукости $F(x,u,p)=0$. Тада

$$F_xX + F_uU + F_pP = 0. \tag{1.29}$$

Вектор (X,U,P) лежи у контактној равни ако га контактна форма $\alpha = du - p\,dx$ анулира ($\alpha(X,U,P)=0$) па је $U = pX$. Пошто је вектор (X,U,P) у пресеку тангентне и контактне равни мора бити:

$$(F_x + F_u p)X + F_pP = 0. \tag{1.30}$$

Сада желимо да одредимо карактеристичан правац, односно тражимо симплектички комплемент (1.30) (видети други додатак). Треба нам једначина

$$d\alpha = d(du - pd\,x) = dx \wedge dp. \tag{1.31}$$

Одабраћемо два вектора, $(\dot{x}, \dot{u}= p\,\dot{x}, \dot{p})$ и (X,U,P) из карактеристичне равни.

$$d\alpha((\dot{x}, p\,\dot{x}, \dot{p}),(X,U,P)) = \dot{x}\,P - \dot{p}\,X = 0. \tag{1.32}$$

Упоредимо једначине (1.30) и (1.32). Већ је познато да је ($\dot{u}= p\,\dot{x}$). Изједначавањем израза добијамо:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= F_p,\\
\dot{p} &= -F_x - pF_u,\\
\dot{u} &= pF_p.
\end{aligned}$$

□

До истог резултата, али другачијом методом, ћемо доћи и у другом поглављу.

2 Алгебарске технике и дефиниција спољашњих диференцијалних система

У овом поглављу увешћемо дефиницију *спољашњег диференцијалног система.* На почетку уводимо све алгебарске структуре које су нам потребне. Након тога дефинишемо спољашњи диференцијални систем. Потом доказујемо Фробенијусову теорему. Структура поглавља заснована је на књизи Р. Брајанта [10], алгебарске структуре на књизи К. Јанга[7]. Сви наведени аутори се позивају на књигу Е. Картана [6].

2.1 Спољашње алгебре - основне дефиниције и тврђења

Ако је реални векторски простор V димензије n и његов дуални простор V^*, елементе $x \in V$ зовемо векторима, а елементе $\omega \in V^*$ ковекторима.

Можемо дефинисати пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \to \mathbb{R}$, линеарно по оба аргумента:

$$\langle x, \omega \rangle = \omega(x), \quad x \in V, \quad \omega \in V^*.$$

Конструисаћемо два нова простора, простор мулти-вектора $\Lambda(V)$ и простор мулти-форми $\Lambda(V^*)$. Намера нам је да проширимо претходно пресликавање на простор $\Lambda(V) \times \Lambda(V^*)$.

Нека је S_p симетрична група реда $p!$. Ако је дата пермутација $\sigma \in S_p$ можемо да дефинишемо $p-$линеарно пресликавање

$$f_\sigma : V \times ... \times V \longrightarrow V \otimes ... \otimes V, \quad f_\sigma(v_1, ..., v_p) = v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(p)}.$$

По универзалном својству пресликавања тензорског производа (видети трећи додатак) постоји линеарно пресликавање

$$\sigma^{'} : V \otimes ... \otimes V \longrightarrow V \otimes ... \otimes V \tag{2.1}$$

тако да је $\sigma^{'}(v_1 \otimes ... \otimes v_p) = f_\sigma(v_1, ..., v_p)$. Дефинишемо линеарна пресликавања

$$S_p, A_p : V \otimes ... \otimes V \longrightarrow V \otimes ... \otimes V, \; S_p(x) = \frac{1}{p!} \sum \sigma^{'}(x),$$
$$A_p(x) = \frac{1}{p!} \sum (-1)^{sgn(\sigma)} \sigma^{'}(x),$$

где се сумира по свим пермутацијама $\sigma \in S_p$.

Посматрајмо језгра пресликавања $I_p = \operatorname{Ker} A_p$ и $J_p = \operatorname{Ker} S_p$.

Сада можемо дефинисати наш простор

$$\Lambda^p(V) = V \otimes ... \otimes V / I_p.$$

Према претходном, брзо се доказује да је:

$$\Lambda^p(V) = 0, \quad p \geq n; \quad \dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

Дефиниција 2.1. *Спољашња алгебра* над векторским простором V је директна сума

$$\Lambda(V) = \oplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(V),$$

што је градуисана алгебра над $\mathbb{R}$ димензије 2^n.

Дефиниција 2.2. *Хомогени идеал* простора $\Lambda(V)$ је идеал I такав да је

$$I = \oplus_{p=0}^{n} I_p, \quad I_p = I \cap \Lambda^p(V).$$

Другачије речено, кад год је $\alpha = \sum \alpha^p \in I$ где су $\alpha^p \in \Lambda^p(V)$ свако α^p исто треба да припада идеалу I.

Ако је $\Sigma \subset \Lambda(V)$ скуп који садржи хомогене елементе (припадају само једном од $\Lambda^p(V)$), са $I(\Sigma)$ означићемо најмањи идеал који садржи Σ. Овај идеал је хомоген и назваћемо га *алгебарским идеалом генерисаним* са Σ. Имамо:

$$I(\Sigma) = \{x^i \wedge \sigma_i \quad \text{коначне суме} : \sigma_i \in \Sigma, x^i \in \Lambda(V)\},$$

нека је

$$I_p(\Sigma) = I(\Sigma) \cap \Lambda^p(V) = \{x^i \wedge \sigma_i : \sigma_i \in \Sigma, \deg(\sigma_i) = p_i, x^i \in \Lambda(V), \deg(x^i) = p - p_i\}.$$

Аналогно формирамо спољашњу алгебру и над V^*.

$$\Lambda(V^*) = \Lambda^0(V^*) + \Lambda^1(V^*) + ... + \Lambda^n(V^*),$$

где је

$$\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}, \quad \Lambda^1(V^*) = V^*.$$

Дефиниција 2.3. Елемент скупа $\Lambda^p(V^*)$, називамо *$p-$формама* на V; можемо да их видимо као алтернирајуће $p-$линеарне функционале на $V \times ... \times V$, док елемент скупа $\Lambda^p(V)$ *$p-$вектор* на V.

Нека је (e_i) база векторског простора V, а дуална база (e^i). Тада се $p-$вектор x може представити у облику:

$$x = \frac{1}{p!} a^{i_1 i_2 ... i_p} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}; \tag{2.2}$$

док се $p-$форма α на V може представити као

$$x = \frac{1}{p!} a_{i_1 i_2 ... i_p} e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p}; \tag{2.3}$$

где су коефицијенти антисиметрични. Сада можемо да проширимо пресликавање са почетка поглавља. У духу претходних записа вектора и форми имамо:

$$\langle \alpha, x \rangle = \alpha(x) = \frac{1}{p!} a^{i_1 i_2 ... i_p} a_{i_1 i_2 ... i_p}. \tag{2.4}$$

Јасно је да је за $\alpha \in \Lambda^p(V^*)$ и $x \in \Lambda^q(V)$ при услову $p \neq q$, $\langle \alpha, x \rangle = 0$ по дефиницији. Из адитивности ($\langle \alpha + \beta, x \rangle = \langle \alpha, x \rangle + \langle \beta, x \rangle$ и $\langle \alpha, x + y \rangle = \langle \alpha, x \rangle + \langle \alpha, y \rangle$) следи да је добро дефинисано пресликавање

$$\langle \cdot \rangle : \Lambda(V^*) \times \Lambda(V) \mapsto \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Напомена 2.1. Претходно дефинисано пресликавање је линеарно, тако да је било довољно да посматрамо мономе и за p-векторе и за p-форме.

За $p-$вектор $x \in \Lambda^p(V)$ кажемо да је *растављив* ако је облика

$$x = v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p$$

за неке векторе $v_i \in V$. Приметимо да је $x \neq 0$ ако и само ако су вектори (v_i) линеарно независни. На основу тога, ненула растављив $p-$вектор x дефинише $p-$димензиони потпростор $E \subset V$ ($p-$раван) који је независан у односу на репрезентацију вектора x у облику монома. Тај простор, односно раван, ћемо записивати као

$$E = \text{span}\{v_1, ..., v_p\}.$$

Нека је $G(n,p)$ Грасманова многострукост $p-$равни у $\mathbb{R}^n$ и нека је $E \in G(n,p)$. Као малопре, пишемо

$$x_E = v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p.$$

Нека је $v_1', v_2', ..., v_p'$ друга база векторског простора E. Тада је:

$$x_{E'}' = v_1' \wedge v_2' \wedge ... \wedge v_p'$$

ненула умножак од x_E. Ми ћемо назвати x_E, дефинисан до на реалан ненула фактор, *Грасмановим координатним вектором* од E и означаваћемо:

$$[x_E] = E,$$

где угласта заграда означава класу вектора до на реалну константу различиту од нуле.

Дефиниција 2.4. Ендоморфизам f адитивне структуре $\Lambda(V)$ се назива *деривацијом* ако задовољава следеће услове:

(а) $f((-1)^p x) = (-1)^q f(x), \quad x \in \Lambda^p(V), \quad f(x) \in \Lambda^q(V);$

(б) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge y + (-1)^p x \wedge f(y), \quad x \in \Lambda^p(V).$

Ендоморфизам f адитивне структуре $\Lambda(V)$ зваћемо *антидеривацијом* ако задовољава (б) и

(а') $f((-1)^p x) = (-1)^{q+1} f(x), \quad x \in \Lambda^p(V), \quad f(x) \in \Lambda^q(V).$

За претходно пресликавање f кажемо да је степена d ако за свако p важи

$$f(\Lambda^p(V)) \subset \Lambda^{p+d}(V).$$

За $v \in V$ и $p-$форму α на V дефинишемо унутрашњи производ форме α са вектором v, у ознаци $i_v\alpha$, што је $(p-1)-$форма на V дата са:

$$i_v\alpha(v_1, ..., v_{p-1}) = \alpha(v, v_1, ..., v_{p-1}), v_i \in V.$$

Очигледно је $\alpha \in V^*, i_v\alpha = \alpha(v) \in \mathbb{R}$.

Став 2.1. *Ако је $v \in V$, онда је i_v анти-деривација.*

Доказ:

За све $\theta^i \in V^*$ имамо

$$
\begin{aligned}
i_v(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p)(v_1, ..., v_{p-1}) &= (\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p)(v, v_1, ..., v_{p-1}) \\
&= \det \begin{bmatrix} \theta^1(v) & \theta^1(v_1) & \theta^1(v_2) & \cdots & \theta^1(v_{p-1}) \\ \theta^2(v) & \theta^2(v_1) & \theta^2(v_2) & \cdots & \theta^2(v_{p-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^p(v) & \theta^p(v_1) & \theta^p(v_2) & \dots & \theta^p(v_{p-1}) \end{bmatrix} \\
= \sum (-1)^{i+1} \theta^i(v) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{i-1} \wedge \theta^{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta^p(v_1, \dots, v_{p-1}).
\end{aligned}
$$

Када распишемо претходну једначину, добијамо:

$$
\begin{aligned}
i_v(\theta^1 \wedge ... \wedge \theta^p) = \sum (-1)^{i+1} \theta^i(v) \theta^1 \wedge ... \wedge \theta^{i-1} \wedge \theta^{i+1} \wedge ... \wedge \theta^p \\
= i_v\theta^1(\theta^2 \wedge ... \wedge \theta^p) - i_v\theta^2(\theta^1 \wedge \theta^3 \wedge ... \wedge \theta^p) + ... + (-1)^{p-1} i_v\theta^1(\theta^2 \wedge ... \wedge \theta^p)
\end{aligned}
$$

□

Унутрашњи производ

$$i_v : \Lambda(V^*) \longrightarrow \Lambda(V^*)$$

можемо да видимо као *адјунговани* оператор *спољашњег* производа

$$e_v : \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(V), \quad e_v(x) = v \wedge x,$$

односно у другачијем запису

$$< i_v\varphi, x > = < \varphi, v \wedge x >, \quad x \in \Lambda(V), \varphi \in \Lambda(V^*). \tag{2.6}$$

У даљем тексту користићемо некад другачију ознаку за унутрашњи производ

$$v \lrcorner \varphi := i_v\varphi \quad v \in V, \quad \varphi \in \Lambda(V^*).$$

Став 2.2. *Ненула $p-$форма $\alpha \in \Lambda^p(V^*)$ је растављива ако и само ако је дуал придруженог простора димензије p.*

Доказ:

Претпоставимо да је $\alpha = \theta^1 \wedge ... \wedge \theta^p, \theta^i \in V^*$. Јасно је да је

$$A(\alpha)^\perp = \operatorname{span}\{\theta^1, ..., \theta^p\}.$$

Обратно, претпоставимо да је α једна $p-$форма и да је $\dim A(\alpha)^\perp = p$. Нека је $\theta^1, ..., \theta^p$ база простора $A(\alpha)^\perp$ и проширимо је до базе $\theta^1, ..., \theta^n$ простора V^*.

Такође, нека је $e_1, ..., e_n$ база простора V дуална бази (θ^j). Нека је

$$\alpha = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_p}, \quad 1 \leq i_j \leq n.$$

Тврдимо да је $a_{i_1 \dots i_p} = 0$ ако је неко $i_j > p$.
Посматрајмо унутрашњи производ

$$i_{e_1} \alpha = \frac{1}{(p-1)!} a_{1 i_2 \dots i_p} \theta^{i_2} \wedge ... \wedge \theta^{i_p}.$$

Следи да је

$$i_{e_{j_{p-1}} \dots e_{j_1}} \alpha = a_{j_1 \dots j_{p-1} i} \theta^i \in A(\alpha)^{\perp},$$

и $a_{j_1 \dots j_{p-1} i} = 0$ за $i > p$ чиме је доказ потпун.

□

Из претходног става следи да ако је α раставља **p**−форма на V тад је за неки ненула реални број $c \in \mathbb{R}$

$$\alpha = c \quad \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge ... \wedge \theta^p,$$

где је $\theta^1, \theta^2, ..., \theta^p$ база простора $A(\alpha)^{\perp}$.

Нека је $I \subset \Lambda(V^*)$ хомогени идеал. Дефинишемо *Кошијев карактеристични простор* идеала I као потпростор векторског простора V са

$$A(I) = \{v \in V : i_v \alpha \in I \quad \forall \alpha \in I\}.$$

Дуални придружени простор идеала I је дефинисан да буде анихилатор од $A(I)$, односно:

$$A(I)^{\perp} = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in A(I)\}.$$

Њега ћемо некад називати *ретракциони простор* и означаваћемо га са $C(I)$.

Ради примене значајно нам је да одредимо генераторе хомогеног идеала I, које на неки начин желимо да минимализујемо. Следећа теорема ће нам помоћи у томе.

Теорема 2.1. *Нека је I хомогени идеал у $\Lambda(V^*)$. Он има скуп генератора који су елементи $\Lambda(A(I)^{\perp})$.*

Прво ћемо доказати следећу лему.

Лема 2.1. *Нека је $q-$форма α задата са*

$$\alpha = \frac{1}{q!} a_{i_1 i_2 ... i_q} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge ... \wedge \theta^{i_q}.$$

Форма α не укључује θ^t ако и само ако $i_{e_t}\alpha = 0$.

Доказ леме:

Знамо да је

$$i_{e_t}\alpha = \frac{1}{(q-1)!} a_{t i_1 ... i_{q-1}}.$$

Сада је јасно да α не укључује θ^t ако и само ако:

$$a_{i_1 ... i_q} = 0, \quad \text{кад год је неко} \quad i_j = t;$$

ово важи ако и само ако је:

$$a_{t i_1 ... i_{q-1}} = 0 \quad \forall i_1, ..., i_{q-1}$$

□

Доказ теореме:

Нека је $e_1, ...e_n$ база векторског простора изабрана тако да је:

$$A(I) = \text{span}\{e_{p+1}, ..., e_n\}, \quad A(I)^\perp = \text{span}\{\theta^1, .., \theta^p\},$$

где форме θ^i чине дуалну базу и $p = \dim A(I)^\perp$. Нека је $\{\alpha_A\}$ скуп генератора идеала I. Можемо да претпоставимо да је свако α_A хомогено и да нема $0-$форми, тј. функција, у скупу генератора. Иначе бисмо могли да генеришемо цео простор $\Lambda(V^*)$ и то би био крај доказа.

Ако је $\alpha_1 \quad 1-$форма таква да:

$$\alpha_1 = a_i \theta^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

онда према претпоставци, за све $p+1 \leq k \leq n$,

$$i_{e_k}\alpha_1 = a_k \in I.$$

Према томе, $a_k = 0$ и $\alpha_1 = a_1\theta^1 + ... + a_p\theta^p \in A(I)^\perp$. Доказали смо да сви генератори степена један припадају $A(I)^\perp$.

Претпоставимо сада да сви генератори степена највише q припадају $\Lambda(A(I)^\perp)$

и нека је α генератор степена $q+1$. Нека је

$$\beta = \alpha - \theta^{p+1} \wedge (i_{e_{p+1}}\alpha).$$

Форма $\theta^{p+1} \wedge (i_{e_{p+1}}\alpha)$ се налази у идеалу I јер $e_{p+1} \in A(I)$, а I је идеал. Сада је

$$i_{e_{p+1}}\beta = \theta^{p+1} \wedge (i^2_{e_{p+1}}\alpha) = 0$$

због чињенице да је i антидеривација. Према доказаној леми форма β не садржи θ^{p+1}. Понављајући овај поступак коначно много пута можемо да заменимо α елементом који не садржи форме $\theta^{p+1}, ..., \theta^n$. Тиме смо доказали теорему индуктивним поступком.

$\square$

За дат идеал $I \subset \Lambda(V^*)$ желимо да одредимо најмањи потпростор $W^* \subset V^*$ такав да је I генерисан, као идеал, скупом S елемената из $\Lambda(W^*)$. Самим тим, елемент идеала I је сума елемената облика $\sigma \wedge \beta, \sigma \in S, \beta \in \Lambda(V^*)$. Ако је $x \in W = (W^*)^\perp$, имамо, с обзиром на то да је $x \lrcorner$ анти-деривација,

$$x \lrcorner \sigma = 0,$$

па самим тим важи

$$x \lrcorner (\sigma \wedge \beta) = \pm \sigma \wedge (x \lrcorner \beta) \in I.$$

2.2 Систем спољашњих једначина на векторском простору

Нека је $G(V, q)$ Грасманова многострукост $q-$равни на векторском простору V. Када фиксирамо базу простора V, можемо простор V идентификовати са $\mathbb{R}^n$ и $G(V, q) = G(\mathbb{R}^n, q)$. Нека је Φ $p-$ форма на векторском простору V, а $E \in G(V, q)$ једна $q-$раван у V. Тада је рестрикција Φ на E, у запису $\Phi|_E$, заправо једна $p-$форма на E дата са

$$(v_1, ..., v_p) \mapsto \Phi(v_1, ..., v_p), \quad v_i \in E.$$

Кажемо да је $q-$раван E решење једначине $\Phi = 0$ ако је $\Phi|_E = 0$. Приметимо да је за $q < p$ тривијално $\Phi|_E = 0$.

Дефиниција 2.5. *Систем спољашњих једначина* на векторском простору V је коначан скуп једначина

$$\Sigma = \{\alpha_i = 0, \quad 1 \le i \le s\},$$

где је свако α_i хомогена спољашња форма на V. Степен система Σ је степен форме највишег степена у систему Σ. Решења система Σ су $q-$равни E у V ако је за свако $\alpha_i \in \Sigma \quad \alpha_i|_E = 0$.

Нека је Σ систем спољашних диференцијалних једначина на V и нека је

$$I(\Sigma) \subset \Lambda(V^*)$$

хомогени идеал генерисан формама из Σ. Јасно је да се свако решење система Σ анулира елементима из $I(\Sigma)$. Међутим, могуће је да постоје форме које анулирају свако решење система Σ, али нису у идеалу $I(\Sigma)$.

Дефиниција 2.6. Систем Σ је *комплетан* ако свака форма која *поништава* свако решење припада хомогеном идеалу $I(\Sigma)$.

Став 2.3. *Нека је систем Σ дат са $\Sigma = \{\theta^1, ..., \theta^s\}$, где су θ^k линеарно независне 1-форме. Онда је Σ комплетан систем.*

Доказ:

Претпоставимо да ненула форма Φ поништава произвољно решење E система Σ. Проширимо систем Σ до базе $\theta^1, ..., \theta^n$ простора V^*. Форму Φ можемо да запишемо у облику:

$$\Phi = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \sum a_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_p}.$$

Довољно је посматрати случај где је $E = [e_{s+1} \wedge ... \wedge e_n]$ где је θ^i дуалан елементу e_i. Тада је

$$\Phi = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \sum_{s+1 \le i_j \le n} a_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge ... \wedge \theta^{i_p}.$$

Произвољно решење система Σ је потпростор од E. Тада

$$\Phi|_E = 0$$

ако и само ако

$$a_{i_1 \dots i_p} = 0 \quad \text{кад су сви} \quad i_j > s.$$

То значи да у сваком моному у Φ постоји бар једно θ^i за неко $i \leq s$, из чега следи резултат.

$\square$

Дефиниција 2.7. Два система спољашњих једначина на векторском простору V, Σ_1 и Σ_2 су *алгебарски еквивалентна* ако је $I(\Sigma_1) = I(\Sigma_2)$.

Јасно је да алгебарски еквивалентни системи имају исти скуп решења, али обратно тврђење је тачно само за комплетне системе.

Нека је Σ систем спољашњих једначина на векторском простору V. Придружимо систему Σ систем $A^{\perp}(\Sigma)$, дефинисан као дуал придруженог простора идеала $I(\Sigma)$,

$$A^{\perp}(\Sigma) = A(I(\Sigma))^{\perp}.$$

Друкчије записано,

$$A^{\perp}(\Sigma) = \{v \in V : i_v\alpha \in I(\Sigma), \forall\alpha \in I(\Sigma)\}^{\perp} \subset V^*.$$

Став 2.4. *Алгебарски еквивалентни системи имају исте придружене просторе.*

Доказ:

Приметимо да је

$$A(I(\Sigma)) = \{v \in V : i_v\alpha \in I(\Sigma) \quad \forall\alpha \in \Sigma\}.$$

Да бисмо ово доказали претпоставимо да је v вектор такав да је $i_v\alpha \in I(\Sigma)$ за све $\alpha \in \Sigma$. Било које $\beta \in I(\Sigma)$ може да се запише у облику

$$\beta = \varphi^1 \wedge \alpha_1 + ... + \varphi^k \wedge \alpha_k$$

за неке $\varphi^j \in \Lambda(V^*)$ и $\alpha_k \in \Sigma$. Тада је

$$i_v\beta = (i_v\varphi^1 \wedge \alpha_1) \pm \varphi^1 \wedge (i_v\alpha_1) + ... \in I(\Sigma).$$

$\square$

Теорема 2.2. *Нека је Σ систем спољашњих једначина на V, њему придружен простор $A^{\perp}(\Sigma)$ димензије s, за који важи*

$$A^{\perp}(\Sigma) = \mathrm{span}\{\theta^1, ..., \theta^s\} \subset V^*.$$

Тада постоји систем Σ' који је алгебарски еквивалентан са Σ тако да форме у Σ' укључују само θ^k, односно, $\Sigma' \subset \Lambda(A^{\perp}(\Sigma))$.

Доказ:

Доказ је аналоган доказу претходне теореме. (Видети Теорему на стр.14 у [7])

$\square$

Теорема 2.3. (о ретракцији) *Нека је I идеал у $\Lambda(V^*)$. Његов ретракциони потпростор $C(I)$ је најмањи потпростор од V^* такав да $\Lambda(C(I))$ садржи скуп S елемената који генеришу идеал I. Скуп S такође генерише идеал J у $\Lambda(C(I))$, кога зовемо ретракционим идеалом од I. Постоји пресликавање*

$$\Delta : \Lambda(V^*) \to \Lambda(C(I))$$

градуисаних алгебри тако да је $\Delta(I) = J$.

Доказ:

Претпоставимо да је $W^* \subset V^*$ потпростор такав да $\Lambda(W^*)$ садржи скуп S елемената који генеришу идеал I. Према претходним разматрањима за $x \in W = (W^*)^{\perp}$ знамо да $x \lrcorner I \subset I$. Следи да је $W \subset A(I)$, а самим тим и да је $C(I) = A(I)^{\perp} \subset W^*$.

Сада одаберимо простор B, комплементаран са $C(I)$ у V^*, односно $V^* = C(I) + B$. Нека је $\omega^i, 1 \leq i \leq n$, база простора V^* тако да:

$$\omega^1, ..., \omega^k \in B, \quad \omega^{k+1}, ..., \omega^n \in C(I).$$

За њој дуалну базу $e_i, 1 \leq i \leq n$, важи да је $A(I) = \{e_1, ..., e_n\}$. Уведимо пресликавања градуисаних алгебри

$$h_j : \Lambda(V^*) \to \Lambda(V^*), \quad 1 \leq j \leq k,$$

дата са

$$h_j(\alpha) = \alpha - \omega^j \wedge (e_j \lrcorner \alpha), \quad \alpha \in \Lambda(V^*).$$

Као и пресликавање

$$\Delta : \Lambda(V^*) \to \Lambda(V^*),$$

дато са

$$\Delta = h_k \circ ... \circ h_1.$$

Како је $e_j \in A(I), 1 \leq j \leq k$, знамо да је $h_j(I) \subset I$, па је и $\Delta(I) \subset I$. За рестрикције пресликавања Δ важи да су $\Delta |_B = 0$ и $\Delta |_{C(I)} = Id$. Приметимо да како је Δ пресликавање градуисаних алгебри, тада је $\Lambda(C(I))$ заправо слика пресликавања Δ.

Преостаје нам да направимо скуп S унутар $\Lambda(C(I))$ који генерише I. Њега добијамо индукцијом по степену елемената у I. Нека је I_p скуп елемената I степена p. Да бисмо искључили тривијалан случај $I = \Lambda(C(I))$, претпоставимо да је I_0 празан скуп. Према особинама $A(I)$ знамо да је за $x \in A(I), \alpha \in I_1$ по правилу $x \lrcorner \alpha = 0$, па је $A(I) \subset I_1^{\perp}$, где је $I_1 \subset C(I)$.

Да бисмо применили индуктивни корак претпоставимо да су $I_1, ..., I_p$ генерисани елементима $\Lambda(C(I))$, и нека је J_{p-1} генерисан њима. Раније дефинисана пресликавања h_j остављају J_{p-1} инваријантним. По дефиницији знамо да је $h_1(\alpha) - \alpha \in J_{p-1}$. Узастопном применом $h_2, ..., h_k$ добијамо да је $\Delta(\alpha) - \alpha \in J_{p-1}$. Заменом α са $\Delta(\alpha)$ као генератором од I је довршена индукција.

□

Размотримо једну примену доказане теореме. Подсетимо се да је *Грасманов координатни вектор* $[\alpha]$ потпростора $W^* \subset V^*$ димензије p растављив p-ковектор такав да је

$$W^* = \{\omega \in V^* \mid \omega \wedge \alpha = 0\}.$$

Овај појам може да се прошири на било коју $p-$форму α, растављиву или не. Дефинишимо

$$L_\alpha = \{\omega \in V^* \mid \omega \wedge \alpha = 0\}.$$

Зваћемо га *простор линеарних дивизора форме* α, због следећег става:

Став 2.5. *Дата је p-форма α и база $\omega^1, ..., \omega^q$ за L_α. Тада се α може представити у облику:*

$$\alpha = \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^q \wedge \pi, \quad \pi \in \Lambda^{p-q}(V^*).$$

Доказ:

Ово тврђење ћемо доказати математичком индукцијом по q. Претпоставимо прво да је $q = 1$ и да је ω^1 базни елемент од V^*. Можемо да напишемо α у канонском облику:

$$\alpha = \omega^1 \wedge \pi + \alpha_1,$$

односно да α_1 не зависи од ω^1. Тада је

$$0 = \omega^1 \wedge \alpha = \omega^1 \wedge (\omega^1 \wedge \pi + \alpha_1) = \omega^1 \wedge \alpha_1 = 0.$$

Следи да је $\alpha_1 = 0$, чиме смо доказали базу индукције. Индуктивни корак је аналоган претходном поступку. $\square$

Теорема 2.4. *Дат је идеал I генерисан линеарно независним елементима $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^s \in V^*$ и 2-формом $\Omega \in \Lambda^2(V^*)$. Нека је p најмањи цео број такав да је*

$$\Omega^{p+1} \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^s = 0.$$

Ретракциони простор $C(I)$ је димензије $2p+s$ и има Грасманов вектор

$$\Omega^p \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^s.$$

Доказ:

Посматрајмо прво случај $s = 0$. У том случају је сваки елемент идеала I линеарна комбинација форми $\Omega, \Omega^2, \ldots, \Omega^p \neq 0$. Према теореми о ретракцији знамо да је $\Omega \in \Lambda(C(I))$, а $\Omega^p \in \Lambda^{2p}(C(I))$. Ово даље значи да је

$$\dim C(I) \geq 2p.$$

Нека је

$$f : V \to V^*$$

линеарно пресликавање дефинисано са

$$f(x) = x \lrcorner \Omega, \quad x \in V.$$

Како I не садржи линеарну форму знамо да је

$$x \lrcorner \Omega = 0 \iff x \in A(I) = C(I)^\perp.$$

Према томе је

$$\operatorname{Ker} f = A(I),$$

па је

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim A(I) \leq n - 2p.$$

Са друге стране, заменом $s = 0$ у услов теореме:

$$x \lrcorner \Omega^{p+1} = (p+1)(x \lrcorner \Omega) \wedge \Omega^p = 0.$$

Самим тим простор линеарних дивизора Ω^p садржи слику функције f. Како је Ω^p степена $2p$ знамо да је

$$\dim \operatorname{Im} f \leq 2p.$$

Збир димензије језгра и слике линеарног пресликавања је димензија целог простора па из два већ доказана ограничења произилази $\dim C(I) = 2p$ и $\Lambda^{2p}(C(I))$ је димензије један, са базним елементом Ω^p.

У општем случају нека је W^* простор разапет са $\{\omega^1, ..., \omega^s\}$. Нека је такође $W = (W^*)^\perp \subset V$ и količнички простор V^*/W^*, где је $\pi : V^* \to W^*$ одговарајуће количничко пресликавање. Знамо да је

$$0 \neq \Omega^p \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^s \in \Lambda^{2p+s}(C(I)),$$

тако да је

$$\dim C(I) \geq 2p + s.$$

По узору на први случај, дефинишемо пресликавање

$$f(x) = x \lrcorner \Omega, \quad x \in W.$$

Сада посматрамо пресликавање $f^{'} = \pi \circ f$. Опет из збира димензија знамо да је:

$$\dim \operatorname{Ker} f^{'} + \dim \operatorname{Im} f^{'} = n - s.$$

Уопштење горњих и доњих ограничења димензије је:

$$\dim \operatorname{Ker} f^{'} \leq n - 2p - s$$

$$\dim \operatorname{Im} f^{'} \leq 2p$$

па из збира димензија знамо да једнакост важи свуда па и тврђење теореме.

□

Став 2.6. *Нека су* $\omega^1, ..., \omega^s, \pi$ *линеарно независни елементи у* V^* *и* $\Omega \in \Lambda^2(V^*)$ *тада из*

$$\Omega^p \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^s \wedge \pi = 0$$

следи

$$\Omega^{p+1} \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^s = 0.$$

Доказ:

Нека је $\{\pi\}$ једнодимензиони простор разапет са π и нека W^* означава комплемент од $\{\pi\}$ у V^*, који садржи $\omega^1, ..., \omega^s$. Тада постоји $\alpha \in \Lambda^2(W^*)$ и $\beta \in W^*$, јединствено одређени, тако да је

$$\Omega = \alpha + \beta \wedge \pi.$$

Следи да је

$$\Omega^p = \alpha^p + p\alpha^{p-1} \wedge \beta \wedge \pi$$

и претпоставка нам даје

$$\alpha^p \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^s \wedge \pi = 0.$$

Како је $\alpha^p \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^s \in \Lambda(W^*)$, добијамо

$$\alpha^p \wedge \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^s = 0.$$

Закључак следи из

$$\Omega^{p+1} = \alpha^{p+1} + (p+1)\alpha^p \wedge \beta \wedge \pi.$$

$\square$

Теорема 2.5. *Нека је $\Omega \in \Lambda^2(V^*)$ и r најмањи цео број такав да је*

$$\Omega^{r+1} = 0.$$

Тада постоје $2r$ линеарно независна елемента $\omega^1, ..., \omega^{2r}$ тако да је

$$\Omega = \sum_{i=1}^{r} \omega^{r+i} \wedge \omega^i.$$

Доказ:

Теорема се доказује узастопним применама теореме (2.4). Из претпоставке следи да је Ω^r растављива форма па је линеарни дивизор од ω^1. Посматрајмо идеал $l(1) = \{\omega^1, \Omega\}$ који је генерисан формама ω^1 и Ω. Нека је r_1 најмањи цео

број такав да је
$$\Omega^{r_1+1} \wedge \omega^1 = 0.$$
Јасно је да је $r_1 + 1 \leq r$. Тада је $\Omega^{r_1} \wedge \omega^1$ Грасманов координатни ненула вектор ретракционог простора $C(l(1))$ који је растављив. Нека је ω^2 линеаран фактор форме $\Omega^{r_1} \wedge \omega^1$, који је линеарно независан од ω^1. Тада је

$$\Omega^{r_1} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

Нека је r_2 најмањи цео број тако да је:

$$\Omega^{r_2} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

тако да је $r_2 < r_1$. Понављајући претходни поступак добијамо опадајући низ природних бројева $r > r_1 > r_2 > ...$ који се завршава нулом. То значи да постоје линеарно независне форме, које задовољавају:

$$\Omega^{r_1} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 ... \wedge \omega^q = 0.$$

Сада добијамо да је
$$\Omega = \sum_{1 \leq i \leq q} \eta_i \wedge \omega^i,$$
где су η_i линеарне форме. Због чињенице да је $\Omega^r \neq 0$ следи $q = r$ и да су форме $\eta_i, \omega^i, 1 \leq i \leq r$ линеарно независне. Доказ завршавамо постављањем

$$\omega^{r+i} = \eta_i.$$

$\square$

2.3 Спољашњи диференцијални системи

Нека је M глатка многострукост димензије n. Њено котангетнтно раслојење ћемо означити са T^*M. Од котангентног раслојења ћемо саградити раслојење ΛT^*M, чија су влакна
$$\Lambda T_x^* M = \sum_{p=0}^{n} \Lambda^p T_x^* M,$$
што је јасно градуисана алгебра. Слично радимо са тангетнтим раслојењем TM.

Дефиниција 2.8. Сечење раслојења

$$\Lambda^p T^* M = \bigcup_{x \in M} \Lambda^p T_x^* M \to M$$

називамо *спољашњом диференцијалном формом степена* p.

У локалним координатама $x^1, ..., x^n$ на M, спољашња диференцијална форма степена p је облика:

$$\alpha = \frac{1}{p!} \sum a_{i_1, i_2, ..., i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge ... \wedge dx^{i_p}, \quad 1 \leq i_1, ..., i_p \leq n,$$

где су коефицијенти глатке функције, антисиметричне по паровима индекса.

Направићемо пресликавање које градуисану алгебру над прстеном глатких функција на M чини диференцијалном. Имамо:

$$\Lambda^*(M) = \oplus_{p=0}^n \Lambda^p(M),$$

где ћемо са $\Lambda^p(M)$ означити простор спољашњих диференцијалних $p-$форми. Наравно, простор $\Lambda^0(M)$ је прстен глатких функција на M. Сада, тврдимо да постоји јединствено пресликавање

$$d : \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^*(M), \quad d(\Lambda^p(M)) \subset \Lambda^{p+1}(M),$$

које задовољава следећа својства:

а) на $\Lambda^0(M)$ d је тотални диференцијал и $d \circ d = 0$;

б) $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$;

в) Ако је α $p-$форма, важи $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.

Приметимо да из претходних ставки следи да ако је $\varphi = \sum a_I dx^I$, онда је $d\varphi = \sum da_I \wedge dx^I$, па је d јединствено одређено на целом $\Lambda^*(M)$.

Директна последица претходних ставки је да је $d \circ d$ свугде нула на $\Lambda^*(M)$.

Нека је $F : M \longrightarrow N$ глатко пресликавање глатких многострукости. Диференцијал пресликавање F у тачки $x \in M$ је задат са:

$$dF_x = F_{*x} : T_x M \longrightarrow T_{F(x)} N, \ (F_{*x} v) f = v(f \circ F), v \in M_x, f \in \Lambda^0(N).$$

Њему адјунговано пресликавање

$$F_x^* : T^*_{F(x)}N \longrightarrow T_x^*M$$

називамо pull-back пресликавања у тачки x. Дакле

$$\langle F_x^*(\varphi), v\rangle = \langle \varphi, F_{*x}(v)\rangle, \quad \varphi \in T^*_{F(x)}N, v \in M_x.$$

Ово пресликавање индукује пресликавања

$$\Lambda^p(T^*_{F(x)}N) \longrightarrow \Lambda^p(T_x^*M), \quad 0 \leq p \leq n.$$

са

$$(F^*\varphi)_x(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \varphi_{F(x)}(dF_x(v_1), \ldots, dF_x(v_p)),$$
$$\text{где je } v_j \in T_xM, \text{ а } \varphi \in \Lambda^p(T^*_{F(x)}N).$$

Претходна пресликавања означаваћемо такође, са F_x^*.

Према томе, имамо pullback пресликавање,

$$F^* : \Lambda^*(N) \longrightarrow \Lambda^*(M), \quad (F^*\omega)_x = F_x^*(\omega_{F(x)}).$$

Став 2.7. *За произвољно пресликавање* $F : M \longrightarrow N$,

$$F^*(\alpha + \beta) = F^*(\alpha) + F^*(\beta), \;\; F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta),$$

где су α *и* β *из* $\Lambda^*(N)$.

Доказ:

Наредна два става се изводе директном провером из дефиниције. □

Став 2.8. *За произвољно пресликавање* $F : M \longrightarrow N$,

$$F^* \circ d = d \circ F^*,$$

где je $F^* : \Lambda^*(N) \longrightarrow \Lambda^*(M)$ *индуковано pullback пресликавање.*

Доказ:

Доказ индукцијом по степену диференцијалне форме.

□

Дефиниција 2.9. *Спољашњи диференцијални систем* на M је систем једначина

$$\Sigma = \{\varphi_A = 0, \quad 1 \leq A \leq s\},$$

где је свака φ_A хомогена спољашња диференцијална форма на M. Често не разликујемо саме форме φ_A и једначине дефинисане њима, па говоримо да се Σ састоји од диференцијалних форми.

Нека је дат један спољашњи диференцијални систем Σ. Главни задатак је да пронађемо *интегралне многострукости* система. Интегрална многострукост је подмногострукост S задата имерзијом $f : S \longrightarrow M$, таква да је $f^*\varphi_A = 0$ за све A. Додуше, занимаће нас само локални проблеми. Зато нам је дозвољено да гледамо уложене интегралне подмногострукости.

О овоме можемо да мислимо и као о решењима система једначина

$$\varphi_A = 0.$$

Међутим, када се ове једначине прикажу у локалним координатама, добијамо систем парцијалних диференцијалних једначина. То није увек лако решиво, напротив.

Претпоставимо да је $f : S \longrightarrow M$ интегрална многострукост система Σ тако да је

$$f^*\varphi_A = 0, \quad 1 \leq A \leq s.$$

Према претходном ставу, знамо још да важи:

$$f^*d\varphi_A = d \circ f^*\varphi_A, \quad 1 \leq A \leq s.$$

Можемо да закључимо да смемо да додамо и форме $d\varphi_A, \quad 1 \leq A \leq s$, у систем Σ и да не променимо скуп интегралних многострукости које смо добили. Такође, не мења се скуп интегралних многострукости ни када бисмо додали форме које су у идеалу генерисаном формама из Σ.

Наравно, то следи из чињенице да је $f^*(\beta \wedge \varphi_A) = f^*(\beta) \wedge f^*(\varphi_A) = 0$, као и да је $f^*(\alpha + \beta) = f^*(\alpha) + f^*(\beta)$.

Претходном причом смо дали мотивацију за наредну дефиницију.

Дефиниција 2.10. Хомогени идеал $I \subset \Lambda^*(M)$ зовемо *диференцијални* идеал или *затворени* идеал ако је затворен у односу на спољашње диференцирање ($dI \subset I$).

Према томе, можемо следећим ставом да одредимо диференцијални идеал.

Став 2.9. *Потпрстен* $I \subset \Lambda^*(M)$ *је диференцијални идеал ако и само ако су задовољени следећи услови:*

а) Из $\alpha \in I$ *следи да је* $\beta \wedge \alpha \in I$ *за све* $\beta \in \Lambda^*(M)$;

б) Из $\alpha \in I$ *следи да је свака компонента од* α *у* $\Lambda^p(M)$ *у* I *за било које* p *(што следи из хомогености идеала);*

в) Из $\alpha \in I$ *следи да је* $d\alpha \in I$.

Према претходној дискусији јасно је да можемо да заменимо спољашњи диференцијални систем Σ са диференцијалним идеалом генерисаним са Σ без промене интегралних многострукости. У суштини, диференцијални идеал генерисан са Σ је једнак хомогеном идеалу генерисаном са Σ и са спољашњим диференцијалима форми из Σ. Означимо сада тај диференцијални идеал са

$$\Im(\Sigma) = I(\Sigma \cup d\Sigma),$$

где је са десне стране једначине алгебарски задат идеал са генераторима у $\Sigma \cup d\Sigma$.

Два спољашња диференцијална система Σ_1 и Σ_2 на M су алгебарски еквивалентна ако је $I(\Sigma_1) = I(\Sigma_2)$. Према томе, ако су два система Σ_1 и Σ_2 алгебарски еквивалентна знамо и да су диференцијални идеали $\Im(\Sigma_1) = \Im(\Sigma_2)$ једнаки.

Теорема 2.6. *Нека је* Σ *спољашњи диференцијални систем на* M. *Онда постоји алгебарски еквивалентан систем* Σ' *тако да за свако* $x \in M$ *важи*

$$\varphi_x \in \Lambda(A^{\perp}(I(\Sigma)_x))$$

за све $\varphi \in \Sigma'$.

Доказ ове теореме следи из Теореме 2.2.

2.4 Фробенијусова теорема и Кошијеве карактеристике

Најједноставнији пример спољашњег диференцијалног система су идеали I, који су алгебарски генерисани формама степена један. Нека су дати генератори

$$\alpha^1, ..., \alpha^{n-r},$$

за које претпостављамо да су линеарно независни. Затвореност идеала I нам даје услов

$$(F) \qquad d\alpha^i \equiv 0 \mod \alpha^1, ..., \alpha^{n-r}, \quad 1 \leq i \leq n-r.$$

Овај услов називамо *Фробенијусовим условом.* Диференцијални систем

$$\alpha^1 = ... = \alpha^{n-r} = 0$$

који задовољава (F) зовемо *комплетно интеграбилним.*

Геометријски гледано, претходне наведене форме α у свакој тачки $x \in M$ разапињу потпростор W_x димензије $n-r$ котангетног простора T_x^*M или друкчије речено потпростор $W_x^{\perp}$ димензије r тангентног простора T_xM. Негде се ово зове и *дистрибуција.* Главна теорема о комплетним интеграбилним системима је:

Теорема 2.7. (Фробенијус) *Нека је I диференцијалан идеал који је генерисан линеарно независним 1-формама $\alpha^1, ..., \alpha^{n-r}$, тако да је задовољен услов (F). У довољно малој околини постоји координатни систем $y^1, ..., y^n$ тако да је идеал I генерисан са $dy^{r+1}, ..., dy^n$.*

Доказ:

Доказ изводимо индукцијом по r. Нека је $r=1$. Тада је $W_x^{\perp} \subset T_xM, x \in M$, димензије 1. Када запишемо то у локалним координатама добијамо где нису све функције $X^i(x^1, ..., x^n)$ нула-функције и векторско поље $X = \sum_{i=1}^n X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ које генерише $W_x^{\perp}$. По Теореми о исправљивости векторског поља (1.2) можемо да одаберемо локалне координате $y^1, y^2, ..., y^n$ такве да је $W_x^{\perp}$ генерисан са $\frac{\partial}{\partial y^1}$. Тада је W_x генерисан са $dy^2, ..., dy^n$. Самим тим имамо потребан идеал I и тврдњу за $r=1$. Услов (F) је тривијално задовољен.

Нека је сада $r \geq 2$ и претпоставимо да је теорема тачна за $r-1$. Такође, нека су локалне координате $x^i, 1 \leq i \leq n$, такве да су форме

$$\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^{n-r}, dx^r$$

линеарно независне.

Диференцијални систем дефинисан са ових $n-r+1$ форми задовољава и услов (F). По индуктивној хипотези постоје координате y^i такве да је:

$$dy^r, dy^{r+1}, ..., dy^n$$

скуп генератора одговарајућег идеала. Следи да је dx^r линеарна комбинација ових форми. Без умањења општости нека је

$$\frac{\partial x^r}{\partial y^r} \neq 0.$$

Захваљујући

$$dx^r = \frac{\partial x^r}{\partial y^r} dy^r + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{\partial x^r}{\partial y^{r+i}} dy^{r+i}$$

можемо да решимо dy^r по $dx^r, dy^{r+1}, ..., dy^n$. Пошто су $\alpha^1, ..., \alpha^{n-r}$ линеарне комбинације форми $dy^r, ..., dy^n$, онда оне сад могу да се изразе у облику:

$$\alpha^i = \sum_j a^i_j dy^{r+j} + b^i dx^r, \quad 1 \leq i, j \leq n-r. \tag{1}$$

Из линеарне независности α^i и dx^r знамо да матрица (a^i_j) није сингуларна. Сада, множењем једначине (1) са $(a^i_j)^{-1}$ представићемо I преко других генератора:

$$\alpha^{z_i} = dy^{r+i} + p^i dx^r, \quad 1 \leq i \leq n-r,$$

а услов (F) остаје задовољен.

Спољашњим диференцирањем добијамо:

$$d\alpha^{z_i} = dp^i \wedge dx^r \equiv \sum_{1 \leq \lambda \leq r-1} \frac{\partial p^i}{\partial y^\lambda} dy^\lambda \wedge dx^r \equiv 0 \mod \alpha^{z_1}, ..., \alpha^{z_{n-r}}.$$

Следи да је

$$\frac{\partial p^i}{\partial y^\lambda} = 0. \quad 1 \leq i \leq n-r, \quad 1 \leq \lambda \leq r-1,$$

односно p^i су функције у зависности од $y^r, ..., y^n$. Самим тим у $y-$координатама решавамо систем $n-r$ форми степена 1 које зависе само од $n-r+1$ координата $y^r, .., y^n$. Овим поступком смо дошли до почетног случаја и доказали теорему индукцијом.

$\square$

Пример 2.1. Интеграциони множитељи. Прва нетривијална последица теореме Фробенијуса дата је системом генерисаним једном формом у тродимензионом простору. Нека је

$$I = \{Pdx + Qdy + Rdz\}.$$

Услов (F) даје неопходан и довољан услов да постоји интеграциони фактор за $1-$форму $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Другим речима, постоји функција μ тако да је $\mu\omega$ тачна форма.

Доказ:

$(\implies)$: Нека постоји форма μ тако да је форма $\mu\omega$ тачна. Прво, видимо да је услов (F) еквивалентан са $d\omega = \omega \wedge (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$. Друго, из чињенице да је форма $\mu\omega$ тачна у просто повезаној области можемо да бирамо $\alpha = \frac{\mu_x}{\mu}$, $\beta = \frac{\mu_y}{\mu}$ и $\gamma = \frac{\mu_z}{\mu}$.

$(\impliedby)$: Дато је $I = \{Pdx+Qdy+Rdz\} = \langle X\rangle^{\perp}$. Тада је $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$. Из Теореме Фробенијуса (2.7) знамо да постоје, бар локално, координате $\tilde{\varphi} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ тако да је $I = \{d\tilde{z}\}$.
Посматрајмо тачну форму $\alpha = \varphi^* d\tilde{z}$. Наш идеал $I = \langle\alpha\rangle = \langle Y^{\perp}\rangle$ се није променио, па пошто је $\langle Y^{\perp}\rangle = \langle X^{\perp}\rangle$, следи да $Y = fX$, $(f \neq 0)$. Према томе, из $\frac{1}{f}\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ следи да је форма $f(Pdx + Qdy + Rdz)$ тачна, па можемо одабрати интеграциони фактор $\mu = f$.

$\square$

На основним студијама смо Фробенијусовој теореми прилазили из другог угла, преко векторских поља. Наиме, то је еквивалентно претходној теореми, што ћемо видети у следећем ставу:

Став 2.10. (Фробенијус) *Нека је M дистрибуција дефинисана потпростором $W_x^{\perp} \subset T_x$, $\dim W_x^{\perp} = r$. Услов (F) каже да, за свака два векторска поља X,Y, тако да је за све $X_x, Y_x \in W_x^{\perp}$ Лијева заграда $[X,Y]_x \in W_x^{\perp}$.*

Доказ:

Допунимо форме $\alpha^1, ..., \alpha^{n-r}$ са формама $\alpha^{n-r+1}, ..., \alpha^n$ тако да су линеарно независне. Онда знамо да је:

$$d\alpha^i = \frac{1}{2}\sum_{j,k} c^i_{jk}\alpha^j \wedge \alpha^k, \quad 1 \leq i,j,k \leq n, \quad c^i_{jk} + c^i_{kj} = 0. \tag{2.7}$$

Услов (F) онда можемо да изразимо као

$$c^a_{pq} = 0, 1 \leq a \leq n-r, \quad n-r+1 \leq p,q \leq n.$$

Нека је сада f глатка функција. Тада је једначином

$$df = \sum (X_i f)\alpha^i$$

задато n векторских поља X_i која формирају дуалну базу за α^i. Претходну једначину диференцирамо и добијамо:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(X_i(X_j(f)) - X_j(X_i(f)))\alpha^i \wedge \alpha^j + \sum_j X_i(f)d\alpha^i = 0.$$

Када једначину (2.7) заменимо у последњу добијамо:

$$[X_i, X_j]f = (X_iX_j - X_jX_i)f = -\sum c_{ij}^k X_k f.$$

Према томе, услов (F) можемо да запишемо и у облику

$$[X_p, X_q]f = -\sum c_{pq}^s X_s f, \quad n - r + 1 \leq p, q, s \leq n.$$

Векторска поља $X_{n-r+1}, ..., X_n$ у свакој тачки $x \in M$ разапињу $W_x^{\perp}$. Према томе, доказали смо став.

$\square$

Дефиниција 2.11. Кошијева карактеристика Нека је I диференцијални идеал на M. Сматрамо да је $I = \Im(\Sigma)$ за неки спољашњи диференцијални систем Σ. Нека је $I_x \subset \Lambda(T_x^*M)$ идеал који чине форме из I у тачки x. Придружени простор идеала I у тачки x је већ познат придружени простор идеала I_x:

$$A(I)_x = \{\xi_x \in T_xM \mid \xi_x \lrcorner I_x \subset I_x\}.$$

Векторско поље ξ на M називамо *Кошијевим карактеристичним векторским пољем* ако је $\xi_x \in A(I_x)$ за све $x \in M$.

Нека је $\varphi : M \longrightarrow M$ дифеоморфизам. Тада је извод

$$\varphi_{*x} : T_xM \longrightarrow T_{\varphi(x)}M$$

линеаран изоморфизам за свако $x \in M$. Тај изоморфизам одговара изоморфизму тензорских алгебри

$$\mathcal{T}(T_xM) \longrightarrow \mathcal{T}(T_{\varphi(x)}M).$$

који чува тип елемента и комутира са контракцијама.

Као последицу, добијамо да φ индукује аутоморфизам алгебри

$$\varphi : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M),$$

где је $\mathcal{T}(M)$ једна $R-$алгебра тензорских поља на M.

Нека је ξ векторско поље на M, а φ_t једнопараметарска група дифеоморфизама генерисана са ξ. Сада ћемо дефинисати Лијев извод тензорског поља τ у односу на векторско поље ξ. Претпоставимо да је φ_t глобално дефинисано.

Лијев извод дефинисан је са

$$L_\xi \tau = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\tau - \varphi_t \tau).$$

Став 2.11. *а) $L_\xi f = \xi f$ за било коју функцију f;*

б) $L_\xi \eta = [\xi, \eta]$ за било које векторско поље η;

в) $L_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi$ на $\Lambda^*(M)$ (Картанова формула);

г) $L_\xi \circ i_\eta - i_\eta \circ L_\xi = i_{[\xi,\eta]}$ на $\Lambda^*(M)$.

Доказ:

а) Нека је $\frac{d\phi_t}{dt} = \xi(\phi_t)$ и $\phi_0 = Id$. Познато је да фамилија дифеоморфизама $\phi_t : M \mapsto M$ постоји, бар локално, по Пикаровој теореми. Тада је:

$$L_\xi(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t)\mid_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}(f(u^i(t)))\mid_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt}\mid_{t=0}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u^i}\mid_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u^i}\xi^i = \xi(f),$$

где су u^i локалне координате.

б) Видети [14] за доказ;

в) Видети [2] за доказ;

г) Видети наредни став за доказ.

□

Став 2.12. *Ако су ξ и η Кошијева карактеристична векторска поља диференцијалног идеала I, тада је и Лијева заграда $[\xi, \eta]$ такође Кошијево карактеристично векторско поље од I.*

Доказ:

Нека је L_ξ Лијев извод дефинисан са ξ. По Картановој формули

$$L_\xi = d(\xi \lrcorner) + (\xi \lrcorner) d.$$

Како је I затворен, знамо да је $dI \subset I$. Ако је ξ карактеристично векторско поље, тада је $\xi \lrcorner I \subset I$. Из Картанове формуле тада знамо да је $L_\xi I \subset I$. Сада тврђење следи из једнакости

$$[L_\xi, \eta \lrcorner] = L_\xi \eta \lrcorner - \eta \lrcorner L_\xi = [\xi, \eta] \lrcorner,$$

што је тачно за било која два векторска поља ξ и η.

Први члан на левој страни је деривација степена -1, па је довољно проверити тврђење за функцију f и њен диференцијал df. Када нападнемо функцију f обе стране се анулирају, а кад нападнемо df имамо

$$[L_\xi, \eta \lrcorner] df = L_\xi(\eta f) - \eta \lrcorner d(\xi f) = [\xi, \eta\ ] f = [\xi, \eta] \lrcorner df,$$

што је и требало доказати.

□

Теорема 2.8. *Нека је I коначно генерисан диференцијални идеал чији је ретракциони простор $C(I)$ константне димензије $s = n - r$. Постоји околина и у њој дефинисане координате $(x^1, ..., x^r; y^1, ..., y^s)$ такве да I има генеришући скуп који чине диференцијали $dy^1, ...dy^s$ са коефицијентима који зависе искључиво од $y^1, ..., y^s$.*

Идеја доказа:

Према претходном ставу јасно је да је дистрибуција задата са $A(I)$ комплетно интеграбилна. Према Теореми Фробенијуса (2.7) знамо да постоје локалне координате $(x^a; y^b)$ тако да је I генерисан са dy^b.
Потребно је још само да проверимо да су им коефицијенти функције које зависе само од y^b, што овде нећемо радити (видети [10] или [7]). □

Било који систем парцијалних диференцијалних једначина можемо да изразимо као спољашњи диференцијални систем.

Пример 2.2. Посматрајмо парцијалну једначину првог реда:

$$F\left(x^i, z, \frac{\partial z}{\partial x^i}\right) = 0.$$

Њу можемо да видимо као спољашњи диференцијални систем Σ који је задат са

$$F(x^i, z, p_i) = 0,\ (F_{x^i} + F_z p_i) dx^i + F_{p_i} dp_i = 0,\ dz - p_i dx^i = 0,\ dx^i \wedge dp_i = 0 \quad (2.8)$$

на $(2n+1)-$димензионом простору $\{x^i, z, p_i\}$. Проблем је како наћи интегралну многострукост димензије n на $\mathbb{R}^{2n+1}$ тако да x^i остану независне. Диференцијални идеал $\Im(\Sigma)$ је у суштини алгебарски идеал $I(\Sigma)$ због тога што је $d\Sigma \subset I(\Sigma)$. Међутим систем није Фробенијусов јер садржи функције и 2-форме.

Желимо да одредимо придружени простор $A(I(\Sigma))$. За вектор $v = v^i(\frac{\partial}{\partial x^i}) + v_0(\frac{\partial}{\partial z}) + v_i(\frac{\partial}{\partial p_i})$, знамо да је $i_v I(\Sigma) \subset I(\Sigma)$ ако и само ако је

$$v_0 - p_i v^i = 0, (F_{x^i} + F_z p_i)v^i + F_{p_i} v_i = 0, v^i dp_i - v_i dx^i = 0.$$

Из последње две једначине можемо да закључимо да је

$$v^i = \lambda_{p_i},\ v_i = -\lambda(F_{x^i} + F_z p_i),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Сада, из прве једначине добијамо

$$v_0 = \lambda \sum p_i F_{p_i}.$$

Према томе, одредили смо простор

$$A(I(\Sigma)) = \mathrm{span}\left\{F_{p_i}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + p_i F_{p_i}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - (F_{x^i} + F_z p_i)\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\right\}.$$

Димензија простора $A(I(\Sigma))$ је један. *Кошијеве карактеристичне криве* система Σ у $\mathbb{R}^{2n+1}$ су интегралне криве система

$$\frac{dx^i}{F_{p_i}} = \frac{-dp_i}{F_{x^i} + F_z p_i} = \frac{dz}{p_i F_{p_i}}.$$

Ово су чувене Лагранж-Шарпијеве једначине.

Да бисмо конструисали интегралну многострукост димензије n довољно је да узмемо $(n-1)$ димензиону интегралну многострукост трансверзалну на Кошијево карактеристично векторско поље и да направимо карактеристичне криве кроз те тачке.

Пример 2.3. Нека је парцијална једначина задата као

$$\sum \left(\frac{\partial z}{\partial x^i}\right)^2 = 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ако је $z = z(x^1, ..., x^n)$ решење претходне једначине у $n-$димензионом еуклидском простору E^n, онда је z линеарна функција по x^i, односно

$$z = \sum a_i x^i + b,$$

где су a_i, b константне које задовољавају једначину $\sum a_i^2 = 1$.

Доказ:

Посматрајмо простор $E^{n+1} = \{(x_1, ..., x_n, z) \mid (x_1, ..., x_n) \in E^n\}$ где простор E^n видимо као хиперраван $z = 0$.

Решење наше парцијалне можемо да видимо као график функције Γ у E^{n+1}. Једноставним рачуном добијамо да је $F_{x^i} = F_z = 0$ па по Лагранж-Шарпијевим једначинама знамо да је $p_i = const$. Лагранж-Шарпијеве једначине можемо и да интегралимо па добијамо да су пројекције Кошијевих карактеристика на E^{n+1} праве

$$x^i = x_0^i + p_i t, \quad z = z_0 + t,$$

где су x_0^i, p_i, z_0 реалне константе. Према томе, график Γ је генерисан *Кошијевим правама* чије пројекције на E^n чине фолијацију од E^n.

Када запишемо претходну једначину у новим координатама добијамо

$$x^{*^i} = x^i + \frac{\partial z}{\partial x^i} t,$$

где је $z = z(x^1, .., x^n)$ решење почетне једначине. За дато $t \in \mathbb{R}$ ово можемо да видимо као дифеоморфизам $f_t : E^n \longrightarrow E^n$ дефинисан као

$$f_t(x) = x^* = (x^{*^1}, ..., x^{*^n}), \quad x, x^* \in E^n.$$

Претходно пресликавање тачку $x \in E^n$ слика у тачку x^* на растојању t дуж Кошијеве праве кроз x. Јакобијан овог пресликавања је

$$J(t) = \det\left(\delta_j^i + \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} t\right),$$

што није нула.

Лема 2.2. *Нека је $J(t) = \det(E + tA)$ реална функција која никад није 0, где је A реална симетрична матрица. Тада је A нула матрица.*

Доказ леме:

Реална симетрична матрица A је дијагонализабилна. Зато имамо да је $A = P^{-1}DP$ где је D дијагонална матрица са сопственим вредностима матрице

A(које су такође реални бројеви јер је матрица A симетрична). Сада знамо:

$$\begin{aligned} J(t) = \det(E + tA) = \det(E + tP^{-1}DP) = \det(P^{-1}EP + tP^{-1}DP) = \\ = \det(P^{-1}(E + tD)P) = \det(E + tD) = \\ = (1 + t\lambda_1) \dots (1 + t\lambda_n) \neq 0, \ (\forall t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Следи да су све сопствене вредности $\lambda_j = 0$, па је $D = 0$ што нам даје

$$A = P^{-1}DP = P^{-1}0P = 0. \tag{2.9}$$

□

Сада, помоћу Леме (2.2) закључујемо да је

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} = 0, \tag{2.10}$$

па је z линеарна функција.

□

3 Дарбуова и Пфафова теорема

Један од најједноставнијих спољашњих диференцијалних система Σ је онај који садржи једну једначину

$$\alpha = 0, \tag{3.1}$$

где је α 1−форма.

Њему одговарајући диференцијални идеал $\Im(\Sigma)$ је генерисан са α и $d\alpha$.

Ранг r форме је дефинисан условима

$$\alpha \wedge (d\alpha)^r \neq 0, \quad \alpha \wedge (d\alpha)^{r+1} = 0.$$

Наравно, ранг зависи од тачке $x \in M$ и инваријантан је у односу на линеарну трансформацију форме α.

Као и код сваког спољашњег диференцијалног система, наш главни циљ је да одредимо интегралне подмногострукости система Σ. Следећа теорема ће нам помоћи у томе.

Теорема 3.1. (Пфаф). *Нека у околини U једначина $\alpha = 0$ има ранг r. Тада постоји околина $V \subset U$ и координатни систем $\omega^1, ..., \omega^n$ у околини V тако да једначина $\alpha = 0$ може да се запише у облику*

$$d\omega^1 + \omega^2 d\omega^3 + ... + \omega^{2r} d\omega^{2r+1} = 0.$$

Доказ:

Теорему доказујемо принципом математичке индукције по рангу форме α. За базу индукције узимамо случај кад је $r = 0$. Тада је наша теорема заправо последица Фробенијусове теореме.

Нека је диференцијални идеал $I = \{\alpha, d\alpha\}$ генерисан елементима α и $d\alpha$. По Теореми (2.4.) ретракциони простор $C(I)$ је димензије $2r + 1$ и постоји Грасманов вектор $(d\alpha)^r \wedge \alpha$.

По Теореми (2.8) постоје локалне координате $(x^1, \ldots, x^n)$ тако да је идеал I генерисан са формама у $(x^1, \ldots, x^{2r+1})$. То даље значи да је α форма облика

$$\alpha = f(x^1, \ldots, x^n)\beta, \tag{3.2}$$

где је β генерисано са формама по $x^1, \ldots, x^{2r+1}$, а $f \neq 0$.

Ранг форме β исти је као ранг форме α.

Желимо да нормализујемо форму β. Радићемо у простору $W = (x^1, ..., x^{2r+1})$. Посматрајмо идеал $\tilde{I} = \langle d\beta \rangle$. Пошто је $(d\beta)^{\wedge r} \neq 0$, знамо да је идеал $\tilde{I}$ генерисан 2-формом Γ, али у координатама $(y^1, y^2, \dots, y^{2r})$. Сада знамо:

$$\begin{gathered} d\beta = g(y^1, \dots, y^{2r})\Gamma, \;\; g(y^1, \dots, y^{2r+1}) \neq 0. \\ (d\beta)^{\wedge r} = g^r \Gamma^r, \text{ где је } \Gamma^r = h\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{2r} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Форма $d\beta$ је затворена, па имамо:

$$dh \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{2r} = 0. \tag{3.4}$$

Према томе, функција h, односно g зависи само од (y^i).

Опет, форма $d\beta$ је затворена, па је локално тачна. Следи да постоји 1-форма $\eta \neq 0$ тако да је $d\eta = d\beta$. Пошто је форма η у $2r-$ димензионом простору, њен ранг не може бити r. Дакле, ранг форм η је $r-1$.

Сада, по индуктивној хипотези знамо да је:

$$\eta = \lambda(dz^1 + z^2 dz^3 + \cdots + z^{2r-2} dz^{2r-1}), \; \lambda(y^1, \dots, y^{2r}) \neq 0. \tag{3.5}$$

Пошто је $d\beta = d\eta$, може се закључити $\beta = dp + \eta$, где је p функција.

Сада само именујемо функције

$$\omega^1 = f, \, \omega^2 = \lambda, \, \omega^{2i} = \lambda z^{2i-2}, \, w^{2i+1} = z^{2i-1}, \quad 2 \leq i \leq r.$$

□

Став 3.1. (**Симетрична нормална форма**).*Претпоставимо да једначина (3.1) има константан ранг r. Онда постоје независне функције $z, y^1, ..., y^r, x^1, \dots, x^r$ тако да једначина постаје*

$$dz + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}(y^i dx^i - x^i dy^i) = 0.$$

Доказ:
Довољно је да се изврши смена променљивих

$$\omega^1 = z - \frac{1}{2}\sum x^i y^i,$$

$$\omega^{2i} = y^i, \quad \omega^{2i+1} = x^i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

$\square$

Теорема 3.2. (Дарбу). *Нека је Ω затворена 2-форма за коју важи:*

$$\Omega^r \neq 0, \quad \Omega^{r+1} = 0, \quad r = const.$$

Постоје локалне координате $\omega^1, ..., \omega^{2r}$ такве да је

$$\Omega = d\omega^1 \wedge d\omega^2 + ... + d\omega^{2r-1} \wedge d\omega^{2r}$$

Доказ:
Претпоставимо да је $\Omega = d\alpha$ где је $\alpha \quad 1-$форма. Теорема Пфафа нам за α даје да мора да буде облика

$$\alpha = u(dz^1 + z^2 dz^3 + ... + z^{2r-2} dz^{2r-1}),$$

или после промене нотације

$$\alpha = \omega^1 d\omega^2 + ... + \omega^{2r-1} d\omega^{2r}.$$

Овиме је дата форма Ω. Пошто је $\Omega^r \neq 0$, функције $\omega^1, ..., \omega^{2r}$ су линеарно независне и чине локални координатни систем. $\square$

Посматрајмо $1-$форму α. Ранг r ове форме је раније дефинисан условима

$$\alpha \wedge (d\alpha)^r \neq 0, \quad \alpha \wedge (d\alpha)^{r+1} = 0.$$

Нека је сада s цео број тако да је:

$$(d\alpha)^s \neq 0, \quad (d\alpha)^{s+1} = 0.$$

Очигледно је да су могућа два случаја:

(1) $s = r$;

(2) $s = r + 1$.

Теорема 3.3. *Нека је α 1-форма. У некој околини нека су r и s константе. Тада α има нормалну форму:*

1) $\alpha = y^0 dy^1 + ... + y^{2r} dy^{2r+1}$, *ако је* $r + 1 = s$*;*

2) $\alpha = dy^1 + y^2 dy^3 + ... + y^{2r} dy^{2r+1}$, *ако је* $r = s$*.*

Функције y^k у горњим изразима су независне функције па самим тим чине локални координатни систем.

Доказ:

По Пфафовој теореми постоје локалне координате $y^1, y^2, ..., y^n$ тако да је

$$\alpha = u(dy^1 + y^2 dy^3 + ... + y^{2r} dy^{2r+1}),$$

што можемо да запишемо и у облику

$$\alpha = z^0 dy^1 + z^2 dy^3 + ... + z^{2r} dy^{2r+1}.$$

Тада је

$$(d\alpha)^{r+1} = c dz^0 \wedge dy^1 \wedge dz^2 \wedge dy^3 \wedge ... \wedge dz^{2r} \wedge dy^{2r+1}, \quad c = const, \quad c \neq 0.$$

У случају $s = r+1$, претходни израз је $\neq 0$ и функције $y^1, y^3, ..., y^{2r+1}, z^0, z^2, ..., z^{2r}$ су независне. Овим смо доказали први случај.

Сада, нека је $r = s$. Онда је $d\alpha$ $2-$форма ранга $2r$. По теореми Дарбуа можемо да је запишемо у облику:

$$d\alpha = d\omega^1 \wedge d\omega^2 + ... + d\omega^{2r-1} \wedge d\omega^{2r}.$$

Самим тим је:

$$d\alpha = d(\omega^1 d\omega^2 + ... + \omega^{2r-1} d\omega^{2r}).$$

Сада знамо да је форма $\alpha - (\omega^1 d\omega^2 + ... + \omega^{2r-1} d\omega^{2r})$ затворена и локално једнака dv. Променом ознака смо дошли до тврђења.

$\square$

Пример 3.1. У Напомени 1.2. на стр. 9 смо закључили да је затвореност 1-форме α неопходан услов да бисмо могли да је исправимо. Последица Теореме (3.3) јесте да је затвореност 1-форме α довољан услов да бисмо могли да је исправимо. Наиме, форма α задовољава услове $s = r = 0$. Према Теореми (3.3.б) знамо да је:

$$\alpha = dy^1,$$

односно, исправили смо 1-форму α.

Дефиниција 3.1. Једначина $\alpha = 0$ има својство *локалног приступа* ако свака тачка $x \in M$ има околину U такву да свака тачка $y \in U$ може бити повезана интегралном кривом са x.

Теорема 3.4. (Каратеодори). *Нека је ранг Пфафове једначине*

$$\alpha = 0$$

константан. Онда она има својство „локалног приступа" ако и само ако

$$\alpha \wedge d\alpha \neq 0.$$

Доказ:

Тврђење је еквивалентно са тим да је ранг $\alpha = 0$ већи од нуле. Заиста, ако је ранг једначине $\alpha = 0$ једнак 0 онда је задовољен Фробенијусов услов, па је могуће једначину записати у облику:

$$dz = 0,$$

односно интегралне криве су $z = const$.

Нека је ранг једначине $\alpha = 0$ већи од 0. Користимо ознаке из претходног става.

Локалне координате су $z, x^1, ..., x^r, y^1, ..., y^r, u^1, ..., u^s$ где је $2r + s + 1 = n = \dim M$. Без умањења општости узмимо да је x координатни почетак, а да y има координате $(z_0, x_0^1, ..., x_0^r, y_0^1, ..., y_0^r, u_0^1, ..., u_0^s)$. У (x^i, y^i) равни, $1 \leq i \leq r$, крива C_i је крива $(x^i(t), y^i(t)), \quad 0 \leq t \leq 1$, задата са

$$x^i(0) = y^i(0) = 0, \quad x^i(1) = x_0^i, \quad y^i(1) = y_0^i.$$

Конструишемо функцију

$$z(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \sum_{1 \leq i \leq r} \left(x^i \frac{dy^i}{dt} - y^i \frac{dx^i}{dt} \right) dt.$$

Криве C_i одредимо са још једним условом

$$z(1) = z_0.$$

Сада знамо да је крива γ на M дефинисана са

$$(z(t), x^1(t), ..., x^r(t), y^1(t), ..., y^r(t), tu_0^1, ..., tu_0^s), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

заправо интегрална крива која повезује x и y.

$\square$

4 Неке примене и примери спољашњих диференцијалних система

Пример 4.1. Посматрајмо једноставан систем парцијалних диференцијалних једначина функције $z(x, y)$:

$$\begin{aligned} z_x &= F(x, y, z(x, y)), \\ z_y &= G(x, y, z(x, y)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где су функције F и G глатке. У свакој тачки $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ одређена је тангентна раван на график функције $z(x, y)$ (решење претходног система), наравно ако постоји. У теорији обичних диференцијалних једначина, Пикарова теорема нам даје одговор на питање постојања решења једначине, док у случају парцијалних диференцијалних једначина такво тврђење не постоји.

Међутим, да би претходан систем имао смисла, према Шварцовој леми, мешовити изводи $(z_x)_y$ и $(z_y)_x$ морају бити једнаки. То нам даје да су

$$(z_x)_y = F(x, y, z(x, y))_y = F_y + F_z z_y = F_y + F_z G \tag{4.2}$$

и

$$(z_y)_x = G(x, y, z(x, y))_x = G_x + G_z z_x = G_x + G_z F \tag{4.3}$$

једнаке функције. Следи, да бисмо систем (4.1) уопште разматрали мора да важи једнакост:

$$F_y + F_z G = G_x + G_z F \tag{4.4}$$

Ако бисмо систем (4.1) решавали пешачки у околини $(0, 0)$ помоћу обичних диференцијалних једначина решавали бисмо једначину по једначину.

Прво, решавамо једначину:

$$\tilde{z}_x = F(x, 0, \tilde{z}), \text{ где је } \tilde{z}(x) = z(x, 0) \text{ и } \tilde{z}(0) = z(0, 0). \tag{4.5}$$

Ова једначина има локално јединствено решење по Пикаровој теореми.

Даље, фиксирамо x и решавамо сличну једначину по промењљивој y:

$$z_y = G(x, y, z(x, y)), \text{ где је } z(x, 0) = \tilde{z}(x). \tag{4.6}$$

Још једном, по Теореми Пикара ова једначина има решења, па смо некако дошли до функције $z(x, y)$. Међутим, она не мора да задовољава наш систем једначина (4.1).

Сада ћемо помоћу Фробенијусове теореме показати да је услов (4.4) и довољан да нам обезбеди постојање решења нашег система једначина. Систем парцијалних диференцијалних једначина ћемо моделовати као спољашњи диференцијални систем у $\mathbb{R}^3$.

Диференцијални идеал ће нам бити $I = \langle \alpha = dz - F(x,y,z)dx - G(x,y,z)dy \rangle$. Да бисмо имали задовољене услове Фробенијусове теореме треба да буде

$$I = \langle dz - F(x,y,z)dy - G(x,y,z)dy \rangle_{alg}, \tag{4.7}$$

односно

$$\alpha \wedge d\alpha = (F_y + F_z G - G_x - G_z F) dx \wedge dy \wedge dz. \tag{4.8}$$

Као што видимо, услов (4.8) се поклапа са (4.4) па је неопходан и довољан да наше решење постоји. По Фробенијусовој теореми за свако $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ постоји функција $z(x,y)$ дефинисана у околини (x_0, y_0) дата са

$$\begin{aligned} z(x_0, y_0) &= z_0, \\ z_x &= F(x, y, z(x,y)), \\ z_y &= G(x, y, z(x,y)). \end{aligned}$$

То смо и хтели да докажемо, без Фробенијусове теореме би било доста теже.

Пример 4.2. (**Коши-Риманове једначине**). Нека је $M = \mathbb{C}^2$ и нека су координате $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Многострукости M додељујемо модел спољашњег диференцијалног система (M, I) на следећи начин:

$$I = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle, \text{ где су } \varphi_1 = Re(dz \wedge dv) \text{ и } \varphi_2 = Im(dz \wedge dw). \tag{4.9}$$

Јасно је да је:

$$\varphi_1 = dx \wedge du - dy \wedge dv,\ \varphi_2 = dx \wedge dv + dy \wedge du. \tag{4.10}$$

Реална површ N је интегрална многострукост идеала I ако и само ако је комплексна крива у $\mathbb{C}^2$. Ако су dx и dy линеарно независни на N, онда N можемо да представимо локално као график $(x, y, u(x,y), v(x,y))$ где функције u и v задовољавају Коши-Риманове једначине:

$$u_x - v_y = u_y + v_x = 0. \tag{4.11}$$

Према томе, имамо један спољашњи диференцијални систем за Коши-Риманове једначине.

Пример 4.3. (**Парцијалне једначине вишег реда**). У другом поглављу, тачније (2.8) смо дефинисали спољашњи диференцијални систем за парцијалне једначине првог реда. То је могуће и за парцијалне диференцијалне једначине вишег реда. Потребно је да изводе који нису највишег реда заменимо новим промењљивим тако да задовољавају одговарајуће парцијалне једначине. Посматрајмо парцијалну једначину другог реда:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}) = 0. \tag{4.12}$$

Заменом добијамо:

$$\begin{aligned} 0 &= F(x, y, u, p, q, r, s, t) \\ 0 &= du - pdx - qdy \\ 0 &= dp - rdx - sdy \\ 0 &= dq - sdx - tdy \end{aligned} \tag{4.13}$$

што нам даје глатку хиперповрш $F = 0$, назовимо је M у седмодимензионом простору (x, y, p, q, r, s, t). Уз то, имамо и диференцијални идеал

$$I = \langle du - pdx - qdy, dp - rdx - sdy, dq - sdx - tdy \rangle. \tag{4.14}$$

Тиме смо добили спољашњи диференцијални систем за једначину (4.13). Наравно, систем има смисла ако је бар једна од F_r, F_s и различита од нуле у свакој тачки хиперповрши M.

Пример 4.4. (**Монж-Амперова једначина**). Специјалан случај парцијалне једначине другог реда се може још боље представити као спољашњи диференцијални систем. Посматрајмо једначину облика:

$$\begin{aligned} A(x, y, u, p, q)r + 2B(x, y, u, p, q)s + C(x, y, u, p, q)t& \\ + D(x, y, u, p, q)(rt - s^2) + E(x, y, u, p, q) &= 0. \end{aligned}$$

Ову једначину је могуће представити као спољашњи диференцијални систем у петодимензионом простору $(x, y, u, p, q) = \mathbb{R}^5 = M$ уз помоћ идеала

$$I = \langle du - pdx - qdy, \Psi = Adp \wedge dy + B(dq \wedge dy - dp \wedge dx) - Cdq \wedge dx + Ddp \wedge dq + Edx \wedge dy \rangle.$$

Претходни систем је доста бољи од општег (4.13). Мање је димензије и мање диференцијалних форми фигурише у идеалу. До 2-форме Ψ се долази нетривијалном применом Пфафове теореме (3.1)(видети [13]).

A Основе контактне геометрије и џет раслојења

Дефиниција A.1. Диференцијалну 1-форму α, која није нула ни у једној тачки, на многострукости M назива се *контактном* формом ако је спољашњи извод $d\alpha$ форме α недегенерисана 2-форма у свакој равни $\alpha = 0$.

Пример A.1. Посматрајмо 1-форму $\alpha = du - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j dx_j$ у простору $\mathbb{R}^{2n+1}$ са локалним координатама $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$. Она није нула нити у једној тачки $\mathbb{R}^{2n+1}$, а $d\alpha$ јесте недегенерисана у $\alpha = 0$ па α јесте контактна форма.

Став A.1. *Нека је α контакта форма и $f : M \mapsto \mathbb{R}^+$ глатка функција. Тада је $f\alpha$ исто контактна форма.*

Доказ:

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha = f d\alpha.$$

Форма $d(f\alpha)\mid_{\alpha=0} = f\, d\alpha \mid_{f\alpha=0}$ јесте недегенерисана, јер је то и $d\alpha\mid_{\alpha=0}$. □

Дефиниција A.2. *Контактна структура* на многострукости M је поље тангентних хиперравни које су локално одређене као нуле контактне форме. Хиперравни називамо *контактним хиперравнима.*

Дефиниција A.3. Многострукост M са дефинисаном контактном структуром називамо *контактном многострукошћу.*

Дефиниција A.4. Подмногострукост контактне многострукости називамо *интегралном многострукошћу поља контактних равни* ако се тангентна раван подмногострукости налази у контактној равни у свакој тачки.

Недегенерисане 2-форме могу бити дефинисане само у простору парне димензије. Сходно томе, контактне многострукости су непарне димензије (видети симплектичке форме у другом додатку Б).

Нека је M $n-$димензиона многострукост. Дефинисаћемо многострукост $J^1(M, \mathbb{R})$ 1-џетова функција на M.

У питању је $2n + 1-$димензиона многострукост. $1-$џет функције f на M је дефинисан тачком $x \in M$, вредношћу функције $u = f(x)$ у тачки x, као и првим диференцијалом функције f у тачки x.

Ако су $(x_1, ..., x_n)$ локалне координате многострукости M, онда је $1-$џет дефинисан у координатама $(x_1, ..., x_n; u; p_1, ..., p_n)$, где су $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Многострукост $J^1(M,\mathbb{R})$ је погодна јер на њој можемо природно дефинисати контактну структуру.

Дефиниција A.5. *Стандардна контактна форма* на многострукости $J^1(M,\mathbb{R})$ је 1−форма

$$\alpha = du - p_1 dx_1 - ... - p_n dx_n. \tag{A.1}$$

Дефиниција A.6. Нека је M многострукост и $f : M \mapsto \mathbb{R}$ глатка функција. Интегралну подмногострукост која се састоји од 1-џетова функције f у свим тачкама многострукости M називамо *1-графиком* функције f.

Теорема A.1. *Стандардна контактна форма на многострукости $J^1(M,\mathbb{R})$ анулира се на свим тангентним равнима 1-графова функција. Затворење уније тангентних равни за све 1-графике функција подудара се са језгром стандардне форме.*

Дефиниција A.7. *Стандардна контактна структура* на многострукости $J^1(M,\mathbb{R})$ јесте поље хиперравни које су унија тангентних равни на графике функције.

Б Основе симплектичке геометрије

У овом додатку ћемо дати преглед основних појмова из симплектичке геометрије. Међусобан однос симплектичке и контактне геометрије је сличан односу еуклидске и пројективне геометрије.

Симплектичка геометрија се бави глатким многострукостима са додатном, симплектичком структуром која је задата антисиметричном недегенерисаном 2-формом. Као таква, она је пандан Римановој геометрији. Међутим у Римановој геометрији та додатна структура је задата симетричном формом. Познато је да у Римановој геометрији има много локалних инваријанти. Испоставља се да у симплектичкој геометрији нема локалних инваријанти, што јесте последица Теореме Дарбуа (3.2), коју смо већ доказали.

Дефиниција Б.1. *Симплектички векторски простор* (V, w) је коначно димензионални реални векторски простор V снабдевен билинеарном формом w која је антисиметрична и недегерисана, тј. важи:

1) $(\forall u, v \in V)\ w(u, v) = -w(v, u)$ (антисиметричност форме);

2) $(\forall u \in V \setminus \{0\})(\exists v \in V)\ w(u, v) \neq 0$ (недегенерсаност форме).

Постоје одређена ограничења за постојање симплектичке структуре на векторском простору V. На пример, из услова недегенерисаности форме w следи, уз помоћ линеарне алгебре, да векторски простор V мора бити парне димензије.

Напомена Б.1. Ако је α контактна форма, тада је рестрикција форме $d\alpha$ на сваком простору $\alpha = 0$ симплектичка форма.

Нека је M многострукост, димензије $2n$. Желимо да јој доделимо симплектичку структуру.

Дефиниција Б.2. Недегенерисана, затворена, диференцијална 2-форма ω на M, назива се *симплектичком формом* на M. Многострукост M на којој је задата симплектичка форма назива се *симплектичком многострукошћу* (M, ω).

Став Б.1. *Диференцијална форма $\omega \in \Omega^2(M)$ на многострукости M димензије $2n$ је недегенерисана ако и само ако је $\omega^{\wedge n} \neq 0$.*

Доказ:

Видети ([15]) за доказ (стр. 40, последица (2.5.)).

□

Дефиниција Б.3. Нека је V симплектички векторски простор, и W његов потпростор. *Симплектички комплемент* од W је потпростор

$$W^{\perp_\omega} = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \text{ за све } w \in W\}.$$

Став Б.2. *Свака права линија у симплектичком векторском простору припада свом симплектичком комплементу.*

Доказ:

$$\omega(v, v) = -\omega(v, v) \implies \omega(v, v) = 0. \tag{Б.1}$$

□

B Универзално својство тензорског производа

Дефиниција B.1. Дати су векторски простори V,W и X. Пресликавање $p : V \times W \mapsto X$ називамо *билинеарним* ако задовољава следећа три услова:

(1) $(\forall v_1, v_2 \in V)(\forall w \in W)\ p(v_1 + v_2, w) = p(v_1, w) + p(v_2, w)$,

(2) $(\forall w_1, w_2 \in W)(\forall v \in V)\ p(v, w_1 + w_2) = p(v, w_1) + p(v, w_2)$,

(3) $(\forall v \in V)(\forall w \in W)(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ p(\lambda v, w) = p(v, \lambda w) = \lambda p(v, w)$,

а када је $V = W$ и $X = \mathbb{R}$ тада пресликавање p називамо *билинеарном формом.*

Билинеарна, а самим тим и мултилинеарна пресликавања нису линеарна пресликавања. Међутим, у неким случају можемо да га проширимо до линеарног. То је главно својство тензорског производа и зовемо га *универзално својство.* Навешћемо га у следећем ставу који наводимо без доказа.

Став B.1. *Нека је $V \otimes W$ тензорски производ векторских простора V и W, а $p : V \times W \mapsto V \otimes W$ билинеарно пресликавање. За произвољно пресликавање $q : V \times W \mapsto X$, где је X произвољни векторски простор, постоји јединствено линеарно пресликавање $\varphi : V \otimes W \mapsto X$ тако да је $\varphi \circ p = q$.*

Универзално својство тензорског производа можемо проширити и на $V^{\otimes n}$, односно постоји јединствено линеарно пресликавање σ' из (2.1).

Литература

[1] Ј. Катић, *Диференцијалне једначине*, скрипта.

[2] В. Драговић, Д. Милинковић, *Анализа на многострукостима*, Математички факултет у Београду, 2003.

[3] Д. Милинковић, *Математичка анализа 2*, скрипта, `http://poincare.matf.bg.ac.rs/∼milinko//skripta/Analiza2.pdf`.

[4] Д. Милинковић, *Увод у многострукости*, скрипта, `http://http://poincare.matf.bg.ac.rs/∼milinko/skripta/globalna.pdf`.

[5] Д. Милинковић, *Мини курс о симплектичким многострукостима* `http://poincare.matf.bg.ac.rs/∼milinko/skripta/simplekticke.pdf.`

[6] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Herman, 1945.

[7] Kichoon Yang, *Exterior Differential Systems and Equivalence problems*, Springer, 1992.

[8] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer, 1992.

[9] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, 1988.

[10] R.L.Bryant, S.S.Chern, R.B.Gardner, H.L.Goldschmidt, P.A. Griffits *Exterior Differential Systems*, Springer-Verlag, 1991.

[11] R. L. Bryant, *Lecture Notes on Exterior Differential Systems* `https://services.math.duke.edu/ bryant/MSRI_Lectures.pdf`

[12] B. McKay, *Introduction to Exterior Differential Systems*, 2017. `https://arxiv.org/pdf/1706.09697.pdf`

[13] Thomas A. Ivey, J. M. Landsberg, *Cartan for beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differenatial Systems*, American Mathematical Society, 2003.

[14] М. Антић, *Диференцијална геометрија многострукости*, Математички факултет у Београду, 2015.

[15] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology 2nd ed*, Clarendon Press, Oxford, 1998