Многострукости у физици (и обрнуто)

– једно неформално предавање[1]–

Дарко Милинковић

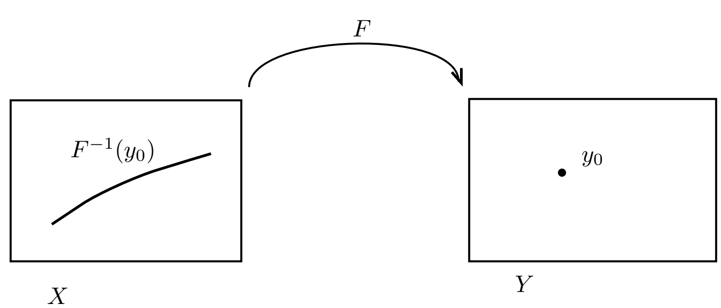
Циљ овог текста је да на што елементарнији начин мотивише и уведе појмове везане за теорију многострукости и наведе неке законе физике који могу да се формулишу на језику многострукости. Подвлачимо да се ради само о употреби *језика многострукости*, без амбиције да дубље разматрамо физичке интерпретације већине појмова.

§1. Шта су многострукости? Математичари често желе да реше једначину $F(x) = y_0$ где је $F : X \to Y$ нека функција, X, Y скупови и $y_0 \in Y$. Другим речима, желе да нађу скуп

$$S = F^{-1}(y_0) = \{x \in X \mid F(x) = y_0\}. \tag{1}$$

У томе ретко успевају! Веома мали број једначина може да се реши експлицитно.

Као (на први поглед) мање амбициозан циљ, можемо да поставимо задатак да опишемо структуру скупа S, тј. да опишемо шта тај скуп наслеђује од (претпостављене или вештачки наметнуте) структуре скупа X, уз помоћ (претпостављене или конструисане) структуре скупа Y и, наравно, особина пресликавања F.



Слика 1: Инверзна слика тачке y_0

Да бисмо илустровали овај принцип, претпоставимо да су X и Y векторски простори (дакле, речена додатна структура је структура линеарног простора). Проблем описа скупа S раздвојићемо на два случаја:

(A) Пресликавање F је линеарно. Ако је $y_0 = 0 \in Y$, онда је S векторски простор. За произвољно $y_0 \in Y$, скуп S је афини простор.

[1]Одржано у априлу 2011. у једном од термина курса о Теорији релативности које је држао проф. Ж. Мијајловић на Математичком факултету.

Пример: Нека је $X = Y = C^\infty(\mathbb{R})$, скуп бесконачно пута диференцијабилних реалних функција реалне променљиве[2] и

$$F(x) = a_n \frac{d^n}{dt^n} x(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} x(t) + a_0 x(t).$$

Једначина $F(x) = y$ је *линеарна диференцијална једначина* n-тог реда. Теорија оваквих једначина за много тога може да захвали Линеарној алгебри („скуп S наслеђује линеарну структуру") и Банаховој теореми о фиксној тачки, која гарантује егзистенцију решења обичне диференцијалне једначине („импликације тополошке структуре скупа X на скуп S").

(Б) Пресликавање F није линеарно. Овде настају велике компликације. Напустимо зато сложене, бесконачно димензионе, векторске просторе из претходног примера, и ограничимо се на случај када је $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}$. Тада важи следећа лема.

Лема: Произвољан затворен скуп $S \subset \mathbb{R}^n$ може да се напише у облику (1) за неку глатку функцију F.

Скица доказа: Нека је $V_n \supset S$ низ отворених скупова, таквих да је $\cap_{n=1}^\infty V_n = S$ и нека је $V_n \supset U_n \supset S$. Нека је, за свако n, ψ_n глатка функција таква да је $\psi_n(x) \equiv 1$ на U_n, $\psi_n(x) \equiv 0$ ван V_n и $0 \le \psi_n(x) \le 1$ (оваква функција се конструише уз помоћ функције e^{-1/x^2}). Тада $F(x) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\psi_n(x)$ задовољава услове Леме. □

Наравоученије: Ма колико да је лепа функција F, скуп S може да буде неописиво неправилан. Дакле, да бисмо били у стању да опишемо структуру скупа (1) потребно нам је још нешто сем лепоте функције F. Следећа дефиниција нам обезбеђује то „нешто" (видети теорему иза ње).

Дефиниција: Нека је D отворен подскуп у $\mathbb{R}^n$ и $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ глатка функција. Тачка $x_0 \in D$ назива се *сингуларном тачком* функције F ако је $\nabla F(x_0) = 0$. Тачка $y_0 \in Y$ је *регуларна вредност* функције F ако y_0 није слика неке сингуларне тачке.

Теорема: Ако је y_0 регуларна вредност функције F и $S = F^{-1}(y_0)$, онда је или $S = \emptyset$ или свака тачка $x_0 \in S$ има околину U такву да је $U \cap S$ хомеоморфно неком отвореном скупу у $\mathbb{R}^{n-1}$.

Доказ: следи из Теореме о имплицитној функцији, или Теореме о рангу, или Теореме о инверзној функцији (све ове теореме су еквивалентне). □

Напомена: Ако је дато више функција $F_1, \dots, F_k$, онда тачку x_0 називамо сингуларном ако су градијенти $\nabla F_1(x_0), \dots, \nabla F_k(x_0)$ линеарно зависни. Слику $(F_1(x_0), \dots, F_k(x_0)) \in \mathbb{R}^k$ сингуларне тачке називамо *сингуларном вредношћу* k–торке функција $F_1, \dots, F_k$, а све остале тачке у $\mathbb{R}^k$ њеним *регуларним вредностима.* Важи теорема која уопштава претходну на ову ситуацију: *Инверзна слика регуларне вредности је или празна или локално хомеоморфна отвореном скупу у* $\mathbb{R}^{n-k}$. Претходна теорема је, очигледно, специјални случај ове напомене за $k = 1$.

[2] Овакве функције ћемо у овом тексту звати глатким. Све функције, векторска поља и остале објекте (за које то има смисла) који се у тексту појављују сматраћемо глатким, чак и ако то не кажемо експлицитно.

Скупове које описује претходна теорема (и претходна напомена) издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција: Хаусдорфов тополошки простор M назива се *многострукошћу димензије* n ако свака тачка $x_0 \in M$ има отворену околину која је хомеоморфна отвореном скупу у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$.

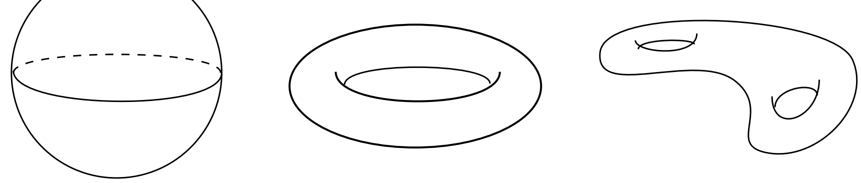
Очигледно је да је сваки отворен подскуп многострукости и сам многострукост.

Примери: 1. Крива $r = 2\sin\theta$ је једнодимензиона многострукост, а крива $r^2 = 4\cos\theta$ није (r и θ су поларне координате у $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

2. Крива $r = 1 - \cos\theta$ је једнодимензиона многострукост, али нема тангенту у $(0, 0)$.

3. Свака једнодимензиона многострукост је хомеоморфна (тополошки еквивалентна) кружници или правој.

4. Дводимензиона сфера је дводимензиона многострукост. Све дводимензионе компактне многострукости су класификоване и добијају се тако што се на сфери направи неколико рупа и оне се запуше или Мебијусовим тракама, или ручкама. Нпр. сфера са једном ручком је торус, сфера са једном Мебијусовом траком је пројективна раван, а сфера са две Мебијусове траке је Клајнова флаша. Све ове површи у свакој тачки имају тангентну раван.



Слика 2: Дводимензионе многострукости - површи

5. Класификација многострукости димензије 3 је отворен проблем, а класификација многострукости димензије веће од 3 је нерешив проблем, јер је своди на класификацију коначно генерисаних група (будући да се свака коначно генерисана група може реализовати као *фундаментална група* многострукости димензије веће од 3), а последњи проблем је нерешив (*проблем речи*, Теорема Маљцева из Математичке логике).

6. Скуп свих матрица $n \times n$ је многострукост, јер је овај скуп (хомеоморфан са) $\mathbb{R}^{n \times n}$. Скуп $GL(n)$ инвертибилних $n \times n$ матрица је такође многострукост, јер је то отворен подскуп у $\mathbb{R}^{n \times n}$, будући да је детерминанта непрекидно (полиномско) пресликавање, а скуп $GL(n)$ је комплемент скупа $\det^{-1}(0)$. И остале познате матричне групе су многострукости. На пример, група $O(n)$ ортогоналних матрица је многострукост, јер једначине $A \cdot A^T = E$, схваћене по координатама као једначине у $\mathbb{R}^{n \times n}$, задовољавају услове претходне теореме и напомене иза ње (мада се треба машити оловке и папира да би се то проверило).

Имајући у виду наслов овог текста и чињеницу да је вектор брзине тангентни вектор на трајекторију којом се тачка креће, убудуће ћемо под многострукостима подразумевати само тзв. *глатке многострукости*, тј. оне које имају тангентни простор у свакој тачки[3]. Значај овог договора илуструје следећи задатак.

Задатак: Ово је одломак из приче Сер А. К. Дојла *Самостанска школа*:

– *Као што видите, овај траг је оставио за собом бицикл који је долазио од школе.*

– *А зар бицикл није могао да иде према школи?*

– *Не, не, драги мој Вотсоне. Зна се да задњи точак, на којем је тежиште читавог терета, оставља дубље трагове. Сигурно сте приметили да је задњи точак, прешавши на неколико места преко трага предњег точка, потпуно затро његове трагове који су плићи. То несумњиво доказује да је бициклиста долазио од школе.*

(а) Има ли смисла ово што говори Шерлок Холмс?

(б) Може ли да се одреди смер кретања бицикла на основу његовог трага?
[Преузето из *Геометрија и машта*, Конвеј, Дојл, Гилман, Трстон.]

§2. Њутнова механика: теорија диференцијалних једначина. Други Њутнов закон гласи

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \qquad \text{односно} \qquad \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F}. \tag{2}$$

За задато векторско поље $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ово је обична диференцијална једначина другог реда по $\mathbf{q}$. Из теорије диференцијалних једначина нам је познато да она има јединствено решење уколико су задата два услова (јер се ради о једначини другог реда), нпр. почетни положај и почетна брзина. Ово су два вектора у $\mathbb{R}^3$. Дакле, свака тачка простора $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ одређује једно решење једначине (2), односно сваки уређени пар вектора из тог простора, схваћен као пар (почетни положај, почетна брзина), потпуно одређује трајекторију по којој се тело креће. Простор $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ назива се *конфигурационим простором* система у коме сила $\mathbf{F}$ дејствује на једно тело.

Општије, ако се систем састоји од n тела, конфигурациони простор је $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$, а једначина (2) за задато векторско поље $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$ (вектори сила које делују на свако од тела; на десној страни једначине (2) сваки од њих се множи реципрочном вредношћу масе одговарајућег тела) је једначина по непознатој векторско–вредносној функцији $\mathbf{q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$ (вектор положаја n тела у тродимензионом свету у тренутку $t \in \mathbb{R}$).

---

[3]Многострукости добијене, као у претходној теореми, као инверзне слике регуларне вредности глатких пресликавања, јесу глатке – њихови тангентни простори су ортогонални комплементи градијент–вектора функција које их дефинишу. *Формална дефиниција глатке многострукости:* Многострукост M димензије n је *глатка* ако за сваку тачку $x \in M$ постоји околина $U \ni x$ и хомеоморфизам $\psi_U : U \to B_U$ околине U на отворен подскуп $B_U \subset \mathbb{R}^n$ такви да је, ако је (V, ψ_V, B_V) још једна тројка таквих хомеоморфизама, пресликавање $\psi_U \circ \psi_V^{-1} : \psi_V(U \cap V) \to \psi_U(U \cap V)$ дифеоморфизам отворених подскупова у $\mathbb{R}^n$. Тројке (V, ψ_V, B_V) (или, некад, сама пресликавања ψ_U) називамо *локалним картама*, или *локалним координатама*. Кажемо да се две криве $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ додирују у тачки $q = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \in M$ ако криве $\psi \circ \gamma_1$ и $\psi \circ \gamma_2$ имају исти извод у 0 за неку ($\Leftrightarrow$ сваку) локалну карту ψ. Класу еквиваленције кривих које се додирују у $q \in M$ називамо *тангентним вектором* у тој тачки, а скуп свих тангентних вектора у q – *тангентним простором* у q и означавамо га са T_qM. На глатким многострукостима можемо да говоримо о глатким пресликавањима – $f : M \to N$ је *глатко* ако је за сваку ($\Leftrightarrow$ неку) карту ϕ на M и ψ на N $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ глатко пресликавање еуклидских простора.

Ако у једначини (2) извршимо смену $\mathbf{r} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ добијамо

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F},$$

што је једначина (2) по новој промењљивој $\mathbf{r}$. Дакле, Други Њутнов закон је инваријантан у односу на пресликавања

$$\Gamma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \qquad \Gamma(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q} + t\mathbf{v}, t). \tag{3}$$

Слично, облик једначине (2) се не мења ако у њу уведемо смене

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \mathbf{u} \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = R\mathbf{q}, \tag{4}$$

где је $\mathbf{u}$ константан вектор из $\mathbb{R}^3$, а R матрица ротације, тј. ортогонална матрица за коју је $\det R = 1$. Трансформације (4) су директне изометријске трансформације еуклидског простора, тј. трансформације простора које чувају растојање и оријентацију.

Трансформације (3), (4) и све њихове композиције називамо *Галилејевим трансформацијама*; скуп Галилејевих трансформација је група, зовемо је *Галилејевом групом.* Инваријантност једначина (2) у односу на Галилејеве трансформације значи да се закони Њутнове механике не мењају у координатном систему који се налази на другом месту у простору, или се креће константом брзином у односу на почетни (под условом да је исто оријентисан).

Погледајмо два примера из свакодневног живота.

Задатак: (а) До 1988. године светски рекорд на такмичењима у избацивању чепа из боце шампањца износио је 109 стопа и 6 инчи, а држао га је капетан Британске краљевске артиљерије Мајкл Хил. Којом брзином је г. Хил избацио чеп из боце, ако се зна да је боцу држао на површини Земље под углом од 45 степени?

(б) Нови светски рекорд од 177 стопа и 9 инчи постигао је 5. јуна 1988. године, на такмичењу у винарији „Вудбари Вајнјардс”, професор Е. Хајнрих са Политехничког института у Ренселеру. Он је при избацивању чепа боцу држао на висини од 4 стопе изнад површине Земље под углом од 45 степени. Којом брзином је професор Хајнрих избацио чеп из боце?
[Преузето из *Томасове математичке библије*, срп. превод, изд. ГК Београд.]

Задатак: У ноћи без месечине ученик стоји на торњу високом y метара, а његов учитељ *кјудоа* (уметности руковања луком и стрелом) смирено стоји удаљен x метара од торња, са повезом преко очију. У тренутку кад ученик баца јабуку са торња, учитељ одапиње стрелу почетном брзином v_0 под углом $\alpha = \arctan(y/x)$ и погађа јабуку у лету. Да ли је ово последица:
(а) случајно добро изабране почетне брзине v_0
(б) учитељеве интуиције и вештине концентрације
(в) ничега од понуђених одговора?

Поента претходног задатка је у томе да стрелац у сваком случају погађа јабуку, без обзира колико јако је у стању да напне лук и којом брзином одапне стрелу (под условом да зна да израчуна угао под којим треба да је одапне). Дакле, захваљујући диференцијалним једначинама, јабуку може да погоди свако, ма колико да је нејак, неспретан или плашљив. То се може сматрати почетком увођења демократије у кјудо[4].

---

[4]... што је, последично, довело до пропасти ове племените вештине и њеног пада у заборав.

§3. Механика као варијациони рачун. Нека је

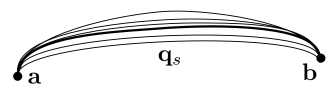
$$L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

глатко пресликавање (називамо га *лагранжијаном*). За криву $\mathbf{q} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ која спаја тачке $\mathbf{q}(0) = \mathbf{a}$ и $\mathbf{q}(1) = \mathbf{b}$ дефинишимо

$$S(\mathbf{q}) = \int_0^1 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\, dt, \tag{5}$$

где је са $\dot{\mathbf{q}}$ означен извод $\frac{d}{dt}\mathbf{q}$. Варијациони рачун се бави минимизацијом (или, општије, налажењем *екстремала*) оваквих и сличних функционала.

Наиме, крива $[0,1] \ni t \mapsto \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^m$ се назива *екстремалом функционала S у простору кривих са фиксираним крајевима* ако за сваку *варијацију* криве $\mathbf{q}$ која фиксира крајеве, тј. за



Слика 3: Варијација криве

сваку фамилију кривих

$$\mathbf{q}_s : [0,1] \to \mathbf{R}^m, \quad , -\varepsilon < s < \varepsilon,$$

такву да је $\mathbf{q}_s(0) \equiv \mathbf{a}$, $\mathbf{q}_s(1) \equiv \mathbf{b}$, $\mathbf{q}_0(t) = \mathbf{q}(t)$, важи

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} S(\mathbf{q}_s(t)) = 0. \tag{6}$$

Диференцирањем израза (5) под знаком интеграла из услова (6) добијамо

$$0 = \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d\dot{\mathbf{q}}_s}{ds} \right) dt = \int_0^1 \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \frac{d\mathbf{q}_s}{ds} \right] dt.$$

Последња једнакост следи из просте примене Лајбницовог правила за извод производа. Интеграл средњег сабирка на десној страни је једнак нули због Њутн–Лајбницове формуле и чињенице да је $\mathbf{q}_s$ фамилија кривих која фиксира крајеве, па је њен извод по s за $t = 0$ и $t = 1$ једнак нули. Зато из последње једнакости следи да је $\mathbf{q}$ екстремала функционала S ако и само ако је

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \frac{d\mathbf{q}_s}{ds}\, dt = 0$$

за *сваку* варијацију $\mathbf{q}_s$ која фиксира крајеве. То је могуће само ако је

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0. \tag{7}$$

Ово су чувене *Ојлер–Лагранжеве једначине.*

Задатак: Нека је $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \|\dot{\mathbf{q}}\|$. Тада је

$$S(\mathbf{q}) = \int_0^1 \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|\, dt,$$

где је $\|\cdot\|$ ознака за дужину (интензитет) вектора, дужина криве $\mathbf{q}(t)$. Користећи Ојлер–Лагранжеве једначине доказати да су екстремале овог функционала праве („права је најкраће растојање између две тачке”).

За нас је занимљив случај кад је $m = 3n$ и лагранжијан L функција дефинисана на фазном простору (која, у општем случају, може да зависи и од времена, тј. не мора да буде *аутономна*). Претпоставимо да је поље силе $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^m$ дефинисано у некој области $D \subset \mathbb{R}^m$. Кажемо да је поље $\mathbf{F}$ *потенцијално* ако постоји скаларна функција $V : D \to \mathbb{R}$ таква да важи

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = -\nabla V(\mathbf{q}) \quad \text{за све} \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m. \tag{8}$$

Функција V назива се *потенцијалом* векторског поља $\mathbf{F}$ или *потенцијалном енергијом* разматраног система; приметимо да је она *дефинисана до на константу.* Неопходан услов егзистенције потенцијала датог векторског поља $\mathbf{F}$ је

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

(јер је $\nabla \times \nabla V = \mathbf{0}$). Овај услов је и довољан, уколико је област D у којој је дефинисано поље $\mathbf{F}$ *просто повезана*, тј. ако свака проста затворена крива у D ограничава диск који такође припада области D (нпр. раван без координатног почетка *није* просто повезана).

Претпоставимо (ради једноставности записа; суштински то не ограничава општост, већ само избегава компликованији запис са више маса $m_1, \dots, m_k$) да се систем састоји из једног тела и посматрајмо функцију

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{m\|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{2} - V(\mathbf{q}),$$

(израз $m\|\dot{\mathbf{q}}\|^2/2$ назива се *кинетичком енергијом*). Ојлер–Лагранжеве једначине (7) примењене на ту функцију ће гласити

$$m\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} + \nabla V(\mathbf{q}) = 0,$$

што је, имајући у виду (8), управо Други Њутнов закон. Дакле, доказали смо следећу теорему:

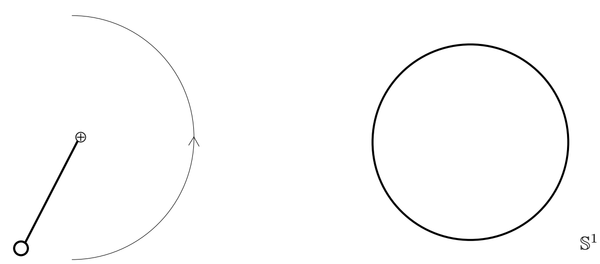
Теорема: Трајекторије потенцијалног система су екстремале функционала (5) за функцију L која је разлика кинетичке и потенцијалне енергије.

Задатак: Нека је $V \equiv 0$. Доказати да су решења Ојлер–Лагранжевих једначина праве (што је сагласно са Првим Њутновим законом[5]).

§4. Механика као Риманова геометрија: Лагранжева механика. Претпоставимо да желимо да опишемо кретање клатна које осцилује у једној равни. На њега осим силе гравитације делује и сила затезања канапа за који је везано. То значи да је вектор силе у Другом Њутновом закону, тј. десна страна диференцијалне једначине (2), сложенији него у случају тела које се слободно креће у гравитационом пољу (као у задацима о кјудоу и шампањцу). Ту аналитичку компликацију можемо да елиминишемо ако пристанемо на то *да на други начин гледамо простор.* Наиме, сила затезања има предвидљив ефекат: клатно се креће по кружници, тј. многострукости $\mathbb{S}^1$. Гравитација остаје гравитација. Дакле, клатно можемо да посматрамо исто као и стрелу или чеп флаше шампањца који живе у простору $\mathbb{S}^1$: проблем описа његовог кретања може да се

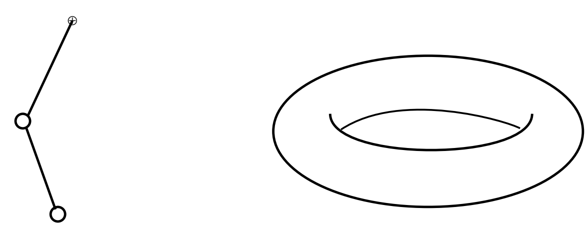
[5] И више од тога: резултат овог Задатка је управо Први Њутнов закон, јер решење долази са тачном параметризацијом (а тиме и са тачно одређеним, константним, вектором брзине). Упоредити ово са претходним задатком, где су решења такође биле праве, али са било каквом параметризацијом. Разлог лежи у томе што $\int \|\dot{q}(t)\|\, dt$ не зависи од параметризације, а $\int \|\dot{q}(t)\|^2\, dt$ зависи. Језиком Риманове геометрије: својство „бити геодезијска линија” није инваријантно у односу на репараметризацију. Ово ћемо дотаћи и у следећем параграфу.

формулише као проблем описа кретања тачке по $\mathbb{S}^1$ на коју делује сила гравитације. Другим речима, конфигурациони простор (сетимо се да је то простор почетних положаја и почетних брзина, дакле парова *тачка–тангентни вектор*) механичког система „клатно” је $T\mathbb{S}^1$ – *тангентно раслојење*[6] кружнице.



Слика 4: Клатно и кружница

Слично, конфигурациони простор двоструког клатна је тангентно раслојење торуса $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.



Слика 5: Двоструко клатно и торус

Задатак: Познати београдски снагатор, акробата, хуманиста, филмски режисер, глумац и ковач Драгољуб Алексић (1910–1985) летео је изнад Калемегдана држећи се само зубима за уже причвршћено за авион. Описати конфигурациони простор у коме се ова акробација одвијала[7].

[6]Тангентно раслојење многострукости је унија тангентних простора у свим њеним тачкама.

[7]Алексић је тако летео и изнад неких других европских градова, а изводио је и друге невероватне тачке: ходање по жици разапетој између зграда (без заштитне мреже), савијање челичне шипке, ослобађање из кавеза који виси високо на дрвету, док гори фитиљ на експлозиву закаченом за ланац којим је кавез причвршћен. Не мале приходе од својих акробатских представа поклањао је разним хуманитарним, спортским и другим удружењима, због чега је био много слављен у европској штампи између два рата. Са групом ентузијаста, 1942. године, под немачком окупацијом, у аматерским условима је снимио први српски тон филм „Невиност без заштите” (од кога су сачувани само делови; они се могу видети у истоименом филму Душана Макавејева из 1968). Стари Београђани причају да од аплауза приликом његових пројекција у окупираном Београду није могла да се чује музика у суседном, немачком биоскопу. Алексић је имао невоља са немачким окупационим властима и био оптужен за подривање Трећег рајха. После рата, нова власт га је због снимања филма под окупацијом оптужила за сарадњу са окупатором и два пута извела пред суд, који га је оба пута ослободио свих оптужби. Умро је у великој беди и сиромаштву у старачком дому на Бежанијској Коси. Данас у Земуну постоји Улица акробате Алексића.

Претходни примери нам говоре следеће: ако је механички проблем такав да је јасно да деловање неких сила (које називамо *силама везе*) ограничава кретање система на многострукост M, онда механику тог система можемо да формулишемо као механику у фазном простору TM. Да бисмо механику на многострукостима формулисали у духу Њутнове механике, морамо да извршимо малу ревизију формуле $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Наиме, у Њутновој механици (механици у еуклидском простору), идентификујемо векторе који *имају исти интензитет, правац и смер*, тј. оне који се *паралелном транслацијом* могу превести један у други. На многострукости, тангентне векторе у различитим тачкама не можемо да идентификујемо, сабирамо, одузимамо: појам паралелности не постоји као *канонски*[8] појам, а његово постулирање је еквивалентно избору одговарајуће *теорије конексије*, односно *теорије паралелног преноса*, који нам омогућава да дамо смисао вектору убрзања као изводу вектора брзине. Наиме, израз

$$\mathbf{a}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{v}(t_0+h) - \mathbf{v}(t_0)}{h} \tag{9}$$

укључује „сабирање вектора из различитих простора": тангентних вектора трајекторије $\mathbf{q}(t)$ у тачкама $\mathbf{q}(t_0)$ и $\mathbf{q}(t_0+h)$. У случају еуклидског простора, ову чињеницу и не примећујемо, јер смо се навикли да идентификујемо векторе паралелном транслацијом. Међутим, паралелна транслација не постоји као канонски појам на многострукости, нити се наслеђује из амбијентног простора[9]. Међутим, можемо да се договоримо да под паралелним преносом вектора $\mathbf{v}$ из тангентног простора T_xM многострукости $M \subset \mathbb{R}^n$ (не заборавимо да је наша многострукост M настала у еуклидском простору, као резултат рестрикција сила везе на систем; у случају клатна та сила везе је сила затезања канапа) у тачки $x \in M$ у тангентни простор T_yM у тачки $y \in M$ подразумевамо вектор који се добија тако што се $\mathbf{v}$ паралелно (у смислу $\mathbb{R}^n$) транслира до тачке y, а потом ортогонално (у смислу еуклидског скаларног производа у $\mathbb{R}^n$) пројектује на простор T_yM. Овај начин паралелног преноса вектора назива се *конексијом* на M[10].

На тај начин и израз (9) има смисла, тако да можемо да дефинишемо извод било ког тангентног векторског поља Y на многострукости M у правцу X.

---

[8]„Канонски" значи „објашњив уз помоћ до сада дефинисаних појмова". Нпр. када дефинишемо векторски простор, можемо да кажемо да постоји изоморфизам између векторског простора V и његовог дуала V^* (тј. скупа свих линеарних пресликавања $V \to \mathbb{R}$). Међутим, не постоји „канонски" изоморфизам: да бисмо конструисали такав изоморфизам, потребна нам је још нека структура осим оне о којој причамо (векторске): база, скаларни производ или нешто слично. Дакле, речени канонски изоморфизам не постоји у категорији векторских простора, али постоји нпр. у категорији векторских простора са скаларним производом.

[9]Нпр. ако је T вектор који је тангентан на сферу на Северном полу, њему паралелан вектор на екватору не припада тангентном простору сфере.

[10]Постоје различити начини да се вектор пројектује на T_yM, па постоје и различите конексије. Ми смо овде одабрали ортогоналну пројекцију, што укључује метрику, тако да је добијена конексија изведена из метрике. Таква конексија назива се метричком, или Леви–Чивитином, конексијом. Приметимо да смо се овде за дефиницију конексије послужили амбијентним (еуклидским) простором у који је многострукост смештена; конексију је могуће дефинисати и без тога, она је *унутрашњи* објекат на многострукости, независан од амбијента у коме се многострукост налази или не налази (формална дефиниција многострукости у §1 не подразумева никакав амбијент, многострукост може да се не налази ни у каквом већем амбијенту).

Наравно, овај извод неће бити исто што и обичан извод у правцу – овде је укључена и пројекција на T_yM. Тај нови извод зовемо коваријантним изводом векторског поља Y у правцу X, и означавамо са $\nabla_X Y$.

Задатак: Доказати да $\nabla_X Y$ има следећа својства

$$\begin{aligned} \nabla_{fX+gY}Z &= f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \\ \nabla_X(Y+Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ \nabla_X(fY) &= f\nabla_X Y + df(X)Y. \end{aligned} \tag{10}$$

Други Њутнов закон $\ddot{\gamma} = m^{-1}\mathbf{F}$ сада може да се формулише у облику

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = m^{-1}\mathbf{F}^T, \tag{11}$$

где је $\mathbf{F}^T$ тангентна компонента вектора силе (у случају кретања клатна схваћеног као кретање тачке по $\mathbb{S}^1$ то је тангентна компонента вектора силе гравитације $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$).

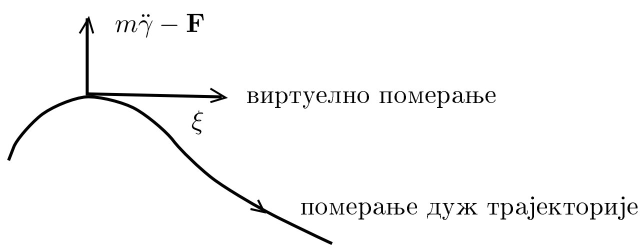
Једначина (11) еквивалентна је следећој теореми.

Теорема: Трајекторије γ система на M задовољавају једначине

$$\left\langle m\frac{d^2\gamma}{dt^2} - \mathbf{F}, \xi \right\rangle = 0$$

за свако $\xi \in TM$, где је са $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означен скаларни производ у амбијентном (еуклидском) простору.

Ова теорема се назива Даламберовим принципом или *Принципом виртуелних померања* и некад се формулише на следећи начин: *Рад силе везе на произвољном виртуелном померању је једнак нули.*



Слика 6: Даламберов принцип

Уместо дубљег уласка у теорију конексија, механику на многострукости M можемо, имајући у виду претходни параграф, да формулишемо на следећи начин. Нека је V потенцијал сила које делују на систем (не рачунајући силе које га принуђују да се креће по многострукости M, чији је утицај урачунат „геометријски”, управо као ограничење да се систем креће по M). Тада важи:

Теорема: Трајекторије система на многострукости M са потенцијалом $V : M \to \mathbb{R}$ су екстремале функционала

$$S(\gamma) = \int_\gamma (K - V)\, dt,$$

где је K кинетичка енергија система, на простору кривих *на многострукости* M са фиксираним крајевима.

Задатак: Доказати да из претходне теореме следи коваријантна формулација Другог Њутновог закона (11).

Ово смо практично доказали у претходном параграфу. Овде само треба пажљиво поновити рачун спроведен тамо, откривајући успут која својства обичног извода има коваријантни, што је фина вежба за некога ко ово ради први пут.

Приметимо да је кинетичка енергија система $K = m\|v\|^2/2$, односно, за систем са више тела
$$K = \frac{1}{2}\sum_k m_k\|v_k\|^2,$$
где је $\|v\|^2$ интензитет вектора брзине v. Кажемо да је на многострукости M задата *Риманова структура* ако је задата глатка фамилија скаларних производа
$$g : TM \times TM \to \mathbb{R}$$
на тангентним просторима. Многострукости са оваквом структуром називамо *Римановим многострукостима.* Кинетичку енергију, која је квадратна форма на TM, можемо да схватимо као Риманову структуру, па функционал S можемо да напишемо као
$$S(\gamma) = \int_\gamma (g(\dot\gamma, \dot\gamma) - V(\gamma))\,dt.$$
Специјално, за $V = 0$,
$$S(\gamma) = \int_\gamma g(\dot\gamma, \dot\gamma)\,dt.$$
Екстремале овог функционала називамо *геодезијским линијама.* Може да се докаже да су оне уједно и екстремале *функционала дужине криве*
$$l(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\,dt, \tag{12}$$
тј. геодезијске линије на многострукости уопштавају праве у еуклидском простору (видети задатке из претходног параграфа)[11]. Ово нас доводи до следећег *уопштења Првог Њутновог закона*:

Теорема: Ако на систем на многострукости M не делују друге силе (сем оних које га принуђују да се креће по многострукости M), онда су његове трајекторије геодезијске линије.

Последица: Геодезијске линије су решења диференцијалне једначине другог реда
$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$
(једначина (11) без силе)[12].

[11] Међу њима, међутим, постоји важна разлика: геодезијске линије само *локално* минимизују растојање. Нпр. геодезијске линије на дводимензионој сфери $\mathbb{S}^2$ су велики кругови: пресеци сфере са равнима кроз њен центар.

[12] У литератури се често ова једначина узима за дефиницију геодезијских линија. Њен запис у координатама је $\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0$ за $k = 1, \dots, n$, где су Γ_{ij}^k тзв. Кристофелови симболи. Обратимо пажњу на чињеницу да је права $x = t, y = t$ геодезијска у еуклидској равни, али да (та иста!) права $x = t^3$, $y = t^3$ није – појам „бити геодезијска" не зависи само од пута, већ и од брзине, тј. параметризације!

Међутим, и у случају присуства потенцијала V, описивање трајекторија може да се сведе на описивање геодезијских линија, али са промењеном метриком:

Теорема:[13] Нека је M Риманова многострукост са Римановом метриком g (која дефинише кинетичку енергију). Тада су трајекторије система са укупном енергијом E геодезијске линије метрике $g_E := (E - V)g$.

§5. Механика као симплектичка геометрија: Хамилтонова механика. Нека је $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ конвексна (тј. са позитивно дефинитном матрицом другог извода) функција. *Лежандровом трансформацијом* функције F назива се функција

$$G(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - F(\mathbf{x}),$$

где је $\mathbf{p} := \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$.

Теорема: Претпоставимо да је систем задат лангранжијаном $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конвексним по другој промењљивој и нека је H Лежандрова трансформација функције L по тој промењљивој:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \tag{13}$$

Тада је систем (7) једначина другог реда еквивалентан систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{q}}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \end{cases} \tag{14}$$

једначина првог реда.

Доказ: Диференцирањем добијамо

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

одакле следи

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \ -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \ -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{15}$$

Из (7) и (13) следи $\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$, па убацивањем у (15) добијамо систем (14). □

Дефиниција: Нека је систем задат лагранжијаном L. Промењљиву

$$\mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \tag{16}$$

називамо *импулсом.* Систем једначина (14) називамо *Хамилтоновим једначинама.*

Напомена: У еуклидском простору, ако је брзина вектор $\mathbf{v}$, кинетичка енергија $K = m\|\mathbf{v}\|^2/2$, а лагранжијан $L = K(\mathbf{v}) - V(\mathbf{q})$, импулс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, јер је $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v}$. Међутим, импулс и брзина *нису објекти истог геометријског типа.* Брзина је елемент тангентног раслојења TM, док је импулс дуални објекат – ковектор (тј. линеарни функционал). Први сабирак у (13) треба схватити као дејство ковектора $\mathbf{p}$ на вектору $\dot{\mathbf{q}}$ (које у еуклидском простору

[13] Ова теорема је манифестација тзв. Мопертијевог принципа, у литератури се појављује и као Јакобијева теорема.

увек може да се реализује путем скаларног производа; отуда се ту импулс може схватити и као вектор). Овде се опет ради о постојању канонских идентификација у еуклидском простору на које смо навикли, али које не постоје у општијим ситуацијама. Зато је природа импулса видљивија у механици на многострукостима.

Позабавићемо се сада мало детаљније овом напоменом. Дефинисаћемо Лежандрову трансформацију независно од координата[14].

Нека је T_qM тангентни простор глатке многострукости M у тачки $q \in M$. Његов дуал T_q^*M назива се *котангентним простором* у тачки q, а унија

$$T^*M := \bigcup_{q \in M} T_q^*M$$

котангентним раслојењем многострукости M. Котангентно раслојење T^*M назива се још и *фазним простором* механичког система чији је конфигурациони простор TM.

У општем случају, ако је M многострукост, Лежандрова трансорфмација дефинисана лагранжијаном $L : TM \to \mathbf{R}$ остварује изоморфизам

$$D_{\mathrm{vert}}L : TM \xrightarrow{\cong} T^*M,$$

где је $D_{\mathrm{vert}}\cdot$ вертикални извод (извод дуж компоненте брзине)[15] и придружује функцији L хамилтонијан $H : T^*M \to \mathbf{R}$:

$$H(\eta, t) := \left\langle \eta, (D_{\mathrm{vert}}L)^{-1}\eta \right\rangle - L((D_{\mathrm{vert}}L)^{-1}\eta, t).$$

Овде је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ спаривање функционала и вектора. Ковектор ζ има две компоненте, просторну (везану за многострукост M) и вертикалну (њу зовемо *импулсом*), везану за векторски простор T_q^*M. Импулс је са брзином повезан помоћу вертикалног извода $D_{\mathrm{vert}}L$, који пресликава тангентни простор у котангентни простор. Дакле, брзине живе у тангентном, а импулси у котангентном раслојењу.

Док је Лагранжева механика механика тангентног раслојења, Хамилтонова механика је механика котангентног раслојења. У претходном параграфу смо видели да је математички језик Лагранжеве механике – Риманова геометрија. Иако је котангентно раслојење изоморфно тангентном (у тополошком и алгебарском смислу), оно има структуру коју тангентно раслојење нема – структуру *симплектичке многострукости*. Да би смо њу увели, потребно нам је мало нове терминологије.

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и $q \in M$. Тада је $df(q) \in T_q^*M$ – за сваки вектор $\mathbf{v} \in T_qM$ вредност функционала $df(q)(\mathbf{v})$ је извод функције[16] f у

[14] Ако неки објекат дефинишемо у координатама на многострукости, чак и ако се ради о локалном објекту, неопходно је утврдити да ли је та дефиниција независна од избора локалних координата. То је место на коме се губе многе идентификације на које смо навикли у еуклидском простору – прелаз из једног система координата у други не мора да чува те идентификације.

[15] Због тога нам је потребна претпоставка о недегенерисаности другог извода.

[16] Пошто је извод функције n променљивих локално дефинисан објекат, појам извода у правцу има смисла, имајући у виду „формалну дефиницију глатких многострукости” са почетка текста. Приметимо да у овом случају, иако је домен функције многострукост, нема компликација као у случају дискутованом у претходном параграфу у вези са конексијама, када се радило о диференцирању векторских поља.

правцу вектора $\mathbf{v}$. Дакле, можемо да напишемо:

$$df : M \to T^*M. \tag{17}$$

Општије, свако пресликавање

$$s : M \to T^*M$$

које задовољава услов $s(q) \in T_q^*M$ називамо *сечењем* котангентног раслојења. На пример, уместо диференцијала, који у локалним координатама може да се напише као

$$df(q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(q)\, dx_k,$$

можемо да посматрамо општији израз

$$\alpha(q) = \sum_{k=1}^{n} a_k(q)\, dx_k, \tag{18}$$

где су dx_k диференцијали координатних функција (специјални случај функционала df када је f пројекција на x_k–осу). Ово је једно (локално дефинисано) сечење. Будући да су функционали dx_k линеарно независни, а има их n, следи да свако сечење котангентног раслојења може локално да се запише у облику (18). Сечења котангентног раслојења називамо *диференцијалним 1–формама.*

Нека је V векторски простор, и $L_1, L_2 : V \to$ два линеарна пресликавања. Њихов *спољашњи производ* $L_1 \wedge L_2$ је билинеарно пресликавање

$$L_1 \wedge L_2 : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad L_1 \wedge L_2(\xi_1, \xi_2) := \det\,[L_i(\xi_j)]_{i,j=1,2}.$$

Из антисиметричности детерминанте следи да је $L_1 \wedge L_2$ антисиметрично пресликавање: $L_1 \wedge L_2(\xi_1, \xi_2) = -L_1 \wedge L_2(\xi_2, \xi_1)$. Такође, важи и $L_1 \wedge L_2 = -L_2 \wedge L_1$.

Будући да су диференцијалне 1–форме у свакој тачки $q \in M$ линеарна пресликавања $T_qM \to \mathbb{R}$, има смисла говорити о спољашњем множењу форми. Уз помоћ њега, дефинишемо и *спољашњи диференцијал* 1–форме (18) као

$$d\alpha(q) := \sum_{k=1}^{n} da_k(q) \wedge dx_k, \tag{19}$$

где је da_k диференцијал функције a_k. Њега можемо да запишемо као $da_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}(q)\, dx_j$, одакле добијамо

$$d\alpha(q) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}(q)\, dx_j \wedge dx_k.$$

Изразе облика

$$\beta(q) = \sum_{j,k=1}^{n} b_k^j(q)\, dx_j \wedge dx_k$$

називамо *диференцијалним 2–формама.* Аналогно се дефинишу диференцијалне k–форме и њихови диференцијали[17] за произвољно k.

[17] Спољашњи диференцијал форме је једнозначно одређен помоћу три аксиоме: линеарности, Лајбницовог правила $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta \pm \alpha \wedge (d\beta)$, где знак $\pm$ зависи од парности степена форме α, и захтева да је на 0–формама, тј. функцијама, d стандардни диференцијал.

Нека је M многострукост димензије n и $\psi_U : U \to B_U$ локална карта из формалне дефиниције многострукости у §1. Тада се за сваку n–форму Ω на M може дефинисати њен интеграл по карти U као

$$\int_U \Omega := \int \cdots \int_{B_U} \Omega\Big(\frac{\partial\psi^{-1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\psi^{-1}}{\partial x_n}\Big)\, dx_1 \dots dx_k,$$

где је интеграл на десној страни стандардни n–интеграл у $\mathbb{R}^n$. Приметимо да, ако променимо оријентацију, тј. ако осе x_i и x_j замене места, овако дефинисан интеграл мења знак. То значи да је интеграл инваријантан у односу на смену променљивих, тј. смену координата $\psi_U \circ \psi_V^{-1}$ из дефиниције многострукости, ако и само ако дифеоморфизам $\psi_U \circ \psi_V^{-1}$ чува оријентацију (тј. има позитиван јакобијан). Многострукост називамо *оријентабилном* ако се она цела може покрити координатним околинама, таквим да све смене координата чувају оријентацију. У том случају може да се дефинише $\int_M \Omega$ – интеграл произвољне n–форме по целој многострукости.

Ако је граница оријентабилне многострукости M димензије n глатка многострукост ∂M димензије $n-1$, онда је и ∂M оријентабилна и важи *Стоксова формула*:

$$\int_M d\Theta = \int_{\partial M} \Theta$$

за сваку $(n-1)$–форму Θ.

Посматрајмо сада котангентно раслојење као нову многострукост, $P = T^*M$. Постоји канонска пројекција

$$\pi : P = T^*M \to M.$$

Тангентно пресликавање[18] пресликавања $\pi : P \to M$ је пресликавање

$$\pi_* : TP \to TM \tag{20}$$

дефинисано на следећи начин. Нека је $X_p \in T_pP$ тангентни вектор на P у тачки $p \in P$. Тада је он тангентни вектор на неку криву $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to P$ у тачки $\gamma(0) = p$. Вектор $\pi_*(X_p)$ дефинишемо као вектор у $T_{\pi(p)}M$ који је тангентан на криву $\pi \circ \gamma(t)$ у тачки $\pi \circ \gamma(0) = \pi(p)$.

Дефиниција: *Лиувилова форма* је диференцијална 1–форма θ на многострукости $P = T^*M$ дефинисана са

$$\theta(p)(X_p) := \langle p, \pi_*(X_p)\rangle, \quad \text{за свако} \quad p \in P \quad \text{и свако} \quad X_p \in T_pP.$$

Заграде на десној страни означавају спаривање ковектора p са вектором $\pi_*(X_p)$ – тачка p у овој дефиницији игра истовремено улогу тачке многострукости P и линеарног функционала на TM (јер је $P = T^*M$).

Форму $\omega := -d\theta$ зовемо *канонском симплектичком формом на котангентном раслојењу.*

Задатак: Доказати да се форма θ може окарактерисати као јединствена 1–форма на $P = T^*M$ која задовољава

$$s^*\theta = s \tag{21}$$

за свако сечење $s : M \to T^*M$ котангентног раслојења, где је s^* дуал тангентног пресликавања s_*.

[18]... или први извод

Напомена: Није тешко показати да је симплектичка форма ω

1. недегенерисана: за сваки тангентни вектор X постоји тангентни вектор Y такав да је $\omega(X,Y) \neq 0$,

2. затворена: $d\omega = 0$.

Дефиниција: Многострукост P на којој постоји диференцијална 2– форма која има два својства из претходне напомене назива се *симплектичком многострукошћу.*

Из два алгебарска својства о којима је реч у претходној дефиницији следи много тополошких, нпр. свака симплектичка многострукост је оријентабилна, има парну димензију, ако је компактна има нетривијалне парне кохомолошке групе итд. Приметимо велику разлику између тога и Риманове метрике (која је такође билинеарна форма на многострукости, али симетрична, док је симплектичка форма, као и свака диференцијална форма, антисиметрична). Риманова многострукост нема нека посебна глобална тополошка својства: свака глатка многострукост допушта Риманову структуру. Као контраст томе, једина сфера $\mathbb{S}^n$ која је симплектичка је $\mathbb{S}^2$ – све остале имају тривијалну другу кохомологију. Са друге стране, Риманове многострукости имају много локалних инваријанти (нпр. тензор кривине нам омогућава да локално разликујемо Риманове многострукости). Насупрот томе, све симплектичке многострукости су *локално* изоморфне:

Дарбуова теорема: Свака тачка симплектичке многострукости има околину која је симплектички изоморфна отвореном скупу у $\mathbb{R}^{2n}$ са стандардном симплектичком формом

$$\omega_0 = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n.$$

Важне последице недегенерисаности. Недегенерисаност Риманове метрике омогућава нам да дефинишемо *градијент* функције на Римановој многострукости:[19] градијент ∇f је једнозначно одређен вектор који задовољава

$$df(p)(\xi) = g(\nabla f, \xi) \quad \text{за сваки тангентни вектор} \quad \xi. \tag{22}$$

Лако се види да је вектор ∇f добро дефинисан (једнозначно одређен) захваљујући недегенерисаности Риманове метрике[20].

Слично томе, за функцију H на симплектичкој многострукости можемо да дефинишемо *симплектички градијент* као једнозначно одређен вектор X_H који задовољава

$$dH(p)(\xi) = \omega(X_H, \xi) \quad \text{за сваки тангентни вектор} \quad \xi.$$

---

[19] Без присуства Риманове метрике градијент можемо да дефинишемо само у локалним координатама, али та „дефиниција” би зависила од локалних координата, тј. не би дефинисала ништа. То је још један пример проблема који се појављују при преласку из еуклидског простора на многострукост.

[20] Приметимо да је диференцијал функције (17) дефинисан само на основу глатке структуре (и само од ње зависи), док нам је за дефиницију (22) градијента (као вектора дуалног диференцијалу) потребна Риманова метрика (у односу на коју говоримо о тој дуалности, и од које он зависи). Градијент у Декартовим координатама у $\mathbb{R}^n$ на који смо навикли на уводним курсевима анализе је дуал диференцијала *у односу на еуклидску метрику.* Градијент у истим координатама у односу на неку другу метрику (нпр. метрику геометрије Лобачевског) има сасвим други запис.

Симплектички градијент се често назива *Хамилтоновим векторским пољем* функције H, а сама функција H *хамилтонијаном.* Претходну формулу можемо да напишемо и на следећи начин. За 2–форму ω векторско поље X означимо са $i(X)\,\omega$ 1–форму дефинисану са $i(X)\,\omega(Y)=\omega(X,Y)$. Тада је Хамилтоново векторско поље дефинисано са

$$dH = i(X_H)\,\omega. \tag{23}$$

Треба подвући једну важну разлику између обичног и симплектичког градијента, која произилази из чињенице да је први дефинисан помоћу симетричне билинеарне форме g, а други помоћу антисиметричне ω. Наиме, у дефиницију обичног градијента ставимо $\xi=\nabla f$ добијамо

$$df(p)(\nabla f(p)) = g(\nabla f(p), \nabla f(p)) = \|\nabla f(p)\|^2 \geq 0,$$

док исти поступак за Хамилтонова векторска поља даје

$$dH(p)(X_H(p)) = \omega(X_H(p), X_H(p)) = 0, \tag{24}$$

због антисиметричности.

Задатак: Нека је Σ оријентисана површ и симплектичка форма ω – њена форма површине. Доказати да за сваку затворену криву $C\subset\Sigma$ и сваки Хамилтонијан $H:\Sigma\to\mathbb{R}$ постоји тачка $x_0\in C$ у којој је Хамилтоново векторско поље X_H тангентно на C.

Нека је $\psi_t : P \to P$, $t\in\mathbb{R}$ једнопараметарска фамилија дифеоморфизама компактне[21] многострукости P и $\frac{d\psi_t}{dt}(p) = X_t(\psi_t(p))$. Тада векторско поље X_t на многострукости P једнозначно одређује фамилију ψ_t, као решење обичне диференцијалне једначине

$$\frac{d\psi_t}{dt}(p) = X_t(\psi_t(p)), \quad \psi_0(p) = p.$$

Дакле, захваљујући Теореми о егзистенцији и јединствености решења обичних диференцијалних једначина, задавање једнопараметарске фамилије дифеоморфизама (нелинеарног објекта) је еквивалентно задавању глатког векторског поља (што је линеаран објекат). Тада кажемо да је *фамилија ψ_t генерисана векторским пољем X_t*. Специјално, ако је фамилија ψ_t генерисана Хамилтоновим векторским пољем, зовемо је *фамилијом Хамилтонових дифеоморфизама*, а свако поједниачно ψ_{t_0} *Хамилтоновим дифеоморфизмом*[22].

Приметимо да ако H не зависи од времена и ако је фамилија ψ_t генерисана Хамилтоновим векторским пољем X_H, диференцирањем величине $H(\psi_t(p))$ по t и применом (24) закључујемо да је H константно дуж трајекторија $\psi_t(p)$. Будући да је H енергија, ово доказује *закон очувања енергије* у класичној механици: *Вредност аутономног хамилтонијана дуж Хамилтонових путева је константна.*

Покажимо сада да су хамилтонови путеви заправо инваријантно описана (без употребе координата) решења једначине кретања (14).

[21] Претпоставка о компактности се, уз нека објашњења или друге услове, може уклонити или ослабити.

[22] Ако је ψ_t генерисано хамилтонијаном H_t, а ϕ_t хамилтонијаном K_t, из дефиниције (23) лако се доказује да је тада ψ^{-1} генерисано хамилтонијаном $-H_t\circ\psi_t$, а $\psi_t\circ\phi_t$ хамилтонијаном $H_t + K_t\circ\psi_t^{-1}$. Одатле следи да је скуп Хамилтонових дифеоморфизама група.

Хамилтонова векторска поља у координатама: Ако је X_H Хамилтоново векторско поље генерисано хамилтонијаном H, једначина

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_H(\phi_t(x)),\ \phi_0(x) = x.$$

у координатама $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ о којима је реч у Дарбуовој теореми има облик (14).

Доказ: Будући да је симплектичка векторска форма у $\mathbb{R}^{2n}$ о којој је реч у Дарбуовој теореми збир симплектичких форми у $\mathbb{R}^2$, довољно је једначину (23), тј. једначину

$$i\left(\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \dot{p}_k \frac{\partial}{\partial p_k}\right) \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dq_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k$$

по $\dot{q}_k$, $\dot{p}_k$, решити за $n = 1$, односно решити

$$(\forall \xi = (\xi_1, \xi_2)) \qquad \begin{vmatrix} \dot{q} & \dot{p} \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial H}{\partial q}\xi_1 + \frac{\partial H}{\partial p}\xi_2.$$

Одатле следи доказ тврђења. □

Теорема: Фамилија дифеоморфизама $\phi_t : P \to P$ симплектичке многострукости (P, ω) генерисана векторским пољем X_t чува симплектичку форму ако и само ако је 1–форма $i(X_t)\,\omega$ затворена, тј. $d(i(X_t)\,\omega) = 0$.

Доказ: Ако ψ_t чувају симплектичку форму, онда је

$$\psi_t^*\omega = \omega, \quad \text{односно} \quad \frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = 0.$$

Последњи израз се диференцира овако[23]

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^*(d(i(X_t)\,\omega) + i(X_t)\,d\omega).$$

Пошто је $d\omega = 0$, следи $d(i(X_t)\,\omega) = 0$. □

Примењујући рачун сличан овом из доказа теореме, можемо да урадимо следећи задатак.

Задатак (варијациона формулација Хамилтонове механике): За хамилтонијан $H_t : T^*M \to \mathbb{R}$ и криву $\gamma : [0,1] \to T^*M$ дефинишимо *Хамилтонов функционал дејства*

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = \int_0^1 (\gamma^*\theta - H_t(\gamma))\,dt.$$

Нека је γ_s варијација пута γ; $\gamma_0 = \gamma$ и $\xi = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s(t) \in T_\gamma\mathcal{P}$. Доказати да је

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)\xi = -\int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_H(\gamma))dt + \theta(\gamma(1))\xi - \theta(\gamma(0))\xi. \tag{25}$$

и извести одатле закључак да су Хамилтонови путеви екстремале функционала $\mathcal{A}_H$ на простору кривих са граничним условима

(а) $\gamma(0) = \gamma(1)$ (периодични гранични услови)

(б) $\gamma(0), \gamma(1) \in 0_M$, где је 0_M скуп свих нула–ковектора (нула–функционала) из T^*M (Лагранжеви гранични услови).

[23]По тзв. „Картановој формули за везу Лијевог, спољашњег и унутрашњег извода": $L_X = i(X) \circ d + d \circ i(X)$.

Из дефиниције комутативности других парцијалних извода глатких функција (тј. независности од поретка диференцирања) и раније дате дефиниције диференцијала диференцијалне форме, следи да је форма β која је *тачна*, тј. таква да је $\beta = d\alpha$, обавезно и затворена[24], тј. важи $d \circ d = 0$. Ако је H_t (у општем случају неаутономни) хамилтонијан и X_{H_t} његово Хамилтоново векторско поље, по дефиницији таквих поља имамо управо ту ситуацију:

$$i(X_{H_t})\,\omega = dH_t,$$

тј. форма $i(X_{H_t})\,\omega$ је тачна, па тиме и затворена. Захваљујући томе, имамо следећу последицу претходне теореме.

Последица: Хамилтонови дифеоморфизми чувају симплектичку форму.

Одатле следи да је изучавање Хамилтонове механике управо – изучавање симплектичке геометрије, изучавањем (подгрупе) групе њених симетрија, што је генерализација Клајновог Ерлангенског програма на симплектички амбијент.

Дифеоморфизме који чувају симплектичку форму називаћемо *симплектичким дифеоморфизмима* или *симплектоморфизмима*. Лако је видети да је група Хамилтонових дифеоморфизама права подгрупа групе симплектичких дифеоморфизама, тј. да постоје симплектички дифеоморфизми који нису Хамилтонови. Занимљива је следећа теорема.

Теорема: Група Хамилтонових дифеоморфизама је нормална подгрупа групе симплектичких дифеоморфизама.

Доказ: Нека је ϕ симплектички дифеоморфизам и ψ_t фамилија Хамилтонових дифеоморфизама генерисана хамилтонијаном H_t. Непосредним диференцирањем и применом (23) се проверава да тада хамилтонијан $H_t \circ \phi$ генерише фамилију $\phi^{-1} \circ \psi_t \circ \phi$. Дакле, и та фамилија је Хамилтонова. □

Претходна теорема може да се формулише и овако: симплектички дифеоморфизми чувају облик Хамилтонових једначина (14). Симплектички дифеоморфизми се називају још и *канонским трансформацијама* у класичној механици. Они се могу схватити као смене координате које чувају законе Хамилтонове механике. Као последицу формализма уведеног у овом параграфу, изводимо следеће две класичне теореме.

Лиувилова теорема: Хамилтонова кретања и канонске трансформације у еуклидском простору чувају запремину фазног простора.

Доказ: Ако је ω стандардна симплектичка форма у $\mathbb{R}^{2n}$ (описана у Дарбуовој теореми), онда је

$$\Omega = \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n} = \frac{1}{n!}\omega \wedge \cdots \wedge \omega = dp_1 \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_n$$

стандардна форма запремине. Пошто и канонске трансформације (симплектички дифеоморфизми) и Хамилтонови дифеоморфизми чувају симплектичку форму ω, тј. задовољавају једначину $\psi^*\omega = \omega$, задовољаваће и

$$\psi^*\Omega = \psi^*(\omega \wedge \cdots \wedge \omega) = \psi^*\omega \wedge \cdots \wedge \psi^*\omega = \omega \wedge \cdots \wedge \omega = \Omega,$$

[24]Обрнуто није тачно; тзв. де Рамове кохомолошке групе описују количнички простор простора затворених и тачних форми; испоставља се да је он одређен топологијом њиховог домена.

што значи да ће чувати и запремину. □

Ова теорема важи за сваки фазни простор, а и општије: *симплектоморфизми чувају запремину сваке симплектичке многострукости дефинисану са* $\Omega = \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n}$.

Поенкареова теорема: Ако је M компактна сипмлектичка многострукост, ϕ симплектички дифеоморфизам и $p \in M$ било која тачка, онда за сваку околину $V \ni p$ постоји природан број k такав да је $\phi^k(V) \cap V \neq \emptyset$ ($\phi^k = \phi \circ \cdots \circ \phi$).

Доказ: Из Лиувилове теореме следи да ϕ чува запремину. Због компактности многострукости M (тј. коначности њене запремине), скупови V, $\phi(V)$, $\phi^2(V) = \phi(\phi(V)), \cdots$ не могу да буду дисјунктни, па је $\phi^r(V) \cap \phi^s(V) \neq \emptyset$, за неке r и s, $r > s$. Али онда је $\phi^{r-s}(V) \cap V \neq \emptyset$. □

Последица: Сваки систем који се креће у ограниченом простору се после извесног времена враћа у произвољну близину почетног положаја.

Споменимо да се одређен број тачака механичког система после извесног времена враћа баш у почетну тачку, а не само у њену близину. Број тих тачака може да се опише топологијом многострукости на којој се кретање одвија. Нешто више о томе ћемо рећи у §10, а сада наведимо један пример. Следеће тврђење се некад зове *Последњом Поенкареовом теоремом*, а некад *Поенкаре–Бирхофовом теоремом.* Формулисао га је Поенкаре 1912, а касније доказао Бирхоф:

Теорема: Сваки хомеоморфизам прстена $\mathbb{S}^1 \times [a,b]$ који чува површину и оријентацију, а граничне кружнице ротира у супротном смеру, има најмање две фиксне тачке.

Будући да Хамилтонова кретања чувају површину и оријентацију, а да се лепљењем два прстена дуж границе добија дводимензиони торус, одавде уз мало дискусије може да се изведе следећа последица.

Последица: Свако Хамилтоново кретање на дводимензионом торусу има најмање 4 периодичне орбите.

§6. Симплектичка топологија и холоморфне криве. Из Дарбуове теореме из претходног параграфа следи да симплектичке многострукости немају локалних инваријанти – све су „локално равне" у симплектичком смислу, тј. локално изоморфне симплектичком еуклидском простору. То значи да се симплектичке многострукости могу разликовати само као глобални, дакле тополошки објекти.

Важну улогу у симплектичкој топологији има присуство још једне структуре на симплектичким многострукостима – скоро комплексне структуре. То је фамилија линеарних пресликавања

$$J_x : T_xP \to T_xP, \quad x \in P$$

која глатко зависи од x, таква да је

$$J^2 = -\mathrm{Id},$$

где је $J^2 = J \circ J$. Многострукост која има скоро комплексну структуру називамо *скоро комплексном многострукошћу*[25].

Пример: Свака оријентабилна површ $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ има комплексну структуру. Заиста, из оријентабилности следи да постоји глатко јединично векторско поље Y нормално на Σ. Тада је лако видети да је са

$$T\Sigma \ni X \mapsto X \times Y \in T\Sigma,$$

где је $\times$ на десној страни векторски производ у $\mathbb{R}^3$, добро дефинисана скоро комплексна структура на Σ. Приметимо да је се векторски производ у $\mathbb{R}^3$ може схватити као множење имагинарних кватерниона. Слично, свака хиперповрш у $\mathbb{R}^7$ има скоро комплексну структуру која је на исти начин дефинисана помоћу множења имагинарних Келијевих октава.

Важи следећа теорема.

Теорема: Свака симплектичка многострукост (P, ω) има скоро комплексну структуру J која је *сагласна са симплектичком структуром* у смислу да је са

$$g(X, Y) := \omega(X, JY)$$

дефинисана Риманова метрика на P.

Скица доказа: Нека је g било која Риманова метрика на M. Тада је $\omega(\cdot, \cdot) = g(\cdot, A\cdot)$ за неку антисиметричну (пошто је g симетрична, а ω антисиметрична форма) матрицу A. Ако је $A^2 = -\mathrm{Id}$, доказ је завршен. У противном, користећи $-A^2 = A^\top A > 0$, можемо да узмемо $J := A(\sqrt{-A^2})^{-1}$. $\square$

Дакле, свака симплектичка многострукост је скоро комплексна[26].

У Комплексној анализи глатка пресликавања чији је диференцијал линеаран над $\mathbb{C}$ (тј. комутира са множењем са $i = \sqrt{-1}$) називамо *холоморфним*. Аналогно томе, пресликавање

$$u : P_1 \to P_2$$

између скоро комплексних многострукости (P_1, J_1) и (P_2, J_2) назива се *псеудохоломорфним* ако важи

$$du \circ J_1 = J_2 \circ du. \tag{26}$$

Специјално, ако је Σ оријентабилна дводимензиона површ (тј. објекат *комплексне димензије* 1), а P скоро комплексна многострукост, псеудохоломорфна пресликавања

$$u : \Sigma \to P$$

називамо *холоморфним кривама* у P. Тада је услов (26) еквивалентан систему нелинеарних Коши–Риманових једначина

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{27}$$

где су (s, t) локалне координате на Σ.

---

[25] Комплексне многострукости су специјалан случај скоро комплексних; овде нећемо улазити у детаље разлике између та два појма.

[26] Обрнуто није тачно. Нпр. већ смо видели да с фера $\mathbb{S}^6$ није симплектичка, јер има тривијалну другу кохомолошку групу. Међутим, у претходном примеру смо видели да је $\mathbb{S}^6$ скоро комплексна.

Из дефиниције интеграла 2–форме по дводимензионој многострукости лако се изводи следећа лема.

Лема: Нека је (P, ω) симплектичка многострукост, а $u : \Sigma \to P$ холоморфна крива. Тада је

$$\int_\Sigma u^*\omega = \frac{1}{2}\int_\Sigma \|du\|^2. \tag{28}$$

Задатак: Доказати лему.

Значај претходне леме види се у томе што је израз на на десној страни *аналитичка* величина, а израз на левој *тополошка*[27]. То нам омогућава да тополошки контролишемо конвергенције низова холоморфних кривих у разним L^p и $W^{p,q}$ просторима (*просторима Собољева*). Користећи ту чињеницу, као и чињеницу да је систем парцијалних једначина (27) елиптички, тј. да је његова линеаризација Фредхолмова, М. Громов је 1985. године доказао следећу теорему.

Теорема: Нека је J скоро комплексна структура на компактној симплектичкој многострукости P и нека је $A \in H_2(P, \mathbb{Z})$ фиксирана хомолошка класа. Нека је $\mathcal{M}_J(A)$ скуп $J-$холоморфних кривих $u : \Sigma \to P$ које задовољавају услов $u_*[\Sigma] \equiv A$. За скоро сваку скоро комплексну структуру J скуп $\mathcal{M}_J(A)$ је многострукост коначне димензије. Ова многострукост је или компактна, или се њена некомпактност може описати у терминима хомолошке класе A.

Ова теорема, која је потпуно променила начин гледања на симплектичку топологију, има много важних последица. Овде издвајамо само једну. У §5 смо видели да је група симплектичких дифеоморфизама подгрупа групе дифеоморфизама који чувају запремину (Лиувилова теорема). Сваки скуп се може пресликати у скуп веће запремине тако да му се очува запремина. Следећа терема Громова показује да се то не може увек учинити тако да се очува симплектичка форма.

Теорема: Нека је $B_r^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ лопта полупречника r, $Z_R \subset \mathbb{C}^n$ цилиндар $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$, где је $D_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ и нека је $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ симплектичко пресликавање такво да је

$$\psi(B_r) \subset Z_R.$$

Тада је $r \leq R$.

Идеја доказа: Нека је C холоморфни диск у B_r^{2n} који пролази кроз центар лопте и чији је руб на рубу лопте. Нек је $A(C)$ површина криве C. Познати резултат из теорије минималних површи (*Лема о монотоности*) каже да је

$$A(C) \geq \pi r^2. \tag{29}$$

Пошто је C холоморфна,

$$A(C) = \int_C \omega = \int_{\psi(C)} \omega$$

[27]Захваљујући Стоксовој формули и чињеници да је $d\omega = 0$, израз на левој страни је „вредност кохомолошке класе $[\omega]$ на хомолошкој класи $[u(\Sigma)]$".

(јер је ψ симплектичко). Ако проширимо $\psi(C)$ до холоморфне криве $\widetilde{C}$ са границом на ∂D_R, имаћемо

$$\int_{\psi(C)} \omega \leq \int_{C} \omega = \int_{D_R} \omega = \pi R^2,$$

одакле, због (29), следи $r \leq R$.
Да бисмо остварили ову конструкцију холоморфне криве $\widetilde{C}$, утопимо околину слике $\psi(B_r^{2n}) \subset Z$ у (компактну многострукост) $M := \mathbb{S}^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$, где је $\mathbb{S}^2$ сфера површине $\pi r^2 + \varepsilon$, а $\mathbb{T}^{2n-2}$ торус. Нека је J_0 стандардна комплексна структура на $B_r^{2n} \subset \mathbb{C}^{2n}$ и нека је J скоро комплексна структура на M која је на $\psi(C)$ једнака $\psi_* J_0$. Пошто је $\pi_2(\mathbb{T}^{2n-2}) = 0$, а компактност простора холоморфних кривих може да се контролише топологијом (претходна теорема), следиће да је $\mathcal{M}_J(A)$ за $A = [\mathbb{S}^2 \times *]$ компактна многострукост. Пресликавање

$$ev : \mathcal{M}_J(A) \times_G \mathbb{S}^2 \to M, \quad (u, z) \mapsto u(z), \tag{30}$$

где је $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ *група Мебијусових трансформација*[28] има степен 1 (ако је $J = i \times J'$ то је очигледно, а општи случај следи из овог специјалног, на основу хомотопске инваријантности степена пресликавања). Зато постоји $J-$холомофна крива кроз сваку тачку у M, па и кроз $\psi(0)$. Инверзна слика те криве при пресликавању ψ је J_0-холоморфна крива C, за коју се може спровести претходно резоновање. $\square$

Напомена: У претходној теореми база цилиндра је у (q_1, p_1)–равни. Ако базу изаберемо, рецимо, у (q_1, q_2)–равни, трансформација

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\varepsilon q_1, \varepsilon^{-1} p_1, \varepsilon q_2, \varepsilon^{-1} p_2, q_3, p_3, \cdots, q_n, p_n)$$

чува симплектичку форму $\sum dq_k \wedge dp_k$ и пресликава (избором довољно малог ε) сферу већег у цилиндар мањег полупречника. Дакле, претходна теорема важи само ако је база цилиндра „координатна раван положаја и импулса честице”. Имајући у виду механичку интерпретацију симплектоморфизама дискутовану у претходном параграфу, ову теорему можемо сматрати „аналогијом Хајзенберговог принципа неодређености у класичној механици”. Наравно, не ради се о принципу који има исту интерпретацију и последице, него о сличности на нивоу математичке структуре.

§7. Квантизација: алгебраизација механике. У класичној физици, стање система је у сваком тренутку одређено физичким величинама, које називамо *динамичким варијаблама*[29], као што су вектори положаја и импулси честица које чине систем. Ако имамо довољно информација о стању система у једном тренутку, по законима класичне механике можемо да реконструишемо макар блиску историју система, како прошлу, тако и будућу. Или, речено језиком математике, ако имамо довољно почетних услова можемо локално (у времену) и једнозначно да одредимо решење диференцијалне једначине.

[28] тј. бихоломорфних репараметризација сфере $\mathbb{C}P^1$. Група G дејствује на $\mathcal{M}_J(A) \times \mathbb{S}^2$ по правилу $\phi \cdot (u, z) = (u \circ \phi^{-1}, \phi(z))$; простор на левој страни у (30) је простор орбита овог дејства.

[29] Динамичком варијаблом можемо сматрати сваку, у општем случају зависну од времена, функцију на фазном простору, нпр. сваку функцију $A : T^*M \to \mathbb{R}$ или $A : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у Хамилтоновој механици.

Међутим, експериментални резултати из прве две деценије XX века показали су да у микросвету не влада овакав детерминизам. Основна претпоставка квантне механике је да никакво знање о систему у почетном положају не може да нам помогне да тачно опишемо трајекторију система у будућности. Највише што можемо да кажемо о систему је то са коликом вероватноћом систем у датом тренутку наћи у одређеном стању. Један од могућих начина да се формулише квантна механика је следећи скуп постулата[30].

Први постулат: Стању физичког система можемо да придружимо комплексно вредносну *функцију стања* или *таласну функцију* ψ која садржи све информације које можемо да имамо о систему, при чему функције ψ и $\lambda\psi$ за $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ описују исто стање.

Таласна функција $\psi(\mathbf{q}, t)$, где је $\mathbf{q}$ вектор (или вектори, у случају више честица) положаја, а t време може да се интерпретира као густина вероватноће да се систем у тренутку t нађе на месту $\mathbf{q}$, уколико можемо, сагласно закону да је укупна вероватноћа један, да је нормализујемо тако да је

$$\int |\psi(\mathbf{q}, t)|^2 \, d\mathbf{q} = 1. \tag{31}$$

Овај захтев нам показује да би било лепо да је простор функција стања $L^2(\mathbb{R}^n)$ – простор функција са интеграбилним квадратом модула. На жалост, ово не можемо да постулирамо, јер се често дешава да функције стања (до којих долазимо на начин који ћемо ускоро да постулирамо) не припадају овом простору. Али, претпоставићемо да функције стања увек припадају Хилбертовом простору, L^2 или неком другом.

Приметимо да функције $\lambda\psi$ и ψ идентификујемо после нормализације, као и да $e^{i\alpha}\psi$ и ψ имају исту нормализацију. Зато је исправно посматрати функције стања и као тачке пројективног простора, али овде нећемо заузимати ту тачку гледишта.

Други постулат: Ако је таласна функција ψ_1 придружена једном могућем стању система, а функција ψ_2 другом могућем стању, онда је и њихова линеарна комбинација

$$\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

таласна функција неког могућег стања система (*Принцип суперпозиције*). Другим речима, скуп функција стања је векторски простор.

Трећи постулат: Свакој динамичкој варијабли A придружујемо симетричан линеарни оператор $\mathbf{A}$ који дејствује на Хилбертовом простору функција стања. И сам овај оператор назива се динамичком варијаблом у квантној механици.

Ово придруживање вршимо по следећем „правилу”: у изразу за класичну динамичку варијаблу $A(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$ уведемо смену

$$p_k \mapsto -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_k}, \quad q_k \mapsto q_k\cdot, \tag{32}$$

[30] Ове постулате наводимо у поједностављеној форми, нпр. игноришемо линеарне операторе на простору функција стања који немају дискретан спектар. Њих у општем случају не можемо да заобиђемо, али за њихово разматрање су нам потребне нетривијалне конструкције из спектралне теорије оператора (спектрална мера и спектрални интеграл) као и елементи теорије дистрибуција.

тј. импулс замењујемо оператором диференцирања, а координату оператором множења координатном функцијом. На пример, ако је H класични хамилтонијан који смо разматрали у Хамилтоновој механици, онда је

$$H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)=\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{n}p_k^2+V(\mathbf{q}),\qquad \mathbf{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(\mathbf{q}),$$

где је $\Delta=\nabla\circ\nabla$ Лапласијан. Реч „правило” смо ставили под знаке навода због тога што овај поступак није добро дефинисан (тј. квантизација класичног система у општем случају није решен проблем). Нпр. за динамичку варијаблу $A(q,p)=p^2q$ важи и $A(p,q)=pqp=qp^2$, али та три израза дају три различита линеарна оператора, будући да диференцирање (оператор $\mathbf{p}$) и множење координатном функцијом (оператор $\mathbf{q}$) не комутирају, већ задовољавају сложеније, Лајбницово правило.

Оператори $\mathbf{p_k}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_k}$ и $\mathbf{q_k}=q_k\cdot$ су дуални у следећем смислу. Нека је $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ интеграбилна функција, њена *Фуријеова трансформација* је функција

$$\widehat{f}(p_1,\dots,p_n)=(2\pi)^{-n/2}\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n}f(q_1,\dots,q_n)e^{-i(p_1q_1+\cdots+p_nq_n)}\,dq_1\dots dq_n. \tag{33}$$

Диференцирањем по p_k добијамо прву, а парцијалном интеграцијом другу од следећих формула[31]

$$\widehat{q_kf}=i\frac{\partial}{\partial p_k}\hat{f}\quad\text{и}\quad\widehat{\frac{\partial}{\partial q_k}f}=ip_k\hat{f}. \tag{34}$$

Дакле, оператори диференцирања и множења су дуални (до на мултипликативну константу) у односу на Фуријеову трансформацију.

Четврти постулат: Једини могући резултати мерења динамичке варијабле A су сопствене вредности оператора $\mathbf{A}$.

Приметимо да овај постулат има смисла захваљујући симетричности постулиране у претходном – сопствене вредности симетричног оператора су реални бројеви, тј. можемо до њих доћи мерењем.

Задатак: Доказати да су сопствене вредности симетричног оператора реалне и да различитим сопственим вредностима одговарају ортогонални сопствени вектори.

Ако је таласна функција система ψ_n (тј. ако је систем у стању ψ_n) један од сопствених вектора оператора $\mathbf{A}$ који одговара сопственој вредности λ_n, тј. ако је

$$\mathbf{A}\psi_n=\lambda_n\psi_n,$$

онда ће мерење варијабле A бити λ_n. Међутим, ако систем није у сопственом стању оператора $\mathbf{A}$, онда можемо да говоримо само о математичком очекивању резултата мерења. Оно се уводи у следећем постулату.

[31] Ово захтева извесну дискусију, коју овде заобилазимо. Уместо тога задовољићемо се примедбом да је извођење ових формула тривијално ако је f глатка функција са компактним носачем. Одатле, после речене дискусије (која укључује нпр. и одговор на питање шта је диференцирање ако f није глатка), следи и општи случај.

Пети постулат: Ако је систем у стању описаном функцијом стања ψ, очекивана вредност мерења динамичке варијабле A је

$$\langle A\rangle = \frac{\langle \mathbf{A}\psi \mid \psi\rangle}{\langle \psi \mid \psi\rangle}, \tag{35}$$

где ознака $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ на десној страни означава скаларни производ у простору стања.

Шести постулат: Свака таласна функција која описује могуће стање система може да се напише као линеарна комбинација сопствених вектора динамичке варијабле A.

Из симетричности оператора $\mathbf{A}$ гарантоване трећим постулатом следи да различитим сопственим вредностима одговарају ортогонални вектори (можемо их, после множења скаларом, сматрати ортонормираним). Из опште теорије Фуријеових редова нам је познато да је сваки *потпун*[32] ортонормиран систем у Хилбертовом простору база. Међутим, немају сви симетрични оператори потпун систем сопствених вектора. Оне који имају називамо још и *опсерваблама*.

Нека је A опсервабла и ψ_n ортонормиран систем њених сопствених вектора који одговарају сопственим вредностима λ_n. Нека је стање система описано функцијом стања ψ; можемо да предпоставимо да је $\langle \psi \mid \psi\rangle = \int |\psi|^2 = 1$. Тада из шестог постулата следи

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n, \tag{36}$$

где је, због ортонормираности система ψ_n,

$$c_n = \langle \psi \mid \psi_n\rangle. \tag{37}$$

Изрази (36) и (37) могу се написати као

$$\psi = \sum \langle \psi \mid \psi_n\rangle \psi_n,$$

или, ако „обришемо ψ са обе стране"[33]

$$1 = \sum \mid \psi_n\rangle\langle\psi_n \mid .$$

Сада из петог постулата следи да је очекивана вредност мерења опсервабле A

$$\langle A\rangle = \langle \mathbf{A}\psi, \psi\rangle = \sum_m \sum_n \bar{c}_m c_n \lambda_n \langle \psi_n, \psi_m\rangle = \sum \lambda_n |c_n|^2,$$

јер је ψ_n ортонормиран систем, тј. $\langle \psi_n \mid \psi_m\rangle = \delta_{nm}$. Величина

$$|c_n|^2 = |\langle \psi_n \mid \psi\rangle|^2$$

се интерпретира као вероватноћа да се при мерењу варијабле A система у стању ψ добије резултат λ_n. Пошто су λ_n једини могући резултати мерења (према четвртом постулату) и пошто је

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

[32]... тј. такав да му је линеарни омотач свуда густ

[33]Оператори $\mid \phi\rangle$ и $\langle \phi \mid$ називају се *бра* и *кет* (од енгл. bracket) операторима. Израз $\mid \phi\rangle\langle\phi \mid$ може да дејствује на векторе на три начина: слева, здесна и слева и здесна. У прва два случаја резултат је вектор, а у трећем скалар.

(због $\langle \psi \mid \psi \rangle = 1$), ова интерпретација је сагласна са захтевом да је укупна вероватноћа 1. Коефицијенти (37) називају се *амплитудама вероватноће*.

Нека су A и B две опсервабле које имају исте сопствене векторе:

$$\mathbf{A}\psi_n = \lambda_n \psi_n, \qquad \mathbf{B}\psi_n = \mu_n \psi_n. \tag{38}$$

Пошто је, према шестом постулату, систем ψ_n база, сваки вектор из простора стања може да се напише као $\psi = \sum a_n \psi_n$. Одатле, уз помоћ (38) следи

$$(\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\psi = \sum_n a_n (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\psi_n = \sum_n a_n (\mu_n \mathbf{A}\psi_n - \lambda_n \mathbf{B}\psi_n) = 0,$$

тј.

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0, \tag{39}$$

где је $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ *комутатор линеарних оператора*. Обрнуто, из (39) следи да $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имају исте сопствене векторе. Ово је очигледно ако један од оператора, нпр. $\mathbf{A}$, има недегенерисане сопствене вредности, тј. има само једнодимензионе сопствене просторе. Тада за свако λ_1 постоји *јединствен до на мултипликативну константу* вектор ψ_n који задовољава $\mathbf{A}\psi_n = \lambda_n \psi_n$. Одатле и из (39) следи $\mathbf{A}(\mathbf{B}\psi_n) = \lambda_n \mathbf{B}\psi_n$, па због јединствености ψ_n следи да су $\mathbf{B}\psi_n$ и ψ_n паралелни. У случају да су неке сопствене вредности дегенерисане, доказ се своди на решавање једног хомогеног система линеарних једначина.

Имајући у виду овај закључак, као и четврти постулат, можемо да закључимо да је могуће истовремено тачно измерити вредности две динамичке варијабле само ако њима придружени оператори комутирају, јер само тада систем може да се нађе у сопственом стању обе варијабле. Раније смо видели да оператори придружени импулсу и положају не комутирају (већ задовољавају Лајбницово правило), одакле следи да се импулс и положај не могу истовремено мерити. Ово је *Хајзенбергов принцип неодређености* у квантној механици.

Напомена: Овај постулат смо, ради једноставности, формулисали за опсервабле које имају дискретан спектар. У општем случају, опсервабле могу да имају континуалан, дакле непребројив део спектра. Дакле, и такве варијабле треба укључити у овај постулат. Аналогија формула (36) и (37) за њих би била

$$\psi = \int_{\mathbb{R}} c(\lambda)\psi_\lambda \, d\lambda, \qquad c(\lambda) = \langle \psi_\lambda \mid \psi \rangle. \tag{40}$$

Потпуно коректан опис претходног интеграла даје се у оквиру спектралне теорије оператора[34]. Последња формула често се пише и у облику

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \mid \psi_\lambda \rangle \langle \psi_\lambda \mid \, d\lambda. \tag{41}$$

Заиста, „множењем обе стране једнакости (41) са ψ” добија се (40).

Седми постулат: Таласна функција ψ система са хамилтонијаном $\mathbf{H}$ задовољава *Шредингерову једначину*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H}\psi \tag{42}$$

[34] Видети нпр. *Функционалну анализу* В. Рудина.

У случају класичног хамилтонијана

$$H(p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n,t)=\frac{1}{2m}(p_1^2+\dots+p_n^2)+V(q_1,\dots,q_n,t) \tag{43}$$

једначина (42) постаје

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(q_1,\dots,q_n)\psi. \tag{44}$$

Стандардни начин решавања оваквих парцијалних једначина је *метод раздвајања промењљивих.* Наиме, решење тражимо у облику

$$\psi(q_1,\dots,q_n,t)=\Psi(q_1,\dots,q_n)T(t).$$

Убацивањем овог израза у (44) добијамо

$$i\hbar T'(t)\Psi(q_1,\dots,q_n)=\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(q_1,\dots,q_n)+V(q_1,\dots,q_n)\Psi(q_1,\dots,q_n)\Big)T(t).$$

У последњој једначини можемо све изразе који садрже t да пребацимо на једну, а све оне које садрже $(q_1,\dots,q_n)$ на другу страну једнакости. Тако добијамо

$$i\hbar\frac{T'}{T}=\frac{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+V\Psi}{\Psi}$$

Лева страна ове једнакости не зависи од $(q_1,\dots,q_n)$, а десна не зависи од t, па она важи само ако су обе њене стране једнаке некој константи (означимо ту константу, која ће имати димензије енергије, са E), што даје

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+V\Psi=E\Psi,\qquad T'=\frac{-iEt}{\hbar}T.$$

Решење друге једначине је $T(t)=e^{-iEt/\hbar}$, тако да је опште решење једначине (44)

$$\psi(q_1,\dots,q_n,t)=e^{-iEt/\hbar}\Psi(q_1,\dots,q_n),$$

где је Ψ решење *временски независне* или *стационарне Шредингерове једначине*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+V\Psi=E\Psi. \tag{45}$$

Приметимо да ово значи да је E сопствена вредност оператора $\mathbf{H}$ придруженог хамилтонијану H, а решење Ψ његов сопствени вектор.

Задржимо се за тренутак на случају $n=1$. Тада је (45) обична диференцијална једначина другог реда

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x)+(E-V(x))\Psi(x)=0.$$

Претпоставимо да се ради о *слободној честици*, тј. да је $V=const$. Тада су решења претходне једначине

$$\Psi(x)=e^{i\xi x}, \tag{46}$$

где је $(\hbar\xi)^2=2m(E-V)$. Ако је $E<V$, константа ξ је имагинарна, решење је неограничено и нема физичку интерпретацију. Претпоставимо да је $V<E$. Тада је ξ позитиван или негативан реалан број, тј. имамо два линеарно независна решења

$$\Psi_+(x)=e^{ikx},\qquad\Psi_-(x)=e^{-ikx}. \tag{47}$$

Приметимо да су, на основу описа датог у трећем постулату, ово сопствени вектори оператора импулса $\mathrm{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$, док су, према четвртом постулату, његове сопствене вредности могуће вредности импулса. Дакле, Ψ_+, где је импулс $k > 0$, представља честицу *која се креће на десно*, а Ψ_- честицу која *се креће на лево*. Из шестог постулата следи да је свака таласна функција линеарна комбинација ове две.

Пробајмо сада да елиминишемо претпоставку $V = const$. Претпоставимо прво да је носач вектора силе компактан, тј. да је V глатка функција таква да је $V = const$ ван интервала $[a, b]$. Из претходног разматрања следи да је лево и десно од овог интервала свака таласна функција линеарна комбинација функција (47), дакле и лево и десно од овог интервала имамо слободну честицу. Приметимо да се, применом Ојлерове формуле, база (47) може заменити базом

$$C(x) = \cos kx, \qquad S(x) = \sin kx.$$

Дефинишимо *оператор монодромије* као оператор који таласној функцији слободне честице са леве стране интервала придружује њену таласну функцију на десној страни интервала. Следећа теорема је аналогија Лиувилове теореме из §5.

Теорема: Матрица оператора монодромије у бази $\{C(x), S(x)\}$ припада групи $SL(2, \mathbb{R})$ матрица које чувају површину еуклидске равни. Матрица оператора монодромије у бази $\{\Psi_+, \Psi_-\}$ припада групи $SU(1, 1)$ изометрија равни Лобачевског.

Напоменимо да група $SU(1, 1)$ може да се схвати и као група комплексних 2×2 матрица са детерминантом једнаком 1, које чувају ермитску форму $(\zeta, \eta) \mapsto |\zeta|^2 - |\eta|^2$. Свакој таквој матрици (a_{ij}) одговара изометрија равни Лобачевског (у моделу јединичног диска) $z \mapsto (a_{11}z + a_{12})/(a_{21}z + a_{22})$.

Задатак: (а) Да ли честица која улази у $[a, b]$ са леве стране може да се одбије назад? Другим речима, да ли је могуће да таласна функција буде идентички једнака нули за $x > b$, а различита од нуле за $x < a$?

(б) Да ли честица која путује на десно до тачке a, може да прође кроз $[a, b]$ и настави да путује на десно кроз $[b, +\infty)$?

(в) Доказати да честица не може да има таласну функцију једнаку Ae^{ikx} на $(-\infty, a]$ и Be^{-ikx} на $[b, +\infty)$. Интерпретирати ово као „не постоји долазак без одласка”.

[Из: В. Арнолд, *Геометријски методи у теорији диференцијалних једначина.*]

Претпоставимо сада да је функција V неконстантна на $\mathbb{R}$, без претпоставке о носачу $[a, b]$. Тада опет можемо да покушамо да нађемо решење у облику (46), с тим што сада, кад је V неконстантно, дозволимо да и ξ буде неконстантно. Дакле, тражимо решење у облику

$$\Psi(x) = e^{iS(x)}$$

за неку реалну функцију S, која се назива *фазном функцијом.* Тада Шредингерова једначина (45) постаје једначина по S

$$\frac{(S'(x))^2}{2m} + (V(x) - E) - \frac{i\hbar}{2m}S''(x) = 0.$$

Ако $\hbar$ сматрамо „малим" и пустимо га да „тежи нули",[35] последњи сабирак на левој страни нестаје и добијамо

$$\frac{(S'(x))^2}{2m} + V(x) = E, \quad \text{тј.} \quad H(x, S'(x)) = E.$$

Последња једначина (по непознатој S) назива се *Хамилтон–Јакобијевом једначином.*

Задатак: (а) Нека је H глатка функција и нека је

$$H(x_0, y_0) = E, \qquad \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Доказати да Хамилтон–Јакобијева једначина има *локално решење* у околини x_0 (тј. да постоји $\varepsilon > 0$ и функција $S : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ таква да је $H(x, S'(x)) = E$ за $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$) које задовољава услов $S'(x_0) = y_0$.

(б) Наћи глатку функцију H такву да Хамилтон–Јакобијева једначина нема глобално решење $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ни за једну вредност $E \in \mathbb{R}$.

Хамилтон–Јакобијеву једначину можемо да разумемо и геометријски. Сетимо се да је диференцијал dS пресликавање $dS : \mathbb{R} \to T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, па Хамилтон–Јакобијева једначина може да се напише као

$$\mathrm{Im}(dS) \in H^{-1}(E),$$

где је на десној страни подскуп фазног простора на коме *класични* хамилтонијан H (тј. енергија) има константну вредност E. Ово успоставља следећу *везу класичне и квантне механике*: Функција S на фазном простору класичног механичког система је фазна функција апроксимације[36] решења Шредингерове једначине ако је вредност њеног диференцијала скуп на коме је класични хамилтонијан константан. Приметимо да је, за аутономне хамилтонијане, скуп $H^{-1}(E)$ управо скуп у коме се одвија кретање класичног система (по закону одржања енергије).

Овај геометријски поглед на Шредингерову једначину нам допушта да лако уопштимо претходну дискусију о једној честици на произвољан систем од n честица, али и више од тога: можемо да говоримо о квантизацији класичног система на котангентном раслојењу T^*M задатог класичним хамилтонијаном $H : T^*M \to \mathbb{R}$ за произвољну многострукост M. Функцију $S : M \to \mathbb{R}$ називамо *допустивом*, ако она задовољава Хамилтон–Јакобијеву једначину

$$H(dS(q)) = E.$$

Приметимо да слика $L = dS(M) \subset T^*M$ задовољава следећа својства:

(Λ1): $\dim L = n = \dim T^*M$

(Λ2): рестрикција $\theta|L$ Лиувилове форме на L је тачна форма.

[35] Оправдано може да се постави питање шта значи да „Планкова *константа* тежи нули". Одговор може да буде следећи. Систем сматрамо „макроскопским" ако су његове величине (маса, запремина итд) велике у поређењу са $\hbar$. Понашање таквог система је оно што „видимо", тј. описујемо законима класичне механике. Закони квантне физике (као и сваке теорије која објашњава свет, онакав каквим га ми доживљавамо) треба да осликавају оно што видимо, тј. теорија треба да буде таква да кад $\hbar$ (које „не видимо", јер је димензије реда $10^{-33}cm$), *схваћено као формални математички параметар*, тежи нули.

[36] у смислу претходне фусноте

Последње тврђење следи из (21). Уколико се реч „тачна” замени са „затворена”[37] , (Λ1) и (Λ2) дефинишу *Лагранжеву подмногострукост* у T^*M.

Задатак: Доказати да је функција $H : T^*M \to \mathbf{R}$ локално константна на Лагранжевој подмногострукости $L \subset T^*M$ ако и само ако је Хамилтоново векторско поље X_H тангентно на L.

Овај задатак може да се схвати као уопштење Хамилтон–Јакобијевих једначина, а квантизација класичног система као придруживање Лагранжеве подмногострукости класичном хамилтонијану. Приметимо да је скуп $H^{-1}(E)$ много већи од L (сем у случају $n = 1$): први скуп је хиперповрш (ако је E *регуларна вредност* функције H у смислу §1), а многострукост L има димензију и кодимензију n.

У §5 смо споменули да се класична механика може радити на произвољној симплектичкој многострукости. Пошто су Лагранжеве подмногострукости дефинисане и тада, можемо да говоримо о квантизацији Хамилтоновог система на симплектичкој многострукости (која није обавезно котангентно раслојење). У општем случају, на симплектичкој многострукости је разликовање између импулса и положаја само локално и условно, тј. зависи од избора координата, па без геометризације коју смо извели, не бисмо могли да говоримо о квантизацији, следећи само рецепт (32) из трећег постулата. У квантној механици постоји слична „равноправност улога” импулса и положаја, остварена Фуријеовом трансформацијом (33).

Задатак: Нека је $\widehat{\psi}$ Фуријеова трансформација таласне функције ψ (функција $\widehat{\psi}$ назива се *таласном функцијом у простору импулса*) система са класичним хамилтонијаном (43). Доказати да она задовољава *Шредингерову једначину у простору импулса*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\psi}(p_1,\ldots,p_n,t) = \frac{p_1^2+\cdots+p_n^2}{2m}\widehat{\psi}(p_1,\ldots,p_n,t) + (2\pi)^{-n/2}\widehat{V} * \widehat{\psi}(p_1,\ldots,p_n,t),$$

где је са $*$ означена *конволуција*[38] функција $V(\cdot,t), \psi(\cdot,t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Зависност таласне функције од времена можемо да опишемо помоћу *оператора еволуције* $\mathbf{U}(t,t_0)$ – унитарног оператора који описује промену таласне функције од тренутка t_0 до тренутка t:

$$\psi(\cdot,t) = \mathbf{U}(t,t_0)\psi(\cdot,t_0). \tag{48}$$

Из Шредингерове једначине следи да је

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}(t,t_0) = \mathbf{H}\mathbf{U}(t,t_0). \tag{49}$$

Ако хамилтонијан не зависи од времена, одатле следи

$$\mathbf{U}(t,t_0) = \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}(t-t_0)\Big). \tag{50}$$

Израз на десној страни је аналитичка функција чија је променљива оператор; она може да се дефинише помоћу степеног реда ако је оператор ограничен, односно помоћу *спектралног интеграла* у неким општијим случајевима.

[37] Будући да је $d\theta = \omega$ симплектичка форма, (Λ2) онда гласи $\omega|_L = 0$ и има смисла на произвољној симплектичкој многострукости.

[38] $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$

Опис квантног система помоћу таласне функције која зависи од времена назива се *Шредингеровом сликом.* Квантна механика може да се формулише и у оквиру *Хајзенбергове слике*, у којој се систем описује таласном функцијом у тренутку $t = t_0$ и оператором еволуције. Ако је A динамичка варијабла, онда је

$$\mathbf{A}\psi(\cdot, t) = \mathbf{A}\mathbf{U}(t, t_0)\psi(\cdot, t_0).$$

Уколико желимо да посматрамо овај израз у оквиру Хајзенбергове слике, треба да опишемо таласне функције у тренутку $t = t_0$. Оне су

$$\mathbf{U}^{-1}(t, t_0)\mathbf{A}\psi(\cdot, t) = \mathbf{U}^{-1}(t, t_0)\mathbf{A}\mathbf{U}(t, t_0)\psi(\cdot, t_0).$$

Дакле, на таласну функцију у тренутку $t = t_0$ (у коме је она једино и задата у Хајзенберговој слици) дејствује оператор

$$\widehat{\mathbf{A}} := \mathbf{U}^{-1}(t, t_0)\mathbf{A}\mathbf{U}$$

Специјално, овако и од хамилтонијана $\mathbf{H}$ добијамо оператор $\widehat{\mathbf{H}}$. Тада из (49) следи

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathbf{A}} = -\frac{i}{\hbar}[\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{H}}] + \widehat{\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)}.$$

Ова једначина је у Хајзенберговој слици оно што је Шредингерова у Шредингереовој. Дакле, Шредингерова слика је формулација квантне механике у којој се са временом мења таласна функција и опис динамике система састоји се у опису промене таласне функције. У Хајзенберговој слици таласна функција не зависи од времена, али динамичке варијабле зависе и динамика система се описује њиховом променом.

Напомена: Постулирање квантне механике које смо изложили је веома поједностављено (некад се назива и „наивном квантизацијом”) и захтева много образложења, коментара и проширења. Али, ми га овде наводимо само да бисмо мотивисали увођење језика многострукости у следећем параграфу (држећи се тако теме из наслова) и оно је за ту сврху задовољавајуће. Ипак, илустроваћемо неке од проблема који се овде јављају чак и у случају $n = 1$ (једна честица која се креће у једној димензији) на два примера. Оператор придружен импулсу, $-i\hbar\frac{d}{dq}$, има сопствене векторе

$$\phi_\lambda = e^{i\lambda q/\hbar} \tag{51}$$

који одговарају сопственој вредности λ. Ове функције не припадају простору $L^2(\mathbb{R})$. Са оператором придруженим импулсу ствар стоји још горе – оператор множења са q нема сопствене функције. Његови „сопствени вектори” који одговарају сопственој вредности λ нису функције, већ *дистрибуције* (линеарна пресликавања на простору функција) $\psi_\lambda = \delta(q - \lambda)$, дефинисане као

$$\delta(q - \lambda) : f \mapsto \langle f \mid \psi_\lambda \rangle \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda). \tag{52}$$

Дакле, простор L^2, иако је природан амбијент за густине вероватноћа, није погодан Хилбертов простор стања. Приметимо да се функције из L^2 такође могу схватити као дистрибуције: свака функција $g \in L^2$ дефинише линеарно пресликавање $f \mapsto \langle f \mid g \rangle$ на L^2. Зато се дистрибуције називају још и *уопштеним функцијама.*

Примери: 1. Хармонијски осцилатор. На честицу масе m која се креће дуж x осе, а причвршћена је за координатни почетак еластичном опругом, дејствује сила затезања $F = -kx$, где је k коефицијент затезања опруге. Класични Хамилтонијан овог система је

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{53}$$

где је $\omega = k/m$. Други Њутнов закон за њега гласи $m\ddot{x} + kx = 0$. Решења ове једначине, тј. трајекторије класичног хармонијског осцилатора, су

$$x = C\sin{(\omega t + \alpha)},$$

што су осцилације са фреквенцијом ω и амплитудом C.

Квантизација хамилтонијана (53) може да се напише у облику

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{A}^* + \mathbf{A}^*\mathbf{A}),$$

где су $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*$ оператори на Хилбертовом простору $L^2(\mathbb{R})$ дефинисани[39] са

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\,x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\,\mathbf{p}, \qquad \mathbf{A}^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\,x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\,\mathbf{p}.$$

Из $[x, \mathbf{p}] = i$ следи $[\mathbf{A}, \mathbf{A}^*] = 1$, па је

$$\mathbf{H} = \omega\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A} + \frac{1}{2}\right).$$

Нека је $\mathbf{N} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Тада је

$$[\mathbf{N}, \mathbf{A}] = -\mathbf{A}, \quad [\mathbf{N}, \mathbf{A}^*] = \mathbf{A}^*, \quad [\mathbf{A}, \mathbf{A}^*] = 1, \tag{54}$$

што се лако проверава директним рачуном[40].

Задатак: Доказати да је једначина $\mathbf{A}\psi = 0$ еквивалентна једначини

$$\frac{d\psi}{dx} = -x\psi$$

и закључити одатле да постоји вектор ψ_0 такав да је $\|\psi_0\| = 1$ и $\mathbf{A}\psi_0 = 0$.

Нека је ψ_0 вектор из претходног задатка. Из (54) следи да је тада

$$\mathbf{H}\psi_0 = \frac{\omega}{2}\psi_0$$

па је

$$\mathbf{H}\mathbf{A}^{*n}\psi_0 = \mathbf{A}^{*n}\mathbf{H}\psi_0 + [\mathbf{H}, \mathbf{A}^{*n}]\psi_0 = \omega(n + 1/2)\mathbf{A}^{*n}\psi_0.$$

Дакле, $\mathbf{A}^{*n}\psi_0$ су сопствени вектори оператора $\mathbf{H}$ који одговарају сопственим вредностима $\omega(n+1/2)$. Испоставља се[41] да ове сопствене вредности чине цео спектар оператора $\mathbf{H}$. Нека су ψ_n нормализовани (тј. такви да је $\|\psi_n\| = 1$ сопствени вектори хамилтонијана $\mathbf{H}$ који одговарају сопственим вредностима $\omega(n + 1/2)$.

Задатак: Доказати да је $\mathbf{A}\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}$ и $\mathbf{A}^*\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}$.

---

[39] Ознаке нису случајно изабране – лако је видети да су ова два оператора адјунгована.

[40] Лијева алгебра генерисана са три елемента који задовољавају (54) назива се *Хајзенберговом алгебром*.

[41] Видети Глим, Јафе: *Квантна физика – са тачке гледишта функционалног интеграла.*

Посматрајмо еволуцију хармонијског осцилатора током временског интервала $[t_0, t_1]$. Том приликом, наш осцилатор ступа у интеракцију са неким спољашњим утицајима, којих није било пре тренутка t_0 и којих нема после тренутка t_1. Нека је он у тренутку t_0 био у сопственом стању ψ_n. После еволуције од $t = t_0$ до $t = t_1$ (током које се Хамилтонијан променио, захваљујући спољашњим утицајима), сисем се налази у стању $\psi = \sum_k c_k\psi_k$. Мерење енергије осцилатора у тренутку $t = t_1$ даће резултат $(m+1/2)\omega$ са вероватноћом $|c_m|^2$. Одатле следи да ће резултати поновљених мерења дати дискретну разлику између вредности енергије у $t = t_0$ и $t = t_1$, тј. резултати ће бити целобројни до на мултипликативну константу. То се некад формулише речима: *хармонијски осцилатор може да апсорбује или емитује енергију само у целобројним множитељима броја* ω*, између којих прави „квантни скок”.*

2. Квантизација момента импулса. Вектор

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

назива се *кинетичким моментом*, *угаоним моментом*, *моментом импулса* или *моментом количине кретања.* Његова квантизација је оператор

$$\mathbf{J} = -i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla).$$

Ако напишемо $\mathbf{L} = (\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y, \mathbf{L}_z)$, и са $\mathbf{J}_x$, $\mathbf{J}_y$, $\mathbf{J}_z$ квантизације компоненти $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$, $\mathbf{L}_z$, онда важе релације

$$[\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y] = i\hbar\mathbf{J}_z, \quad [\mathbf{J}_y, \mathbf{J}_z] = i\hbar\mathbf{J}_x, \quad [\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_x] = i\hbar\mathbf{J}_y, \tag{55}$$

које су еквивалентне са $\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\hbar\mathbf{J}$ (ово је пример релације која, због некомутативности, важи за операторе, а не може да важи за векторе[42] – векторски производ вектора са самим собом је увек нула).

У квантној физици се сваки симетрични оператор који задовољава (55) назива *моментом импулса*, или *угаоним моментом.* Ако означимо са $j(j+1)\hbar^2$ сопствене вредности оператора $\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_x^2 + \mathbf{J}_y^2 + \mathbf{J}_z^2$ из (55) можемо да изведемо да бројеви j могу да буду само

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$$

Специјални случај угаоног момента је *спин оператор* $\mathbf{S}$, који се придружује свакој елементарној честици као *степен унутрашње слободе* и специфичан је за квантну физику. Сопствене вредности оператора $\mathbf{S}^2$ су $s(s+1)\hbar^2$, где s (*спин честице*) може да буде ненегативан цео број (и такве честице се називају *бозонима*) или половина непарног природног броја (такве честице се називају *фермионима.*

3. Суперсиметрија. Суперсиметричне квантне теорије се заснивају на претпоставци да свакој честици одговара друга честица, њен *суперпартнер*, чији се спин разликује за $\frac{1}{2}$, и да постоје симетрије које мењају улогу бозона и фермиона – тзв. *генератори суперсиметрије*, односно оператори $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_N$ који задовољавају *релације антикомутативности*

$$\{\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j\} \stackrel{def}{=} \mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_j + \mathbf{Q}_j\mathbf{Q}_i = 0 \quad \text{за} \quad i \neq j.$$

[42] Насупрот релацијама $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$ и $\nabla\times\nabla f = 0$ које могу да се докажу „геометријски”, јер у њима између две ∇ не стоји ништа, па се не испољава некомутативност диференцирања (Лајбницово правило).

Специјално, за $N=2$ Хилбертов простор стања може да се напише као директна сума

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2 \tag{56}$$

и $Q_1:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$, $Q_2:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_1$, што се формулише са *генератори суперсиметрије мењају улогу бозона и фермиона.*

§8. Геометријска формулација квантне механике. Физичари А. Аштекар и Т.А. Шилинг су, у раду публикованом 1998, сугерисали следећи геометријски приступ квантној физици. Нека је $\mathcal{H}$ комплексни Хилбертов простор. Ермитски скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на њему може да се напише као збир реалног и имагинарног дела:

$$\langle\psi,\phi\rangle=\frac{1}{2\hbar}G(\psi,\phi)+\frac{i}{2\hbar}\Omega(\psi,\phi).$$

Из дефиниције ермитског скаларног производа лако следи да је G реални скаларни производ, а Ω симплектичка форма (за $i=\sqrt{-1}$). Резервишимо ознаку $z\mapsto iz$ за множење комплексних бројева са i, а са J означимо пресликавање

$$J:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\qquad \psi\mapsto i\cdot\psi.$$

Пошто је $\langle\psi,J\phi\rangle=i\langle\psi,\phi\rangle$, следи да је $G(\psi,\phi)=\Omega(\psi,J\phi)$. У овим ознакама, Шредингерова једначина (42) може да се напише у облику

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{1}{\hbar}J\mathbf{H}\psi,$$

при чему на левој страни пишемо обичан извод по t уместо парцијалног, јер ψ третирамо као вектор у $\mathcal{H}$, а не као функцију (која сем t има још променљивих) у L^2. Нека је

$$\widetilde{H}:\mathcal{H}\to\mathbb{R},\qquad \widetilde{H}(\psi)\stackrel{def}{=}\langle\psi,\mathbf{H}\psi\rangle. \tag{57}$$

Задатак: Доказати да је $\widetilde{H}(\psi)=\frac{1}{2\hbar}G(\psi,\mathbf{H}\psi)=\frac{1}{2\hbar}\Omega(\psi,J\mathbf{H}\psi)$.

Нека је $\eta\in T_\psi\mathcal{H}\cong\mathcal{H}$. Тада је

$$d\widetilde{H}(\eta)=\frac{d}{dt}\langle\psi+t\eta,\mathbf{H}(\psi+t\eta)\rangle=\langle\psi,\mathbf{H}\eta\rangle+\langle\eta,\mathbf{H}\psi\rangle=\Omega(-\hbar^{-1}J\mathbf{H}\psi,\eta).$$

То значи да векторско поље $X_{\widetilde{H}}(\psi)=\hbar^{-1}J\mathbf{H}\psi$ на $\mathcal{H}$ задовољава једначину

$$d\widetilde{H}=i(X_{\widetilde{H}})\,\Omega,$$

тј. $X_{\widetilde{H}}$ је Хамилтоново векторско поље хамилтонијана $\widetilde{H}$. Одатле следи да Шредингерова једначина може да се схвати као Хамилтонова једначина

$$\frac{d\psi}{dt}=X_{\widetilde{H}}(\psi)$$

на $\mathcal{H}$.

Нека је

$$\mathcal{S}\stackrel{def}{=}\{\psi\mid\langle\psi,\psi\rangle=1\}=\{\psi\mid(1/2\hbar)G(\psi,\psi)=1\}$$

јединична сфера у $\mathcal{H}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{S}/\sim$ *пројективни Хилбертов простор*: количнички простор у односу на релацију $\psi \sim e^{i\theta}\psi$. Пошто су вектори стања нормализовани (видети (31)) и ψ и $\lambda\psi$ означавају исто стање, природан простор стања је $\mathcal{P}$, а не $\mathcal{H}$. Нека су

$$j : \mathcal{S} \to \mathcal{H} \quad \text{и} \quad \pi : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$$

природна инклузија и пројекција.

Задатак: Доказати да постоји јединствена симплектичка форма ω на $\mathcal{P}$ таква да је $\pi^*\omega = j^*\Omega$.

Из дефиниције (57) следи да је функција $\widetilde{H}$ инваријантна у односу на ротацију $\psi \mapsto e^{i\theta}\psi$, па постоји јединствена функција $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ таква да је $f \circ \pi = \widetilde{H} \circ j$, што је, на основу (35), еквивалентно са $f \circ \pi = \langle H \rangle|_{\mathcal{S}}$. Одатле следи да је за класичну опсерваблу (односно функцију дефинисану на фазном простору) F природно дефинисати квантну опсерваблу као функцију на $\mathcal{P}$ помоћу

$$f \circ \pi = \langle F \rangle|_{\mathcal{S}}. \tag{58}$$

Специјално, класичном хамилтонијану $H : T^*M \to \mathbb{R}$ придружујемо функцију $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, а уместо Шредингерове једначине, квантни систем описујемо као и класични – Хамилтоновом једначином – али на бесконачно димензионој симплектичкој многострукости $\mathcal{P}$.

У §7 смо видели да су могући резулатати мерења класичне варијабле сопствене вредности оператора придруженој варијабли. Нека је $F : T^*M \to \mathbb{R}$ класична варијабла, $\mathbf{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ њена квантизација, и $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ функција дефинисана помоћу (58). Нека је X_f Хамилтоново векторско поље. Тада је за свако векторско поље Y

$$df(Y) = \omega(X_f, Y),$$

па није тешко решити следећи задатак.

Задатак: Нека је ψ јединични сопствени вектор симетричног оператора $\mathbf{F}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ одговарајућа сопствена вредност:

$$\mathbf{F}\psi = \lambda\psi.$$

Доказати да је λ критична вредност функције f, а $\pi(\psi)$ њена критична тачка.

Одавде закључујемо да квантну механику можемо да постулирамо у симплектичком амбијенту:

- Фазни простор је (у општем случају бесконачно димензиона) симплектичка многострукост $\mathcal{P}$.
- Физичке опсервабле су глатке функције на $\mathcal{P}$, а могући резултати мерења су њихове критичне вредности.
- Еволуција система је дефинисана Хамилтоновом једначином на $\mathcal{P}$.

§9. Теорија струна: топологизација квантне физике. Посматрајмо слободну (са потенцијалом $V \equiv 0$) честицу која се креће у једној димензији. Њен класични хамилтонијан је $H = \frac{p^2}{2m}$. Нека се она у тренутку t налази у положају описаном сопственим вектором ψ оператора положаја $\mathbf{q}$ који одговара сопственој вредности q. Из шестог постулата (специјално, формуле (37) и (40)) и из описа еволуције (48), (50) следи да је вероватноћа да се у тренутку t_1

честица нађе у сопственом стању ψ_1 које одговара сопственој вредности q_1 једнака

$$(59) \qquad \langle \psi_1 \mid \exp(-i/\hbar \mathbf{H}(t_1 - t)\psi)\rangle = \langle \psi_1 \mid \exp(-i(t_1 - t)/(2\hbar m)\mathbf{p}^2)\psi\rangle.$$

Нека су ϕ_p сопствене функције оператора импулса $\mathbf{p}$. Имајући у виду (41), претходни израз можемо два пута да помножимо са

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \mid \phi_p\rangle\langle\phi_p \mid \, dp.$$

Тиме десна страна у (59) постаје

$$(60) \qquad \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \langle \psi_1 \mid \phi_{p_1}\rangle\langle\phi_{p_1} \mid \phi_p\rangle\langle\phi_p \mid \psi\rangle e^{-i(t_1-t)p^2/(2\hbar m)}\, dp dp_1.$$

Овде смо искористили и следећу чињеницу: ако је α сопствена вредност оператора $\mathbf{A}$ која одговара сопственом вектору ϕ, онда је e^α сопствена вредност оператора $e^{\mathbf{A}}$ која одговара истом сопственом вектору ϕ. Имајући у виду да је $\int_{\mathbb{R}} \mid \phi_{p_1}\rangle\langle\phi_{p_1} \mid \, dp_1 = 1$, из (60), (51) и (52) добијамо

$$\langle \psi_1 \mid \exp(-i/\hbar \mathbf{H}(t_1 - t))\psi)\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{ip(q_1-q)} e^{-i(t_1-t)p^2/(2\hbar m)}\, dp.$$

Последњи интеграл конвергира само ако претпоставимо да прираштај времена $\Delta t = t_1 - t$ има негативан имагинарни део. То ћемо и урадити, не упуштајући се у физички смисао те претпоставке. Приметимо да се, комплетирањем квадрата бинома по p у експоненту, овај интеграл своди на познати Гаусов интеграл $\int_{\mathbb{R}} e^{-cx^2}\, dx = \sqrt{\pi/c}$ (за $c > 0$), па добијамо

$$\langle \psi_1 \mid \exp(-i/\hbar \mathbf{H}(t_1 - t))\psi)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m}{2\pi i \Delta t}} e^{im(q_1-q)^2/2\Delta t}.$$

Претпоставимо да се честица креће од q до q_1 константном брзином. Тада је израз $m(q_1 - q)^2/2$ у експоненту претходног израза њена кинетичка енергија $mv^2/2$, тј.

$$(61) \qquad \langle \psi_1 \mid \exp(-i/\hbar \mathbf{H}(t_1 - t))\psi)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m}{2\pi i \Delta t}} \exp\left(i \int_I \frac{m\|\dot{q}\|^2}{2}\, dt\right)$$

где је I интервал времена. У општем случају, дељењем интервала I на инфинитезималне подинтервале и применом формуле (41) n пута леву страну у (61) можемо да напишемо као

$$\int \cdots \int \langle \psi_1 \mid \psi_2\rangle\langle\psi_2 \mid \psi_3\rangle \ldots \langle\psi_n \mid \psi(t)\rangle\, dq_1 \ldots dq_n,$$

где је $\psi(t) = \exp(-i/\hbar \mathbf{H}(t_1 - t))\psi$. На сваки члан производа под интегралом можемо да применимо (61).

Ако на овом месту *формално пређемо на лимес кад* $n \to \infty$, добијамо

$$(62) \qquad \langle \psi_1 \mid \exp(-i/\hbar \mathbf{H}(t_1 - t))\psi)\rangle = \int_{\mathcal{P}} e^{iS(\gamma)}\, [D\gamma],$$

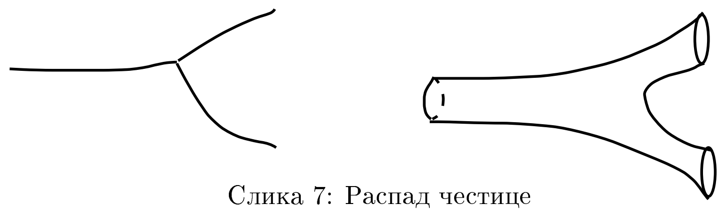
где је

$$(63) \qquad S(\gamma) = \int_I \frac{m}{2}\|\dot{\gamma}\|^2\, dt$$

класични функционал дејства[43], $\mathcal{P}$ простор путева и $[D\gamma]$ *формална мера* на $\mathcal{P}$.

Конструкција мере $[D\gamma]$ представља проблем, будући да је простор $\mathcal{P}$ *бесконачно димензиона многострукост* и као такав није локално компактан (локална компактност је претпоставка у конструкцији Борелове мере[44]). Постоји више приступа проблему заснивања интеграла (62). Ми ћемо укратко изложити једну конструкцију Е. Витена из 1988. која дотиче и тај проблем.

Нека је M простор–време[45]. Уместо да честицу схватимо као тачку која се креће простором $\mathbb{R}^3$, дефинишемо је као струну[46] која се креће по M. Тада траг који она оставља није једнодимензиони (крива, или граф) него дводимензиони. Приметимо да ово у извесном смислу *поједностављује* слику кретања честице; нпр. траг који остаје при распаду класичне честице није многострукост, док траг који представља распад честице схваћене као струне – јесте.



Слика 7: Распад честице

Улогу пресликавања γ у (63) сада преузима пресликавање

$$u : \Sigma \to M,$$

где је Σ дводимензиона површ. Нека су на Σ и M задате Риманове метрике, и нека је на Σ задата мера μ. Тада уместо интеграла (63) посматрамо интеграл (претпоставимо да су јединице мере изабране тако да је $m = 1$)

$$S(u) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \|du\|^2\, d\mu,$$

где је $\|\cdot\|$ норма оператора дефинисана помоћу Риманових метрика на Σ и M. Слично као формула (28) за холоморфна пресликавања, доказује се њено уопштење – формула

$$S(u) = \int_\Sigma \|\bar\partial u\|^2\, d\mu + \int_\Sigma u^*\omega \tag{64}$$

за произвољна глатка пресликавања $u : \Sigma \to M$. Уместо интеграла (62) имаћемо

$$\int_{\mathcal{F}} e^{-S(u)}\,[Du]$$

где је $\mathcal{F}$ простор свих пресликавања површи у M. Последњи интеграл је, на основу (64) једнак

$$\int_{\mathcal{F}} e^{-\left(\int_\Sigma \|\bar\partial u\|^2\, d\mu + \int_\Sigma u^*\omega\right)}\,[Du]. \tag{65}$$

[43]Ради једноставности смо претпоставили $V \equiv 0$, у општем случају у (62) би стајало $S(\gamma) = \int(\frac{m}{2}\|\dot\gamma\|^2 - V(\gamma))\,dt$.

[44]Видети нпр. *Реалну и комплексну анализу* В. Рудина.

[45]Физичари се споре око тога како изгледа Свемир, зато га означавамо са M, не инсистирајући на $\mathbb{R}^4$. Међутим, претпостављамо да M има симплектичку структуру.

[46]Која може бити интервал („теорија отворених струна") или кружница („теорија затворених струна").

Посматрајмо уместо њега интеграл

$$\int_{\mathcal{F}} e^{-\left(t\int_\Sigma \|\bar\partial u\|^2\,d\mu+\int_\Sigma u^*\omega\right)}\,[Du].$$

Када би овај интеграл био добро дефинисан, могло би да се покаже[47] да он не зависи од t. Тада, преласком на лимес кад $t\to+\infty$ закључујемо да је интеграл (65) једнак интегралу

$$\int_{\mathcal{M}} e^{-\int_\Sigma u^*\omega}\,[Du], \tag{66}$$

где је $\mathcal{M}$ скуп пресликавања $u:\Sigma\to M$ која задовољавају $\bar\partial u=0$, тј. скуп холоморфних пресликавања. Међутим, у §6 смо видели да је тај скуп коначно димензиона многострукост. Дакле, интеграл (66) по њему је коректно заснован[48], те се може узети за интерпретацију интеграла (65).

§10. Морс–Флорова теорија: струне у класичном свету. А. Поенкаре је 1900. године поставио хипотезу која се, модерним речником, може формулисати овако: *Нека је M компактна просто повезана n–димензиона глатка многострукост без границе чија је хомологија изоморфна хомологији сфере $\mathbb{S}^n$. Тада је $M\cong\mathbb{S}^n$.* Овде $\cong$ означава тополошку еквивалентност, тј. хомеоморфизам[49]. С. Смејл је 1956. године доказао ову хипотезу за $n\geq 5$; касније је хипотеза доказана и за преостале две димензије[50]. Смејлов доказ ослања се на Теорију Морса; математички апарат који је том приликом развијен назива се *теоријом h–кобордизама*, а та теорија је касније формализована кроз теорију *Морсове хомологије* коју ћемо овде врло кратко и поједностављено изложити.

Нека је M глатка многострукост и $f:M\to\mathbb{R}$ глатка функција. Кажемо да је f *Морсова функција* ако је у свакој њеној критичној тачки (тј. свакој тачки x у којој је $df(x)=0$) матрица другог извода (Хесијан) $D^2f(x)$ недегенерисана. Индекс ове матрице назива се *Морсовим индексом* критичне тачке x и означава са $m_f(x)$. Важи следеће тврђење (*Морсова лема*): *Свака критична тачка x Морсове функције f има околину у којој постоје координате у којима је f недегенерисана квадратна форма индекса $m_f(x)$.* Одавде следи да су критичне тачке Морсове функције изоловане (јер је једина критична тачка квадратне форме 0), а ако је многострукост M компактна (што ћемо овде и претпоставити), скуп критичних тачака Морсове функције је коначан. Нека је $\mathrm{Crit}_p(f)$ скуп критичних тачака Морсове функције f Морсовог индекса p и

$$C_p(f):=\left\{\sum\alpha_kx_k\mid x_k\in\mathrm{Crit}_p(f),\alpha_k\in\mathbb{Z}\right\}$$

---

[47] Овај „доказ” можемо да схватимо као експериментисање са, још увек недефинисаним, интегралом. Не треба да изгубимо из вида да овде причамо о физици. Теоријска физика представља логичко уобличавање резултата експеримената. Физичари имају ту привилегију да одлуче кад је експеримент завршен (као што фудбалски судија може да одлучи када ће да свира крај, или професор када ће да заврши час); манипулације са овим „интегралом” можемо да сматрамо делом експеримента, који се управо ближи крају.

[48] ... и то се може сматрати „крајем експеримента” и почетком теорије

[49] Џ. Милнор је доказао да постоје „егзотичне седмодимензионе сфере” – глатке многострукости које су хомеоморфне (тополошки еквивалентне), али не и дифеоморфне (глатко еквивалентне) сфери $\mathbb{S}^7$.

[50] Из класификације једнодимензионих и дводимензионих многострукости споменуте у §1 јасно је да је хипотеза тачна за $n\leq 2$. М. Фридман је 1986. доказао хипотезу за $n=4$, а Г. Перелман 2003. за $n=3$.

скуп свих формалних линеарних комбинација ових тачака (тј. *слободни* $\mathbb{Z}$–*модул* генерисан са $\mathrm{Crit}_p(f)$). Прилично нетривијалном применом Теореме о имплицитној функцији на тзв. Банаховим многострукостима може да се докаже да је, за $x_+ \in \mathrm{Crit}_p(f)$, $x_- \in \mathrm{Crit}_q(f)$ простор $\mathcal{M}(x_-, x_+)$ кривих $\gamma : \mathbb{R} \to M$ које задовољавају *негативну градијентну једначину*

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f, \quad \gamma(\pm\infty) = \pm x \tag{67}$$

многострукост димензије $p - q$, за погодан (тачније, скоро сваки) избор Риманове метрике на M употребљене за дефиницију градијента ∇ (сетимо се онога што смо рекли при увођењу градијента у (22)). Група $\mathbb{R}$ дејствује на $\mathcal{M}(x_-, x_+)$ транслацијама дуж t–осе; количнички простор овог дејства је многострукост димензије $p-q-1$. У случају $p = q-1$ ова многострукост је компактна[51] многострукост димензије нула, дакле *коначан скуп тачака.* Означимо са $n(x_-, x_+)$ њихов број и дефинишимо линеарно пресликавање

$$\partial : C_p(f) \to C_{p-1}(f)$$

тако што дефинишемо његове вредности на генераторима $x \in \mathrm{Crit}_p(f)$ са

$$\partial(x) := \sum_{y \in \mathrm{Crit}_{p-1}(f)} n(x, y) y.$$

Анализом (не)компакности многострукости $\mathcal{M}(x_-, x_+)$ и описа њихових граница може се доказати да је

$$\partial \circ \partial = 0,$$

па можемо да дефинишемо *Морсове хомолошке групе* као количничке просторе

$$H_*(f) := \frac{\mathrm{Ker}(\partial)}{\mathrm{Im}(\partial)}.$$

Испоставља се да су ове групе изоморфне *групама сингуларне хомологије* многострукости M. Одатле следи да је број критичних тачака Морсове функције, као број генератора ланчастих група C_p које дефинишу хомологију, ограничен одоздо збиром Бетијевих бројева[52] многострукости M. Дакле, једно аналитичко својство функције контролише се топологијом њеног домена[53].

Мотивисан Поенкаре–Бирхофовом теоремом и њеном последицом које смо навели у §5, В. Арнолд је 1976. године поставио хипотезу да *сваки Хамилтонов систем на симплектичкој многострукости M има најмање $\sum \beta_k(M)$ периодичних орбита.* Током '80их година А. Флор је доказао ову хипотезу[54] у серији радова у којима је конструисао хомолошку теорију, данас познату као *Флорова хомологија.*

---

[51]Компактност следи из Арцела–Асколијеве теореме, уз помоћ (67) и компактности M.

[52]k–ти Бетијев број тополошког простора M, $\beta_k(M)$ је ранг групе $H_k(M)$ сингуларне хомологије тог простора. Нпр, за торус дводимензиони торус $\mathbb{T}^2$ је $\beta_0(\mathbb{T}^2) = \beta_2(\mathbb{T}^2) = 1$, $\beta_1(\mathbb{T}^2) = 2$.

[53]Постоји више приступа Морсовој теорији, овај који смо изложили мотивисан је радом физичара Е. Витена о суперсиметрији; о томе ћемо речи још пар речи у једној фусноти касније.

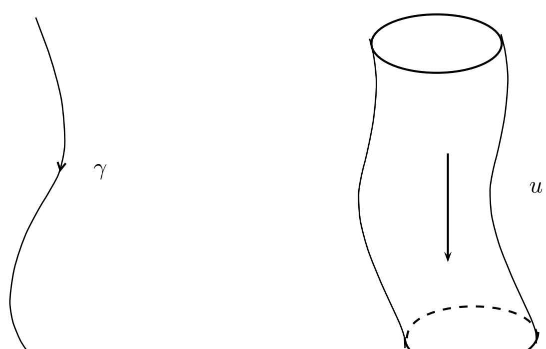
[54]Флор је при томе увео неке додатне претпоставке о топологији многострукости, које су до данас добрим делом елиминисане.

Полазећи од варијационог принципа у Хамилтоновој механици, Флор је интерпретирао формулу (25) (која у случају периодичних орбита нема последња два сабирка, јер се они међусобно скраћују) као *дефиницију градијента функционала* $\mathcal{A}_H$ *у односу на* L^2*–метрику* $\int_0^1 \omega(\cdot, J\cdot)dt$ (поново се сећамо формуле (22) о дефиницији градијента помоћу мертрике, у овом случају на бесконачно димензионом простору са метриком L^2). Имајући у виду да су периодичне Хамилтонове орбите критичне тачке функционала дејства, Флор је конструисао хомолошке групе сличне Морсовим, са $\mathcal{A}_H$ уместо f.

Највећа тешкоћа коју је при томе превазишао састојала се у томе да једначине које одговарају градијентним једначинама (67) за L^2–градијент функционала дејства нису обичне, већ парцијалне једначине. Заиста, аналогија трајекторије γ из (67) која спаја две критичне тачке Морсове функције f је трајекторија u која спаја две „критичне тачке", тј. периодичне Хамилтонове орбите. Дакле, u је *пут у простору петљи*, односно дводимензиони (а не једнодимензиони као γ) објекат. Из дефиниције L^2 градијента се лако види да је једначина која ће одговарати једначини (67) за случај функционала дејства

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -J\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)\right). \tag{68}$$

Ако пребацимо први сабирак са десне стране на леву, на левој страни добијамо нелинеарни Коши–Риманов оператор, тако да су решења градијентне једначине функционала дејства заправо решења *нехомогене нелинеарне Коши–Риманове једначине*, односно „пертурбовано–холоморфни цилиндри".



Слика 8: Пут на многострукости и у простору петљи

Модификујући теорију Громова из §6 на овај случај, Флор је доказао да је његова хомолошка теорија коректно заснована и, уз одређене тополошке претпоставке о M, изоморфна Морсовој. Одатле следи да најмањи број периодичних орбита Хамилтоновог система (као број генератора Флорове хомологије) не може бити мањи од најмањег броја критичних тачака Морсове функције (као броја генератора Морсове хомологије). То је, имајући у виду споменути резултат о доњој граници броја критичних тачака Морсове функције, и доказало Арнолдову хипотезу.

У смислу претходног параграфа, прелаз са Морсове на Флорову теорију, тј. са једначине (67) на (68), одговара преласку са класичних квантних честица на струне. Овде је тај прелаз омогућио решење проблема класичне механике – проблема броја периодичних орбита Хамилтоновог система.

§11. Тополошка квантна теорија поља. Крајем '80их година Е. Витен је увео појам *тополошке квантне теорије поља* као теорије која не зависи од избора геометријских величина (метрике, кривине и сл). Идеја аксиоматизације ове теорије, коју је предложио је М. Атија, на хеуристичком нивоу је следећа. Размишљајмо о просторно–временској еволуцији као о оријентисаној многострукости M димензије $d+1$ са оријентисаном границом димензије d (нпр. граф као еволуција честице, или површ са границом као еволуција струне). Један део границе представља систем на почетку, а други на крају посматрања[55]. Јасно је да нам је, да бисмо описали еволуцију система у духу квантне физике, потребно да овако схваћеној граници придружимо Хилбертов простор, а целој многострукости оператор еволуције. Приметимо да је оператор еволуције, о коме је било речи у §7, линеарни оператор, и да је сваки линеарни оператор $L : V \to W$ могуће посматрати и као вектор

$$L \in \mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W. \tag{69}$$

Ова размишљања можемо да формализујемо на следећи начин.

Дефиниција: Тополошка квантна теорија поља димензије d је функтор Z који придружује

- свакој компактној глаткој оријентисаној d–димензионој многострукости Σ векторски простор $Z(\Sigma)$ над пољем $\mathbb{C}$
- свакој компактној глаткој оријентисаној $(d+1)$–димензионој многострукости Y са границом ∂Y вектор $Z_Y \in Z(\partial Y)$

и који задовољава следеће аксиоме:

(A1): Инволутивност: $Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^*$, где $*$ на левој страни означава промену оријентације, а на десној дуални простор.

(A2): Мултипликативност: $Z(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2)$, где је $\cup$ *дисјунктна* унија.

(A3): Асоцијативност: Нека су Y_1 и Y_2 d–димензионе многострукости такве да је $\partial Y_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma$, $\partial Y_2 = \Sigma \cup \Sigma_2$. Ако је $Y = Y_1 \cup_\Sigma Y_2$ многострукост добијена лепљењем многострукости Y_1 и Y_2 дуж Σ, онда је

$$Z_Y = Z_{Y_2} \circ Z_{Y_1} \in \mathrm{Hom}(Z(\Sigma_1), Z(\Sigma_2)).$$

Овде је искоришћено (69), $\circ$ на десној страни је композиција линеарних оператора.

(A4): $Z(\emptyset) = \mathbb{C}$.

(A5): Ако је I интервал у $\mathbb{R}$, онда је $Z_{\Sigma \times I} = \mathrm{Id}_{Z(\Sigma)}$, где су крајеви цилиндра $\Sigma \times I$ супротно оријентисани[56].

---

[55] Који део границе је „почетак", а који „крај" природно се дефинше помоћу оријентације. Почетак је онај део границе чија је оријентација сагласна са оријентацијом M ако јој се дода *унутрашња* нормала, док на крају ту улогу има *спољашња* нормала (нпр. две кружнице које су граница цилиндра су супротно оријентисане ако једна представља почетак, а друга крај еволуције). Приметимо да и почетак и крај могу да имају више компоненти повезаности, и да број тих компоненти не мора да буде једнак на почетку и на крају (нпр. распад честице има један почетни и два завршна краја).

[56] Ако су оба краја исто оријентисана, онда су оба почетна или оба завршна, па је $Z_{\Sigma \times I}$ „скаларни производ" $Z(\Sigma) \otimes Z(\Sigma) \to \mathbb{C}$.

На језику *теорије категорија*, квантна теорија поља може да се аксиоматизује као *функтор* из категорије *оријентисаних кобордизама*[57] у категорију векторских простора (или, општије, модула). То нам, међутим, изгледа сувише апстрактно за текст који у поднаслову има реч „неформално”.

Напомена: Можемо да приметимо да се на сличан начин може геометризовати еволуција класичних варијабли; оно што је специфичност квантног случаја је Аксиома мултипликативности (А2). Специфичност квантне теорије је да дисјунктним унијама придружује тензорски производ, док им класична придружује Декартов[58]. Приметимо да Декартов производ има смисла на нивоу скупова, док је за тензорски производ *неопходна алгебарска структура*. За тополога је ово важна разлика, јер она значи да су квантне теорије богатије алгебарском структуром, па су због тога богатији извор *тополошких инваријанти* од класичних.

Примери: 1. Ојлерова карактеристика. Нека је X многострукост и $Y \subset X$ подмногострукост. Дефинишимо *релативну Ојлерову карактеристику* као алтернирајућу суму димензија релативних кохомолошких група са коефицијентима у $\mathbb{R}$

$$\chi(X,Y) = \sum_{k=0}^{\dim Y} \dim H_k(X,Y;\mathbb{R}).$$

Ако је $\partial Y_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma$ и $\partial Y_2 \supset \Sigma$, онда је

$$\chi(Y_1 \cup_\Sigma Y_2, \Sigma_1) = \chi(Y_1, \Sigma_1) + \chi(Y_2, \Sigma), \tag{70}$$

тј. Ојлерова карактеристика је адитивна[59]. Да бисмо добили мултипликативну теорију, посматрајмо $e^{i\chi(Y)}$. Дефинишимо

$$Z(\Sigma) = \mathbb{C}$$

за сваку компактну оријентисану глатку многострукост Σ димензије d. За глатку компактну оријентисану многострукост Y димензије $d+1$ са границом $\partial Y = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где је Σ_1 „почетни”, а Σ_2 „завршни” део границе, дефинишимо

$$Z_Y : Z(\Sigma_1) \to Z(\Sigma_2), \qquad Z_Y(\zeta) = e^{i\chi(Y,\Sigma_1)}\zeta.$$

Из (70) следи да је овиме добро дефинисана квантна теорија поља.

[57]Оријентисане многострукости M_1 и M_2 димензије m су *оријентисано кобордантне* ако постоји оријентисана многострукост N димензије $n = m+1$ таква да је $\partial N = M_1 \cup M_2$, са оријентацијом сагласном оријентацији границе. У литератури се појмови кобордизма и бордизма недоследно користе; некад се ово што смо дефинисали назива *бордизмом*, будући да се из перспективе уопштених хомолошких теорија може сматрати уопштеном хомологијом, док се термин кобордизам употребљава за дуалну, кохомолошку теорију. Међутим, терминологија за коју смо се овде одлучили је она коју је 1954. године увео Р. Том, користећи израз „кобордантан” по угледу на аналогне геометријске термине, нпр. „колинеаран” (co – border, „заједно граница”).

[58]У §1 смо видели да је кретање класичне честице одређено координатама у фазном простору $\mathbb{R}^6$, а кретање n независних честица координатама у n–тоструком Декартовом производу $\mathbb{R}^{6n}$. Другачије стоји ствар код квантне честице – ако таласну функцију честице интерпретирамо као густину вероватноће, таласна функција n независних честица одређена је производом густина вероватноће сваке појединачне честице (а то је управо њихов тензорски производ), по познатом правилу рачунања вероватноћа пресека n догађаја.

[59]Ово се може видети из дугог тачног хомолошког низа и теореме изрезивања (или Мајер–Виеторисовог низа).

2. Фробенијусове алгебре. Комутативна асоцијативна алгебра V над пољем $\mathbb{C}$, снабдевена скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ се назива *Фробенијусовом алгебром* ако постоји функционал $\theta \in V^*$ такав да важи

$$\langle v, w \rangle = \theta(u * v), \tag{71}$$

где је $*$ множење у алгебри V.

Нека је Z квантна теорија поља за $d = 1$. Свака компактна многострукост димензије 1 је дисјунктна унија коначног броја кружница $\mathbb{S}^1$. Одатле, на основу Аксиоме мултипликативности (А2), следи да су сви векторски простори квантне теорије поља Z тензорски производи коначног броја копија једног векторског простора $V = Z(\mathbb{S}^1)$ (дефинисаног за фиксирану оријентацију $\mathbb{S}^1$) и његових дуала. Да бисмо описали морфизме Z_Y, приметимо да се свака компактна оријентисана дводимензиона површ са границом може представити као унија цилиндара, дискова и панталона. Одатле и из Аксиоме асоцијативности (А3) следи да је сваки Z_Y морфизам одређен помоћу три морфизма одређена овим површима. Није тешко видети да диск одређује линеарно пресликавање

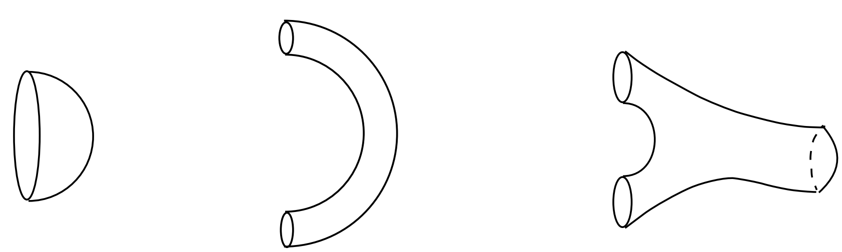
$$\theta : V \to \mathbb{C}, \quad \text{односно} \quad \theta \in V^*$$

(јер је „почетна” граница диска $\mathbb{S}^1$, а „крајња” $\emptyset$ којој, по (А4) одговара $\mathbb{C}$). Цилиндар одређује морфизам

$$g : V \to V^*, \quad \text{односно билинеарно пресликавање} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}.$$

Панталоне дефинишу множење

$$* : V \times V \to V.$$



Слика 9: Декомпозиција површи на дискове, цилиндре и панталоне

Лепљењем (или само гледањем) ових површи и применом Аксиоме асоцијативности лако се доказује да је множење $*$ асоцијативно, комутативно и да важи (71). Дакле, задавање квантне теорије поља за $d = 1$ је еквивалентно задавању једне Фробенијусове алгебре.

3. Репрезентације симетричних група. Свака квантна теорија поља за $d = 1$ је дефинише један векторски простор $V = Z(\{*\})$, где је $\{*\}$ многострукост која се састоји од једне тачке. Свака компактна многострукост димензије 0 је унија n тачака (њој је придружен векторски простор $V^{\otimes n} = V \otimes \cdots \otimes V$), а сваки једнодимензиони кобордизам је једна пермутација тих тачака. То значи да квантна теорија поља за $d = 0$ пермутацији n тачака придружује хомоморфизам векторског простора $V^{\otimes n} = V \otimes \cdots \otimes V$. Из Аксиоме асоцијативности (A3) следи да је ово придруживање *репрезентација симетричне групе* S_n.

4. Квантна кохомологија. Нека је M компактна симплектичка многострукост. На њој се може (уз одређене претпоставке о топологији M) дефинисати „деформисани кап производ" помоћу броја псеудо холоморфних сфера које реализују дату хомолошку класу A и додирују три хомолошке класе α, β, γ. Тачније, нека је

$$ev^3 : \mathcal{M}_J(A) \times_G (\mathbb{S}^2)^3 \to M^3 = M \times M \times M$$

евалуација у три тачке (производ пресликавања (30)). Тада је, за хомолошке класе

$$\alpha \times \beta \times \gamma \in H_*(M^3; \mathbb{Z})$$

одређених димензија добро дефинисана *Громов–Витенова инваријанта* Φ као „број холоморфних сфера које додирују класе α, β, γ", односно, прецизније, као *индекс пресека*

$$\Phi_A(\alpha, \beta, \gamma) = ev^3 \cdot (\alpha \times \beta \times \gamma).$$

Нека су $a, b \in H^*(M)$ кохомолошке класе и $\alpha = \mathrm{PD}(a)$, $\beta = \mathrm{PD}(b)$ њихови *Поенкареови дуали*. Дефинишимо

$$a * b \stackrel{def}{=} \sum_A (a *_A b) q^{c_1(A)/N}, \tag{72}$$

где је $a *_A b$ дефинисано помоћу

$$\int_\gamma a *_A b = \Phi_A(\alpha, \beta, \gamma),$$

q формални параметар који се (формално) сматра параметром степена N (због потреба каснијег градуисања; нећемо ићи у детаље тога) и $c_1(A)$ вредност једне карактеристичне кохомолошке класе c_1 (*прва Чернова класа*) на хомолошкој класи A. Приметимо да је за $A = 0$

$$a *_0 b = a \cup b$$

стандардни кохомолошки „кап производ[60], па се (72) понекад назива *квантном деформацијом кап производа*.

Множење (72) се проширује на

$$\widetilde{QH^*}(M) \stackrel{def}{=} H^*(M) \otimes \mathbb{Z}[q]$$

где је $\mathbb{Z}[q]$, као и на

$$QH^*(M) \stackrel{def}{=} H^*(M) \otimes \mathbb{Z}[q, q^{-1}],$$

где је $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ прстен Лоранових полинома. Добијени објекти називају се *квантним кохомологијама*, а производ $*$ на њима дефинише структуру Фробенијусове алгебре, дакле квантне теорије поља димензије $d = 1$.

Споменимо и да се квантни производ $*$ може довести у везу са природним производом у Флоровој хомологији, који се добија на сличан начин као гранични оператор у тој теорији, с тим што се уместо (пертурбовано) холоморфних цилиндара (68) пребројавају (пертурбовано) холоморфне панталоне,

[60] Доказ: из (28) следи да су једине холоморфне сфере које реализују нулту хомологију – константе, а кап производ је „индекс пресека Поенкареових дуала".

тј. решења пертурбације једначине (68) на Римановој површи рода $g = 0$ са границом $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{S}^1)^*$.

§12. Гејџ теорије. Основни пример и мотивација гејџ теорија је електромагнетизам. Експериментална чињеница је да на честицу са наелектрисањем q која се креће брзином $\mathbf{v}$ и у тренутку t налази у положају $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ дејствује сила

$$\mathbf{L} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{73}$$

Сила $\mathbf{L}$ у овој једначини назива се *Лоренцовом силом*, векторско поље $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ *магнетним*, а $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ *електричним пољем.* Из Другог Њутновог закона и (73) следи да је трајекторија наелектрисане честице описана диференцијалном једначином

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})). \tag{74}$$

Задатак: Доказати да из ортогоналности $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{v}$ и дефиниције потенцијалног поља (8) следи да на потенцијалност поља $\mathbf{L}$ не утиче магнетно поље $\mathbf{B}$ и да је поље $\mathbf{L}$ потенцијално ако и само ако је поље $\mathbf{E}$ потенцијално.

Теорија електромагнетизма заснована је на следеће четири диференцијалне једначине. Њих је 1865. године формулисао Џ.К. Максвел, по коме су добиле име. Ово су *Максвелове једначине:*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Овде је скаларна функција ρ густина наелектрисања, а векторско поље $\mathbf{J}$ густина струје. Физичке константе c (брзина светлости у вакууму[61]), ϵ_0 и μ_0 су повезане релацијом $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Приметимо да је у Максвеловим једначинама скривена и веза између J иρ: из прве две једначине лако следи *једначина непрекидности* или *закон одржања наелектрисања*

$$\nabla \cdot \mathrm{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Ради једноставнијег записа онога што следи, изаберимо систем мерних јединица тако да је

$$c = 1, \quad \mu_0 = 1, \quad \epsilon_0 = 1.$$

Тада су Максвелове једначине

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \tag{75}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \tag{76}$$

Напомена: Прве две једначине су нехомогене, а друге две хомогене. Сем тога, приметимо да је у једначинама (76) у извесном смислу промењена улога поља $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ у односу на (75). Прецизније речено, ако на левој страни једног

[61] Константност брзине светлости је једна од полазних тачака Теорије релативности, о којој ћемо нешто више рећи касније.

пара једначина уместо $\mathbf{B}$ ставимо $\mathbf{E}$ и обрнуто добијамо, до на мултипликативну константу, леву страну у другом пару једначина.

Претпоставимо да поља $\mathbf{B}$ и $\mathbf{F}$ немају сингуларитета, тј. да су дефинисана на целом $\mathbb{R}^3$. Из векторске анализе је познато да је тада прва једначина у (76) довољан услов *соленоидности* векторског поља $\mathbf{B}$, тј. довољан услов за постојање *векторског потенцијала* $\mathbf{A}$ поља $\mathbf{B}$, тј. поља $\mathbf{A}$ таквог да је

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{77}$$

Ако ову једнакост уврстимо у другу једначину у (76) добијамо

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}.$$

То је услов потенцијалности поља $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, тј. постојања скаларне функције Φ такве да је

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi. \tag{78}$$

Из једначина (77) и (78) следи да пар $(\Phi, \mathbf{A})$ потпуно одређује $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Обрнуто није тачно: једначине (77) и (78) су инваријантне у односу на смене

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \theta, \qquad \Phi \mapsto \Phi - \frac{\partial \theta}{\partial t}. \tag{79}$$

Трансформације (79) називају се *гејџ трансформацијама у електромагнетизму.* Ако решењем Максвелове једначине сматрамо скуп парова $(\Phi, \mathbf{A})$, што је на основу (77) и (78) оправдано, јер тај пар дефинише и пар $(\mathbf{B}, \mathbf{E})$, онда можемо да кажемо да гејџ трансформације *дејствују на скупу решења* и да је скуп ефективних решења количнички простор тог дејства[62].

Посматрајмо сада Максвелове једначине у дуалној формулацији. Векторским пољима

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = E_1 \mathbf{i} + E_2 \mathbf{j} + E_3 \mathbf{k}$$

придружимо диференцијалне форме

$$B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_2 dx \wedge dy \quad \text{и} \quad E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz. \tag{80}$$

Дефинишимо диференцијалну 2–форму F на простор–времену $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ која обједињује магнетно и електрично поље на следећи начин:

$$F = B + E \wedge dt. \tag{81}$$

Диференцирањем ове форме (видети (19) и одговарајућу фусноту) добијамо

$$dF = d(B + E \wedge dt) = dB + dE \wedge dt.$$

После диференцирања форми B и E у последњем изразу и краћег рачуна закључујемо да су две хомогене Максвелове једначине (76) еквивалентне једној једначини

$$dF = 0.$$

Да бисмо записали и преостале две Максвелове једначине у сличном облику, приметимо да смо у (80) пољу $\mathbf{E}$ придружили 1–форму, а пољу $\mathbf{B}$ 2–форму, без икаквог објашњења. Могли смо да урадимо и обрнуто, тј. да им променимо

[62] Скуп решења $(\Phi, \mathbf{A})$ је у извесном смислу једноставнији од скупа решења $(\mathbf{B}, \mathbf{E})$: први је дефинисан једном скаларном и једном векторском функцијом, дакле са 4 координате, а други са 6. Међутим, први скуп, као количнички простор, може да буде тополошки сложенији.

улоге. Сетимо се напомене после једначина (75), (76), која говори о томе како та промена улога (до на мултипликативну константну) мења један пар једначина у други. Дакле, да бисмо написали и једначине (75) на језику диференцијалних форми, треба само да смислимо правило по коме B и E мењају улоге тако да споменуте мултипликативне константе увек испадну тачно оно што нам треба да бисмо добили једначине које желимо. Тај поступак обезбеђује нам *Хоџов звезда–оператор.*

Нека је $g(\cdot,\cdot)$ *Риманова (псеудо)метрика*[63] на многострукости M димензије n, тј. недегенерисана билинеарна форма на њеном тангентном раслојењу. Помоћу ње и дуалности, можемо да дефинишемо и множење 1–форми, а одатле и множење k–форми као

$$g(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k, \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^k) \stackrel{def}{=} \det[g(\theta^i, \sigma^j)].$$

Нека је $g_{ij} = g(dx_i, dx_j)$ и нека је Ω форма запремине на M сагласна са метриком g, тј. n–форма која у локалним координатама има запис

$$\Omega = \sqrt{|\det[g_{ij}]|}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Хоџов звезда оператор свакој k–форми β придружује $(n-k)$–форму $\star\beta$ по правилу

$$\alpha \wedge \star\beta = g(\alpha, \beta)\Omega. \tag{82}$$

Означимо са $\star$ Хоџов звезда–оператор на простор–времену $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ дефинисан помоћу *псеудометрике Минковског*[64]

$$g(\xi, \eta) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 - \xi_4\eta_4 \tag{83}$$

и са $\star_e$ Хоџов звезда–оператор на простору $\mathbb{R}^3$ дефинисан помоћу стандардне еуклидске метрике.

Задатак: (а) Нека је $\mathbf{A} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ векторско поље и $A = Pdx + Qdy + Rdz$ њему дуална 1–форма у $\mathbb{R}^3$. Доказати да је

$$\star_e d \star_e A = \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

(б) Нека је $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ глатка функција и

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

њен Лапласијан. Доказати да је $\Delta u = \star_e d \star_e du$.

Ако применимо $\star$ на (81) видимо[65] да је

$$\star F = \star_e E - \star_e B \wedge dt \tag{84}$$

Ако упоредимо (81) са (84) видимо да смо помоћу Хоџовог звезда–оператора остварили промену улога

$$E \leftrightarrow -\star_e B, \qquad B \leftrightarrow \star_e E,$$

---

[63]Псеудо метрика је недегенерисана симетрична билинеарна форма, не обавезно позитивно дефинитна. „Метрика Минковског” коју ћемо убрзо сусрести је пример псеудо метрике; псеудо метрику често зовемо метриком, кад нам позитивна дефинитност није значајна.

[64]Претпоставили смо да је $c = 1$, иначе бисмо имали $g(\xi, \eta) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 - c^2\xi_4\eta_4$.

[65]Нпр. тако што напишемо обе стране у (81) у координатама.

о којој смо говорили у напомени после Максвелових једначина (75), (76). Остаје још да се позабавимо нехомогеношћу, односно десном страном у (75).

Напишимо густину струје у (75) у координатама

$$\mathbf{J} = J_1\mathbf{i} + J_2\mathbf{j} + J_3\mathbf{k},$$

и дефинишимо 1–форму

$$J = J_1 dx + J_2 dy + J_3 dz - \rho dt, \tag{85}$$

где је ρ густина наелектрисања. Непосредним рачуном се проверава да је једначина (75) еквивалентна једначини

$$\star d \star F = J.$$

Тиме смо доказали следећу теорему.

Теорема: Систем Максвелових једначина (75), (76) је еквивалентан систему

$$dF = 0, \qquad \star d \star F = J, \tag{86}$$

где је форма F дефинисана са (81), а форма J са (85).

Задатак: Нека је M компактна многострукост без границе и $\Omega^k(M)$ простор диференцијалних k–форми на M.

(а) Доказати да је $\star d\star = d^*$ у односу на скаларни производ на $\Omega^*(M)$ дефинисан са

$$(\eta, \zeta) \stackrel{def}{=} \int_M \eta \wedge \star\zeta.$$

(б) Доказати да је са

$$\mathcal{H}_1 = \oplus_k \Omega^{2k}(M), \quad \mathcal{H}_2 = \oplus_k \Omega^{2k+1}(M), \quad \mathbf{Q}_1 = d + d^*, \quad \mathbf{Q}_2 = i(d - d^*)$$

дефинисана једна суперсиметрична квантна теорија за $N = 2$ (видети пример на крају §7).[66]

Претпоставимо да је у (86) $J = 0$. Тада су Максвелове једначине

$$dF = 0, \qquad d \star F = 0 \tag{87}$$

(ако је десна страна у другој једначини у (86) једнака 0, онда на левој можемо да обришемо звезду са леве стране, пошто је $\star$ изоморфизам). Једначина (87) је инваријантна у односу на трансформацију

$$F \leftrightarrow \star F$$

(која, сетимо се, мења улоге електричног и магнетног поља). Ова чињеница назива се *Абеловом S–дуалношћу* у електромагнетизму.

[66]Помоћу овог примера Е. Витен је изградио приступ Морсовој теорији који смо скицирали у §10 и који је омогућио Флорове генерализације о којима смо говорили. Наиме, из Хоџове теорије је познато да је димензија језгра *Хоџовог лапласијана* $\Delta_k = dd^* + d^*d$ на $\Omega^k(M)$ једнака димензији k–те кохомолошке групе $H^k(M)$. За Морсову функцију $f : M \to \mathbb{R}$ Витен је посматрао деформацију $d_t = e^{-ft} d e^{ft}$ оператора d и придружени Хоџов лапласијан $\Delta_k(t)$, чије језгро очигледно не зависи од t. Једноставно је видети да је хамилтонијан $H = \Delta(t)$ на $\oplus\Omega^k(M)$ пертурбација квантизације Хамилтонијана хармонијског осцилатора (53) потенцијалом који зависи од градијента функције f. Видели смо да је спектар Хамилтонијана хармонијског осцилатора могуће експлицитно израчунати; Витен је нашао начин да то искористи да би нулту сопствену вредност, која дефинише језгро Δ_k, довео у везу са Морсовим индексима критичних тачака.

Ако је F без сингуларитета (дефинисано на целом $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, онда из $dF = 0$ и Поенкареове леме[67] следи

(88) $$F = dA$$

за неку 1–форму A. Формула (88) је запис формула (77) и (78) на језику диференцијалних форми. Пошто је $d^2 = d \circ d = 0$, следи да је формула (88) инваријантна у односу на смену

(89) $$A \mapsto A + d\Psi,$$

што је дуални запис гејџ трансформација (79).

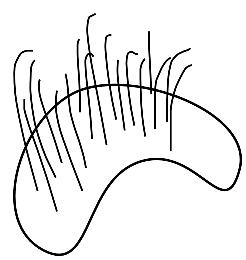
Примећујемо да је запис Максвелових једначина помоћу диференцијалних форми једноставнији од оног помоћу векторских поља. Али, то није његова једина предност. Он нам омогућава и следећу геометријску интерпретацију електромагнетизма. За њу нам је потребна и следећа дефиниција, која уопштава Декартов производ $M \times G$.

Нека је M глатка многострукост, а G матрична група[68]. Глатка многострукост P је *главно G–раслојење* над базом M ако постоје

- глатко пресликавање $\pi : P \to M$ (*пројекција*)
- глатко десно дејство $P \times G \to P$,

такви да је за свако $q \in M$ скуп $\pi^{-1}(q)$ инваријантан у односу на дејство, и да је дејство на том скупу слободно и транзитивно.

Пројекцији π је придружено пресликавање $\pi_* : TP \to TM$, слично као у (20). Њиме је у свакој тачки $p \in P$ дефинисан *вертикални простор* $V_pP \subset T_pP$. Не постоји канонски начин да дефинишемо комплемент $T_pP \ominus V_p$ или *хоризонтални простор*. Избор фамилије $H_p \subset T_pP$ која глатко зависи од p, такве да је $H_p \oplus V_p = T_pP$ назива се *конексијом*[69] на P.

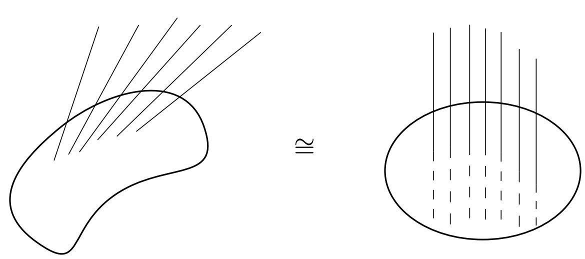


Слика 10: Раслојење

[67]„Кохомологија еуклидског простора је тривијална".

[68]Или, општије, *Лијева група*, тј. глатка многострукост која има структуру групе, такву да су множење и инверз глатке операције.

[69]Ова дефиниција конексије уопштава ону о којој је било речи у §4. Нећемо овде улазити у детаље; споменимо само да свака репрезентација групе G, тј. хомоморфизам $G \to \mathrm{Hom}(V, V)$ дефинише *векторско раслојење* $E = P \times_G V$ над M, а конексија на P индукује конексију на E. Ако је E тангентно раслојење, онда добијамо конексије из §4.



Слика 11: Векторско раслојење

Задатак: Доказати да је простор орбита $P/G \cong M$.

Фамилију хоризонталних потпростора H_p можемо да задамо и фамилијом линеарних пресликавања $A_p : T_pP \to V_p$ таквих да је $H_p = \mathrm{Ker} A_p$. Из транзитивности дејства G следи да је $V_p \cong T_eG$, где је $\mathfrak{g} = T_eG$ тангентни простор групе G у јединици, или *Лијева алгебра* групе G, означимо овај изоморфизам са

$$j : V_p \overset{\cong}{\to} \mathfrak{g}. \tag{90}$$

Дакле, конексију можемо да дефинишемо као $\mathfrak{g}$–вредносну 1–форму на P, тј. $A : TP \to \mathfrak{g}$, која има следеће особине:

- $R_g^* A = \mathrm{Ad}(g^{-1})A$, где је Ad адјунговано дејство[70] G на $\mathfrak{g}$.
- $A_p(X) = j(X)$ за $X \in V_p$, где је j изоморфизам (90).

Форма A се некад назива *формом конексије*, некад *конексијом*, а некад *гејџ потенцијалом.*

Кривина конексије A је $\mathfrak{g}$–вредносна 2–форма F на P дефинисана са

$$F_A = dA + \frac{1}{2} A \wedge A, \tag{91}$$

где је $A \wedge A$ 2–форма са вредностима у $\mathfrak{g}$ дефинисана са

$$A \wedge A\,(X,Y) \overset{def}{=} [A(X), A(Y)].$$

Израз на десној страни је *Лијева заграда*, дефинисана помоћу *комутатора векторских поља*[71]. Конексија се назива *равном* ако је $F_A = 0$.

Следећа лема нам омогућава да конексију на главном раслојењу $\pi : P \to M$ посматрамо као $\mathfrak{g}$–вредносну 2–форму на M (уместо на P):

Лема: $F_A = \pi^* \widetilde{F}_A$ за неку $\mathfrak{g}$–вредносну форму $\widetilde{F}_A$ на M.

Пошто је пројекција π канонска, форме F_A и $\widetilde{F}_A$ су једна другом једнозначно одређене, па ћемо убудуће користити исту ознаку $\widetilde{F}_A$ за обе, без страха од забуне.

Вратимо се сада на електромагнетизам. Диференцијална форма F у (81) је 2–форма са вредностима у $\mathbb{R}$. Она се може интерпретирати као форма са вредностима у Лијевој алгебри групе $U(1)$ (јер је $U(1) \cong \mathbb{S}^1$ и $T_1\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}$), која је *комутативна*, тј. $[\cdot,\cdot] \equiv 0$). Одатле следи да је у овом случају $A \wedge A = 0$, па (88) може да се интерпретира као (91) на $U(1)$–раслојењу над простор–временом $M = \mathbb{R}^4$.

Пресликавање $f : P \to P$ се назива *аутоморфизмом главних раслојења* ако за свако $q \in M$ слика $\pi^{-1}(q)$ у $\pi^{-1}(q)$ и сагласно је са дејством, тј. задовољава $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ за свако $p \in P$ и $g \in G$. Ако A конексија и f аутоморфизам, онда је и f^*A конексија. Трансформација

$$A \mapsto f^*A \tag{92}$$

назива се *гејџ трансформацијом* на главном раслојењу. Трансформација (92) уопштава (89). Из претходне леме следи да аутоморфизми, будући да остављају инваријатним скупове $\pi^{-1}(q)$, остављају инваријантном и кривину која

[70] $h \mapsto g^{-1}hg$ је дејство G на G које слика e у e; $Ad(g) : T_eG \to T_eG$ је извод тог дејства.

[71] Тангентни вектори у T_eG се помоћу левих транслација могу проширити до лево инваријантних векторских поља на G, комутатор векторских поља је добро дефинисан, а Лијева заграда је вредност тог комутатора у e.

зависи само од тачака базе. То је уопштење чињенице да трансформације (89) чувају једначину (88).

Има смисла говорити и о уопштењу електромагнетизма на $U(1)$ раслојења над базом M која има нетривијалну топологију[72]. Тада и сама раслојења могу да буду нетривијална (тј. не морају да буду изоморфна Декартовом производу). Нека је L такво раслојење. Идентитет $dF = 0$ који задовољава форма кривине назива се *Бијанкијевим идентитетом*; из њега следи да F дефинише кохомолошку класу. Може се доказати да из Гаус–Бонеове теореме следи да је

$$\left[\frac{i}{2\pi}F\right] \in H^2(M;\mathbb{Z}).$$

Кохомолошка класа $c_1(L) = [\frac{1}{2\pi}F]$ назива се *првом Черновом класом* раслојења L; испоставља се да она не зависи од F и да класификује $U(1)$–раслојења над базом M.

Општије, ако је G подгрупа групе $GL(n,\mathbb{C})$ и P G–главно раслојење над базом M са конексијом F,

$$c(P) \overset{def}{=} \left[\det\left(1 + \frac{i}{2\pi}F\right)\right] \in H^*(M;\mathbb{Z}) \tag{93}$$

назива се *тоталном Черновом класом* раслојења P. Може да се покаже да $c(P)$ не зависи од кривине F, већ само од топологије раслојења. Чернове класе се некад називају и *тополошким квантним бројевима*.

Из претходних уопштења закључујемо да се електромагнетизам може, на формалном нивоу, уопштити у гејџ теорију (или теорију конексија) на главним раслојењима. Постоји више конкретних реализација и примена овог уопштења.

Физичари Јанг и Милс су 1954. године разматрали приступ теорији атома по коме су протон и неутрон иста честица, *нуклеон*, која се појављује у два различита стања[73]. Нуклеону се придружује опсервабла *изоспин*, која има два сопствена стања, која одговарају стањима протона и неутрона. Група $SU(2)$ специјалних унитарних матрица дејствује на дводимензионом комплексном простору генерисаном тим сопственим стањима. Јанг и Милс су сугерисали да се ово унитарно дејство *глобализује*, тј. да се дозволи да оно зависи од положаја честице у простору и времену. Ова идеја је касније интерпретирана у терминима $SU(2)$–гејџ теорије над базом M димензије 4. То је, математички гледано, једно од неабелових уопштења $U(1)$–гејџ теорије електромагнетизма (за разлику од $U(1)$, група $SU(2)$ је некомутативна). Лијева алгебра групе $SU(2)$ је $\mathfrak{su}(2)$, векторски простор комплексних 2×2 матрица J које задовољавају $J + J^* = 0$.

Задатак: Извести из (93) закључак да је *друга Чернова класа* главног $SU(2)$–раслојења P једнака

$$c_2(P) = \left[\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\,(F \wedge F)\right] \in H^4(M;\mathbb{Z}),$$

где је F форма кривине.

[72] До сада смо видели довољно примера који нам показују да наша схватања простора као еуклидског сувише поједностављују и ограничавају слику о простору.

[73] Ова идеја се појављује још код Хајзенберга 1932; термин *изоспин* увео је Е. Вигнер 1937.

Једначине поља у Јанг–Милсовој теорији су сличне једначинама (87):

$$d_A F = 0, \qquad d_A \star F = 0,$$

с тим што је овде d_A коваријантни извод диференцијалних форми. Ове једначине могу да се изведу и из варијационог принципа, као екстремале *Јанг–Милсовог функционала*

$$YM(A) = \int_M \mathrm{tr}\,(F \wedge \star F), \tag{94}$$

где је tr траг матрице (F има вредности у $\mathfrak{su}(2)$). Оне екстремале функционала YM које су локални минимуми називају се *инстантонима*. Испоставља се да се инстантони могу тачно геометријски описати: то су оне конексије A чије су кривине дуалне себи у односу на Хоџову звезду, дакле такве да је

$$F_A = \star F_A. \tag{95}$$

Некада се уместо конексија чије кривине задовољавају (95) посматрају оне чије су кривине антидуалне себи, тј. такве да је

$$F_A = - \star F_A. \tag{96}$$

Овде у литератури постоји извесна недоследност у терминологији, некад се конексије чије кривине задовољавају (96) називају *анти–инстантонима*, а некад се баш оне називају инстантонима (углавном ако се у тексту не помињу оне које задовољавају (95). Међутим, ова два појма су у суштини еквивалентна – из (82) је јасно да при промени оријентације Хоџова звезда мења знак, тако да промена оријентације мења улоге инстантона и антиинстантона.

Јанг–Милсова теорија није успешно послужила за заснивање теорије нуклеона[74]. Међутим, она је одиграла веома важну улогу у нискодимензионој топологији. Из проучавања простора екстремала функционала (94) произашао је Фридманов доказ Поенкареове хипотезе за $n = 4$ који смо споменули у §10, као и резултати С. Доналдсона о четвородимензионим многострукостима публиковани 1983. Из радова Доналдсона и Фридмана произашла је и теорема о постојању *егзотичних глатких структура на* $\mathbb{R}^4$, односно постојању многострукости које су хомеоморфне, али нису дифеоморфне, четвородимензионом еуклидском простору. Занимљиво је да тај феномен у еуклидским просторима постоји само у димензији 4: за $n \neq 4$ нема егзотичних структура на $\mathbb{R}^n$ – свака глатка многострукост која је хомеоморфна еуклидском простору $\mathbb{R}^n$ за $n \neq 4$, мора да буде и дифеоморфна том простору.

Анализа коју је Доналдсон применио на студирање Јанг–Милсових инстантона слична је оној коју је касније применио Громов на студирање псеудохоломорфних кривих, и о којој смо говорили у §6. Наиме као и нелинеарне Коши–Риманове једначине, једначине (95) и (96) су *елиптичке* па су скупови њихових решења (модуло гејџ трансформације (92)) $\mathcal{M}$ многострукости коначне димензије[75].

[74]Данас се у физици сматрају успешнијим друге гејџ теорије: $SU(3)$–гејџ теорија звана *хромодинамика*, $SU(2)\times U(1)$–гејџ теорија под именом *Вејнберг–Саламов модел*, као и *Стандардни модел*, гејџ теорија која укључује све основне силе осим гравитације.

[75]Многострукост инстантнона $\mathcal{M}$ се састоји из више компоненти повезаности различитих димензија; димензија сваке компоненте се може изразити помоћу вредности Јанг–Милсовог функционала (94) у некој њеној тачки A и тополошких инваријанти (Ојлерове карактеристике $\chi(M)$ и сигнатуре $\sigma(M)$) многострукости M.

Испоставља се да се неке информације о топологији многострукости M могу прочитати из одређених компоненти многострукости $\mathcal{M}$. Нпр, за неке многострукости M један од крајева петодимензионе компоненте многострукости $\mathcal{M}$ је дифеоморфан са M (хеуристички аргумент за ово је „да се при неким лимесима инстантони деформишу у тачку на M", па је скуп тих тачака дивергенције крај $M \subset \partial\mathcal{M}$), а остали крајеви су једноставније многострукости. Са тих једноставнијих многострукости можемо да прочитамо оне инваријанте које се очувавају при кобордизмима (о кобордизмима је било речи у §11).

Јанг–Милсова теорија је отворила и многа друга интересантна питања у топологији четвородимензионих многострукости. Нека од њих су остала без одговора до средине '90их година, када су се у раду физичара Н. Сајберга и Е. Витена из 1994. о дуалности у електромагнетизму, монополима и суперсиметричној Јанг–Милсовој теорији појавиле једначине које повезују Дираков оператор, спинорска поља и конексије у $Spin^c$–геjџ теорији. Е. Витен је поставио хипотезу да се те једначине могу употребити за изучавање четвородимензионих многострукости ефикасније од Јанг–Милсових[76]. У следећих неколико година више отворених проблема нискодимензионе топологије је решено, а за неке старе резултате нађена су једноставнија решења.

Занимљива геjџ теорија је теорија *Черн–Сајмонсовог функционала.* Нека је M тродимензиона многострукост и P главно $SU(2)$–раслојење над M. Черн–Сајмонсов функционал нивоа k свакој конексији A на P придружује број

$$S(A) = \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\left(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right).$$

Варијацијом по A добија се

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} S(A+tB) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad dA + A\wedge A = 0.$$

Пошто је $F = dA + A\wedge A$ кривина конексије A, критичне тачке Черн–Сајмонсовог функционала су *равне конексије.* Флор је применио свој приступ Морсовој теорији на овај функционал и доказао да су његове градијентне трајекторије (анти)инстантони, тј. решења једначине (96) на $M\times\mathbb{R}$. Морсове хомолошке групе конструисане на овај начин називају се *инстантонском Флоровом хомологијом.* Доналдсон је доказао да кобордизми многострукости индукују хомоморфизме инстантонских Флорових хомологија, тако да је инстантонска Флорова хомологија пример тополошке квантне теорије поља у димензији $d = 3$.

§13. Релативност и геометрија Лоренцових многострукости. У §1 смо видели да су Њутнове једначине инваријантне у односу на Галилејеве трансформације. За Максвелове једначине то не важи – оне нису инваријантне у односу на (3). Међутим, из њиховог записа (86) видимо да прва једначина увек важи (Бијанкијев идентитет), а да је друга дефинисана помоћу Хоџовог

[76] Дираков оператор такође дефинише елиптичку парцијалну једначину, тако да је скуп решења Сајберг–Витенових једначина такође коначно димензиона многострукост. Али, њена својства је лакше проучавати због комутативности одговарајуће геjџ теорије, као и због неких аналитичких феномена везаних за конвергенције (тј. опис граница $\mathcal{M}$) који су у Доналдсоновој теорији сложенији.

звезда–оператора. Сам Хоџов звезда оператор (82) је дефинисан уз помоћ метрике Минковског (83), односно

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2. \tag{97}$$

Дакле, ако трансформације чувају метрику Минковског, Максвелове једначине ће бити инваријантне у односу на њих.

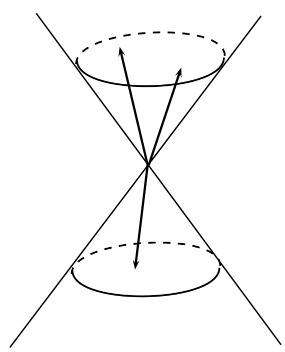
Из чињенице да честица не може да се креће брзином већом од брзине светлости, следи да тангентни вектор $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ на трајекторију честице мора да лежи у конусу

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \leq c^2,$$

што је, на основу (97), еквивалентно са

$$ds^2(Y,Y) \leq 0 \quad \text{за} \quad Y = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}, t), \tag{98}$$

при чему знак једнакости стоји само за честицу која се креће брзином светлости.



Слика 12: Брзине леже у конусу

Тачке простора Минковског можемо да сматрамо *догађајима*: „честица има координате (x, y, z, t)" означава догађај „честица се у тренутку t нашла у тачки (x, y, z)

У §2,3, а и касније, видели смо да ако фазни простор, простор–време, просторе на којима су дефинисане функције стања и сл. посматрамо као многострукости, добијамо не само општију слику, него и нове (геометријске и тополошке) увиде. Природно је, зато, посматрати следеће уопштење простора Минковског.

Дефиниција: Глатка многострукост M димензије ≥ 2 са глатком фамилијом билинеарних форми

$$g : TM \times TM \to \mathbb{R}$$

која на сваком T_qM има сигнатуру $(+, \cdots, +, -)$ назива се *Лоренцовом многострукошћу.*

Наравно, простор Минковског је пример Лоренцове многострукости димензије 4. Чињеница да многострукост има (или уопште допушта) неку структуру (нпр. Лоренцову, комплексну, симплектичку) која иначе постоји у еуклидском простору је еквивалентна чињеници да постоји избор локалних координата (видети формалну дефиницију многострукости у §1) чија смена чува ту структуру. Дакле, заснивање физике која је инваријантна у односу на изометрије метрике Минковског се уопштава (и геометризује) заснивањем физике на Лоренцовој многострукости.

При увођењу неке структуре на многострукости природно (и неопходно) је поставити питање какве многострукости уопште допуштају ту структуру[77]. За Лоренцову структуру важи следећа теорема.

Теорема: На многострукости M постоји Лоренцова структура ако и само ако на њој постоји тангентно векторско поље не–нула вектора .

Задатак: Открити која од две импликације у овој теореми је тривијална и доказати је.

Нетривијална импликација у претходној теореми следи из аргумената из алгебарске топологије, тј. елемената *теорије опструкција.*

У простору $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ време је издвојена координатна оса. Насупрот томе, на произвољној (четвородимензионој или било којој другој) Лоренцовој многострукости у општем случају, чак ни у локалним координатама, не можемо да кажемо која оса је време – та оса не мора да буде инваријантна у односу на смену координата. Дакле, дефиницијом Лоренцове многострукости време је потпуно геометризовано. Тиме смо, на известан начин, увели и оно што се обично постулира као *релативност* (или *локалност*) времена. Уопштавањем неједнакости (98) долазимо до следеће дефиниције.

Дефиниција: Кажемо да је Лоренцова многострукост *временски оријентабилна* ако на њој постоји тангентно векторско поље X, такво да је $g(X,X) < 0$. Тангентни вектор $Y_q \in T_qM$ је *временског типа* ако је $g(Y_q,Y_q) < 0$, *просторног типа* ако је $g(Y_q,Y_q) > 0$ или $Y_q = 0$ и *светлосног типа* ако је $g(Y_q,Y_q) = 0$, а $Y_q \neq 0$.

Теорема: Нека је M повезана временски оријентисана Лоренцова многострукост и $\mathcal{T}_q = \{Y_q \in T_qM \mid g(Y_q,Y_q) < 0\}M$ скуп тангентних вектора временског типа. Тада је скуп $\mathcal{T} = \bigcup_{q\in M} \mathcal{T}_q$ отворен и има тачно две компоненте повезаности.

Доказ претходне теореме у локалној карти следи из општих тополошких аргумената, а глобално из разбијања јединице. Избором једне од компоненти повезаности добијамо могућност да говоримо о *векторима оријентисаним ка будућности* као оним векторима временског типа који припадају тој компоненти; векторе временског типа из друге компоненте зовемо *векторима оријентисаним ка прошлости.*

Кажемо да је вектор *каузалан* ако је он временског или светлосног типа. Одавде следи да 0 није каузалан вектор. Крива $\gamma : (a,b) \to M$ је каузална ако је њен тангентни вектор $\dot\gamma(t)$ каузалан за свако $t \in (a,b)$.

Параметар којим је крива параметризована не треба доводити у везу са временом, као у класичној механици. Уместо тога, имамо следећу дефиницију, мотивисану чињеницом да из (97) следи да „за посматрача који мирује" ($dx = dy = dz = 0$) важи $dt^2 = -c^{-2}ds^2$. Ову формулу на случај произвољног посматрача уопштава следећа дефиниција.

---

[77]Нпр. у §5 смо рекли да Риманову структуру допушта свака многострукост, док постоје многострукости које, из тополошких разлога, не допуштају симплектичку структуру.

Дефиниција: Нека је $\gamma : (a,b) \to M$ глатка крива на Лоренцовој многострукости чији су тангентни вектори временског типа, оријентисани ка будућности. *Сопствено време* криве γ од $\gamma(a)$ до $\gamma(b)$ је величина

$$\tau = \frac{1}{c}\int_a^b \sqrt{-g\left(\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right)}\,dt. \tag{99}$$

Приметимо да говоримо о сопственом времену *криве.* Ако тачке Лоренцове многострукости (која у себи садржи и време и простор) сматрамо догађајима, онда ова дефиниција уводи (сопствено) време између догађаја $A = \gamma(a)$ и $B = \gamma(b)$ само као појам који постоји *дуж дате криве* γ. Другим речима, сопствено време између „истих догађаја” може бити различито дуж различитих кривих, два близанца која се растану (догађај A), па поново сретну (догађај B) измериће различито сопствено време између та два догађаја (што се може, а не мора, изрећи збуњујућом реченицом „један ће да остари брже од другог”).

Сопствено време је аналогија растојања на Римановој многострукости, али ту аналогију треба шватити опрезно. На пример, за Лоренцову метрику важи *наопака Коши–Шварцова неједнакост* за каузалне векторе: ако су X и Y каузални тангентни вектори, онда је

$$|g(X,Y)| \geq \|X\|\cdot\|Y\|.$$

Одатле следи да за два каузална вектора X, Y оријентисана ка будућности важи *наопака неједнакост троугла*

$$0 < \|X\| + \|Y\| \leq \|X+Y\|.$$

Кажемо да тачка $x \in M$ *хронолошки претходи* тачки $y \in M$ ако постоји глатка крива $\gamma : (a,b) \to M$ временског типа која је усмерена ка будућности, таква да је $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Задатак: Претпоставимо да x хронолошки претходи y. Користећи наопаку неједнакост троугла доказати да је

$$\inf \int_a^b \sqrt{-g\left(\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right)}\,dt = 0.$$

где је инфимум узет по глатким каузалним кривама које спајају x и y.

Претходни задатак је контраинтуитиван са тачке гледишта Риманове геометрије – нема „најкраћег растојања”. Насупрот томе, постоји

$$d(x,y) \stackrel{def}{=} \sup \int_a^b \sqrt{-g\left(\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right)}\,dt,$$

где је супремум узет по скупу глатких кривих временског типа, усмерених ка будућности, које спајају x и y. Функција d се назива *хронолошким растојањем.* Јасно је да d задовољава наопаку неједнакост троугла.

Задатак: Нека је $M = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$ Лоренцова многострукост добијена као количнички простор простора Минковског $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ у односу на $\mathbb{Z}$–дејство по последњој координати. Доказати да у њој свака тачка хронолошки претходи свакој тачки (укључујући и саму себе) и да је $d = +\infty$.

Дефиниција: *Простор–време* је повезана, оријентисана, временски оријентисана Лоренцова многострукост димензије 4.

Приметимо да простор–време не може да буде и просто повезано и компактно. Заиста, нека је M *компактно* простор–време. Пошто је, по дефиницији, M и оријентабилно, за њега важи Поенкареова дуалност:

$$H_k(M;\mathbb{Z}) \cong H^{4-k}(M;\mathbb{Z}).$$

Ако је M просто повезана многострукост, онда је $H_1(M;\mathbb{Z}) \cong 0$ и $H^1(M;\mathbb{Z}) = 0$. Из Поенкареове дуалности следи $H_3(M;\mathbb{Z}) = 0$. Пошто је $H_0(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ и $H_4(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, из хомолошке карактеризације Ојлерове карактеристике

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{4}(-1)^k \mathrm{rang}\, H_k(M;\mathbb{Z})$$

следи $\chi(M) \geq 2$. Ово је у супротности са претпоставком да је M временски оријентисана – из егзистенције тангентног векторског поља X за које је $g(X,X) < 0$ (што значи да X нигде није нула) следи $\chi(M) = 0$. На исти начин се доказује и општије тврђење: *Универзално наткривање простор–времена није компактно.*

Под *аутоморфизмима простор–времена* подразумевамо изометрије Лоренцове метрике које чувају оријентацију и временску оријентацију, и сликају векторе оријентисане ка будућности у векторе оријентисане ка будућности.

Примери: 1. Простор Минковског. Наравно, многострукост $M = \mathbb{R}^4$ са метриком (97) је први пример простор–времена. Оријентација на M је стандардна, задата формом $dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$, а временска оријентација јединичним вектором дуж t–осе. Тангентни вектор X временског типа у простору Минковског је оријентисан ка будућности ако је $dt(X) > 0$.

Аутоморфизми простора Минковског су елементи *Поенкареове групе*

$$O(3,1) \times_\rho \mathbb{R}^4$$

– семидиректног производа[78] групе $O(3,1)$ матрица формата 4×4 које чувају форму (97) и групе $\mathbb{R}^4$ у односу на очигледну репрезентацију

$$\rho : O(3,1) \to \mathrm{Aut}\,(\mathbb{R}^4).$$

Група $O(3,1)$ назива се *Лоренцовом групом*, а њена подгрупа $SO(3,1)$ матрица која чувају форму (97) и оријентацију *специјалном Лоренцовом групом.*

Ове групе могу да се посматрају и на следећи начин. Придружимо догађају $(x,y,z,t) \in M$ тачку $[x:y:z:t] \in \mathbb{R}P^3$ у тродимензионом пројективном простору. Хомогени полином

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

дефинише површ другог реда $\Sigma = \{[x:y:z:t] \mid Q(x,y,z,t) = 0\}$ у $\mathbb{R}P^3$. Полином Q је инваријантан у односу на композиције са матрицама из $O(3,1)$, будући да оне чувају форму (97). Приметимо да је $t \neq 0$ на Σ, па прелаз на нехомогене координате $(x/t, y/t, z/t)$, даје тачну слику о површи Σ, која је у тим координатама задата једначином $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, што је јединична сфера. Одатле следи да су елементи групе $O(3,1)$ пројективне трансформације

[78]Нека су G и H групе и $\rho : H \to \mathrm{Aut}\,(G)$ хомоморфизам група. Скуп свих парова $\{(g,h) \in G \times H\}$ са производом дефинисаним са $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2) := (\rho(h_1)(g_2), h_1h_2)$ је група која се назива *семидиректним производом* група G и H у односу на ρ и означава $G \times_\rho H$. На пример, група директних изометријских трансформација равни је семидиректан производ групе транслација и групе ротација.

које чувају јединичну сферу $\Sigma \subset \mathbb{R}P^3$. Из тополошких разлога, оне ће чувати и унутрашњост сфере, тродимензиону лопту $\mathbb{B}^3$. Будући да се Q не мења множењем са -1, и да је унутрашњост лопте $\mathbb{B}^3$ модел геометрије Лобачевског у коме се изометријске трансформације описују као пројективне трансформације које чувају сферу, следи да је група

$$PO(3,1) \stackrel{def}{=} O(3,1)/\{\pm 1\}$$

група изометријских трансформација тродимензионог простора Лобачевског. Слично, група $PSO(3,1) := SO(3,1)/\{\pm 1\}$ је група директних изометријских трансформација простора Лобачевског.

Пример Лоренцове трансформације $(x, y, z, t) = \phi(x', y', z', t')$ у координатама је

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \gamma(v)(z' + vt'), \quad t = \gamma(v)\left(t' + \frac{v}{c^2} z'\right), \tag{100}$$

где је v константа и $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Напоменимо да смо до ових трансформација дошли само на основу математичке симетрије коју смо постулирали као захтев инваријантности Лоренцове метрике. Другим речима, (100) у овом тренутку представља само пример трансформација које задовољавају ту симетрију. Да бисмо дали физичку интерпретацију овим трансформацијама (специјално, „константи v"), пођимо од чињенце да Лоренцове трансформације чувају форму (97):

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c^2 (dt')^2.$$

Одатле дељењем са dt и коришћењем (100) закључујемо да је $v = \|\dot{\mathbf{r}}\|$ интензитет вектора брзине (у Њутновом смислу) којом се један координатни систем креће у односу на други.

Приметимо да се координата t („Њутново време") у (100) трансформише у t' по правилу које укључује и просторну координату z. То значи да у теорији која је инваријантна у односу на Лоренцове трансформације време није дефинисано као глобални објекат, што и оправдава нашу жељу да простор–време посматрамо као многострукост, без глобалног одвајања времена као посебне координате. Дефиниција сопственог времена (99) у простору Минковског може да се напише и као

$$d\tau = \sqrt{-c^{-2} ds^2}, \tag{101}$$

где је ds^2 дато са (97). Из (101) и (99) добијамо

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - c^{-2} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|^2,$$

што, због раније изведене релације $v = \|\dot{\mathbf{r}}\|$ даје

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma(v)}.$$

Задатак: Нека је $\pi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $\pi(x, y, z, t) = t$ пројекција на k–ту координату. Доказати да постоји Лоренцова трансформација ϕ таква да је

(а) $(\pi_4 \circ \phi)^{-1}(c) \neq \pi_4^{-1}(c)$ за неко c,

(б) $\phi^* d\pi_4(\mathbf{t}) > d\pi_4(\mathbf{t})$, где је $\mathbf{t} = (0, 0, 0, 1)$ јединични вектор дуж t–осе усмерен ка будућности, (в) $|\phi^* d\pi_1(\mathbf{i})| > |d\pi_1(\mathbf{i})|$, где је $\mathbf{i}$ јединични вектор дуж x–осе.

Ова својства се у популарним текстовима о Теорији релативности називају релативношћу истовремености, контракцијом дужине и продужењем времена. Које од својстава (а), (б), (в) одговара ком опису?

Вратимо се сада електромагентизму. Почели смо да разматрамо Лоренцове трансформације и метрику Минковског да бисмо обезбедили инваријантност Максвелових једначина. Међутим, Други Њутнов закон није инваријантан у односу на Лоренцове трансформације, а тиме ни из њега изведедена једначина (74) која описује кретање у електромагнетном пољу. Да бисмо добили конзистентну инваријантну теорију, требало би да преформулишемо Њутнову једначину $F = ma$. Постоји више начина да се приступи том проблему. Ми смо у §3 и §4 видели предности варијационог приступа класичној механици, па ћемо и овде на тај начин да приступимо проблему. У §4 смо видели да се Први Њутнов закон уопштава на тврђење да се слободна честица креће по геодезијским линијама Риманове метрике, тј. по екстремалама функционала дужине (12). Узмимо то као полазну тачку релативистичке механике – функционал дужине у простору Минковског је (99), али његове екстремале су исте као и екстремале функционала

$$S(\gamma) = \lambda \int_\gamma ds,$$

где је $ds = \sqrt{-ds^2}$, а ds^2 дато са (97), за константу λ коју бисмо волели да изаберемо тако да се овај варијациони проблем своди на варијациони проблем из §4 кад $c \to +\infty$[79]. У том циљу, напишимо S, по угледу на (5), у облику интеграла по t:

$$S(\gamma) = \int_\gamma L\, dt.$$

Из формуле Лоренцових трансформација следи да је

$$L = -\lambda c\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Међутим, овај израз тежи ка $\pm\infty$ кад $c \to +\infty$, за свако $\lambda \neq 0$. Али, екстремале функционала S су исте као и екстремале функционала $\int_\gamma (L + mc^2)\, dt$, јер је извод константе 0. Зато можемо да тражимо лагранжијан у облику

$$L = -\lambda c\sqrt{1 - v^2/c^2} + mc^2.$$

Да би, кад $c \to +\infty$, овај израз тежио класичном лагранжијану слободне честице $L = mv^2/2$, треба изабрати $\lambda = mc$. Тако добијамо релативистички лагранжијан

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + mc^2. \tag{102}$$

Одатле, и из дефиниције импулса у (16) добијамо израз за релативистички импулс

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{103}$$

[79] У истом смислу у ком $\hbar \to 0$ у §7.

Задатак: По угледу на изразе $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ из Њутнове механике у еуклидском простору, можемо у простору Минковског да дефинишемо *четвородимензиону брзину* и *четвородимензиони импулс* као

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \quad \text{и} \quad m\frac{d\mathbf{q}}{d\tau}, \tag{104}$$

где је $\mathbf{q} : (a, b) \to \mathbb{R}^4$ трајекторија честице у простор–времену, а τ сопствено време.

(а) Каква је веза између овако дефинисаног импулса и (103)?

(б) Дати инваријантну дефиницију четвородимензионог импулса помоћу функционала

$$S(\gamma) = -mc\int_\gamma ds = mc\int_\gamma \frac{ds^2}{ds}$$

по угледу на (16), која ће бити сагласна са (104).

Сада можемо да реформулишемо Други Њутнов закон у инваријантном облику:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Одатле следи да једначина (74) има релативистички облик

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})),$$

где је $\mathbf{p}$ дефинисано са (103).

Задатак: Извести из (13) да је релативистички хамилтонијан (укупна енергија) слободне честице

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

одакле следи чувена формула $E = mc^2$ за честицу која мирује.

2. Ајнштајн–де Ситерово простор–време. Нека је $M = \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$ и нека су

$$\pi_1 : M \to \mathbb{R}^3, \qquad \pi_2 : M \to (0, +\infty)$$

пројекције. Нека је g_0 еуклидска метрика у $\mathbb{R}^3$. Тада је

$$g \stackrel{def}{=} \pi_2^{4/3}\pi_1^* g_0 - d\pi_2 \otimes d\pi_2$$

Лоренцова метрика[80] на M. Форма $\pi_1^*(dx \wedge dy \wedge dz) \wedge \pi_2^* dt$ дефинише оријентацију на M, а вектор $\mathbf{t}$ дефинисан са $(\pi_1)_*\mathbf{t} = 0$ и $(\pi_2)_*(\mathbf{t}) = 1$ временску оријентацију. Тиме је дефинисано Ајнштајн–де Ситерово простор–време.

3. Фридман–Робертсон–Вокерово простор–време. Ајнштајн–де Ситерово простор–време је специјални случај општијег, Фридман–Робертсон–Вокеровог простор–времена, у коме је Лоренцова метрика дата са

$$ds^2 = a(t)d\sigma^2 - dt^2,$$

где је $d\sigma^2$ метрика у $\mathbb{R}^3$. Овај модел, као и претходни, полази од претпоставке да просторне компоненте метрике могу да зависе од времена и послужио је као космолошки модел теорија великог праска (Big Bang) и ширења Свемира (за чије формулације је потребно претпоставити зависност метрике од времена,

[80] Запис метрике g у координатама је $ds^2 = t^{3/4}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$.

нпр. велики прасак може да се формулише као „$\lim_{t\to-\infty} g^t = 0$”, ширење Свемира као „$g^t(X,X)$ је растуће по t”).

4. Крускалово простор–време. Нека је $\mathbb{S}^2$ јединична сфера,

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid xy < 1\}$$

и $M = P \times \mathbb{S}^2$. Посматрајмо пројекције

$$\pi_1 : M \to P, \quad \pi_2 : M \to \mathbb{S}^2 \quad \text{и} \quad p_1, p_2 : P \to \mathbb{R}$$

(p_i су координатне пројекције у $\mathbb{R}^2$). Нека је $\mu > 0$ дата константа[81] и нека је $r : M \to (0,+\infty)$ глатка сурјекција, таква да је

$$(r-2\mu)e^{\frac{r}{2\mu}} = -2\mu(p_1\circ\pi_1)(p_2\circ\pi_1).$$

Задатак: Доказати да функција r постоји и да је јединствена.

Нека је

$$g \overset{def}{=} -\frac{16\mu^3}{r}e^{-\frac{r}{\mu}}[d(p_1\circ\pi_1)\otimes d(p_2\circ\pi_1) + d(p_2\circ\pi_1)\otimes d(p_1\circ\pi_1)] + r^2\pi_2^* g_0,$$

где је g_0 стандардна метрика на $\mathbb{S}^2$, индукована еуклидском метриком из $\mathbb{R}^3$. Из својстава функције r следи да је g Лоренцова метрика; њоме је дефинисано Крускалово простор–време.

5. Шварцшилдово простор–време. Нека је $\mathbb{S}^2$ јединична сфера са метриком g_0 наслеђеном из $\mathbb{R}^3$ и стандардном формом површине (односно формом оријентације, или симплектичком формом) $\Omega = zdx\wedge dy - xdy\wedge dz + ydz\wedge dx$, и нека је

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \in (0,2\mu)\cup(2\mu,+\infty)\}.$$

Нека је $M = A\times\mathbb{S}^2$ и нека су

$$\pi_1 : M \to A, \quad \pi_2 : M \to \mathbb{S}^2 \quad \text{и} \quad p_1, p_2 : A \to \mathbb{R}$$

пројекције. Дефинишимо пресликавања

$$r \overset{def}{=} p_1\circ\pi_1 : M \to \mathbb{R} \quad \text{и} \quad t \overset{def}{=} p_2\circ\pi_1 : M \to \mathbb{R}.$$

Задатак: Доказати да је $(1-2\mu/r)$ глатка функција која слика M на $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

Нека је $N = r^{-1}(2\mu,+\infty)$. Дефинишимо Лоренцову метрику на N са

$$g = (1-2\mu/r)^{-1}dr\otimes dr + r^2\pi_2^* g_0 - (1-2\mu/r)dt\otimes dt.$$

Дефинишимо векторска поља $\mathbf{t}$ и $\mathbf{r}$ на N са

$$(\pi_2)_*(\mathbf{t}) = 0 = (\pi_2)_*(\mathbf{r}), \quad (\pi_1)_*(\mathbf{t}) = \mathbf{i}, \quad (\pi_1)_*(\mathbf{r}) = \mathbf{j}.$$

Нека је многострукост N временски оријентисана помоћу $\mathbf{t}$ и оријентисана помоћу $dr\wedge\pi_2^*\Omega\wedge dt$. Тако N постаје простор–време, које се назива Шварцшилдовим.

6. Геделово простор–време. У овом моделу Лоренцова псеудо метрика је дата са

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 - \frac{1}{2}e^{2\sqrt{2}\omega x}dy^2 + dz^2 - 2e^{\sqrt{2}\omega x}dtdy.$$

[81] Крускалово простор–време служи као модел простора око великих сферно симетричних црних рупа, звезда и сл; μ је маса тог тела.

Геделово простор–време је космолошки модел Свемира који ротира угаоном брзином ω. Једна занимљивост у овом моделу је да у њему постоје затворене криве временског типа, тј. да је у њему могуће путовање времепловом.

Ово су само неки од модела простор–времена, конструисани за потребе одговора на конкретна питања. Кретање у сваком од тих модела можемо да опишемо нпр. помоћу Лагранжевог формализама из §4 (прилагођеног ситуацији у којој метрика није Риманова већ Лоренцова; видети (102) за модификацију лагранжијана у моделу Минковског) или, дуално, Хамилтоновим формализмом оствареним Лежандровом трансформацијом (видети формулу (103) и задатак иза ње). Наравно, тај поступак зависи од метрике, уз помоћ које је дефинисан лагранжијан.

Већ у случају електромагнетизма смо видели да је избор метрике могуће направити на основу присутних физичких поља (у том случају $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$). Тај избор нас је довео до модела простор–времена Минковског, који је задовољавајући модел за електродинамику. Међутим, овај модел не укључује гравитацију.

У општој теорији релативности, која укључује гравитацију, физички параметри поља обједињени су у тензор[82] T (као што су у електромагнетизму $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ обједињени у 2–форму F, видети (81)). Лоренцова метрика која моделује простор–време је решење *Ајнштајнових једначина*

$$\mathrm{Ric} - \frac{s}{2}g + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4}T. \tag{105}$$

Сви сабирци у овој једначини (које ћемо убрзо дефинисати) су вишедимензиони [83], тако да је она систем од 10 нелинеарних парцијалних једначина, који је углавном немогуће решити[84].

На десној страни једначине (105) T означава тензор који је дефинисан физичким пољем, G је *Њутнова гравитациона константа* и c је брзина светлости. На левој страни Λ означава *космолошку константу*[85], а g Лоренцову метрику (тј. непознату једначине). Непозната g се у једначини појављује и експлицитно, али и имплицитно, у оквиру преостала два појма на десној страни, s и Ric. Да бисмо њих дефинисали, вратимо се појму коваријантног извода и Леви–Чивита конексије. Ове појмове смо дефинисали у §4. Он има својства (10) и, осим њих, задовољава *Лајбницово правило*

$$Y_p\langle X^1, X^2\rangle = \langle \nabla_{Y_p} X^1, X^2\rangle + \langle X^1, \nabla_{Y_p} X^2\rangle, \tag{106}$$

---

[82] Односно пресликавање $T : TM \times TM \to \mathbb{R}$ које је за свако $x \in M$ билинеарно на $T_xM \times T_xM$. Општа дефиниција тензора: пресликавање $(TM)^p \times (T^*M)^q \to \mathbb{R}$ које је за свако $x \in M$ $(p+q)$–линеарно на $(T_xM)^p \times (T_x^*M)^q$ се назива *тензором типа* (p,q). Дакле, наш тензор T је типа $(2,0)$.

[83] Тачније, ради се о симетричним 4×4 матрицама; због симетричности оне су одређене са 10 параметара.

[84] Као, усталом, и већину диференцијалних једначина. Упркос томе, диференцијалне једначине, укључујући и Ајнштајнове, имају богату теорију; сетимо се да смо на почетку овог памфлета говорили о начинима да приђемо једначинама које не умемо да решимо.

[85] Некад се сабирак Λg пребаци на десну страну, па се једначина (105) појављује у облику $\mathrm{Ric} - \frac{s}{2}g = \frac{8\pi G}{c^4}T$ где *ново* T на десној страни укључује у себе и Λg. Космолошка константа се некад уопштава хипотетичким концептом *тамне енергије*, који циља на објашњење феномена убрзаног ширења Свемира. Сматра се да је Свемир ушао у садашњу еру у којој доминира тамна енергија пре неколико милијарди година. Тамна енергија производи феномен супротан гравитацији, *гравитационо одбијање*.

где је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Риманова метрика, и има својство *симетричности*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]. \tag{107}$$

Испоставља се да је на свакој (псеудо) Римановој многострукости једначинама (10), (106) и (107) коваријантни извод једнозначно одређен. Он се назива Леви–Чивитиним коваријантним изводом или Леви–Чивитином конексијом[86], и то је једна њена инваријантна (независна од амбијента) дефиниција, о чему смо говорили у једној од фуснота приликом њене дефиниције у §4.

Ако на многострукости имамо конексију, можемо да дефинишемо *кривину* као пресликавање које тангентним векторским пољима X, Y, Z придружује поље

$$R(X,Y,)Z \overset{def}{=} \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

или, краће написано,

$$R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X,\nabla_Y].$$

Ричијев тензор Ric придружује пару векторских поља X траг линеарног пресликавања $\frac{1}{n-1}R(X,\cdot)Y$, где је $n=\dim M$:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) \overset{def}{=} \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\,[Z\mapsto R(X,Z)X].$$

Испоставља се[87] да Ричијев тензор у тачки $q\in M$ зависи само од вредности поља X, Y, Z у q. Остаје још да дефинишемо скаларну функцију s на левој страни у (105). То је *скаларна кривина*, која се дефинише као

$$s(q) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}(E_k,E_k),$$

за $q\in M$ и неку ортонормирану базу $\{E_k\}$ тангентног простора T_qM. Дефиниција Ric и s зависи од избора конексије. Пошто овде радимо са Леви–Чивита конексијом, која је једнозначно одређена метриком, Ric и s зависиће од Лоренцове метрике g, што систему парцијалних једначина (105) даје нелинеарни карактер.

Тако теорија Лоренцових многострукости описује гравитацију помоћу кривине. Општа теорија релативности, као геометрија Лоренцових многострукости, укључује гравитацију и електромагнетизам, али не и квантну физику – једначине (105) су чисто геометријске природе, а видели смо да је квантизација прилично радикалан раскид са геометријом простора и његова алгебраизација (иако се геометрија и топологија у њој појављују у другом облику). Са друге стране, Специјална теорија релативности (специјални случај *равне* Лоренцове геометрије – простор Минковског) допушта могућност квантизације, али је у њој кривина тривијална, што значи да нема гравитације.

§14. Квантизација и(ли) релативност. У §5 смо показали како се, помоћу Лежандрове трансформације, са Лагранжеве механике прелази на Хамилтонову, а у §7 како се са Хамилтоновог формализма прелази на квантизацију

[86]Формално говорећи, конексија (правило паралелног преноса или пројекције) и коваријантни извод (правило диференцирања) су различите ствари, али једна од њих једнозначно одређује другу.

[87]Појам *тензора* се и користи само за такве објекте, видети нпр. до Кармову књигу „Риманова геометрија”.

класичног механичког система. Применимо сада тај поступак на електромагнетизам у простору Минковског.

Пре свега, треба да формулишемо Лагранжев приступ електромагнетизму. За то ћемо искористити чињеницу да се Максвелове једначине могу схватити као критичне тачке функционала

$$S(A) = -\int_M \operatorname{tr}(F \wedge \star F), \tag{108}$$

при чему претпостављамо да је носач електромагнетног поља садржан у ограниченој области M простора Минковског (видети Јанг–Милсов функционал (94) и дискусију око њега). Овде је, као што смо видели у §12, A конексија на тривијалном $U(1)$ раслојењу над простором Минковског, а F њена кривина.

У класичном случају разматраном у §12 смо имали ту слободу да изаберемо кривину или конексију као основни објекат, пошто оба дефинишу електромагнетно поље (конексија је потенцијал, а кривина само поље; видети дискусију иза формуле (79)). Међутим, експерименти у квантној физици показују да у квантној електродинамици можемо да региструјемо присуство потенцијала и без поља[88], тако да ту морамо као фундаментални објекат да узмемо конексију A.

Ако интеграл (108) напишемо као поновљени интеграл (применом Фубинијеве теореме) по t и (x, y, z) и изразимо кривину преко конексије, а конексију преко векторског поља $(\Phi, \mathbf{A})$ као у §12 (Φ је скаларни потенцијал електричног, а $\mathbf{A}$ векторски потенцијал магнетног поља, добијамо израз

$$S(\mathbf{A}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}})\, dt, \tag{109}$$

где је

$$L(\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}) = \int_{\mathbf{R}^3} \left[\left(\nabla\Phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)^2 - \left(\nabla \times \mathbf{A} \right)^2 \right] dxdydz. \tag{110}$$

Приметимо да Φ, које можемо да изаберемо произвољно, не сматрамо променљивом функције L. Из овакве варијационе формулације Максвелових једначина закључујемо да њих можемо да посматрамо као Лагранжеву механику на бесконачно димензионом конфигурационом простору (тј. базној многострукости у терминима §4) који се састоји од векторских поља $\mathbf{A}$ у $\mathbb{R}^3$, са лагранжијаном (110) и функционалом дејства (109). Ако сада израчунамо импулс по аналогији са (16), добијамо

$$\frac{dL}{d\dot{\mathbf{A}}} = \dot{\mathbf{A}} - \nabla\Phi = \mathbf{E}$$

(последња једнакост је еквивалентна са (78)). На основу (13), хамилтонијан овог система је

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + 2\Phi\, \nabla \cdot \mathbf{E})\, dxdydz. \tag{111}$$

---

[88]Ахаронов–Бомов експеримент, теоријски замишљен 1948. и експериментално потврђен 1986, омогућава да региструјемо промену таласне функције наелектрисане честице која обилази неконтрактибилан пут у области у којој је $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$, али $\mathbf{A} \neq 0$. Физичари овај феномен зову *интеракцијом електромагнетног потенцијала и комплексне фазе таласне функције*, а математичари *монодромијом главног раслојења.*

Дакле, пошли смо од потенцијала и добили електрично поље $\mathbf{E}$ као *импулс* у хамилтоновој формулацији Максвелове теорије. *Дефинишимо* сада векторско поље

$$\mathbf{B} \stackrel{def}{=} \nabla \times \mathbf{A}.$$

Задатак: Доказати да овако дефинисана поља $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ задовољавају све Максвелове једначине[89] сем $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

Да бисмо *све* Максвелове једначине добили из Хамилтоновог формализма, једначину $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, тј. *Гаусов закон*, морамо посебно да постулирамо. То значи да ћ нам фазни простор бити потпростор котангентног раслојења простора векторских поља у $\mathbb{R}^3$, дефинисан једначином $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Експлицитније, фазни простор је (бар локално) простор парова положај–импулс. У нашем случају то је простор парова $(\mathbf{A}, \mathbf{E})$, *модуло степен гејџ слободе.* Ово последње значи да $\mathbf{A}$ сматрамо еквивалентним са $\mathbf{A} + \nabla V$, а да $\mathbf{E}$ задовољава Гаусов закон.

Квантизација овог система подразумева одређивање оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widehat{\mathbf{E}}$ који ће дејствовати на простору функција стања[90] $\Psi(\mathbf{A})$. То радимо на начин аналоган разматраном у §7 (импулсу одговара диференцирање, а положају множење независном промењљивом):

$$\widehat{E_k}(x)\Psi(\mathbf{A}) = -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial A_k(x)}(\mathbf{A}), \qquad \widehat{A_k}(x)\Psi(\mathbf{A}) = A_k(x)\Psi(\mathbf{A}),$$

где је $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ и $x \in \mathbb{R}^3$. Затим квантизујемо хамилтонијан (111).

Да бисмо једнозначно дефинисали ову квантизацију, морамо да посматрамо базни простор модуло гејџ трансформације,[91] а да на вертикалним просторима (у којима живе „импулси” $\mathbf{E}$) дамо смисао Гаусовом закону (који за операторе нема смисла). Први проблем решавамо тако што или посматрамо простор векторских поља модуло гејџ трансформације, или фиксирамо нпр. $A_3 = 0$, а други тако што квантни Гаусов закон интерпретирамо као

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}(x) \mid \Psi\rangle = 0.$$

за сваку таласну функцију Ψ.

Укажимо на крају само на два (од многих) проблема који се јављају ако покушамо да процес квантизације електромагнетног поља применимо на гравитационо поље (тј. метрику којом се оно описује). Прво, да бисмо уопште дошли до Хамилтоновог формализма, било је потребно да напишемо функционал дејства у облику (109) и одатле прочитамо лагранжијан. Да бисмо то урадили, издвојили смо посебно t–осу и применили Фубинијеву теорему. Тако нешто не можемо да урадимо на општој Лоренцовој многострукости, где је време неодвојиво од простора. Могуће је покушати са *теоријом фолијација*,

[89]Ради једноставности, овде радимо са $\mathbf{J} = 0$ и $\rho = 0$

[90]Да би се функције стања у овом случају интерпретирале као „густине вероватноћа” потребно је да прихватимо интеграл по бесконачно димензионом простору, сличан оном из §9, као хеуристички модел.

[91]То што гејџ трансформације остављају инваријантном класичну теорију не значи да ће остављати инваријантном и квантизацију. Зато у класичној теорији можемо да их игноришемо, али при квантизацији морамо на њих да обратимо пажњу.

али то даје компликовану и искључиво локалну слику. Друго, приликом квантизације електромагнетног поља посматрали смо базну многострукост модуло гејџ трансформације. Аналогно бисмо морали да поступимо и у гравитацији. Међутим, овде је могуће да гејџ трансформација буде „транслација кроз време”. Преласком на количнички простор изгубили бисмо време, тј. добили бисмо опис „Свемира у коме се ништа не дешава”.

§15. Закључак. 1900. године Давид Хилберт је поставио 23 проблема која би, по његовом мишљењу, требало да буду решена у XX веку. Шести Хилбертов проблем био је проблем аксиоматског заснивања физике. Данас, у XXI веку, тај проблем је још увек отворен. Пројекат геометризације физике, у коме су учествовали многи велики математичари и физичари прошлог и овог века, је један од могућих путева ка његовом решењу. Ипак, још увек није конструисан простор који би на задовољавајући начин послужио као модел за све физичке теорије.

Литература.

(1) R. Abraham, J.E. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd ed, Addison–Wesley 1978.
(2) V.I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer–Verlag 1988.
(3) V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer–Verlag 1978.
(4) A. Ashtekar, T.A. Schilling, Geometric formulation of Quantum Mechanics, у зборнику On Einstein's Path, A. Harvey (ed), Springer–Verlag 1998.
(5) M.F. Atiyah, The Geometry and Physics of Knots, Cambridge University Press 1990.
(6) M.F. Atiyah, Topological quantum field theories, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris 68, 175–186, 1989.
(7) S. Bates, A Weinstein, Lectures on the Geometry of Quantization, American Mathematical Society and Berkeley Center for Pure and Applied Mathematics, 1997.
(8) J. Beem, P. Erlich, Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker Inc. 1981.
(9) R. Bott, L. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer–Verlag, 1982.
(10) B.H. Bransden, C.J. Joachain, Introduction to Quantum Mechanics, Longman 1989.
(11) M.P. do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser 1992.
(12) J. Conway, P. Doyle, J. Gilman, W. Thurston, Geometry and the Imagination, Workshop at the Geometry Center in Minneapolis, 1991.
(13) J. Dieudonné, A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960, Birkhäuser 1998.
(14) S. Donaldson, P. Kronheimer, The Geometry of Four–Manifolds, Oxford Science Publications, 1990.
(15) A. Floer, An instanton invariant for 3–manifolds, Communications in Mathematical Physics, 118, 215–240, 1988.

(16) A. Floer, Witten's complex and infinite dimensional Morse theory, Journal of Differential Geometry, 30, 207–221, 1988.
(17) D.S. Freed, K.K. Uhlenbeck, Instantons and Four–Manifolds, Springer–Verlag 1984.
(18) D.S. Freed, K.K. Uhlenbeck (eds), Geometry and Quantum Field Theory, American Mathematical Society & Institute for Advanced Study 1995.
(19) V. Guillemin, V. Pollack, Differential Topology, Prentice-Hall 1974.
(20) J. Glimm, A. Jaffe, Quantum Physics – A Functional Integral Point of View –, 2nd ed, Springer 1987.
(21) H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison–Wesley 1980.
(22) M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, Inventiones Mathematicae, 82, 307–347, 1985.
(23) S. Hawking, G.F.R. Ellis, The Large Scale Structure od Spacetime, Cambridge University Press 1973.
(24) H. Hofer, E. Zendher, Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics, Birkhäuser 1994.
(25) J. Hurtubise, F. Lalonde (eds), Gauge Theory and Symplectic Geometry, Kluwer 1997.
(26) J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2nd ed, Willey 1975.
(27) S. Kobayashi, K. Nomizu, The Foundations of Differential Geometry I & II, Willey 1963.
(28) D. McDuff, D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, 2nd ed, Oxford Science Publications 1998.
(29) D. McDuff, D. Salamon, J–Holomorphic Curves and Quantum Cohomology, American Mathematical Society 1994.
(30) J. Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, 1963.
(31) J. Milnor, Lectures on the H–Cobordism Theorem, Princeton University Press 1965.
(32) J. Milnor, J. D. Stasheff, Characteristic Classes, Princeton University Press 1974.
(33) J.W. Morgan, The Seiberg–Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four–Manifolds, Princeton University Press 1996.
(34) D.R. Morrison, Mathematical aspects of Mirror Symmetry, у зборнику Complex Algebraic Geometry, J. Kollar (ed), American Mathematical Society & Institute for Advanced Study 1997.
(35) W. Rudin, Functional Analysis, McGraw Hill 1973.
(36) W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw Hill 1986.
(37) R.K. Sachs, H. Wu, General relativity and cosmology, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 83, No. 6, 1977.
(38) I.R. Shafarevich, Basic Notions of Algebra, Springer–Verlag 1997.
(39) R.W. Sharpe, Differential Geometry – Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program –, Springer–Verlag 1996.
(40) Tomasova matematička biblija – veština računanja –, GK Beograd 2007.
(41) D. Wallace, The quantization of gravity – an introduction, preprint 2000.
(42) E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, J. Diff. Geom 17, 661–692, 1982.
(43) Шта је тамни ток, Политикин Забавник 3086, 8–9, 1. IV 2011.