**Одабрана поглавља механике 2009.** **Шести домаћи задатак**

(1) Скрипта *Мини курс о симплектичким многострукостима*,

http : //poincare.matf.bg.ac.rs/ ∼ milinko/skripta/simplekticke.pdf

задаци 90–100.

(2) Доказати да је дејство Лијеве групе $SO(3)$ (ротације 3–димензионог еуклидског простора) на сфери $\mathbb{S}^2$ симплектичко. Да ли је оно Хамилтоново? Ако јесте, наћи његове Хамилтонијане, ако није, доказати да није.

(3) Наћи све холоморфне симплектоморфизме простора $\mathbb{C}^n$ (тј. наћи све дифеоморфизме простора $\mathbb{C}^n$ који чувају комплексну структуру и симплектичку форму).

(4) Нека су $X, Y : M \to TM$ векторска поља на компактној многострукости $M$ и $\phi_t$, $\psi_t$ њима генерисане једнопараметарске групе дифеоморфизама. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:
- $\psi_t \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi_t$ за свако $t$;
- $[X, Y] = 0$;
- $\psi_t^* X = X$.

Доказати да је, ако је неки (тј. сваки) од ових услова испуњен, дифеоморфизам $\psi_t \circ \phi_t$ генерисан векторским пољем $X + Y$.

(5) Нека су $\psi_t^H$, $\psi_t^K$ Хамилтонови дифеоморфизми на симплектичкој многострукости $P$ генерисани Хамилтоновим функцијама $H, K : P \to \mathbb{R}$ са компактним носачем. Доказати да је $\psi_t^H \circ \psi_t^K = \psi_t^K \circ \psi_t^H$ за свако $t$ ако и само ако је $\{H, K\} = 0$.

(6) Нека су $H(p, q) = p$, $K(p, q) = q$ Хамилтонијани на $\mathbb{R}^2$ и $\psi_t^H$, $\psi_t^K$ њима генерисани Хамилтонови дифеоморфизми. Израчунати $\{H, K\}$. Да ли је $\psi_t^H \circ \psi_t^K = \psi_t^K \circ \psi_t^H$ за свако $t$? Упоредити овај задатак са претходним.

(7) Нека је $(P, \omega)$ тачна просто повезана симплектичка многострукост и нека је $\theta$ примитивна форма симплектичке форме (тј. $\omega = d\theta$). Нека је $\psi : P \to P$ Хамилтонов дифеоморфизам са компактним носачем и нека је $H_t$ Хамилтонијан са компактним носачем који генерише $\psi$, тј. такав да је њиме дефинисан пут Хамилтонових дифеоморфизама $\psi_t^H$ такав да је $\psi = \psi_1^H$.

(а) Нека је $p \in P$. Доказати да вредност функционала дејства

$$\mathcal{A}_H(\gamma) := \int_0^1 \big(\theta(\dot\gamma(t)) - H_t(\gamma(t))\big)\, dt \qquad (\spadesuit)$$

дуж криве $\gamma(t) := \psi_t^H(p)$ не зависи од Хамилтонијана $H$ који генерише $\psi$.

(б) Ако је $p$ фиксна тачка дифеоморфизма $\psi$, доказати да вредност функционала дејства ($\spadesuit$) не зависи ни од примитивне форме $\theta$. Означимо ову вредност са $\mathcal{A}_\psi(p)$.

(в) Претпоставимо да постоје тачке $q_\pm \in P$ такве да је

$$H_t(q_+) = \sup_{x \in P} H_t(x), \qquad H_t(q_-) = \inf_{x \in P} H_t(x).$$

Доказати да су $q_\pm$ фиксне тачке и да је разлика $\mathcal{A}_\psi(q_+) - \mathcal{A}_\psi(q_-)$ једнака Хоферовој дужини пута $\psi_t^H$.