ZADACI

1. Transformacija

1.1 Pokazati da je Fourier-ov red funkcije

(a) $$f(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-\pi, 0) \\ 1, & t \in [0, \pi) \end{cases}, \qquad f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin{(2n+1)t}$$

(b) $$f(t) = \cos \alpha t, \quad \alpha \notin \mathcal{Z} \qquad f(t) \sim \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nt \right)$$

1.2 Koji stepen broja $1/n$ određuje brzinu opadanja Fourier-ovih koeficijenata $c(n)$ funkcija $f(t)$ periodičnih na intervalu $[-\pi, \pi]$, datih u sledećim primerima:

(a) $f(t) = t$, (prekidna funkcija)

(b) $f(t) = |t|$, (neprekidna funkcija)

(c) $f(t) = t^2$, (neprekidno-diferencijabilna f-ja)

Odrediti u svakom od primera vrstu konvergencije reda Fourier-ovih koeficijenata.

2. Multirezolucija

2.1 Ako talasić $\psi(t)$ ima jediničnu $\mathcal{L}_2$-normu, pokazati da talasić $\psi_{jk}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k)$ takođe ima jediničnu $\mathcal{L}_2$-normu.

2.2 Odrediti najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju funkcije $f(t) = t^2$ na intervalu $0 \leq t \leq 1$ polu-četvrtkama $\varphi(2t)$ i $\varphi(2t-1)$.

2.3 Dokazati da se koeficijenti $a_k(p)$ u razvoju polinoma t^p po funkcijama skaliranja $\{\varphi(t-k)\}$ računaju izrazom

$$a_{k+1}(p) = \sum_n \binom{p}{n} a_k(n).$$

3. Konstrukcija

3.1 Neka je $\varphi^{(0)}(t)$ raširena četvrtka jedinične površine: $\varphi^{(0)}(t) = 1/2$, $t \in [0, 2)$. Nacrtati grafike funkcija $\varphi^{(1)}(t)$ i $\varphi^{(2)}(t)$ koje su određene kaskadnim algoritmom, ako su koeficijenti dilatacione jednačine $h(0) = h(1) = 1/2$. Na kom intervalu je $\varphi^{(i)}(t) \neq 0$? Šta je granična funkcija $\varphi(t)$?

3.2 Ako su koeficijenti dilatacione jednačine $c(0) = c(1) = 1/\sqrt{2}$, odrediti prvih nekoliko aproksimacija $\varphi^{(i)}(t)$ funkcije skaliranja određenih kaskadnim algoritmom, ako je $\varphi^{(0)}(t)$ krov funkcija na intervalu a) $[0,2]$, b) $[0,1]$.

3.3 Neka su nenula koeficijenti dilatacione jednačine $h(0) = h(3) = 1/2$. Polazeći od četvrtke, uraditi dva koraka kaskadnog algoritma i nacrtati funkcije $\varphi^{(1)}(t)$ i $\varphi^{(2)}(t)$. Opisati $\varphi^{(i)}(t)$ – na kom delu intervala $[0,3]$ je $\varphi^{(i)}(t) = 1$?

3.4 Korišćenjem Fourier-ove transformacije odrediti rešenje dilatacione jednačine

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1)$$

3.5 Primenom rekurzije odrediti rešenje dilatacione jednačine čiji su koeficijenti

$$c(0) = c(4) = \frac{1}{8\sqrt{2}}, \quad c(1) = c(3) = \frac{4}{8\sqrt{2}}, \quad c(2) = \frac{6}{8\sqrt{2}}.$$

4. Filtar

4.1 Odrediti signal $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$, ako su $x(0) = 1$ i $x(1) = 3$ jedine nenula komponente signala $\mathbf{x}$, a filtar $\mathbf{h}$ ima nenula komponente $h(0) = 1/2$, $h(1) = 1/2$. Pokazati da je u frekvencijskom domenu $\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\,\hat{x}(\omega)$.

4.2 Naći koeficijente $h(n)$ filtra koji za svaki ulazni signal $\{x(n)\}$ daje izlaz čije su komponente $y(n) = x(n+1)$? Naći frekvencijski odziv $\hat{h}(\omega)$ tog filtra i pokazati da je $\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\,\hat{x}(\omega)$.

4.3 Pokazati da je koeficijent uz z^{-n} u proizvodu $\left(\sum h(k)z^{-k}\right)\,\left(\sum x(l)z^{-l}\right)$ element konvolucije $(\mathbf{h} * \mathbf{x})(n)$.

4.4 Ako je $\delta = (\ldots, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ jedinični impuls u nultom trenutku, pokazati da konvolucija sa proizvoljnim signalom $\mathbf{x}$ ne menja taj signal, $\mathbf{x} * \delta = \mathbf{x}$. Izraziti ovo tvrđenje u frekvencijskom domenu.

4.5 Šta je izlazni signal $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$, ako je ulazni signal $x(n) = (-1)^n$ i $\mathbf{h}$ filtar osrednjenja sa četiri nenula koeficijenta $h(0) = h(1) = h(2) = h(3) = 1/4$? Ne računajući frekvencijski odziv $\hat{h}(\omega)$, objasniti zašto $\mathbf{h}$ definiše niskofrekvencijski filtar.

4.6 Napisati matricu F određenu koeficijentima tročlanog filtra pokretne sredine $\mathbf{h}$, $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x} = F\mathbf{x}$, $y(n) = \frac{1}{3}\big(x(n) + x(n-1) + x(n-2)\big)$. Pokazati da ovaj filtar nije invertibilan,tj. da postoji signal $\mathbf{x}$ za koji je $F\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Naći dva signala $\mathbf{x}$ za koje je $F\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4.7 Napisati matricu S koja definiše filtar kašnjenja $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$, tako da je $y(n) = x(n-1)$. Odrediti matricu S^{-1}. Kako izgleda izlaz $\mathbf{y} = S^{-1}\mathbf{x}$? Naći frekvencijske odzive filtara koji su definisani matricama S i S^{-1} u frekvencijskom i z-domenu. Uporediti sa zadatkom 4.2.

4.8 Predstaviti matricama operatore $(\downarrow 2)$ i $(\uparrow 2) = (\downarrow 2)^{\top}$. Da li je proizvod $(\uparrow 2)\,(\downarrow 2)$ komutativan?

4.9 Za zadati signal $\mathbf{x}$ odrediti signal $\mathbf{y} = (\uparrow 2)\,(\downarrow 2)\,(\uparrow 2)\,(\downarrow 2)\,\mathbf{x}$.

4.10 Koje su komponente signala $(\uparrow 3)\,(\downarrow 2)\mathbf{x}$ i $(\downarrow 2)\,(\uparrow 3)\mathbf{x}$?

4.11 Šta je rezultat operacija $(\downarrow 2)^2\mathbf{x}$ i $(\uparrow 2)^2\mathbf{x}$?

4.12 Dokazati da su Fourier-ove transformacije $\hat{v}(\omega)$ i $\hat{u}(\omega)$ signala $\mathbf{v} = (\downarrow 2)\mathbf{x}$ i $\mathbf{u} = (\uparrow 2)\mathbf{x}$

$$\hat{v}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\big(\frac{\omega}{2}\big) + \hat{x}\big(\frac{\omega}{2} + \pi\big)\right), \qquad \hat{u}(\omega) = \hat{x}(2\omega)$$

tj. u z domenu ($z = e^{\imath\omega}$)

$$V(z) = \frac{1}{2}\big(X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})\big), \qquad U(z) = X(z^2).$$

$\hat{x}(\omega)$ $\big(X(z)\big)$ je Fourier-ova transformacija signala $\mathbf{x}$.

4.13 Ako su frekvencijski odzivi filtara F_0 i F_1 redom $H_0(z) = 1$ i $H_1(z) = z^{-1}$, napisati matrice $L = (\downarrow 2)F_0$ i $B = (\downarrow 2)F_1$ i proveriti da li važi

$$\begin{pmatrix} L \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^\top & B^\top \end{pmatrix} = I$$

4.14 Pokazati da koeficijenti Daubechies D_2 filtra $\mathbf{c} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\big(1+\sqrt{3},\, 3+\sqrt{3},\, 3-\sqrt{3},\, 1-\sqrt{3}\big)$ zadovoljavaju uslov ortogonalnosti, *uslov O*.

5. Osobine

5.1 Za filtar $\mathbf{h} = \frac{1}{4}(1,\, 2,\, 1)$
a) Odrediti tačnost aproksimacije p na osnovu pravila sumiranja
b) Faktorizovati frekvencijski odziv filtra u obliku $\hat{h}(\omega) = \big(\frac{1+e^{-\imath\omega}}{2}\big)^p\, \hat{q}(\omega)$.
c) Naći sopstvene vrednosti matrice filtra M.

5.2 Za filtar $\mathbf{h} = \frac{1}{8}(1-\sqrt{3},\, 3-\sqrt{3},\, 3+\sqrt{3},\, 1+\sqrt{3})$
a) Odrediti tačnost aproksiamcije p na osnovu pravila sumiranja.
b) Faktorizovati frekvencijski odziv filtra u obliku $\hat{h}(\omega) = \big(\frac{1+e^{-\imath\omega}}{2}\big)^p \hat{q}(\omega)$.
c) Naći sopstvene vrednosti matrice filtra M.

5.3 Za filtar $\mathbf{h} = \frac{1}{16}(1,\, 4,\, 6,\, 4,\, 1)$
a) Odrediti tačnost p na osnovu pravila sumiranja
b) Faktorizovati frekvencijski odziv filtra u obliku $\hat{h}(\omega) = \big(\frac{1+e^{-\imath\omega}}{2}\big)^p\, \hat{q}(\omega)$.
c) Naći sopstvene vrednosti matrice filtra M.

5.4 Ako talasić $\psi(t)$ ima p iščezavajućih momenata, pokazati da njegova Fourier-ova transformacija ima nulu reda p za $\omega = 0$.

5.5 Ako koeficijenti $h(k)$ zadovoljavaju uslov ortogonalnosti dvostrukog pomeraja (*uslov O*), pokazati da je vektor središnje kolone matrice T koordinatni vektor δ. To je sopstveni vektor matrice T za $\lambda = 1$.

5.6 Konstruisati matricu T_{2N-1} za filtar $\mathbf{h} = \frac{1}{3}(1,\, 1,\, 1)$ (N je dužina filtra). Naći sopstvene vrednosti te matrice.

5.7 Dokazati da je $S^{(1)}(t) = \sum \varphi^{(1)}(t-n)$ jednako $S^{(0)}(2t) = \sum \varphi^{(0)}(2t-n)$ za bilo koju funkciju $\varphi^{(0)}(t)$ i bilo koje koeficijente $h(k)$ koji zadovoljavaju uslov da je suma parnih = suma neparnih = $\frac{1}{2}$, tj. da je $H(\pi) = 0$.

$P^{(0)}(t) = \sum \varphi^{(0)}(t-n) \equiv 1$ *je uslov koji treba da zadovoljava početna aproksimacija* $\varphi^{(0)}(t)$ *da bi kaskadni algoritam konvergirao.*

6. Piramidalni algoritam

6.1 Razložiti funkciju $g(t) = \begin{cases} 5, & t \in [0, 1/4) \\ 3, & t \in [1/4, 3/4) \\ 1, & t \in [3/4, 1) \end{cases}$ na sabirke koji pripadaju prostorima $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{W}_0$ i $\mathcal{W}_1$.

6.2 Razložiti funkciju $f(t) = \begin{cases} 5, & t \in [0, 1/2) \\ 1, & t \in [1/2, 1) \end{cases}$ na zbir funkcije skaliranja i talasića.

6.3 Neka je u osam ekvidistantnih tačaka funkcija zadata svojim vrednostima $\mathbf{f} = (37, 35, 28, 28, 58, 18, 21, 15)^T$. Primenom piramidalnog algoritma predstaviti je Haar-ovom funkcijom skaliranja i talasićima.