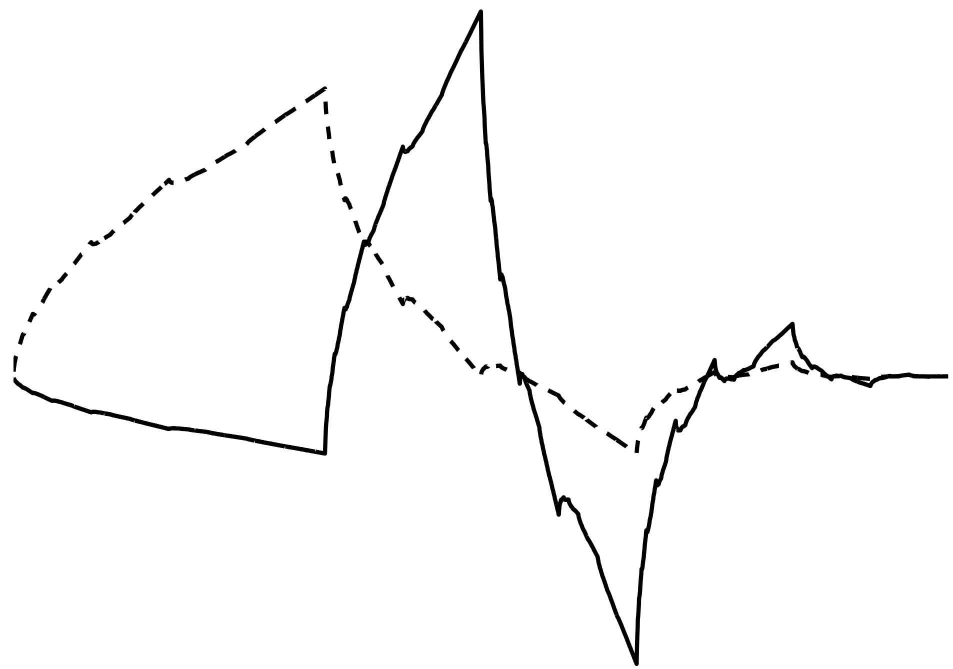
TALASIĆI (WAVELETS)

1. Transformacija
2. Multirezolucija
3. Konstrukcija
4. Filtar
5. Osobine
6. **Piramidalni algoritam**
7. Primeri i primene



2007

Diskretna transformacija talasićima (DWT = Discrete Wavelet Transformation)

$$f(x) = \sum_k a_{J,k}\varphi_{J,k}(x) + \sum_j \sum_k b_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

algoritam kojim se određuju koeficijenti a_{Jk}, b_{jk} u razvoju funkcije po talasićima na različitim diadskim skalama (dekompozicija).

Prva suma predstavlja *aproksimaciju* na velikoj skali (gruba rezolucija), koja sadrži niskofrekvencijske komponente funkcije. Druga (dvostruka) suma predstavlja *detalje* na različitim skalama, tj. visokofrekvencijske komponente funkcije.

Inverznom diskretnom transformacijom talasićima (IDWT) se na osnovu datih koeficijenata računa funkcija u diadskim tačkama (rekonstrukcija).

♠ *Piramidalni algoritam (dekompozicija): Za funkciju*

$$f_{j-1} = \sum a_{j-1,l}\varphi_{j-1,l}(x) \in \mathcal{V}_{j-1}, \qquad \mathcal{V}_{j-1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j$$

koeficijenti $a_{j,k}$ *i* $b_{j,k}$ *u razvoju po ortonormiranom bazisu* $\{\varphi_{j,k}(x),\, \psi_{j,k}(x)\}$,

$$f_{j-1} = \sum_k a_{j,k}\varphi_{j,k}(x) + \sum_k b_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

su jednaki

$$a_{j,k} = \sum_l c(l-2k)a_{j-1,l}, \qquad b_{j,k} = \sum_l d(l-2k)a_{j-1,l}$$

U vektorskoj notaciji $\quad \mathbf{a}_j = (\downarrow 2)C^\top \mathbf{a}_{j-1}, \qquad \mathbf{b}_j = (\downarrow 2)D^\top \mathbf{a}_{j-1}$

Šematski prikaz

$$\begin{tikzcd} \mathbf{a}_0 \arrow[r, "C^\top"] \arrow[dr, "D^\top"'] & \mathbf{a}_1 \arrow[r, "C^\top"] \arrow[dr, "D^\top"] & \cdots & \mathbf{a}_{J-1} \arrow[r, "C^\top"] \arrow[dr, "D^\top"'] & \mathbf{a}_J \\ & \mathbf{b}_1 & & & \mathbf{b}_J \end{tikzcd}$$

Dokaz: Za $j = 0$ u dilatacionoj i jednačini talasića transliramo t za k, i $n = l - 2k$,

$$\varphi(x-k) = \sum_n c(n)\sqrt{2}\varphi(2x-2k-n) = \sum_l c(l-2k)\varphi_{-1,l}(x)$$

$$\psi(x-k) = \sum_n d(n)\sqrt{2}\varphi(2x-2k-n) = \sum_l d(l-2k)\varphi_{-1,l}(x)$$

Obe jednačine pomnožimo sa $f_{-1}(x)$ i integralimo po x,

$$\int f_{-1}(x)\varphi_{0,k}(x)dx = \int f_{-1}(x)\varphi(x-k)dx = \sum_l c(l-2k)\int f_{-1}(x)\varphi_{-1,l}(x)dx$$

$$\int f_{-1}(x)\psi_{0,k}(x)dx = \int f_{-1}(t)\psi(x-k)dx = \sum_l d(l-2k)\int f_{-1}(x)\varphi_{-1,l}(x)dx$$

Bazisi su ortonormirani, te su Fourier-ovi koeficijenti

$$a_{0,k} = (f_{-1}, \varphi_{0,l}) = \sum_l c(l-2k)a_{-1,l},$$

$$b_{0,k} = (f_{-1}, \psi_{0,l}) = \sum_l d(l-2k)a_{-1,l}$$

Uopštenje za proizvoljno j sledi iz dilatacione jednačine za $\varphi_{j,k}(x)$ i jednačine talasića za $\psi_{j,k}(x)$

◇ dekompozicija

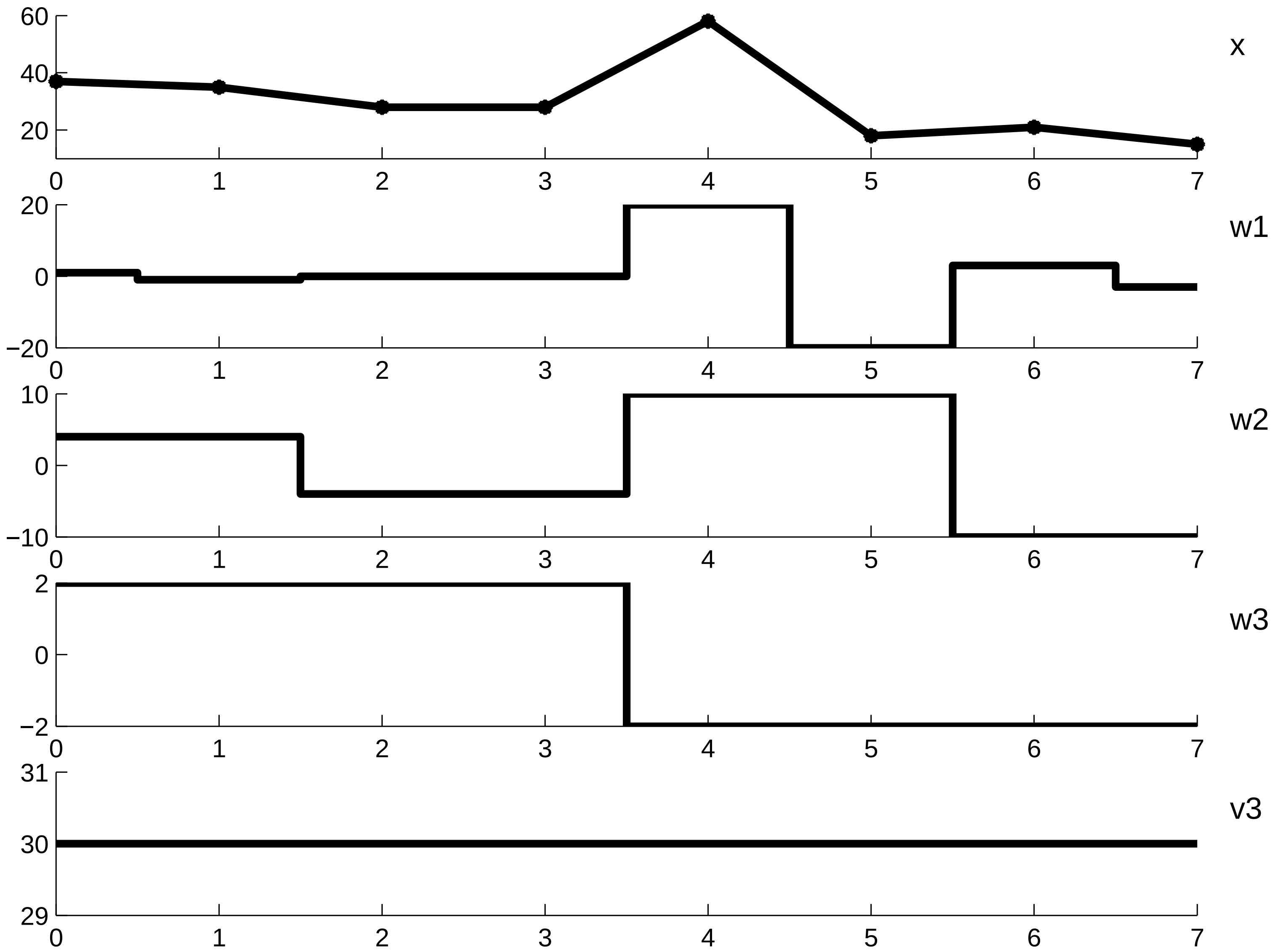
$$c(0) = c(1) = \frac{1}{2}$$

$$d(0) = -d(1) = \frac{1}{2}$$

$$a_{j,k} = \frac{1}{2}\left(a_{j-1,2k} + a_{j-1,2k+1}\right)$$

$$b_{j,k} = \frac{1}{2}\left(a_{j-1,2k} - a_{j-1,2k+1}\right)$$

$$\begin{array}{l}
\boxed{37 \quad 35 \quad 28 \quad 28 \quad 58 \quad 18 \quad 21 \quad 15} \\[1em]
\boxed{36 \quad 28 \quad 38 \quad 18} \qquad 1 \quad 0 \quad 20 \quad 3 \\[1em]
\boxed{32 \quad 28} \qquad 4 \quad 10 \\[1em]
\boxed{30} \qquad 2 \\
\hline
\boxed{30} \qquad 2 \qquad 4 \quad 10 \qquad 1 \quad 0 \quad 20 \quad 3
\end{array}$$



x
w1
w2
w3
v3

♠ *Inverzni piramidalni algoritam (rekonstrukcija): Koeficijenti $a_{j-1,l}$ se dobijaju kombinovanjem koeficijenata $a_{j,k}$ i $b_{j,k}$*

$$a_{j-1,l} = \sum_k \big(c(l-2k)a_{j,k} + d(l-2k)b_{j,k}\big).$$

U vektorskoj notaciji

$$\mathbf{a}_{j-1} = \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} (\uparrow 2) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{b}_j \end{pmatrix}$$

Šematski prikaz

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{a}_J & \xrightarrow{C} & \mathbf{a}_{J-1} & \xrightarrow{C} & \cdots & \mathbf{a}_1 & \xrightarrow{C} & \mathbf{a}_0 \\
 & \nearrow D & & \nearrow D & & & \nearrow D & \\
\mathbf{b}_J & & \mathbf{b}_{J-1} & & & \mathbf{b}_1 & &
\end{array}$$

Dokaz: Za $j = 0$ je

$$f_{-1}(x) \in \mathcal{V}_{-1}(x) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0, \qquad \mathcal{V}_j : \{\varphi_{j,k}\}, \quad \mathcal{W}_j : \{\psi_{j,k}\}$$

$$\sum_k a_{-1,k}\varphi_{-1,k}(x) = \sum_k a_{0,k}\varphi_{0,k}(x) + \sum_k b_{0,k}\psi_{0,k}(x)$$
$$= \sum_l \left(\sum_n \big(a_{0,n}c(l-2n) + b_{0,n}d(l-2n) \big) \right) \varphi_{-1,l}(x)$$

Za ostale nivoe j dokaz analogno sledi.

Dokaz se može izvesti i invertovanjem sistema jednačina iz teoreme dekompozicije:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{b}_j \end{pmatrix} = (\downarrow 2) \begin{pmatrix} C^T \\ D^T \end{pmatrix} \mathbf{a}_{j-1} = (\downarrow 2) \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}^T \mathbf{a}_{j-1} = \left(\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} (\uparrow 2) \right)^\top$$

$$(\downarrow 2) \begin{pmatrix} C^T \\ D^T \end{pmatrix} \text{ je ortogonalna matrica} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a}_{j-1} = \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} (\uparrow 2) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{b}_j \end{pmatrix}$$

◇ rekonstrukcija

$$a_{j-1,2k} = a_{j,k} + b_{j,k}$$
$$a_{j-1,2k+1} = a_{j,k} - b_{j,k}$$

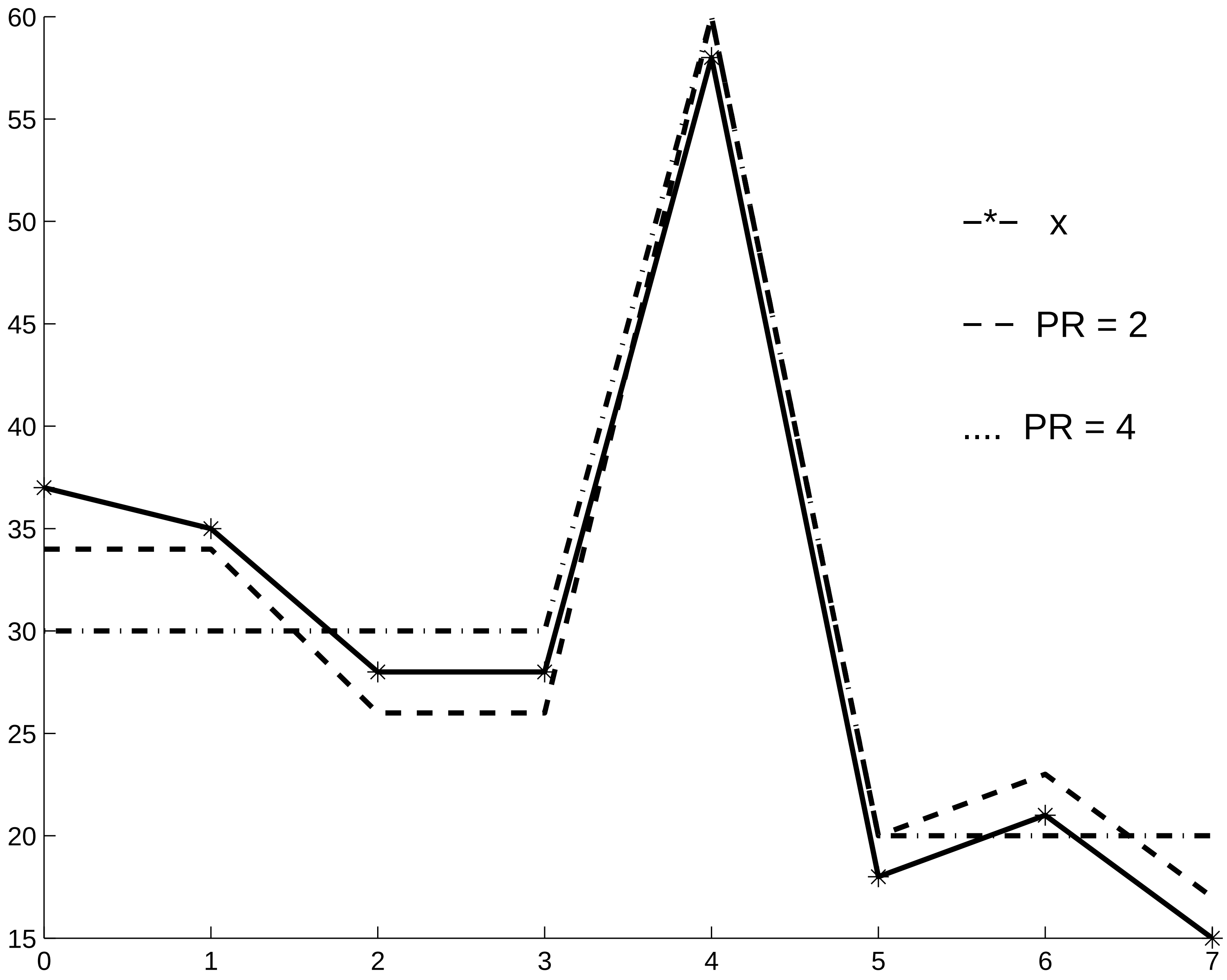
kompresija

$\mathrm{prag} = 2$

30	2	4	10	1	0	20	3
30	0	4	10	0	0	20	3
30	30	4	10	0	0	20	3
34	26	40	20	0	0	20	3
34	34	26	26	60	20	23	17

$\mathrm{prag} = 4$

30	2	4	10	1	0	20	3
30	0	0	10	0	0	20	0
30	30	0	10	0	0	20	0
30	30	40	20	0	0	20	0
30	30	30	30	60	20	20	20


60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
0
1
2
3
4
5
6
7
–*– x
– – PR = 2
.... PR = 4

Kako izvršiti početni izbor koeficijenata u piramidalnom algoritmu?

Ako nivo sa najfinijom skalom označimo sa $j = 0$, onda je

$$f(x) = \sum_n a_{0,n} \varphi(x-n), \qquad a_{0,n} = \int f(x) \varphi(x-n)\, dx$$

a za diskretan signal $f(k)$

$$f(k) = \sum_n a_{0,n} \varphi(k-n)$$

$a_{0,n}$ su mogu dobiti rešavanjem sistema linearnih jednačina sa Toeplitz-ovom matricom $\{\varphi(k-n)\}$, koji sledi iz poslednje veze za različito k, ili

aproksimacijom integrala sumom, $\qquad a_{0,n} \approx \sum_k f(k) \varphi(k-n)$

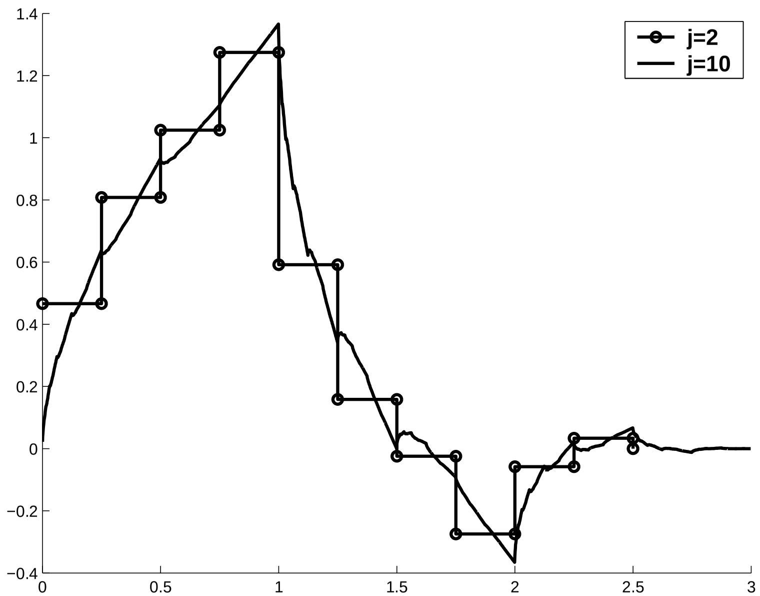
U procesu rekonstrukcije se mora izvršiti post-filtriranje dobijenih koeficijenata $a_{0,n}$ da bi se odredio signal (postupak suprotan opisanom).

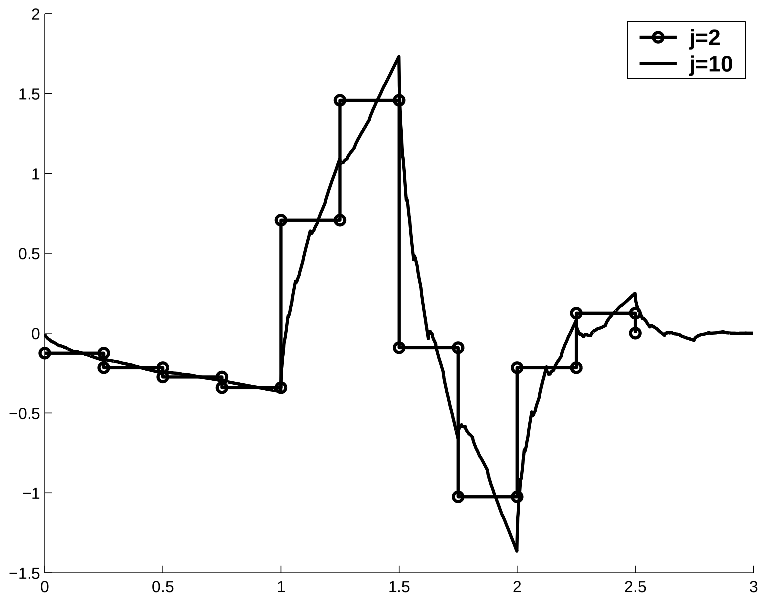
◇ Crtanje grafika funkcije skaliranja i talasića

$$\varphi^{(j)}(x) = \sum_n c(n)\sqrt{2}\varphi^{(j-1)}(2x-n),$$
$$\psi^{(j)}(x) = \sum_n d(n)\sqrt{2}\varphi^{(j-1)}(2x-n),$$

$$\varphi^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1) \end{cases}$$

$$\varphi^{(j)}(x),\, \psi^{(j)}(x) \in \mathcal{V}_{-j} = \{ f(x) \mid f(x) = f(n),\, x \in [n2^{-j}, (n+1)2^{-j}) \}$$





$$\varphi^{(j)}(x) = \sum_k a_{-j,k}\varphi^{(0)}(2^j x - k), \qquad a_{-j,n} = \varphi^{(j)}(n\,2^{-j}) \approx \varphi(n\,2^{-j})$$

jer je $\quad \varphi_b\big(2^j(n\,2^{-j}) - k\big) = \delta(n-k)$

Analogno,

$$\psi^{(j)}(x) = \sum_k a_{-j,k}\varphi^{(0)}(2^j x - k), \qquad a_{-j,n} = \psi^{(j)}(n\,2^{-j}) \approx \psi(n\,2^{-j})$$

Algoritam: Polazeći od niza koeficijenata, za $j = 0, \ldots, J-1$, $n = 0, \pm 1, \ldots,$

funkcija skaliranja $\qquad a_{0,n} = \delta_{0,n}, \qquad b_{-j,n} = 0$

talasić $\qquad a_{0,n} = 0, \qquad b_{0,n} = \delta_{0,n}, \quad b_{-j,n} = 0$

inverznim piramidalnim algoritmom dobijamo aproksimacije vrednosti funkcije u diadskim tačkama $n\,2^{-J}$,

$$a_{-j,l} = \sum_k \big(c(l-2k)a_{-j+1,k} + d(l-2k)b_{-j+1,k}\big)$$

◇ Matrični zapis dekompozicije iz prethodnog primera

Nivo 0

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} 37 \\ 35 \\ 28 \\ 28 \\ 58 \\ 18 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nivo 1

$$(\downarrow 2)\begin{pmatrix} C^\top \\ D^\top \end{pmatrix} \mathbf{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 35 \\ 28 \\ 28 \\ 58 \\ 18 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \boxed{36} \\ \boxed{28} \\ \boxed{38} \\ \boxed{18} \\ 1 \\ 0 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aproksimacija $\mathbf{a}_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 38 \\ 18 \end{pmatrix}$, detalj $\mathbf{b}_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$

Nivo 2

Ulazni signal je aproksimacija određena vektorom $\mathbf{a}_1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix}36\\28\\38\\18\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\boxed{32}\\ \boxed{28}\\ 4\\ 10\end{pmatrix}$$

aproksimacija $\quad \mathbf{a}_2 = 2\begin{pmatrix}32\\28\end{pmatrix}, \qquad$ detalj $\quad \mathbf{b}_2 = 2\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$

Nivo 3:

Poslednji mogući nivou za ovaj obim podataka

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} 2\begin{pmatrix}32\\28\end{pmatrix} = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix}\boxed{30}\\ 2\end{pmatrix}$$

aproksimacija $\quad \mathbf{a}_3 = 2\sqrt{2}\,(30), \qquad$ detalj $\quad \mathbf{b}_3 = 2\sqrt{2}\,(2)$

Dekompozicija signala $\mathbf{f} = \mathbf{a}_0$ je određena vektorima $\mathbf{a}_3,\ \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_2$ i $\mathbf{b}_1$,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix}37\\35\\28\\28\\58\\18\\21\\15\end{pmatrix} = 30\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

◇ Matrični zapis rekonstrukcije (poslednji korak)

$$\begin{pmatrix}C & D\end{pmatrix}(\uparrow 2)\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{b}_1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix}\boxed{36}\\\boxed{28}\\\boxed{38}\\\boxed{18}\\1\\0\\20\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}37\\35\\28\\28\\58\\18\\21\\15\end{pmatrix}$$

Ako je funkcija data sa 2^m vrednosti, dekompozicija se vrši najviše do m-tog nivoa. DWT funkcije je određena svim koeficijentima, polazeći od poslednjeg nivoa dekompozicije (ima ih 2^m).
Pri odgovarajućem izboru koeficijenata $c(n)$ i $d(n)$ detalji b_{jk} mogu biti zanemarljivo mali za razno j. Kako aproksimacija na J-tom nivou sadrži 2^J puta manje podataka nego ulazni signal, broj koeficijenata kojima se opisuje funkcija može biti znatno umanjen.

Brza transformacija talasićima (FWT = Fast Wavelet Transformation)
(Stephane Malatt-a i Ingrid Daubechies, 1988)

Efikasan postupak za realizaciju piramidalnog algoritma. Za signal dužine n broj koraka FWT je $O(n)$ (za FFT $O(n \ln n)$). Algoritam je u potpunosti rekurzivan.
Neparne vrste matrice transformacije sadrže koeficijente $c(n)$, a parne vrste sadrže ove koeficijente u obrnutom poretku uz alternativnu promenu znaka, tj. $d(n)$. Razlaganjem DWT matrice na proizvod retkih matrica, koristeći svojstvo samokonjugovanosti, ubrzava se piramidalni algoritam.