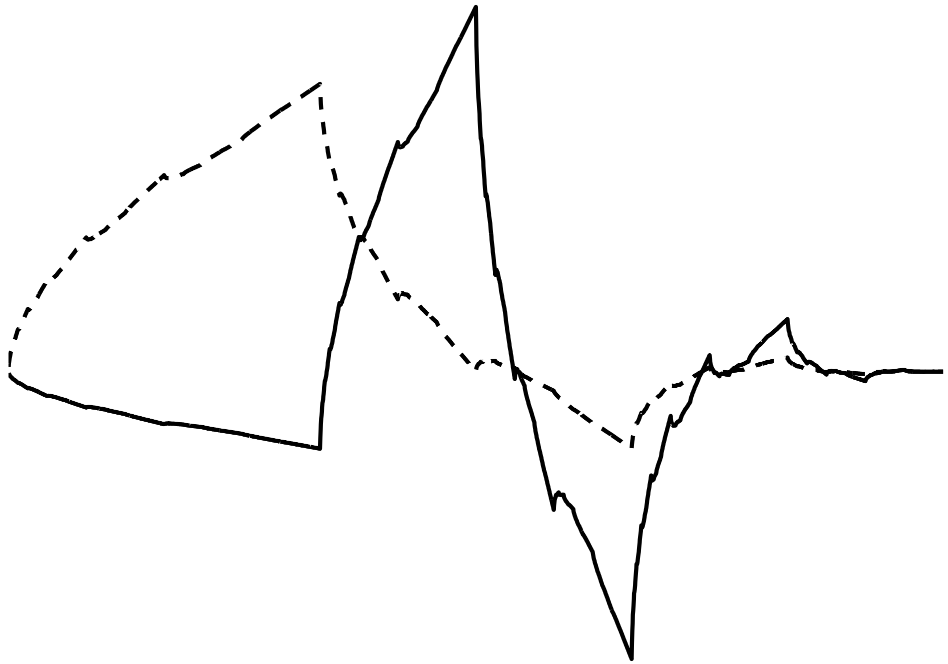
TALASIĆI (WAVELETS)

1. Transformacija
2. Multirezolucija
3. Konstrukcija
4. **Filtar**
5. Osobine
6. Piramidalni algoritam
7. Primeri i primene



2007

Aproksimacija talasićima	*Obrada signala*
multirezolucija	filtar
reskaliranje $x \to 2x$	kompresija $\omega \to \omega/2$
usrednjenje pomoću $\varphi(x)$	nisko-frekvencijski filtar
detaljizacija pomoću $\psi(x)$	visoko-frekvencijski filtar
ortogonalni bazisi	ortogonalne matrice
koeficijenti razvoja po talasićima	izlaz banke analize
razvoj po talasićima	izlaz banke sinteze
brza transformacija talasićima	proizvod matrica filtara

Daubechies wavelets DbN	nema eksplicitnog izraza (osim za $N = 1$)
(Ingrid Daubechies, 1988)	kompaktan nosač $[0, 2N - 1]$
	ortogonalni su (piramidalni algoritam)
Haar-ov talasić $\equiv$ Db1	reprodukuju polinome stepena $(N - 1)$

Signal (analogan ili diskretan) je fizička veličina koja se menja u vremenu, prostoru ili po nekoj drugoj nezavisno promenljivoj.

Seizmička podrhtavanja, ljudski govor, vibracije motora, finansijski podaci, muzika, medicinski snimci, predstavljaju se signalima.
Slika je dvodimenzioni signal.

Obrada signala - analiza i dijagnostika, kodiranje, kvantizacija i kompresija, prenos i čuvanje, sinteza i rekonstrukcija.

Osnovni alat je Fourier-ova analiza, a u novije vreme koristi se i analiza talasićima.

Filtri se koriste u obradi signala za izdvajanje iz signala frekvencijskih grupa, tj. svih frekvencija iz nekog zadatog opsega.

Filtar $\mathbf{h} = \{h(k)\}_k$ je linearni operator invarijantan po vremenu.

izlaz = filtar (konvolucija) uzlaz

$$y(n) = \sum_k h(k)x(n-k) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$$

$$y(0) = h(N)x(-N) + \cdots + h(1)x(-1) + h(0)x(0)$$

$$\vdots$$

$$y(n) = h(N)x(n-N) + \cdots h(N)x(n-N) + h(1)x(n-1) + h(0)x(n)$$

$F = \{h_{i-j}\}$ Toeplitz-ova matrica

$$F = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & h(0) & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & h(1) & h(0) & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & h(2) & h(1) & h(0) & 0 & \cdot \\ \cdot & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = F\,\mathbf{x}$$

Uzročni (kauzalni) filtri $\qquad h(n) = 0$ za $n < 0$

Izlaz ne može zavisiti od budućeg ulaza. Matrica fltra je donjetrougaona.

FIR filtar (Finite Impulse Response) – konačan broj koeficijenata $\quad h(n) \neq 0$

Ako je $\mathbf{h}$ periodični signal sa periodom N, matrica F je ciklična matrica dimenzije $N \times N$,

$$F = \begin{pmatrix} h(0) & h(N-1) & h(N-2) & \cdots & h(1) \\ h(1) & h(0) & h(N-1) & \cdots & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & h(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(N-1) & h(N-2) & h(N-3) & \cdots & h(0) \end{pmatrix}$$

Brojevi $h(N), \ldots, h(0)$ ”definišu pokretni prozor” koji množi $\mathbf{x}$.

Diskretna Fourier-ova transformacija $\qquad \widehat{x}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-\imath n\omega}$

z–transformacija $\qquad$ za $\quad z = e^{\imath\omega} \qquad X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$

♠ *Fourier-ova transformacija konvolucije dva vektora jednaka je proizvodu Fourier-ovih transformacija tih vektora*

$$\widehat{y}(\omega) = \widehat{h}(\omega)\,\widehat{x}(\omega), \qquad \text{ili} \qquad Y(z) = H(z)\,X(z)$$

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(\omega) = (\mathbf{h} \widehat{*} \mathbf{x})(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-\imath n\omega} = \sum_{n} \Big(\sum_{k} h(k) x(n-k)\Big) e^{-\imath n\omega} \\
&= \sum_{k} h(k) \Big(\sum_{n} x(n-k) e^{-\imath n\omega}\Big) = \sum_{k} h(k) \Big(\sum_{l} x(l) e^{-\imath (l+k)\omega}\Big) \\
&= \Big(\sum_{k} h(k) e^{-\imath k\omega}\Big) \Big(\sum_{l} x(l) e^{-\imath l\omega}\Big) = \widehat{h}(\omega)\,\widehat{x}(\omega)
\end{aligned}$$

Frekvencijski odziv filtra

$$\widehat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-\imath n\omega} \qquad \text{ili} \qquad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

je odziv filtra na jedinični impuls u nultom vremenu,

$$x(0) = 1, \qquad x(n) = 0, \quad n \neq 0, \qquad \longrightarrow \qquad \widehat{x}(\omega) \equiv 1$$

Ako ulazni signal $\mathbf{x}$ sadrži samo jednu frekvenciju, $x(n) = e^{\imath n\omega}$, $-\infty < n < \infty$, izlazni signal $\mathbf{y}$ je proizvod frekvencijskog odziva filtra (koji je funkcija te frekvencije) i ulaznog signala

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{\imath(n-k)\omega} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-\imath k\omega}\right) x(n) \\ &= \widehat{h}(\omega)\, x(n) \end{aligned}$$

Primeri filtara

◇ *Filtar kašnjenja za* m, $\boxed{y(n) = x(n-m)}$

$$h(m) = 1, \quad h(n) = 0, n \neq m, \qquad \longrightarrow \qquad \hat{h}(\omega) = e^{-\imath m\omega}, \qquad H(z) = z^{-m}$$

◇ *Filtar za usrednjavanje* $\boxed{y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)}$

$$\text{filtar za usrednjavanje} = \frac{1}{2}(\text{ identičnost }) + \frac{1}{2}(\text{ kašnjenje za } 1)$$

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/2 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ \cdot \end{pmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{y} = F_0\,\mathbf{x}$$

Koeficijenti $\qquad h(0) = h(1) = 1/2, \quad h(n) = 0,\, n \neq 0, 1,$

Frekvencijski odziv

$$\widehat{h}_0(\omega) = \frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^{-\imath\omega} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\imath\omega}\right) = e^{-\imath\omega/2}\cos\frac{\omega}{2}$$

Dejstvo na signal koji je konstanta

$$\omega = 0, \quad \widehat{h}_0(0) = 1, \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x}_l = (\ldots, 1,\, 1,\, 1, \ldots)^\top = \mathbf{y}_l$$

Dejstvo na signal koji osciluje sa maksimalnom učestanošću

$$\omega = \pi, \quad \widehat{h}_0(\pi) = 0, \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x}_h = (\ldots, -1,\, 1,\, -1, \ldots)^\top, \quad \mathbf{y}_h = \mathbf{0}$$

Spada u *nisko-frekvencijske* (engl. lowpass), jer se niske frekvencije uopšte ne menjaju ili se menjaju vrlo malo $\quad (\omega \approx 0,\, \widehat{h}_0(\omega) \approx 1)$, a visoke frekvencije se jako ili potpuno prigušuju $\quad (\omega \approx \pi,\, \widehat{h}_0(\omega) \approx 0)$.

Najjednostavniji nisko-frekvencijski filtar, ekvivalentan je četvrtki u teoriji talasića.

◇ *Filtar za razliku* $\boxed{y(n) = \tfrac{1}{2}\,x(n) - \tfrac{1}{2}\,x(n-1)}$

$$\text{filtar za razliku} = \frac{1}{2}(\text{ identičnost }) - \frac{1}{2}(\text{ kašnjenje za } 1)$$

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/2 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & -1/2 & 1/2 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & -1/2 & 1/2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ \cdot \end{pmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{y} = F_1\mathbf{x}$$

Koeficijenti $\quad h(0) = 1/2, \quad h(1) = -1/2, \qquad h(n) = 0,\ n \neq 0, 1,$

Frekvencijski odziv

$$\widehat{h}_1(\omega) = \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^{-\imath\omega} = \frac{1}{2}\bigl(1 - e^{-\imath\omega}\bigr) = \imath\, e^{-\imath\omega/2}\,\sin\frac{\omega}{2}$$

Dejstvo na signal koji je konstanta

$$\omega = 0, \quad \widehat{h}_1(0) = 0, \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x}_l = (\ldots, 1, 1, 1, \ldots)^\top \quad \mathbf{y}_l = \mathbf{0}$$

Dejstvo na signal koji osciluje sa maksimalnom učestanošću

$$\omega = \pi, \quad \widehat{h}_1(\pi) = 1, \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x}_h = (\ldots, -1, 1, -1, \ldots)^\top = \mathbf{y}_h$$

Spada u *visoko-frekvencijske* (engl. highpass), jer se visoke frekvencije uopšte ne menjaju ili se menjaju vrlo malo $(\omega \approx \pi, \widehat{h}_1(\omega) \approx 1)$, a niske frekvencije se jako ili potpuno prigušuju $(\omega \approx 0, \widehat{h}_1(\omega) \approx 0)$.

Najjednostavniji visoko-frekvencijski filtar, ekvivalentan je Haar-ovom talasiću.

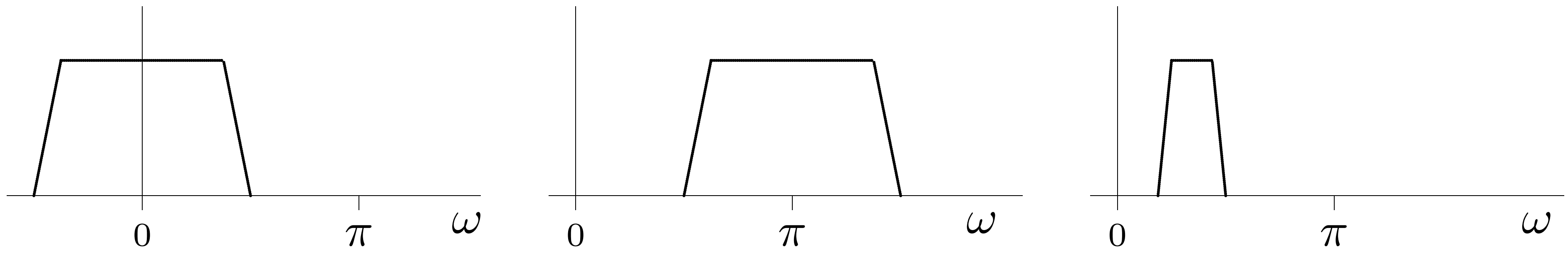
$$\begin{array}{lcccc}
\mathbf{x}: & \underbrace{37, \quad 35} & \underbrace{28, \quad 28} & \underbrace{58, \quad 18} & \underbrace{21, \quad 15} \\
\frac{1}{2}* & +\swarrow \quad \searrow - & +\swarrow \quad \searrow - & +\swarrow \quad \searrow - & +\swarrow \quad \searrow - \\
\mathbf{y}_l: & 36 \qquad & 28 \qquad & 38 \qquad & 18 \qquad \\
\mathbf{y}_h: & \qquad 1 & \qquad 0 & \qquad 20 & \qquad 3
\end{array}$$

Idealan nisko-frekvencijski filtar (a)

$$\widehat{h}(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Idealan visoko-frekvencijski filtar (b)

$$\widehat{h}(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \le |\omega| < \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



(a) (b) (c)

Filtri za usrednjavanje i za razliku nisu invertibilni svaki za sebe –

i jedan i drugi slikaju određeni vektor u nula vektor, tj.
frekvencijski odziv oba ova filtra je jednak nuli, $\widehat{h}(\omega) = 0$, za neko ω.

Banka filtara je skup filtara

- Dvokanalna banka se sastoji od dva filtra, nisko-frekvencijskog i visoko-frekvencijskog
- Njom se ulazni signal razlaže na dve frekvencijske grupe, dva izlazna signala
- Ukupna dužina izlaznih signala jednaka je dužini ulaznog signala, jer se čuvaju se samo parne komponente izlaznih signala
- Operatorom $(\downarrow 2)$ (kompresija sa korakom 2) eliminišu se neparne komponente signala,

$$(\downarrow 2)\mathbf{y} = (\ldots, y(-4), y(-2), y(0), y(2), y(4), \ldots)^\top$$

- Ovakvi signali se mogu kompresovati mnogo efikasnije od polaznog signala, i zatim prenositi ili čuvati
- Na osnovu izlaznih signala može se rekonstruisati polazni signal

◇ Dvokanalna banka filtara koju čine nisko-frekvencijski filtar za usrednjavanje i visoko-frekvencijski filtar za razliku

Analiza signala

$$\mathbf{y}_0 = (\downarrow 2) F_0 \mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vdots \\ x(-2) + x(-3) \\ x(0) + x(-1) \\ x(2) + x(1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_1 = (\downarrow 2) F_1 \mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vdots \\ x(-2) - x(-3) \\ x(0) - x(-1) \\ x(2) - x(1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Zbir$\Big/$razlika signala $\mathbf{y}_0$ i $\mathbf{y}_1$ daju parne$\Big/$neparne komponente ulaznog signala $\mathbf{x}$

Sinteza signala

Korak 1 – dekompresija

Umetanjem nula na mesto neparnih komponenti, signali $\mathbf{y}_0$ i $\mathbf{y}_1$ se proširuju do pune dužine,

$$\mathbf{u}_0 = (\uparrow 2)\mathbf{y}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vdots \\ x(-2) + x(-3) \\ 0 \\ x(0) + x(-1) \\ 0 \\ x(2) + x(1) \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}_1 = (\uparrow 2)\mathbf{y}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vdots \\ x(-2) - x(-3) \\ 0 \\ x(0) - x(-1) \\ 0 \\ x(2) - x(1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Dekompresija $(\uparrow 2)$ je operacija inverzna kompresiji $(\downarrow 2)$.

Korak 2 – filtriranje

Signali $\mathbf{u}_0$ i $\mathbf{u}_1$ su ulazi u filtre

$$G_0: \quad g_0(0) = 1,\, g_0(1) = 1, \qquad\qquad G_1: \quad g_1(0) = -1,\, g_1(1) = 1$$

G_0 sabira a G_1 oduzima dve uzastopne komponente ulaznog signala,

$$\mathbf{w}_0 = G_0\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vdots \\ x(-2)+x(-3) \\ x(-2)+x(-3) \\ x(0)+x(-1) \\ x(0)+x(-1) \\ x(2)+x(1) \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w}_1 = G_1\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vdots \\ -x(-2)+x(-3) \\ x(-2)-x(-3) \\ -x(0)+x(-1) \\ x(0)-x(-1) \\ -x(2)+x(1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Sabiranjem izlaza iz ovih filtara dobija se polazni signal $\mathbf{x}$ sa kašnjenjem (ulazu $x(n)$ odgovara izlaz $x(n-1)$).

U fazi analize postupci filtriranja i kompresije mogu se objediniti tako što se u matrici filtara izostave neparne vrste,

$$C = \sqrt{2}F_0 \qquad L = (\downarrow 2)C = \begin{pmatrix} \dots & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \dots \\ & \vdots & & & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$D = \sqrt{2}F_1 \qquad B = (\downarrow 2)D = \begin{pmatrix} \dots & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \dots \\ & \vdots & & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Množenje sa $\sqrt{2}$ je izvršeno radi normiranja matrice

Matrica L je matrica nisko-frekvencijskog filtra, i biće pridružena funkciji skaliranja
Matrica B je matrica visoko-frekvencijskog filtra i biće pridružena talasićima

Ortogonalna *matrica banke analize* je kvadratna matrica dobijena spajanjem ove dve matrice

$$\begin{pmatrix} L \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & & & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Matrica banke sinteze je njoj inverzna, tj. transponovana matrica

$$\begin{pmatrix} L \\ B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} L^\top & B^\top \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & -1 & & \\ 1 & & & 1 & & \\ & 1 & & & -1 & \\ & 1 & & & 1 & \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & & & \cdot \end{pmatrix}$$

Opisana banka filtara, koju čine filtar za usrednjavanje i filtar za razliku, naziva se *Haar-ova banka filtara*. Ortogonalna je jer je definisana ortogonalnom matricom

$$\left(L^\top \quad B^\top\right) \begin{pmatrix} L \\ B \end{pmatrix} = L^\top L + B^\top B = I$$

Analogija sa talasićima:

Konvolucijom se dobija izlazni signal $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$, čije su parne komponente

$$y(2n) = \sum_k h(k)\, x(2n-k)$$

Kompresijom za dva, tj. izostavljanjem neparnih i prenumeracijom ostalih komponenti, dobija se izlazni signal $(\downarrow 2)\mathbf{y}$ čija je n-ta komponenta

$$y(2n) \qquad \longrightarrow \qquad y(n) = \sum_k h(k)\, x(2n-k)$$

Ovo je jednačina sa dve skale, kao i dilataciona jednačina. Koeficijenti filtra su analog koeficijenata dilatacione jednačine. Na osnovu poznate teorije filtara mogu se definisati pravila za konstrukciju bazisa talasića željenih osobina.

Ortogonalni filtri vode ka ortogonalnom bazisu talasića

◇ Ortonormirana banka filtara dužine četiri

filtar analize $$F = \begin{pmatrix} L \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c(3) & c(2) & c(1) & c(0) & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & c(3) & c(2) & c(1) & c(0) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & d(3) & d(2) & d(1) & d(0) & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & d(3) & d(2) & d(1) & d(0) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

filtar sinteze $$F^\top = \begin{pmatrix} L^\top & B^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c(3) & 0 & \cdot & d(3) & 0 & \cdot \\ \cdot & c(2) & 0 & \cdot & d(2) & 0 & \cdot \\ \cdot & c(1) & c(3) & \cdot & d(1) & d(3) & \cdot \\ \cdot & c(0) & c(2) & \cdot & d(0) & d(2) & \cdot \\ \cdot & 0 & c(1) & \cdot & 0 & d(1) & \cdot \\ \cdot & 0 & c(0) & \cdot & 0 & d(0) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Ovo će biti banka filtara savršene rekonstrukcije (izlazni signal iz banke sinteze $\overline{\mathbf{x}}$ jednak je ulaznom signalu u banku analize $\mathbf{x}$) ako je F ortogonalna matrica,

uslov O $$F^\top F = I \qquad \text{i} \qquad F F^\top = I$$

$$L^\top L + B^\top B = I \qquad \begin{pmatrix} L L^\top & L B^\top \\ B L^\top & B B^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Svodi se na ortogonalnost dvostrukog pomeraja koeficijenata $c(k)$ i $d(k)$

$$L L^\top = I : \qquad \sum_n c(n)c(n-2k) = \delta(k)$$
$$B B^\top = I : \qquad \sum_n d(n)d(n-2k) = \delta(k)$$
$$L B^\top = 0 : \qquad \sum_n c(n)d(n-2k) = 0$$

Za filtar dužine četiri je

$$c(0)^2 + c(1)^2 + c(2)^2 + c(3)^2 = 1 \qquad d(0)^2 + d(1)^2 + d(2)^2 + d(3)^2 = 1$$

$$c(0)c(2) + c(1)c(3) = 0 \qquad d(0)d(2) + d(1)d(3) = 0$$

$$\begin{aligned} c(0)d(0) + c(1)d(1) + c(2)d(2) + c(3)d(3) &= 0 \\ c(0)d(2) + c(1)d(3) &= 0 \\ c(2)d(0) + c(3)d(1) &= 0 \end{aligned}$$

Ovo svojstvo ne mogu imati filtri neparne dužine. Na primer, pri dužini $N = 3$ je

$$\big(c(0), c(1), c(2)\big) \cdot \big(0, 0, c(0)\big) = c(0)c(2) \neq 0.$$

Ortogonalnost, izražena koeficijentima filtara, za $k = 0, \ldots, N-1$, i N parno,

$$\boxed{\textit{uslov O} \qquad \sum_n c(n)c(n-2m) = \delta(m), \qquad d(k) = (-1)^k c(N-1-k)}$$

Uslov ortogonalnosti u frekvencijskom domenu $\qquad (z = e^{\imath\omega},\ |z| = 1,\ \overline{z} = z^{-1})$

$$c(k) = \sqrt{2}h(k) \quad \longrightarrow \quad \widehat{c}(\omega) = \sum_k c(k)e^{-\imath k\omega}, \qquad C(z) = \sum_k c(k)z^{-k}$$

$$\begin{aligned}\widehat{c}(\omega+\pi) &= \sum c(k)e^{-\imath k(\omega+\pi)} = \sum c(k)\left(e^{\imath\omega}e^{\imath\pi}\right)^{-k} \\ &= \sum c(k)\left(-e^{\imath\omega}\right)^{-k} = \sum c(k)(-z)^{-k} = C(-z)\end{aligned}$$

Gustina energijskog spektra

$$\begin{aligned}P(z) &= |C(z)|^2 = C(z)\,\overline{C(z)} = C(z)\,C(z^{-1}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} c(k)z^{-k}\right)\left(\sum_{l=0}^{N-1} c(l)z^{l}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} c(k)c(l)z^{-(k-l)} \\ &= \sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} c(k)c(k-n)\right)z^{-n} = \sum_{n=-N+1}^{N-1} p(n)z^{-n}\end{aligned}$$

Zbog ortogonalnosti ostaju samo neparni stepeni po z,

$$p(2m) = \sum_k c(k)c(k-2m) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } m = 0 \\ 0 & \text{ako je } m \neq 0 \end{cases}$$

$P(z)$ je realna nenegativna funkcija, pa mora biti $p(n) = p(-n)$,

$$P(z) = 1 + \sum_{k=1}^{N/2} p(2k-1)\big(z^{-(2k-1)} + z^{2k-1}\big)$$

$$z^{-m} + z^m = e^{-\imath m\omega} + e^{\imath m\omega} = 2\cos m\omega$$

$$\widehat{p}(\omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N/2} p(2k-1)\cos(2k-1)\omega$$

$$P(z) + P(-z) = 2, \quad \text{ili} \quad \widehat{p}(\omega) + \widehat{p}(\omega+\pi) = 2$$

uslov O $\qquad |C(z)|^2 + |C(-z)|^2 = |\widehat{c}(\omega)|^2 + |\widehat{c}(\omega+\pi)|^2 = 2$

$\diamond$ Haar-ov filtar $\quad P(z) = 1 + \frac{1}{2}(z^{-1} + z), \quad \widehat{p}(\omega) = 1 + \cos\omega$

$$\widehat{p}(\omega) = |\widehat{c}(\omega)|^2 = \frac{1}{2}(1 + e^{-\imath\omega})\,(1 + e^{\imath\omega}) \quad \longrightarrow \quad \widehat{c}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e^{-\imath\omega})$$

Koeficijenti filtra su $\quad c(0) = c(1) = 1/\sqrt{2}, \quad$ tj. $\quad h(0) = h(1) = 1/2$

$P(z) \geq 0, \quad$ realna funkcija, $\quad \widehat{p}(0) = 2, \quad \widehat{p}(\pi) = 0 \qquad$ *uslov O* važi!

$\diamond \qquad P(z) = \left(1 + \frac{z^{-1}+z}{2}\right)^2, \qquad$ tj. $\qquad \widehat{p}(\omega) = (1 + \cos\omega)^2$

$$c(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-\imath\omega}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + e^{-\imath\omega} + \frac{1}{2}e^{-2\imath\omega} \quad \rightarrow \quad c(0) = c(2) = \frac{1}{2},\, c(1) = 1,$$

$P(z)$ sadrži parne stepene z, $\quad \widehat{p}(0) \neq 2, \qquad$ *uslov O* ne važi!

Analogno, krov funkcija (linearni splajn) nije ortogonalna na svoje translacije

◇ Daubechies filtar D2 $\widehat{p}(\omega) = (1+\cos\omega)^2(1-\frac{1}{2}\cos\omega)$

$$\widehat{p}(\omega) = 1 + \frac{3}{2}\cos\omega - \frac{1}{2}\cos^3\omega$$

$$P(z) = -\frac{1}{16}z^3 + \frac{9}{16}z + 1 + \frac{9}{16}z^{-1} - \frac{1}{16}z^{-3}$$

Množenjem sa drugim činiocem (takođe pozitivan) anuliraju se parni stepeni, i

$$\widehat{p}(0) = 2, \qquad \widehat{p}(\pi) = 0$$ *uslov O* važi!

Određujemo koeficijente filtra $c(k)$ kao koeficijente polinoma (po z^{-1})

$$C(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(b(0) + b(1)z^{-1}\right)$$

Prvi činilac je određen u prethodnom primeru, a drugi potiče od filtra

$$\widehat{q}(\omega) = 1 - \frac{1}{2}\cos\omega \qquad \text{tj.} \qquad Q(z) = 1 - (z^{-1}+z)/4$$

Treba naći polinom po z koji pomnožen sa sebi konjugovanim daje $Q(z)$,

$$1 - \frac{1}{4}(z^{-1} + z) = \left(b(0) + b(1)z^{-1}\right)\left(b(0) + b(1)z\right),$$

$$\begin{array}{lcl} b(0)^2 + b(1)^2 = 1, & & b(0) = (1+\sqrt{3})/\sqrt{8} \\ & \longrightarrow & \\ b(0)\,b(1) = -1/4 & & b(1) = (1-\sqrt{3})/\sqrt{8} \end{array}$$

Dobijen je poznati ortogonalni *Daubechies filtar* D_2 (Ingrid Daubechies)

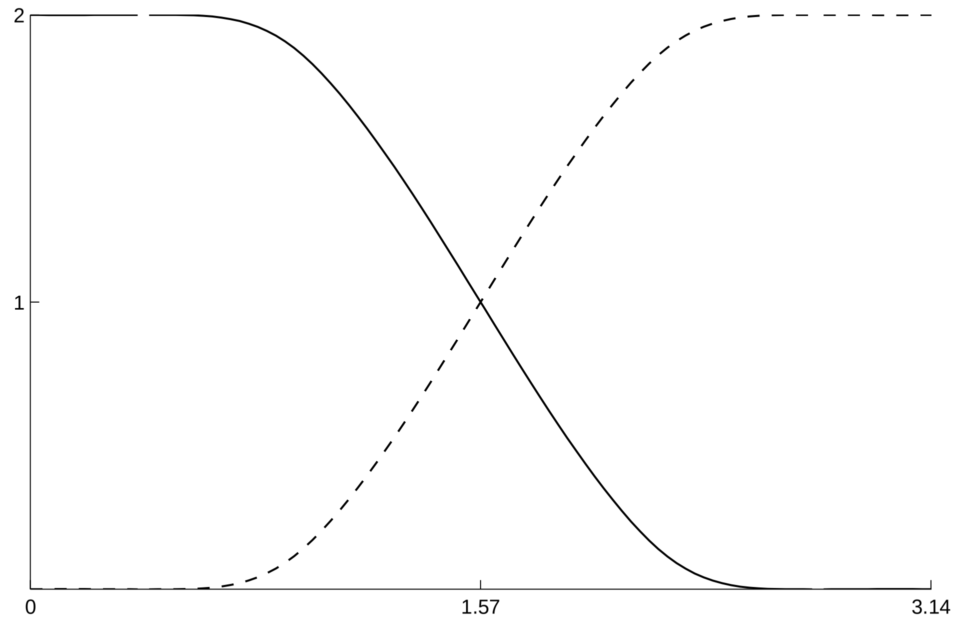
$$C(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{3}) + (3+\sqrt{3})z^{-1} + (3-\sqrt{3})z^{-2} + (1-\sqrt{3})z^{-3}\right)$$

Koeficijenti $c(k)$ određuju Db2 funkciju skaliranja, a ovi uzeti u obrnutom poretku sa naizmeničnom promenom znaka, definišu i Db2 talasić.

Nisko-frekvencijski filtar $\widehat{c}(\omega)$ ima dvostruku nulu za $\omega = \pi$, $(z = -1)$, tj. odziv je ravan u tački π (važna osobina za aproksimaciju talasićima).

Pridruženi visoko-frekvencijski filtar $\widehat{d}(\omega)$, koji izgleda kao lik u ogledalu nisko-frekvencijskog filtra, ima dvostruku nulu za $\omega = 0$ i dvostruku vrednost 1 za $\omega = \pi$.

Na slici su predstavljeni $|\widehat{c}(\omega)|^2$ i $|\widehat{d}(\omega)|^2 = |\widehat{c}(\omega + \pi)|^2$



Zbir funkcija je konstantan, tako da nema deformacije amplitude. Zaravnjenost oko $\omega = 0$ i $\omega = \pi$ daje veliku tačnost u okolini ovih frekvencija, a ne tako veliku u sredini. Banka filtara je ortogonalna i daje savršenu rekonstrukciju.

Daubechies filtri

Ingrid Daubechies je ideju opisanu u poslednjem primeru uopštila i tako došla do *Maksimalno ravnih filtara* (maxflat) ili *Daubechies filtara* (1988).

Ova važna familija filtara sa $2r$ koeficijenata ima dve ključne osobine

- Ortogonalni su (*uslov O*)
- Frekvencijski odzivi su maksimalno ravni za $\omega = 0$ i $\omega = \pi$, tj. imaju nulu reda r za $\omega = \pi$ (*uslov* A_r)

Daubechies filtri generišu značajnu familiju talasića DbN

- Ortogonalni su
- Imaju kompaktan nosač na intervalu $[0, N-1] = [0,\ 2r-1]$
- Povećava im se regularnost sa povećanjem r
- Povećava im se glatkost sa povećanjem r

Osim za prvih nekoliko filtara u familiji, ne postoje jednostavne formule za nalaženje koeficijenata $c(n)$.

Daubechies filtri se konstruišu polazeći od gustine energijskog spektra $\widehat{p}(\omega)$,

$$\widehat{p}(\omega) = |\widehat{c}(\omega)|^2 = p(0) + 2 \sum_{1}^{2r-1} p(n) \cos n\omega$$

$2r$ koeficijenata $p(n)$ je određeno sa:

- r uslova ortogonalnosti

  uslov O $\qquad p(0) = 1, \qquad p(2) = p(4) = \cdots = p(2r-2) = 0$

- r uslova za ravan odziv

  uslov A_r $\qquad \widehat{c}(\pi) = \widehat{c}'(\pi) = \cdots = \widehat{c}^{(r-1)}(\pi) = 0$

$$\widehat{c}(\pi) = \sum_n c(n)\, e^{-\imath n\pi} = \sum_n c(n)(-1)^n = 0$$

uslov A_1 $$\sum_{\text{neparno } n} c(n) = \sum_{\text{parno } n} c(n)$$

$$\widehat{c}^{(k)}(\pi) = \sum_n c(n)(-\imath\, n)^k e^{-\imath n\pi} = (-\imath)^k \sum_n c(n) n^k (-1)^n$$

uslov A_r $$\sum_{n=0}^{2r-1} (-1)^n n^k c(n) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1,$$

Uslov A_1 važi i za koeficijente $p(n)$, jer je za $\omega = \pi$

$$\widehat{p}(\pi) = \sum_{1-2r}^{2r-1} p(n) e^{-\imath n\pi} = \sum_{1-2r}^{2r-1} (-1)^n p(n) = |\widehat{c}(\pi)|^2 = 0$$

Kako je na osnovu *uslova O* $\quad p(2m) = \delta(m),\quad$ sledi da je

$$\sum_{\text{neparno } n} p(n) = \sum_{\text{parno } n} p(n) = p(0) = 1$$

Iz uslova ortogonalnosti, takođe, sledi

$$\widehat{c}(\pi) = 0, \qquad \widehat{p}(\pi) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \widehat{p}(0) = 2, \qquad \widehat{c}(0) = \pm\sqrt{2}$$

Za nisko-frekvencijske filtre ćemo izabrati znak $+$,

$$\sum_n c(n) = \widehat{c}(0) = \sqrt{\widehat{p}(0)} = \sqrt{2}$$

(poznati uslov normiranja funkcije skaliranja).

Uslove ortogonalnosti i zaravnjenosti filtra možemo izraziti i preko koeficijenata $h(n) = c(n)/\sqrt{2}$ filtra $\widehat{h}(\omega)$

$$\sum_{n=0}^{2r-1} h(n) = 1, \qquad \widehat{h}(0) = 1$$

uslov O $$\sum_{n=0}^{2r-1} h(n)h(n-2k) = \frac{1}{2}\delta(k), \qquad |\widehat{h}(\omega)|^2 + |\widehat{h}(\omega+\pi)|^2 = 1$$

uslov A_r $$\sum_{n=0}^{2r-1} (-1)^n n^k h(n) = 0, \qquad \widehat{h}^{(k)}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1$$

Zahtev da $\widehat{c}(\omega)$ ima nulu reda r u tački π (*uslovi* A_r) znači da ima oblik

$$\widehat{c}(\omega) = \left(\frac{1+e^{-\imath\omega}}{2}\right)^r \widehat{q}(\omega)$$

$\widehat{c}(\omega)$ je polinom stepena $2r-1$, pa je $\widehat{q}(\omega)$ polinom (po $e^{-\imath\omega}$) stepena $r-1$, Njegovih r koeficijenata se određuje tako da važi *uslov O* za gustinu energijskog spektra

$$\begin{aligned}\widehat{p}(\omega) = |\widehat{c}(\omega)|^2 &= \left(\frac{1+e^{-\imath\omega}}{2}\,\frac{1+e^{\imath\omega}}{2}\right)^r |\widehat{q}(\omega)|^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}(2+e^{-\imath\omega}+e^{\imath\omega})\right)^r |\widehat{q}(\omega)|^2 = \left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)^r |\widehat{q}(\omega)|^2\end{aligned}$$

Kada se odredi $\widehat{p}(\omega)$, razlaže se na proizvod polinoma $\widehat{c}(\omega)$ i njemu konjugovanog polinoma. Određivanje činioca $\widehat{c}(\omega)$ je uvek moguće, ali nije jednostavno.

Rezime

Četiri uslova, koji se primenjuju direktno na koeficijente banaka filtara, a čije posledice se odražavaju na osobine funkcije skaliranja i talasiće, igraju centralnu ulogu u ovoj teoriji.

- *Uslov PR* Savršena rekonstrukcija (perfect reconstruction)
- *Uslov O* Ortogonalnost
- *Uslov* A_r Maksimalno ravan filter
- *Uslov E* Uslov po sopstvenim vrednostima matrica filtra

Uvedimo sledeće oznake:

$H_0(z)$ nisko-frekvencijski filtar banke analize
$H_1(z)$ visoko-frekvencijski filtar banke analize
$F_0(z)$ nisko-frekvencijski filtar banke sinteze
$F_1(z)$ visoko-frekvencijski filtar banke sinteze

Uslov PR Savršena rekonstrukcija (perfect reconstruction)

Banka sinteze invertuje banku analize sa l kašnjenja

Faza analize

Nisko-frekvencijskim filtrom $H_0(z)$ delujemo na ulazni signal $X(z)$ i dobijamo izlazni signal $\overline{H}_0(z)X(z)$. Kompresija za dva proizvodi signal

$$(\downarrow 2)\left(\overline{H}_0(z)X(z)\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{H}_0(z^{1/2})X(z^{1/2}) + \overline{H}_0(-z^{1/2})X(-z^{1/2})\right)$$

Analogno, delovanjem visoko-frekvencijskim filtrom $\overline{H}_1(z)$ na ulazni signal $X(z)$, posle kompresije za dva, dobijamo

$$(\downarrow 2)\left(\overline{H}_1(z)X(z)\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{H}_1(z^{1/2})X(z^{1/2}) + \overline{H}_1(-z^{1/2})X(-z^{1/2})\right)$$

Faza sinteze

Prvo vršimo dekompresiju za dva ova dva signala,

$$(\uparrow 2)\left(\frac{1}{2}\big(\overline{H}_0(z^{1/2})X(z^{1/2}) + \overline{H}_0(-z^{1/2})X(-z^{1/2})\big)\right) = \frac{1}{2}\big(\overline{H}_0(z)X(z) + \overline{H}_0(-z)X(-z)\big)$$

$$(\uparrow 2)\left(\frac{1}{2}\big(\overline{H}_1(z^{1/2})X(z^{1/2}) + \overline{H}_1(-z^{1/2})X(-z^{1/2})\big)\right) = \frac{1}{2}\big(\overline{H}_1(z)X(z) + \overline{H}_1(-z)X(-z)\big)$$

Primenom filtara sinteze, F_0 na prvi i F_1 na drugi signal, dobijaju se signali

$$\text{nisko-frekvencijski izlaz} = \frac{1}{2}F_0(z)\big(\overline{H}_0(z)X(z) + \overline{H}_0(-z)X(-z)\big)$$

$$\text{visoko-frekvencijski izlaz} = \frac{1}{2}F_1(z)\big(\overline{H}_1(z)X(z) + \overline{H}_1(-z)X(-z)\big)$$

Njihova suma je izlazni signal iz filtra sinteze.

Pri savršenoj rekonstrukciji izlazni signal mora biti identičan ulaznom signalu sa eventualnim kašnjenjem za l,

$$\frac{1}{2}\left(F_0(z)\overline{H}_0(z) + F_1(z)\overline{H}_1(z)\right) X(z) \\ +\frac{1}{2}\left(F_0(z)\overline{H}_0(-z) + F_1(z)\overline{H}_1(-z)\right) X(-z) = z^{-l}X(z)$$

odakle sledi

$$F_0(z)\overline{H}_0(z) + F_1(z)\overline{H}_1(z) = 2z^{-l}$$

$$F_0(z)\overline{H}_0(-z) + F_1(z)\overline{H}_1(-z) = 0$$

U teoriji talasića ovi uslovi vode ka biortogonalnim talasićima.

Uslov O Ortogonalnost

Ovo je poseban slučaj savršene rekonstrukcije kada su filtri banke analize i banke sinteze identični. Banka analize se invertuje sebi transponovanom. To znači da je banka sinteze definisana matricom koja je transponovana matrica matrice banke analize. Za frekvencijske odzive važe veze

$$|\widehat{h}_0(\omega)|^2 + |\widehat{h}_0(\omega+\pi)|^2 = 1,$$

$$H_1(z) = -z^{1-2p}\overline{H_0(-z)}, \qquad F_0(z) \equiv H_0(z), \quad F_1(z) \equiv H_1(z).$$

U teoriji talasića posledica ove osobine jeste da su talasići ortogonalni u odnosu na dilataciju i translaciju.

Ortogonalnost isključuje simetriju koeficijenata. Simetričan ortogonalni konačan filtar može imati samo dva koeficijenta različita od nule, a to je Haar-ov filtar.

Uslov A_r *Maksimalno ravan filtar*

Frekvencijski odziv filtra ima nulu reda r u tački π,

$$H_0^{(k)}(\pi) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, r-1.$$

U teoriji talasića to proizvodi tačnost reda r aproksimacije određene funkcijama skaliranja $\varphi(t-k)$, i r iščezavajućih momenata talasića $\psi(t)$. Brzina opadanja koeficijenata razvoja funkcije po talasićima je reda r za glatke funkcije.

Uslov E Uslov po sopstvenim vrednostima matrica filtra

Ovaj uslov nema efekta u teoriji filtara, ali je bitan u teoriji talasića. U kaskadnom algoritmu određuje uslov za konvergenciju ka funkciji skaliranja $\varphi(t)$ i glatkost talasića. Garantuje stabilnost bazisa talasića.