Јануарски писмени испит из Анализе 3А за смерове В и Н, 12. јануар 2020.

1. Дато је пресликавање $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ дефинисано са $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$.

а) Одредити минималну σ-алгебру $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{Z}$ такву да је $g := |f|$ $\mathfrak{M}$-мерљиво пресликавање. Испитати да ли су и пресликавања f и f^2 $\mathfrak{M}$-мерљива.

б) Доказати да је за свако $\lambda \geqslant 0$ пресликавање $\mu\colon \mathfrak{M} \to [0,+\infty]$, дефинисано са $\mu(A) = \sum\limits_{x\in A} \frac{\lambda}{2^{|x|}}$, једна коначна мера на $\mathfrak{M}$. Одредити λ тако да μ буде вероватносна мера.

в) Доказати да $g \in L^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{M}, \mu)$ за свако $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и израчунати $\|g\|_p$.

2. Дат је низ функција $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ дефинисан са $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^4x^2}$.

а) Испитати равномерну конвергенцију низа $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на $[0,1]$.

б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

3. Доказати да важи једнакост:

$$\int_0^{+\infty} \cos\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}dx = 2\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}\right).$$

4. Нека је $f \in L^4(X,\mu) \cap L^{12}(X,\mu)$ и нека је $\|f\|_{12} = 1$. Доказати да $f \in L^9(X,\mu)$ и да је $\|f\|_9^6 \leqslant \|f\|_4$.

5. Нека је $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ низ Риман-интеграбилних функција таквих да постоје $C, \delta > 0$ такви да је

$$\int_0^1 f_n^2(x)dx \leqslant Cn^{1-\delta}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да тада низ функција $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан са $g_n := \dfrac{f_n}{\sqrt{n}}$ конвергира ка нули по Лебеговој мери m.

6. На Лебеговој σ-алгебри подскупова од $\mathbb{R}$ је дефинисана комплексна мера

$$\nu(A) = 2im(A \cap [-1,1]) + \int_{A\cap[0,+\infty)} e^{\frac{i3\pi}{2}-x}dm,$$

где је m Лебегова мера.

а) Доказати да је $\nu << m$ и одредити $\dfrac{d\nu}{dm}$, као и $\dfrac{d|\nu|}{dm}$.

б) Наћи $|\nu|$ и израчунати $\dfrac{d\nu}{d|\nu|}$.