Први колоквијум из Анализе 3А за смерове В и Н, 1. децембар 2019.

1. Дат је низ скупова $A_n = \{z \in \mathbb{C} : |\mathfrak{Re} z| \leqslant 1, -1 + (-1)^n < \mathfrak{Im} z < 3 + 2 \cdot (-1)^n + \frac{1}{n}\}$.
   а) Одредити $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.
   б) Израчунати $m_{\mathbb{C}}(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n)$, $m_{\mathbb{C}}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)$, $\liminf\limits_{n\to\infty} m_{\mathbb{C}}(A_n)$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} m_{\mathbb{C}}(A_n)$ и упоредити их, где је $m_{\mathbb{C}}$ Лебегова мера на $\mathbb{C}$.

2. Дати су скупови $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $Y = \{a, b, c, d, e\}$ и пресликавање $\varphi\colon X \to Y$ дефинисано са $\varphi(-2) = e$, $\varphi(-1) = \varphi(1) = b$, $\varphi(0) = a$ и $\varphi(2) = c$.
   а) Наћи минималну σ-алгебру $\mathfrak{M}$ генерисану са $\{\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(c), \varphi^{-1}(d), \varphi^{-1}(e)\}$.
   б) Испитати $\mathfrak{M}$-мерљивост функција $f_1, f_2, g\colon X \to \mathbb{R}$ дефинисаних са $f_1(x) = \operatorname{sgn} x$, $f_2(x) = x \mod 4$, $g(x) = x^2$ и $f = f_1 + f_2$.
   в) Доказати да постоји јединствена вероватносна мера μ на $\mathfrak{M}$ која није комплетна и узима једнаке вредности на једночланим скуповима у $\mathfrak{M}$.

3. Нека је на Лебеговој σ-алгебри над $\mathbb{R}$ дефинисана мера $\mu(A) = m(A \cap [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]) + e\chi_A(\frac{\pi}{6}) + \sqrt{6}\chi_A(\frac{2}{9})$, где је m Лебегова мера на $\mathbb{R}$.
   а) Одредити $\mu(\mathbb{R})$, $\mu(\mathbb{Q})$ и $\mu(C)$, где је C Канторов скуп.
   б) Доказати да је функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\pi}, & x = 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{x^2}, & x \in C \setminus \{0\} \\ \sin^2 x, & x \in \mathbb{R} \setminus C \end{cases}$$

Лебег-мерљива и μ-интеграбилна и израчунати $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu$.

4. Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{5}{2}} x^5 e^{-nx^2}}{\ln(1+x)} dx$.

Први колоквијум из Анализе 3А за смерове В и Н, 1. децембар 2019.

1. Дат је низ скупова $A_n = \{z \in \mathbb{C} : |\mathfrak{Re} z| \leqslant 1, -1 + (-1)^n < \mathfrak{Im} z < 3 + 2 \cdot (-1)^n + \frac{1}{n}\}$.
   а) Одредити $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.
   б) Израчунати $m_{\mathbb{C}}(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n)$, $m_{\mathbb{C}}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)$, $\liminf\limits_{n\to\infty} m_{\mathbb{C}}(A_n)$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} m_{\mathbb{C}}(A_n)$ и упоредити их, где је $m_{\mathbb{C}}$ Лебегова мера на $\mathbb{C}$.

2. Дати су скупови $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $Y = \{a, b, c, d, e\}$ и пресликавање $\varphi\colon X \to Y$ дефинисано са $\varphi(-2) = e$, $\varphi(-1) = \varphi(1) = b$, $\varphi(0) = a$ и $\varphi(2) = c$.
   а) Наћи минималну σ-алгебру $\mathfrak{M}$ генерисану са $\{\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b), \varphi^{-1}(c), \varphi^{-1}(d), \varphi^{-1}(e)\}$.
   б) Испитати $\mathfrak{M}$-мерљивост функција $f_1, f_2, g\colon X \to \mathbb{R}$ дефинисаних са $f_1(x) = \operatorname{sgn} x$, $f_2(x) = x \mod 4$, $g(x) = x^2$ и $f = f_1 + f_2$.
   в) Доказати да постоји јединствена вероватносна мера μ на $\mathfrak{M}$ која није комплетна и узима једнаке вредности на једночланим скуповима у $\mathfrak{M}$.

3. Нека је на Лебеговој σ-алгебри над $\mathbb{R}$ дефинисана мера $\mu(A) = m(A \cap [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]) + e\chi_A(\frac{\pi}{6}) + \sqrt{6}\chi_A(\frac{2}{9})$, где је m Лебегова мера на $\mathbb{R}$.
   а) Одредити $\mu(\mathbb{R})$, $\mu(\mathbb{Q})$ и $\mu(C)$, где је C Канторов скуп.
   б) Доказати да је функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\pi}, & x = 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{x^2}, & x \in C \setminus \{0\} \\ \sin^2 x, & x \in \mathbb{R} \setminus C \end{cases}$$

Лебег-мерљива и μ-интеграбилна и израчунати $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu$.

4. Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{5}{2}} x^5 e^{-nx^2}}{\ln(1+x)} dx$.