Јунски писмени испит из Теорије Мере и Интеграције, 24. јун 2019.

1.Нека је $A = \{(n,n) | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n,-n) | n \in \mathbb{Z}\}$. На простору $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R}^2))$ дефинисано је пресликавање $\mu \colon \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty]$, $\mu(E) := \sum\limits_{(x,y)\in E\cap A} |y|$.

а) Доказати да је μ мера на $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R}^2))$.

б) Наћи $\mu(E_1)$ и $\mu(E_2)$, где су $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2019\}$ и $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 || x| + |y| \leqslant 2019\}$.

в) Израчунати $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(|x|+|y|)^3} d\mu$ и $\int_{E_3} \sqrt{5x^2+4y^2} d\mu$, где је $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \max\{|x|,|y|\} < 2019\}$.

2. Показати да постоје две Борелове функције на $\mathbb{R}$ које се поклапају на густом подскупу од $\mathbb{R}$ а нису једнаке скоро свуда.

3. Израчунати следећу граничну вредност: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{n}} \frac{(nx)^{\frac{2}{3}}}{\operatorname{arctg} x} dx$.

4. Доказати једнакост: $\int_0^1 \ln x^4 \operatorname{arctg} x dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(2n-1)}$.

5. Нека је $f \in L^3(X,\mu) \cap L^6(X,\mu)$ и нека је $\|f\|_6 = 32$. Доказати да $f \in L^5(X,\mu)$ и да је $\|f\|_5 \leqslant 16 \|f\|_3^{\frac{1}{5}}$.

6. Израчунати $\min\limits_{a,b\in\mathbb{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} |a + x^2 + bx^4|^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

7. Дати су низови $a, b \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{n} 2^n$, $n = 0,1,2,\ldots$.

а) Испитати за које $1 \leqslant p < +\infty$ низови a и b припадају простору $\ell^p = \left\{ x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} | \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n|^p}{5^n} < +\infty \right\}$.

б) Показати да је са $< x, y > := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n \overline{y_n}}{5^n}$ дат један скаларни производ на ℓ^2.

в) Наћи угао између вектора a и b у Хилбертовом простору ℓ^2.

Јунски писмени испит из Теорије Мере и Интеграције, 24. јун 2019.

1.Нека је $A = \{(n,n) | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n,-n) | n \in \mathbb{Z}\}$. На простору $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R}^2))$ дефинисано је пресликавање $\mu \colon \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty]$, $\mu(E) := \sum\limits_{(x,y)\in E\cap A} |y|$.

а) Доказати да је μ мера на $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R}^2))$.

б) Наћи $\mu(E_1)$ и $\mu(E_2)$, где су $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2019\}$ и $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 || x| + |y| \leqslant 2019\}$.

в) Израчунати $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(|x|+|y|)^3} d\mu$ и $\int_{E_3} \sqrt{5x^2+4y^2} d\mu$, где је $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \max\{|x|,|y|\} < 2019\}$.

2. Показати да постоје две Борелове функције на $\mathbb{R}$ које се поклапају на густом подскупу од $\mathbb{R}$ а нису једнаке скоро свуда.

3. Израчунати следећу граничну вредност: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{n}} \frac{(nx)^{\frac{2}{3}}}{\operatorname{arctg} x} dx$.

4. Доказати једнакост: $\int_0^1 \ln x^4 \operatorname{arctg} x dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(2n-1)}$.

5. Нека је $f \in L^3(X,\mu) \cap L^6(X,\mu)$ и нека је $\|f\|_6 = 32$. Доказати да $f \in L^5(X,\mu)$ и да је $\|f\|_5 \leqslant 16 \|f\|_3^{\frac{1}{5}}$.

6. Израчунати $\min\limits_{a,b\in\mathbb{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} |a + x^2 + bx^4|^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

7. Дати су низови $a, b \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{n} 2^n$, $n = 0,1,2,\ldots$.

а) Испитати за које $1 \leqslant p < +\infty$ низови a и b припадају простору $\ell^p = \left\{ x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} | \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n|^p}{5^n} < +\infty \right\}$.

б) Показати да је са $< x, y > := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n \overline{y_n}}{5^n}$ дат један скаларни производ на ℓ^2.

в) Наћи угао између вектора a и b у Хилбертовом простору ℓ^2.