Јулски писмени испит из Теорије Мере и Интеграције, 8. јул 2019.

1. Нека је $\mathcal{P}$ скуп свих парних и $\mathcal{N}$ скуп свих непарних природних бројева.
   а) Доказати да је $\mathfrak{M} = \{E \subseteq \mathbb{N} | E \subseteq \mathcal{P} \veebar \mathcal{N} \subseteq E\}$ једна σ-алгебра подскупова од $\mathbb{N}$.
   б) Доказати да је пресликавање $\mu\colon \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ дефинисано са $\mu(E) := \displaystyle\sum_{n \in E \cap \mathcal{P}} \frac{1}{n^2}$ једна мера на $\mathcal{M}$.
   в) Израчунати $\mu(\mathcal{N})$, $\mu(\mathcal{P})$, $\mu(\mathbb{N})$, $\mu(4\mathbb{N})$, $\mu(\mathbb{P})$ и $\mu(\mathbb{K})$, где $\mathbb{P}$ скуп свих простих бројева, а $\mathbb{K}$ скуп свих квадрата природних бројева.
   г) Доказати да је функција $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ мерљива у односу на $\mathfrak{M}$, па затим и израчунати $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu$.

2. Израчунати следећу граничну вредност: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4\sqrt{n}}} \frac{n \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + n^2 x^4}} dx.$

3. Доказати једнакост: $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1 + x^2) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)^2}.$

4. Нека је $f \in L^4(X, \mu) \cap L^{16}(X, \mu)$ и нека је $\|f\|_{16} = 1$. Доказати да $f \in L^7(X, \mu)$ и да је $\|f\|_7 \leqslant \|f\|_4^{\frac{3}{7}}$.

5. Нека је $M = \left\{ x \in \ell^2 | \displaystyle\sum_{n=1}^{2} x_n = \sum_{n=1}^{4} x_n = \sum_{n=1}^{5} x_n \right\}$ и низ a дефинисан са $a_n = \dfrac{i^n}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots.$
   а) Доказати да $a \in \ell^2$ и израчунати $\|a\|_2$.
   б) Одредити $M^{\perp}$ и израчунати $d(a, M)$.

Јулски писмени испит из Теорије Мере и Интеграције, 8. јул 2019.

1. Нека је $\mathcal{P}$ скуп свих парних и $\mathcal{N}$ скуп свих непарних природних бројева.
   а) Доказати да је $\mathfrak{M} = \{E \subseteq \mathbb{N} | E \subseteq \mathcal{P} \veebar \mathcal{N} \subseteq E\}$ једна σ-алгебра подскупова од $\mathbb{N}$.
   б) Доказати да је пресликавање $\mu\colon \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ дефинисано са $\mu(E) := \displaystyle\sum_{n \in E \cap \mathcal{P}} \frac{1}{n^2}$ једна мера на $\mathcal{M}$.
   в) Израчунати $\mu(\mathcal{N})$, $\mu(\mathcal{P})$, $\mu(\mathbb{N})$, $\mu(4\mathbb{N})$, $\mu(\mathbb{P})$ и $\mu(\mathbb{K})$, где $\mathbb{P}$ скуп свих простих бројева, а $\mathbb{K}$ скуп свих квадрата природних бројева.
   г) Доказати да је функција $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ мерљива у односу на $\mathfrak{M}$, па затим и израчунати $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu$.

2. Израчунати следећу граничну вредност: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4\sqrt{n}}} \frac{n \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + n^2 x^4}} dx.$

3. Доказати једнакост: $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1 + x^2) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)^2}.$

4. Нека је $f \in L^4(X, \mu) \cap L^{16}(X, \mu)$ и нека је $\|f\|_{16} = 1$. Доказати да $f \in L^7(X, \mu)$ и да је $\|f\|_7 \leqslant \|f\|_4^{\frac{3}{7}}$.

5. Нека је $M = \left\{ x \in \ell^2 | \displaystyle\sum_{n=1}^{2} x_n = \sum_{n=1}^{4} x_n = \sum_{n=1}^{5} x_n \right\}$ и низ a дефинисан са $a_n = \dfrac{i^n}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots.$
   а) Доказати да $a \in \ell^2$ и израчунати $\|a\|_2$.
   б) Одредити $M^{\perp}$ и израчунати $d(a, M)$.