Бројни редови

Зора Голубовић

12.10.2021. године

1. Израчунати суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c+n+1-(c+n)}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n)(c+n+1)} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n-1)(c+n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{c+n-1} - \frac{1}{c+n}) - \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{(c+n-1)} - \frac{1}{(c+n+1)}) = \frac{1}{c} - \frac{1}{2}(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+1}) = \frac{1}{2c(c+1)}$.

2. Одредити парцијалну суму, суму и остатак реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$.

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (\arctan \frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k+1}) = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{n+1}$, $s = \frac{\pi}{4}$, $r_n = \arctan \frac{1}{n+1}$.

3. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$.

Конвергира по Кошијевом критеријуму; нека је $\varepsilon > 0$, оценимо разлику $S_{n+p} - S_n$: $|S_{n+p} - S_n| = |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ за $n > n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}]$.

4. Доказати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \ln(\frac{n+1}{n})$.

$0 < \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}$ где је коришћено да је $\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$ за $x \geq 0$, па је задати ред конвергентан на основу поредбеног критеријума.

5. Испитати конвергенцију редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(\frac{a}{n})^n$, $a > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{!(n+1)}{(2n)!}$.

Коши, Даламбер, Раабе и поредбени тест.

6. Доказати да је $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1.$

7. Наћи вредности следећих бесконачних производа: $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$, $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

$\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$.

8. Установљавајући конвергенцију одговарајућег реда, доказати да је: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$.

Ред са општим чланом $a_n=\frac{n!}{n^n}$ конвергира по Даламберу јер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^(n+1)}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$, па општи члан тежи нули. Аналогно, ред са општим чланом $a_n=\frac{n!}{n^n}$ конвергира по Даламберу јер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(n+1)^2}=0<1$, па општи члан тежи нули. Ред са општим чланом $a_n=\frac{(n!)^n}{n^(n^2)}$ конвергира по Кошију јер $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, па његов општи члан тежи нули.

9. Испитати за које је вредности параметра α ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ апсолутно конвергентан, а за које је условно конвергентан.

За $\alpha\in(0,1]$ ред условно конвергира, а за $\alpha>1$ ред конвергира апсолутно.

10. Испитати апсолутну конвергенцију редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}})\arctan(\frac{\sin n}{n})$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Оба апсолутно конвергирају.