

1 Варијациони рачун

1. Наћи екстремале функционала:

а) $J[y] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2)dx$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$,

б) $J[y] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$,

в) $J[y] = \int_0^1 yy'^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt[3]{4}$,

г) $J[y] = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

а) Ојлер-Лагранжова једначина је облика $6x - y'' = 0$, $y = x^3 + Cx + D$, одакле се сменом у граничне услове добија систем $-1 - C + D = 1$, $D = 0$, па је $y = x^3 - 2x$ екстремала посматраног функционала.

б) $-y'' - y' + 2y = 0$ има опште решење облика $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, па се сменом у граничне услове добија систем једначина $C_1 e + C_2 e^{-2} = 1$, $C_2 e^2 + C_2 e^{-4} = 0$, чије решење је $C_2 = \frac{e^2}{e^{-3}-1}$, $C_1 = 1 - C_2 e^{-2}$.

в) $-y'^2 - 2yy'' = 0$ је ДЈ која се решава сменом $z = y'$: $-z^2 - 2yz'z = 0$, одакле је $z = 0$, $y = C$ или $z' + \frac{z}{2y} = 0$, $y \neq 0$, што је линеарна ДЈ првог реда $(\sqrt{y}z)' = 0$, $z = \frac{C}{\sqrt{y}}$, $\sqrt{y}dy = Cdx$, $y = (\frac{3}{2}Cx + \frac{3}{2}D)^{\frac{2}{3}}$. Из граничних услова се добијају екстремале, $y(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$, $y(x) = (-3x+1)^{\frac{2}{3}}$.

г) $y'' + y - 2 \cos x = 0$ је ДЈ чији хомогени део решења је $C_1 \cos x + C_2 \sin x$, а партикуларни део решења је облика $y_p = (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x$, односно након смене у ДЈ $y_p = b \cos x + (x+d) \sin x$. Дакле, опште решење је $y = (x + D_2) \sin x + D_1 \cos x$, одакле се сменом у граничне услове налазе екстремале $y = (x + D_2) \sin x$.

2. Наћи екстремале функционала: а) $J[y(x), z(x)] = \int_1^2 (y'^2 + z^2 + z'^2)dx$

$y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $z(1) = 0$, $z(2) = 1$,

б) $J[y(x), z(x)] = \int_1^2 (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)dx$ $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $z(0) = 0$,

$z(\pi) = -1$.

а) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y'' = 0,$$

$$z - z'' = 0,$$

одакле је

$$y = C_1 x + C_2,$$

$$z = C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y = x,$$

$$z = \frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}$$

. б) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y'' + 2y - z = 0,$$

$$z'' - y = 0,$$

одакле је елиминацијом z ,

$$y^{(IV)} + 2y'' + y = 0,$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x),$$

$$z = y'' + y.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y = C_2 \sin x - \frac{x}{\pi} \cos x,$$

$$z = C_2 \sin x + \frac{1}{\pi}(2 \sin x - x \cos x),$$

где је C_2 произвољна константа.