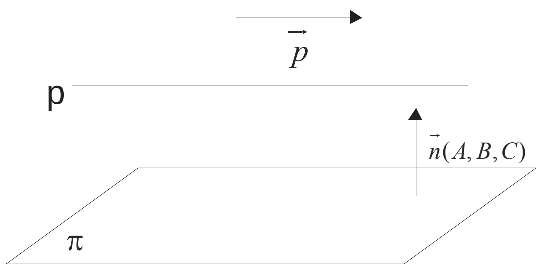
PRAVA I RAVAN

Kakav može biti međusobni položaj prave i ravni ?

Posmatrajmo pravu $p: \dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ i ravan $\pi: \ Ax+By+Cz+D=0$

Naravno, znamo da je vektor pravca prave $\vec{p}=(l,m,n)$ a vektor normalnosti ravni $\vec{n}=(A,B,C)$

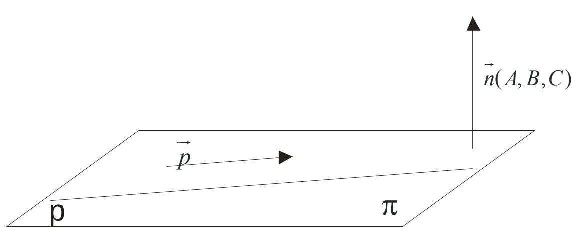
i) Prava i ravan su paralelni



Ovde su vektori $\vec{p}=(l,m,n)$ i $\vec{n}=(A,B,C)$ medjusobno normalni , pa je :

$\vec{n}\cdot\vec{p}=0 \rightarrow Al+Bm+Cn=0$

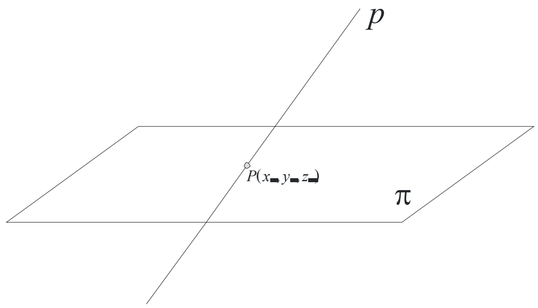
ii) Prava p leži u ravni π



Ovde mora da važe dva uslova :

Prvo da kao kod paralelnosti bude $Al+Bm+Cn=0$ a onda i da je $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, što znači da tačka koja pripada pravoj pripada i ravni.

iii) Prava prodire ravan



Ako prava p prodire ravan π onda je $Al+Bm+Cn\neq 0$, to jest vektori pravca prave i vektor normalnosti ravni nisu medjusobno normalni.

Primer 1.

Nađi prodor prave $p: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-5}{-1}$ kroz ravan $\alpha: \ 2x-4y-z-2=0$

Rešenje:

Najpre ćemo pravu prebaciti u parametarski oblik

$$p: \ \frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-5}{-1}=t \to \frac{x+3}{2}=t \wedge \frac{y-2}{-4}=t \wedge \frac{z-5}{-1}=t$$

$x=2t-3$

$y=-4t+2$

$z=-t+5$

Sad ovo zamenimo u jednačinu ravni:

$2x-4y-z-2=0$

$2(2t-3)-4(-4t+2)-(-t+5)-2=0$

$4t-6+16t-8+t-5-2=0$

$21t=21 \to t=1$

Vratimo t=1 u x,y i z

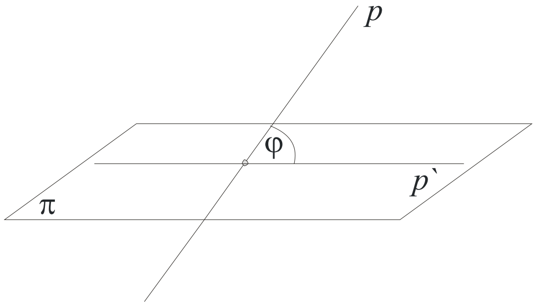
$x=2t-3 \to x=2\cdot 1-3=-1 \to x=-1$

$y=-4t+2 \to y=-4\cdot 1+2=-2 \to y=-2$

$z=-t+5 \to z=-1+5=4 \to z=4$

Dakle, tačka prodora je $P(-1,-2,4)$

Ugao izmedju prave i ravni je oštar ugao izmedju prave i njene normalne projekcije na ravan.



Ako je vektor pravca prave $\vec{p}=(l,m,n)$ a vektor normalnosti ravni $\vec{n}=(A,B,C)$ onda je :

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{p}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{p}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|Al+Bm+Cn\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Specijalno,prava je normalna na ravan ako su vektori $\vec{p}=(l,m,n)$ i $\vec{n}=(A,B,C)$ kolinearni, to jest $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$

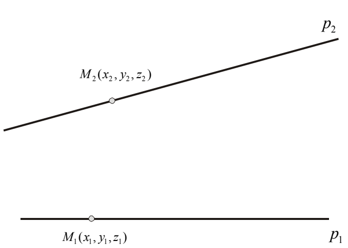
Kako odrediti rastojanje neke tačke od prave?

Ako to rastojanje obeležimo sa ***d*** , a tražimo rastojanje tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$ od prave $p:\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$,

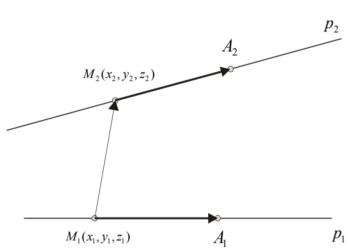
onda to rastojanje računamo po formuli $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{p}\right|}{\left|\vec{p}\right|}$

Kako odrediti najkraće rastojanje izmedju pravih ?

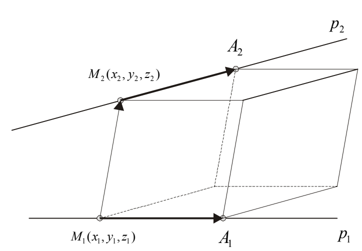
Neka su nam date prave : $p_1:\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ i $p_2:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$



slika 1



slika 2



slika 3

Najpre iz datih jednačina pročitamo tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$. (slika 1.)

Zatim oformimo vektore $\overrightarrow{M_1A_1} = \overrightarrow{p_1} = (l_1, m_1, n_1)$, $\overrightarrow{M_2A_2} = \overrightarrow{p_2} = (l_2, m_2, n_2)$ i $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (slika 2.)

Nad ovim vektorima konstruišemo paralelopiped! Visina tog paralelopipeda , povučena iz tačke $M_2(x_2, y_2, z_2)$ je ustvari najkraće rastojanje izmedju ovih prava. (slika 3.)

To jest : $\boxed{d = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2})\right|}{\left|\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2}\right|}}$

Primer 2.

Nadji najkraće rastojanje izmedju pravih $p_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ i $p_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$

Rešenje:

Iz datih jednačina ćemo najpre pročitati tačke i vektore pravaca datih pravih...

$$p_1 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1} \to M_1(0,0,1) \wedge \overrightarrow{p_1} = (2,3,1)$$

$$p_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1} \to M_2(-1,2,1) \wedge \overrightarrow{p_2} = (2,1,-1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-1-0, 2-0, 1-1) = (-1, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k} = (-4, 4, -4)$$

$$\left|\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

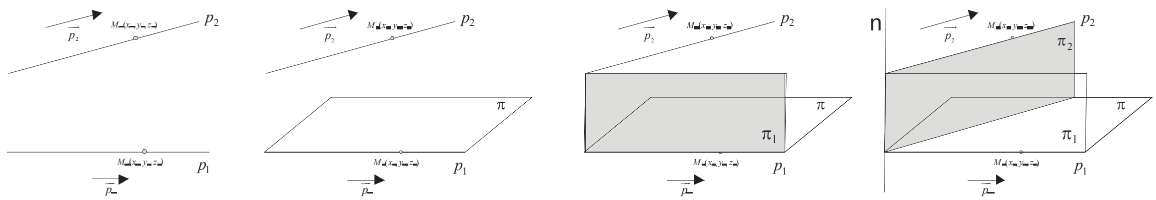
$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2}) = (-1, 2, 0) \cdot (-4, 4, -4) = 4 + 8 - 0 = 12$$

Sad iskoristimo formulu:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2})\right|}{\left|\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2}\right|} = \frac{12}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Kako odrediti zajedničku normalu za dve mimoilazne prave?

Neka su nam date prave $p_1 : \dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ i $p_2 : \dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$



slika 1 slika 2 slika 3 slika 4

Najpre uočimo njihove tačke i vektore pravaca (slika 1.)

Uočimo ravan π koja sadrži pravu p_1 i paralelna je sa pravom p_2. Vektor normalnosti ove ravni π ćemo naći preko

$\vec{n}(A,B,C) = \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2}$ (slika 2.)

Dalje postavimo ravan π_1 koja sadrži pravu p_1 i normalna je na ravan π (slika 3.)

Jednačinu ove ravni ćemo naći preko : $\pi_1 : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A & B & C \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$

Dalje postavimo ravan π_2 koja sadrži pravu p_2 i normalna je na ravan π (slika 4.)

Slično kao malopre, jednačinu ravni π_2 tražimo $\pi_2 : \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ A & B & C \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$

Presek ove dve ravni daje pravu koja je zajednička normala za dve date prave!

Primer 3.

Napisati jednačinu zajedničke normale pravih : $p_1 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$ i $p_2 : \dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$

<u>*Rešenje:*</u>

Najpre odavde pročitamo tačke i vektore pravaca...

$p_1 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1} \to M_1(1,0,0) \wedge \overrightarrow{p_1} = (-1,2,1)$

$p_2: \ \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2} \to M_2(0,0,0) \wedge \overrightarrow{p_2}=(0,1,2)$

Dalje tražimo $\vec{n}(A,B,C)=\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}$

$$\vec{n}(A,B,C)=\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(3,2,-1)$$

Tražimo ravan π_1:

$$\pi_1: \ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A & B & C \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0 \to \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \to 2x-y+4z-2=0$$

Tražimo ravan π_2:

$$\pi_2: \ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ A & B & C \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \to \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \to 5x-6y+3z=0$$

Jednačina tražene normale je $n: \ \left\{ \begin{array}{l} 2x-y+4z-2=0 \\ 5x-6y+3z=0 \end{array} \right.$

Naravno, ova prava je data kao presek dve ravni, ako od vas traže u zadatku, lako će te je prebaciti u neki od drugih oblika...

www.matematiranje.com