Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Пета недеља

1.1 Разни задаци

1. Скицирати график функције $f(x) = x^4 - 4x^2$.

Решење. Домен функције је $\mathbb{R}$. Функција је парна и пресјеца апсцису у тачкама $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$. Функција је позитивног знака на $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, а негативног знака на $(-2, 2)$. Функција нема асимптота, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Нуле првог извода се достижу за $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$, а знак првог извода је позитиван на $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, а негативан на $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. Други извод је једнак нули за $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, тј то су превојне тачке, а други извод је позитивног знака на $(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty)$.

2. У координатној равни нацртати скуп $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [x]y = x\{y\}\}$.

Решење.

$$x = n + \alpha, \alpha \in [0, 1),$$
$$y = m + \beta, \beta \in [0, 1),$$

Из $n(m + \beta) = (n + \alpha)\beta$ следи $nm = \alpha\beta \in [0, 1)$, односно $nm = 0$, тј.бар један од бројева је цео.

3. Да ли постоји пресликавање $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ тако да је $f(f(x)) = x + 1$ за свако $x \in \mathbb{Z}$?

Решење. Применом f на $f(f(x)) = x + 1$, добија се $f(f(f(x))) = f(x) + 1 = f(x + 1)$ и $f(0) = m \in \mathbb{Z}$. Стога имамо

$$f(m) = f(m - 1) + 1,$$
$$f(m - 1) = f(m - 2) + 1,$$

...

$$f(1) = f(0) + 1,$$
$$f(0) = m,$$

одакле се сабирањем добија $f(m) = 2m$ и $2m = 1$. Контрадикција.

4. Наћи највећу вредност функције $f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x$ на интервалу $(0, \infty)$.

Решење. Применом аритметичко-геометријске неједнакости, добија се

$$f(x) \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + 1,$$

при чему неједнакост важи за $x = 3$.

5. Доказати неједнакост

$$a + b + c \leqslant \frac{2a^3}{a^2+b^2} + \frac{2b^3}{b^2+c^2} + \frac{2c^3}{c^2+a^2},$$

за $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Решење. Приметимо да је $\frac{2a^3}{a^2+b^2} \geqslant 2a - b$, аналогно за b, c. Једнакост се достиже за $a = b = c$.

6. Доказати да је

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{b+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3},$$

за све $a, b, c, d > 0$.

Решење. Нека је Iизраз на левој страни. Тада је

$$4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)I \geqslant (a + b + c + d)^2.$$

Како је $3(a + b + c + d)^2 \geqslant 8(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$, то следи неједнакост.

7. Решити диференцну једначину

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n,$$

$a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

Решење. Карактеристична једначина је $x^2 - x + 1 = 0$, а опште решење је $a_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3}$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова $C_1 = 2$, $C_2 = 0$.

8. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Одредити $f[A]$ и $f^{-1}[B]$,за $A = [-1, 0) \cup (1, 2)$, $B = (-1, 4]$.

Решење. $f[A] = (-1, 3)$ и $f^{-1}[B] = [-\sqrt{5}, 0) \cup (0, \sqrt{5}]$.

9. Одредити инфимум и супремум скупа $S = \{(-1)^n \frac{2n+3}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Решење. Елементи скупа S су облика $(-1)^n[2+\frac{5}{2n}]$. Посматрајмо одговарајући низ. Чланови тог низа са непарним индексима чине растући низ који тежи ка -2кад $n \to \infty$, а чланови низа који одговарају непарним индексима чине опадајући низ који тежи ка 2 кад $n \to \infty$. Следи, сви чланови су већи од првог, а мањи од другог члана овог низа, па је $\inf S = -\frac{9}{2}$, а $\sup S = \frac{13}{4}$.

10. Нека је $S = \{\frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$. Наћи $\sup S$ и $\inf S$.

Решење. За $n = 1$ је $\frac{m}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{n}{m} = m+1+\frac{2}{m}$, па је $\sup S = \infty$. Како је $\frac{m}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{n}{m} > \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geqslant 2$ и како за $m = n$ важи да $\frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{2}{m} \to 2, m \to \infty$, следи да је $\inf S = 2$.