

Задаци, Математика 4

Зора Голубовић

Јануар, 2018

1 час, Лапласова трансформација, примене на диференцијалне једначине

2 час, Парцијалне једначине II реда

1. Одредити тип ПДЈ $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x) u_{yy} - \cos x u_y = 0$ и свести је на канонски облик.

Дата једначина је хиперболичног типа, а канонски облик је $y_{\xi\eta} = 0$.

2. Одредити тип ПДЈ $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x = 0$ и свести је на канонски облик.

Дата једначина је параболичног типа, а канонски облик је $u_{\eta\eta} + 2\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 u_{\xi} = 0$.

3. Одредити тип ПДЈ $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$ и свести је на канонски облик.

Дата једначина је елиптичног типа, а канонски облик је $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_{\xi}}{\xi+\eta} + \frac{u_{\eta}}{2\eta} = 0$.

4. а) Одредити области у којима је једначина $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$ хиперболичног, параболичног и елиптичног типа и у сва три случаја написати формуле трансформације за свођење на канонски облик.

3 час, Елементи варијационог рачуна

1. Нека је $A = \{y \in C^2[0, 1] : y(0) = 0, y(1) = 1\}$. Наћи стационарне тачке $J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx$.

2. Одредити геодезијске криве на сфери полупречника са центром у координатном почетку.

3. Нека је $k > 0$ реалан број, $J(y) = \int_0^{\pi} (y'^2 - ky^2) dx$. Одредити стационарне тачке при почетним условима $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
4. Исписати Ојлер-Лагранжове једначине у поларном облику: $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} dx$.
5. Наћи једначину криве која спаја тачке $(x_{1,1})$ и (x_2, y_2) и чијом ротацијом око x -осе се добија најмања површина омотача.
6. $J(y) = \int (y'^2 - 2 + 4y) dx + 2(y(0))^2 + (y(\frac{\pi}{2}))^2$
7. $J(y) = \int_{-1}^1 y + a\sqrt{1 + y'^2} dx$, $y(-1) = y(1) = 0$

4 час, Несвојствени интеграл

1. Испитати конвергенцију у зависности од $\alpha \in \mathbb{R}$:
- $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} dx$,
 - $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} dx$,
2. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^1 \frac{\arctan \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2+x} \sqrt[3]{x}} dx$.
3. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^1 \frac{x - \arctan x^x}{x^2(1+x^2)} dx$.
4. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.
5. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(x^5+2)} dx$.
6. Испитати конвергенцију интеграла:
- $\int_1^{\infty} \frac{\arctan ax}{x^\alpha} dx$,
 - $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan ax}{x^\alpha} dx$.
7. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin^p x \cos^q x)}$, $p, q \in \mathbb{Q}$.
8. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bxdx$, $a, b \neq 0$, $a > 0$.
9. Испитати конвергенцију интеграла у зависности од $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\infty} (\frac{\ln(1+x)}{x^a})^2 dx$.

10. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$.
11. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{(\sin x + \cos x)\sqrt{2x}}$.
12. Испитати конвергенцију интеграла $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

5 час, Несвојствени интеграл, Абелов и Дирихлеов критеријум

6 час, Коши-Риманови услови, холоморфност

7 час, Конформност, преглед елементарних функција

8 час, Интеграл, основна Кошијева теорема

9 час, Кошијева интегрална формула, Тејлоров и Лоранов ред

10 час, Гама, бета функција

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, \quad q > 0,$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0,$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p},$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

- 11 час, Беселова функција и ортогонални полиноми
- 12 час, Фуријеов интеграл
- 13 час, Елементарни увод у бесконачнодимензионалне просторе: пример l_2
- 14 Литература

1. <http://gen.lib.rus.ec/>
2. Ј. Кнежевић-Миљановић, С. Јанковић, Ј. Манојловић, В. Јовановић, Парцијалне диференцијалне једначине, теорија и задаци, Београд, 2000.