Analitička geometrija

Neka su dati vektori $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} = (c_1, c_2, c_3)$.

Skalarni proizvod vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ su ortogonalni ako je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Vektorski proizvod vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, u oznaci $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, je vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Vektorski proizvod dva vektora je nula–vektor ako i samo ako su vektori kolinearni.

Intenzitet vektorskog proizvoda $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jednak je površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Mešoviti proizvod vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$, u oznaci $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$, je

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Mešoviti proizvod tri vektora je nula ako i samo ako su vektori komplanarni.

Mešoviti proizvod tri vektora po apsolutnoj vrednosti jednak je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad ovim vektorima.

Neka je $\mathbf{n} = (A, B, C)$ vektor normale ravni α, a $M(x_1, y_1, z_1)$ jedna tačka u ravni. Skalarni oblik jednačine ravni je

$$\alpha : \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Ako su $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ i $M_3(x_3, y_3, z_3)$ tri nekolinearne tačke, jednačina ravni koju one određuju je

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Neka je $\mathbf{p} = (l, m, n)$ vektor pravca prave p, a $M(x_1, y_1, z_1)$ jedna tačka na pravoj. Simetrični oblik jednačine prave je

$$p: \quad \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n},$$

a parametarske jednačine prave p su

$$x = x_1 + tl, \quad y = y_1 + tm, \quad z = z_1 + tn.$$

Ako su $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ dve date tačke, jednačina prave koju one određuju je

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Zadaci

1. Dati su vektori $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (-2, -1, 2)$ i $\mathbf{c} = (1, -1, 2)$.

a) Razložiti vektor $\mathbf{c}$ po vektorima $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

b) Odrediti ugao koji vektor $\mathbf{c}$ gradi sa ravni koju određuju vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Rešenje: a) Odredićemo vektorski proizvod vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + \mathbf{k} = (1, 0, 1).\end{aligned}$$

Da bismo razložili vektor $\mathbf{c}$ po vektorima $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, treba da odredimo koeficijente α, β i γ u jednakosti

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c},$$

tj.

$$\alpha(1, 1, -1) + \beta(-2, -1, 2) + \gamma(1, 0, 1) = (1, -1, 2).$$

Sada je

$$(\alpha - 2\beta + \gamma, \alpha - \beta, -\alpha + 2\beta + \gamma) = (1, -1, 2),$$

odakle dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta + \gamma &= 1, \\ \alpha - \beta &= -1, \\ -\alpha + 2\beta + \gamma &= 2. \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema dobijamo $\alpha = -3/2$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 3/2$, pa je

$$\mathbf{c} = -\frac{3}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{3}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

b) Vektor normale ravni koju određuju vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ je $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, 0, 1)$. Označimo sa φ ugao između vektora $\mathbf{n}$ i $\mathbf{c}$. Tada je

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}}{||\mathbf{n}||||\mathbf{c}||} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

odakle je $\varphi = \pi/6$. Kako je traženi ugao komplementan uglu φ, to je on jednak $\pi/3$.

2. Dati su vektori

$$\mathbf{a} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{b} = (0, 2, 0), \quad \mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 5\mathbf{b} \quad \text{i} \quad \mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Odrediti vrednost parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da su vektori $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$:
a) ortogonalni; b) paralelni.

Rešenje: a) Uslov ortogonalnosti izražava se preko skalarnog proizvoda

$$\mathbf{p} \perp \mathbf{q} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0. \tag{0.1}$$

Koristeći osobine skalarnog proizvoda, gornja jednakost postaje

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0 &\Leftrightarrow (\alpha\mathbf{a} + 5\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + (15 - \alpha)\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 5\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0. \end{aligned}$$

Zamenom vrednosti skalarnih proizvoda

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) = 3, \\ &\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = (1, 1, 1) \cdot (0, 2, 0) = 2, \\ &\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = (0, 2, 0) \cdot (0, 2, 0) = 4, \end{aligned}$$

uslov ortogonalnosti (0.1) svodi se na jednačinu

$$9\alpha + 2(15-\alpha) - 20 = 0 \;\Leftrightarrow\; 10 + 7\alpha = 0$$

što daje $\alpha = -10/7$.

b) Paralelnost vektora je kolinearnost vektora, tj. uslov paralelnosti vektora $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ izražava se sa

$$\mathbf{p} \| \mathbf{q} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{p} = \lambda\mathbf{q}, \text{ za neko } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

Prelaskom na izraze za $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ po vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, uslov paralelnosti (0.2) postaje

$$\alpha\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = \lambda(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \;\Leftrightarrow\; (\alpha, 10+\alpha, \alpha) = (3\lambda, \lambda, 3\lambda).$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata uređenih trojki dolazimo do sistema jednačina

$$\begin{cases} \alpha = 3\lambda, \\ 10 + \alpha = \lambda, \end{cases}$$

čije je rešenje $\lambda = -5,\ \alpha = -15$.

3. Odrediti mešoviti proizvod vektora

$$\mathbf{a} = (1,0,2), \qquad \mathbf{b} = (0,2,-1), \qquad \mathbf{c} = (1,2,3).$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4.\end{aligned}$$

4. Dati su vektori $\mathbf{a} = (1,2,3)$, $\mathbf{b} = (2,2,1)$ i $\mathbf{c} = (-1,-2,-1)$. Izračunati površinu paralelograma nad vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ i zapreminu paralelopipeda određenog vektorima $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

Rešenje: Površina paralelograma:

$$P_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |(-4,5,-2)| = 3\sqrt{5}.$$

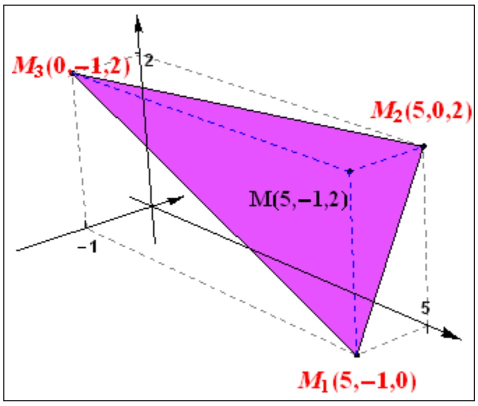
Zapremina paralelopipeda:
s obzirom da je

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

onda je

$$V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} = \big|[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\big| = 4.$$

5. Data je tačka $M = (5,-1,2)$. Neka su M_1, M_2 i M_3 projekcije tačke M na koordinatne ravni. Odrediti površinu trougla $\Delta M_1M_2M_3$.



Rešenje: Neka je M_1 projekcija tačke M na koordinatnu ravan xOy, M_2 na xOz i M_3 na yOz. Njihove koordinate tada glase

$$M_1 = (5,-1,0),$$
$$M_2 = (5,0,2),$$
$$M_3 = (0,-1,2).$$

Kako je

$$P_{\Delta M_1M_2M_3} = P_{\Delta(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3})} = \frac{1}{2}\big|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\big|,$$

gde su

$$\overrightarrow{M_1M_2} = M_2 - M_1 = (5,0,2) - (5,-1,0) = (0,1,2),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = M_3 - M_1 = (0,-1,2) - (5,-1,0) = (-5,0,2)$$

i

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = (2,-10,5),$$
$$\big|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\big| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{129},$$

onda je tražena površina

$$P_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\sqrt{129}.$$

6. Date su prave p_1 i p_2 jednačinama

$$p_1 : \begin{cases} x - y - z + 8 = 0, \\ 5x + y + z + 10 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad p_2 : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ 2x + y - 3z + 9 = 0. \end{cases}$$

Ako je M tačka njihovog preseka i M_1, M_2 i M_3 njene projekcije na koordinatne ose, odrediti zapreminu tretraedra $OM_1M_2M_3$ i površinu trougla $M_1M_2M_3$.

Rešenje: Kako tačka M pripada svakoj od date četiri ravni, to njene koordinate zadovoljavaju sve četiri linearne jednačine. Rešavanjem sistema linearnih jednačina dobijamo $M(-3, 3, 2)$. Projekcije tačke M na $x-$osu, $y-$osu i $z-$osu su redom

$$M_1(-3, 0, 0), \quad M_2(0, 3, 0), \quad M_3(0, 0, 2).$$

Zapremina dobijenog tetraedra se jednostavno računa

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 3 = 3.$$

Kako je

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3, 3, 0), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (3, 0, 2),$$

to je

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6, -6, -9),$$

odakle dobijamo traženu površinu

$$P = \frac{1}{2} ||(6, -6, -9)|| = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 36 + 81} = \frac{3}{2}\sqrt{17}.$$

7. Odrediti tačku B simetričnu tački A (0,-4,-7) u odnosu na pravu

$$(p) : \quad \begin{cases} x + 3y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Rešenje: I način: Označimo $(\beta) : x + 3y - 2z + 1 = 0$ i $(\gamma) : 2x - y + z - 3 = 0$ ravni čijim presekom je definisana prava p. Neka su odgovarajući vektori normala ovih ravni označeni redom sa $\overrightarrow{n_\beta} = (1, 3, -2)$ i $\overrightarrow{n_\gamma} = (2, -1, 1)$.

Kako je B tačka simetrična tački A u odnosu na pravu p, to je duž AB normalna na pravu p i prava p polovi duž AB. Označimo sa $M = p \cap AB$ sredinu duži AB.

Postavimo ravan α kroz tačku A ortogonalno na pravu p. To znači da je vektor normale $\overrightarrow{n_\alpha}$ ravni α proizvoljan vektor koji je kolinearan sa vektorom pravca prave p, dakle ortogonalan na vektore $\overrightarrow{n_\beta}$ i $\overrightarrow{n_\gamma}$. Tako možemo uzeti

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\beta} \times \overrightarrow{n_\gamma} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = (1, -5, -7). \end{aligned}$$

Ravan α sa vektorom normale $\overrightarrow{n_\alpha} = (1, -5, -7)$ i jednom tačkom $A = (0, -4, -7)$ zadata je jednačinom

$$(\alpha) \ : \ x - 5(y + 4) - 7(z + 7) = 0 \ \Leftrightarrow \ x - 5y - 7z - 69 = 0.$$

Tačka M biće prodor prave p kroz ravan α, tj. rešenje sistema jednačina

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 3 = 0, x - 5y - 7z - 69 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -5, \\ z = -6, \end{cases}$$

pa je $M = (2, -5, -6)$. Koordinate tačke B nalazimo iz uslova

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM},$$

tj. $B = 2M - A = 2(2, -5, -6) - (0, -4, -7) = (4, -6, -5)$.

II način: Neka je $M \in p$ ponovo sredina duži AB. Da bismo opisali koordinate tačke M neophodno je opisati koordinate tačaka prave p. Za to nam je potrebna jednačina prave u simetričnom obliku.

$$\begin{aligned} (p)\colon &\begin{cases} x + 3y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y-5}{-5}, \\ x = \dfrac{z-8}{-7} \end{cases} \\ \Rightarrow (p) \ &: \ \frac{x}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-8}{-7}. \end{aligned}$$

Podaci o pravoj p iz simetričnog oblika jednačine su:

- koordinate (0,5,8) jedne tačke sa prave,
- vektor pravca $\mathbf{p} = (1, -5, -7)$ prave p.

Dakle,

$$M = (0, 5, 8) + t(1, -5, -7) = (t, 5 - 5t, 8 - 7t), \quad \text{za neko } t \in \mathbb{R}.$$

Vrednost t dobijamo iz uslova ortogonalnosti $AM \perp p$, odnosno

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{p} = 0, \quad \overrightarrow{AM} = (t, 5-5t, 8-7t) - (0, -4, -7) = (t, 9-5t, 15-7t)\\
&\Leftrightarrow (t, 9-5t, 15-7t) \cdot (1, -5, -7) = 0\\
&\Leftrightarrow t - 5(9-5t) - 7(15-7t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2\\
&\qquad\qquad M = (2, -5, -6).
\end{aligned}$$

Pa je ponovo $B = 2M - A = (4, -6, -5)$.

8. Data je tačka $A(1, 1, -2)$, prava $p: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ i ravan $\alpha: x + 2y + 3z = 11$. Odrediti tačke B i C koje su simetrične tački A u odnosu na pravu p i ravan α redom.

Rešenje: Prvo ćemo odrediti koordinate tačke B. Postavićemo ravan π koja sadrži tačku A i normalna je na pravu p. Jednačina ravni π je

$$2(x-1) - 1(y-1) + 1(z+2) = 0,$$

tj.

$$\pi: \quad 2x - y + z + 1 = 0.$$

Sada ćemo odrediti tačku prodora prave p kroz ravan π. Kako su parametarske jednačine prave p

$$x = 2t + 1, \quad y = -t, \quad z = t + 3,$$

to zamenom u jednačini ravni π dobijamo

$$2(2t+1) + t + t + 3 + 1 = 0,$$

odakle je $t = -1$, pa je presečna tačka $S(-1, 1, 2)$. Dalje, neka je $B(x, y, z)$. Kako je tačka S sredina duži AB, to važi

$$\frac{x+1}{2} = -1, \quad \frac{y+1}{2} = 1, \quad \frac{z-2}{2} = 2,$$

odakle je $x = -3$, $y = 1$, $z = 6$. Dakle, tražena tačka je $B(-3, 1, 6)$.

Postavićemo pravu s koja sadrži tačku A i normalna je na ravan α. Njena jednačina je

$$s: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}.$$

Ako parametarske jednačine prave s

$$x = t + 1, \quad y = 2t + 1, \quad z = 3t - 2,$$

zamenimo u jednačini ravni α dobijamo $t = 1$, pa je presečna tačka $M(2, 3, 1)$. Neka je $C(x, y, z)$. Kako je tačka M sredina duži AC, to je

$$\frac{x+1}{2} = 2, \quad \frac{y+1}{2} = 3, \quad \frac{z-2}{2} = 1,$$

pa je $x = 3$, $y = 5$, $z = 4$. Dakle, tražena tačka je $C(3, 5, 4)$.

9. Date su prave

$$p: \begin{cases} 2x - y = 9, \\ x - y - z = 4 \end{cases} \quad \text{i} \quad q: \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{m} = \frac{z-4}{2}.$$

Odrediti vrednost parametra $m \in \mathbb{R}$ tako da je prava q:

a) paralelna pravoj p;

b) normalna na pravu p.

Rešenje: Vektor pravca prave p je

$$\mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, -1).$$

a) Iz uslova kolinearnosti vektora pravaca pravih p i q imamo

$$(-2, m, 2) = \alpha(1, 2, -1) = (\alpha, 2\alpha, -\alpha),$$

odakle je $\alpha = -2$, pa je $m = -4$.

b) Iz uslova normalnosti vektora pravaca pravih p i q je

$$(-2, m, 2) \cdot (1, 2, -1) = 0,$$

odakle je $2m = 4$, pa je $m = 2$. Ostaje da proverimo da li se prave p i q seku. Neka je tačka $A(9/2, 0, 1/2)$ proizvoljna tačka sa prave p, a $B(1, -3, 4)$ tačka sa prave q. Tada je $\overrightarrow{AB} = (-7/2, -3, 7/2)$, pa je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -\frac{7}{2} & -3 & \frac{7}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

10. Date su ravan $(\alpha):\ x+y+z=7$ i prave

$$(q):\quad \begin{cases} x+3y+z+15=0, \\ x+y-z+3=0, \end{cases} \quad \text{i} \quad (r):\quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2}.$$

Odrediti jednačinu prave p koja je paralelna pravoj q i sadrži zajedničku tačku prave r i ravni α.

Rešenje: Odredimo najpre presečnu tačku R prave r i ravni α. Ona je jedinstveno rešenje sistema

$$\begin{cases} x+y+z=7, \\ \dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{2}, \text{ tj.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=7, \\ x=3y-2 \\ y=-\dfrac{z-3}{2}, \end{cases}$$

Eliminacijom nepoznatih dobijamo

$$R=(7,3,-3).$$

Iz uslova paralelnosti pravih p i q određujemo vektor pravca $\mathbf{p}$ tražene prave p. $\mathbf{p}$ je kolinearan sa vektorm pravca prave q, te je i $\mathbf{p}$ ortogonalan na vektore normala ravni u čijem preseku se nalazi prava q. Označimo vektore normala tih ravni sa

$$\overrightarrow{n_\alpha}=(1,3,1), \qquad \overrightarrow{n_\beta}=(1,1,-1).$$

Za vektor pravca $\mathbf{p}$ onda možemo uzeti bilo koji vektor kolinearan vektorskom proizvodu $\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{n_\beta}$:

$$\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{n_\beta}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}=(-4,2,-2).$$

Za vektor pravca $\mathbf{p}$ možemo uzeti $\mathbf{p}=(2,-1,1)=-\frac{1}{2}(-4,2,-2)$. Jednačina tražene prave p kroz tačku $R=(7,3,-3)$ i vektorom pravca $(2,-1,1)$ je tada

$$(p)\ :\ \frac{x-7}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{1}.$$

11. Data je tačka $M(-1,2,1)$, prava $p:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ i ravan $\alpha:\ x+2y-z=-3$. Odrediti tačke P i Q koje su ortogonalne projekcije tačke M na pravu p i ravan α redom, a zatim izračunati površinu trougla MPQ.

Rešenje: Postavićemo ravan β koja sadrži tačku M i normalna je na pravu p. Dakle,

$$\beta:\quad x+y+z-2=0.$$

Parametarske jednačine prave p su

$$x=t,\quad y=t,\quad z=t-1,$$

pa zamenom u jednačini ravni β dobijamo $t=1$, te je $P(1,1,0)$.

Postavićemo pravu q koja sadrži tačku M i normalna je na ravan α. Dakle,

$$q:\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1},$$

tj.

$$q:\quad x=t-1,\quad y=2t+2,\quad z=-t+1.$$

Zamenom ovih izraza u jednačini ravni α dobijamo $t=-5/6$, pa je tražena tačka $Q(-11/6,1/3,11/6)$.

Dalje je

$$\overrightarrow{MP}=(2,-1,-1),\quad \overrightarrow{MQ}=\left(-\frac{5}{6},-\frac{5}{3},\frac{5}{6}\right),$$

pa je

$$\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{MQ}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 2&-1&-1\\ -\frac{5}{6}&-\frac{5}{3}&\frac{5}{6}\end{vmatrix}=\left(-\frac{5}{2},-\frac{5}{6},-\frac{25}{6}\right),$$

odakle dobijamo traženu površinu

$$P=\frac{1}{2}\left\|\left(-\frac{5}{2},-\frac{5}{6},-\frac{25}{6}\right)\right\|=\frac{5}{12}\sqrt{35}.$$

12. Data je tačka $A(1,1,1)$ i prava $p:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-1}$. Odrediti tačku B simetričnu tački A u odnosu na pravu p. Na pravoj p odrediti tačku C tako da trougao ABC bude jednakostraničan.

Rešenje: Postavićemo ravan α koja sadrži tačku A i normalna je na pravu p. Dakle,

$$\alpha : \quad x - z = 0.$$

Parametarske jednačine prave p su

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = -t,$$

pa zamenom u jednačini ravni α dobijamo $t = 0$, te je $P(0,0,0)$. Neka je $B(x,y,z)$. Kako je tačka P sredina duži AB, to važi

$$\frac{x+1}{2} = 0, \quad \frac{y+1}{2} = 0, \quad \frac{z+1}{2} = 0,$$

odakle je $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$. Dakle, tražena tačka je $B(-1,-1,-1)$.

Koordinate tačke $C(t,0,-t)$ ćemo naći iz uslova

$$d(A,B) = d(A,C) = d(B,C).$$

Odavde sledi

$$2\sqrt{3} = \sqrt{(t-1)^2 + 1 + (-t-1)^2} = \sqrt{(t+1)^2 + 1 + (-t+1)^2},$$

pa je $2t^2 + 3 = 12$, odnosno $t = 3/\sqrt{2}$ ili $t = -3/\sqrt{2}$. Dakle, imamo dve mogućnosti za tačku C:

$$C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad C_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

13. Na pravoj

$$(p) : \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0, \end{cases}$$

odrediti tačku C jednako udaljenu od tačaka $A(-1,-3,1)$ i $B = (3,1,1)$.

Rešenje: I način: Za opis tačaka prave p pogodna je jednačina prave u simetričnom obliku.

$$(p) : \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y-6}{-3}, \\ x = \dfrac{2z-2}{-1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-3/2} = \frac{z-1}{-1/2}}.$$

Iz simetričnog oblika jednačine prave p saznajemo vektor pravca (1,-3/2,-1/2) i jednu tačku (0,3,1) sa prave. To znači da su sve tačke prave p oblika

$$P = (0, 3, 1) + t(1, -3/2, -1/2) = (t, 3 - 3t/2, 1 - t/2), \; t \in \mathbb{R}. \tag{0.3}$$

Tako i tražena tačka $C \in p$ ima koordinate oblika

$$C = (t, 3 - 3t/2, 1 - t/2) = \big(t, \frac{6-3t}{2}, \frac{2-t}{2}\big)$$

za neku konkretnu vrednost $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = A - C \\
&= (-1, -3, 1) - \big(t, \frac{6-3t}{2}, \frac{2-t}{2}\big) \\
&= \big(-t-1, \frac{3t}{2} - 6, \frac{t}{2}\big), \\
\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = B - C \\
&= (3, 1, 1) - \big(t, \frac{6-3t}{2}, \frac{2-t}{2}\big) \\
&= \big(3 - t, \frac{3t}{2} - 2, \frac{t}{2}\big).
\end{aligned}$$

Koordinate tačke C slede iz uslova jednake udaljenosti C od tačaka A i B :

$$|CA| = |CB| \Leftrightarrow |CA|^2 = |CB|^2 \Leftrightarrow$$
$$(t+1)^2 + (6 - 3t/2)^2 + (t/2)^2 = (t-3)^2 + (2 - 3t/2)^2 + (t/2)^2.$$

Sređivanjem poslednjeg izraza prethodnu jednačinu svodimo na $4t = 24$. Tražena tačka C dobija se iz (0.3) za vrednost parametra $t = 6$ i glasi $C = (6, -6, -2)$.

II način: Sve tačke $X = (x, y, z)$ jednako udaljene od tačaka A i B leže u ravni α koja je normalna na duž AB i polovi je (simetralna ravan duži AB). Jednačinu simetralne ravni α možemo dobiti iz uslova jednake udaljenosti tačke X od tačaka A i B :

$$\begin{aligned}
\alpha \; &: \; |AX| = |BX| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(1+x)^2 + (3+y)^2 + (1-z)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2} \\
&\Leftrightarrow x + y = 0.
\end{aligned}$$

Tražena tačka C biće prodor prave p kroz ravan α, tj. koordinate tačke C biće rešenja sistema jednačina

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0, \\ x + y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x, \\ 3x - 2x - 6 = 0, \\ z = \frac{2-x}{2}. \end{cases}$$

Tako ponovo dolazimo do rezultata

$$C = (6, -6, -2).$$

14. Naći tačku M u ravni $\alpha: \ x + 2y + 3z + 4 = 0$ koja je najbliža koordinatnom početku $O(0, 0, 0)$, a zatim odrediti rastojanje između tačaka O i M.

Rešenje: Tačka M je ortogonalna projekcija tačke O na ravan α. Jednačina prave p koja je normalna na ravan α i sadrži koordinatni početak je

$$p: \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Parametarske jednačine prave p su

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = 3t.$$

Kada ove izraze zamenimo u jednačini ravni α dobijamo $14t + 4 = 0$, odakle je $t = -2/7$. Dakle, tražena tačka je $M(-2/7, -4/7, -6/7)$. Konačno je

$$d(O, M) = \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{16}{49} + \frac{36}{49}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}.$$

15. Date su prave

$$p: \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{0} \quad \text{i} \quad q: \quad \begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x + 3y + 3z = 2. \end{cases}$$

a) Dokazati da se prave p i q seku i odrediti zajedničku tačku.

b) Odrediti jednačinu ravni određenu pravama p i q.

Rešenje: Vektor pravca prave q je

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (9, -3, -3).$$

Ako u jednačinama ravni u čijem se preseku nalazi prava q stavimo $y = 0$, dobijamo $x = 4$, $z = -2$. Dakle, jedna tačka na pravoj q je $(4, 0, -2)$, pa je simetrični oblik prave

$$q: \quad \frac{x-4}{9} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{-3}.$$

a) Neka je $A(0,2,-1)$ proizvoljna tačka sa prave p, a $B(4,0,-2)$ neka tačka sa prave q. Onda je $\overrightarrow{AB} = (4,-2,-1)$. Kako je

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

sledi da se date prave seku. Odredimo presečnu tačku P. Parametarske jednačine prave p su

$$x = t, \quad y = -t + 2, \quad z = -1,$$

a prave q

$$x = 9s + 4, \quad y = -3s, \quad z = -3s - 2.$$

Za zajedničku tačku je $s = -1/3$, pa je $P(1,1,-1)$.

b) Budući da se prave p i q seku, to one određuju ravan α. Vektor normale ove ravni je

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (3,3,6).$$

Jednačina ravni α je

$$3x + 3(y-2) + 6(z+1) = 0,$$

tj.

$$\alpha: \quad x + y + 2z = 0.$$

16. Odrediti tačke na pravoj

$$p: \quad \begin{cases} x - y + z = 2, \\ \quad 2x - z = 0, \end{cases}$$

koje su na rastojanju 2 od koordinatnog početka.

Rešenje: Parametarske jednačine prave p su

$$x = t, \quad y = 3t - 2, \quad z = 2t.$$

Sada je

$$\sqrt{t^2 + (3t-2)^2 + 4t^2} = 2,$$

odakle je $t_1 = 0$, $t_2 = 6/7$. Tražene tačke su $A_1(0,-2,0)$ i $A_2(6/7, 4/7, 12/7)$.

17. Date su prave

$$p: \quad \begin{cases} x + 3y + z + 6 = 0, \\ y + z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad q: \quad \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu p i paralelna je sa q i jednačinu ravni β koja sadrži pravu p i normalna je na ravan α.

Rešenje: Vektor pravca prave p je

$$\mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 1),$$

a prave q je $\mathbf{q} = (1, 2, 3)$. Vektor normale ravni α je

$$\mathbf{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5, -5, 5),$$

jedna tačka sa prave p, a time i ravni α, je $P(-3, 0, -3)$, pa je jednačina ravni

$$\alpha: \quad x + y - z = 0.$$

Vektor normale ravni β je

$$\mathbf{n}_\beta = \mathbf{p} \times \mathbf{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 3, 3),$$

pa je jednačina ravni

$$\beta: \quad y + z + 3 = 0.$$

18. Date su ravni

$$(\alpha): \quad 4x - y + 3z - 1 = 0 \quad \text{i} \quad (\beta): \quad x - 5y - z - 2 = 0.$$

Odrediti jednačinu ravni γ koja sadrži koordinatni početak i presek ravni α i β.

Rešenje: Odredimo najpre presek ravni α i β, tj. rešenje sistema

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = 1, \\ x - 5y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19y + 7z = -7, \\ 7x - 16y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-7 - 7z}{19} = \dfrac{z+1}{-19/7}, \\ y = \dfrac{7x - 7}{16} = \dfrac{x-1}{16/7}. \end{cases}$$

Presek ravni α i β predstavlja prava

$$a: \ \frac{x-1}{16/7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-19/7} \Leftrightarrow \frac{x-1}{16} = \frac{y}{7} = \frac{z+1}{-19},$$

sa komponentama:

- jedna tačka sa prave je $A = (1, 0, -1)$,
- vektor pravca prave je $\mathbf{a} = (16, 7, -19)$.

Koordinatni početak $O = (0, 0, 0)$ i tačaka A pripadaju ravni γ. Za treću tačku ravni γ možemo uzeti joňeku tačku prave a, npr. $B = A + \mathbf{a} = (17, 7, -20)$.

Jednačina tražene ravni γ je tada

$$[\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = 0,$$

gde je $X = (x, y, z)$, ili u skalarnom obliku

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 17 & 7 & -20 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \ (\gamma): \ 7x + 3y + 7z = 0.$$

19. Date su prave

$$p_1: \ \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3} \quad \text{i} \quad p_2: \ \begin{cases} x - 2y - z = 5, \\ 3y + z = 0. \end{cases}$$

Odrediti površinu trougla koji obrazuju delovi pravih p_1 i p_2 i $x-$ose, kao i jednačinu ravni kojoj pripada taj trougao.

Rešenje: Tačka preseka prave p_1 i $x-$ose je $P_1(2, 0, 0)$, a tačka preseka prave p_2 i $x-$ose je $P_2(5, 0, 0)$. Tačka preseka pravih p_1 i p_2 je $P_3(6, -1, 3)$. Kako je

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3, 0, 0), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (4, -1, 3),$$

to je

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (0, -9, -3).$$

Površina trougla $P_1P_2P_3$ je

$$P = \frac{1}{2}||(0, -9, -3)|| = \frac{3\sqrt{10}}{2},$$

a jednačina ravni koja sadrži trougao je

$$3y + z = 0.$$

20. Naću ugao između ravni koja sadrži tačke $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(2, -2, 0)$, $M_3(2, 2, 2)$ i Oxy ravni.

Rešenje: Kako je

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (2, -2, 0), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (2, 2, 2),$$

to je vektor normale ravni α koja sadrži date tačke jednak

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -4, 8).$$

Jednačina ravni je

$$\alpha : \quad x + y - 2z = 0.$$

Neka je φ traženi ugao. Ugao φ jednak je uglu između vektora normala ravni α i Oxy ravni. Kako je vektor normale Oxy ravni $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, to je

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{||\mathbf{n}||||\mathbf{k}||} = \frac{8}{\sqrt{96}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

pa je $\varphi = \arccos\sqrt{2/3}$.

21. Data je tačka $A(1, 2, 3)$. Ako su $A_1,\ A_2$ i A_3 projekcije tačke A na koordinatne ravni $Oxy,\ Oxz$ i Oyz redom, odrediti jednačinu ravni određene tačkama $A_1,\ A_2$ i A_3 i rastojanje tačke A od te ravni.

Rešenje:
Odredimo najpre ravan α određenu projekcijama A_1, A_2 i A_3 :

$$\begin{aligned}
&A_1 = (1,2,0),\ A_2 = (1,0,3),\ A_3 = (0,2,3);\\
&X = (x,y,z),\\
&(\alpha):\ \left[\overrightarrow{A_1X}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right] = 0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0\\
&\Leftrightarrow\ 6(x-1) + 3(y-2) + 2z = 0.
\end{aligned}$$

Rastojanje tačke A od ravni α iznosi

$$d(A,\alpha) = \frac{|6(1-1) + 3(2-2) + 2(3-0)|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{6}{7}.$$

22. Odrediti jednačinu ravni α koja na koordinatnim osama odseca segmente $-2, 1$ i 3. U ravni α odrediti tačku A' koja je najbliža tački $A(-1,7,-1)$ kao i rastojanje između tačaka A i A'.

Rešenje: Ravan α koja na koordinatnim osama odseca segmente $-2, 1$ i 3 ima jednačinu (segmentni oblik jednačine ravni)

$$(\alpha):\quad \frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1. \tag{0.4}$$

Najbliža tačka A' u ravni α nalazi se u preseku ravni α i normale p postavljene na ravan α iz tačke A. Odredimo najpre normalu p. Njen vektor pravca je kolinearan sa vektorom normale $n_\alpha = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3})$ ravni α, i p sadrži tačku $A(-1,7,-1)$. Tada je simetrični oblik jednačine prave p

$$(p):\quad \frac{x+1}{-1/2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z+1}{1/3}. \tag{0.5}$$

Koordinate tačke A' dobijamo rešavanjem sistema jednačina određenog sa (0.4) i (0.5)

$$A':\quad \begin{cases} \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{3} = 1, \\ \dfrac{x+1}{-1/2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z+1}{1/3}, \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{62}{49},\ y = \frac{121}{49},\ z = -\frac{123}{49}.$$

Rastojanje između tačaka A i A' je

$$d(A, A') = |A' - A| = |(111/49, -222/49, -74/49)| = 37/7.$$

23. Data je ravan $\alpha: \ 2x + y - 3z = 14$.

a) Odrediti tačku O' simetričnu tački $O(0,0,0)$ u odnosu na ravan α.

b) Odrediti jednačinu prave p simetrične $x-$osi u odnosu na ravan α.

Rešenje: **a)** Jednačina prave koja je normalna na ravan α i sadrži tačku O glasi

$$q: \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3},$$

a u parametarskom obliku

$$x = 2t, \quad y = t, \quad z = -3t,$$

pa zamenom u jednačini ravni α dobijamo $t = 1$. Dakle, presečna tačka ravni α i prave q je $P(2, 1, -3)$. Neka je $O'(x, y, z)$. Kako je tačka P sredina duži OO', to je

$$\frac{0+x}{2} = 2, \quad \frac{0+y}{2} = 1, \quad \frac{0+z}{2} = -3,$$

odakle je $O'(4, 2, -6)$.

b) Jednačina $x-$ose je

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0},$$

a u parametarskom obliku

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Tačka preseka $x-$ose i ravni α je $A(7, 0, 0)$, a to je ujedno i jedna tačka na pravoj p. Da bismo odredili pravu p, neophodna nam je još jedna tačka sa prave p. Kako tačka O pripada $x-$osi, to će tačka O' pripadati pravoj p. Dakle, prava p je određena tačkama A i O' i njena jednačina je

$$p: \quad \frac{x-7}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-6}.$$

24. Date su prave

$$p_1 : \begin{cases} x - y - z - 7 = 0, \\ 3x - 4y - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad p_2 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Dokazati da se prave p_1 i p_2 seku i odrediti jednačinu ravni koja ih sadrži.

Rešenje: Vektor pravca prave p_1 je $\mathbf{p}_1 = (4, 3, 1)$, a prave p_2 je $\mathbf{p}_2 = (1, -1, -1)$. Neka je $P_1(0, -11/4, -17/4)$ proizvoljna tačka sa prave p_1, a $P_2(0, -1, -3)$ neka tačka sa prave p_2. Prave p_1 i p_2 se seku ako i samo ako je mešoviti proizvod vektora $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ i $\overrightarrow{P_1P_2}$ jednak nuli. Kako je $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 7/4, 5/4)$, to je

$$[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \overrightarrow{P_1P_2}] = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = 0,$$

te se prave seku i određuju ravan α. Vektor normale ove ravni je

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 5, -7),$$

pa je jednačina ravni

$$-2(x - 0) + 5(y + 1) - 7(z + 3) = 0,$$

tj.

$$\alpha : \quad -2x + 5y - 7z - 16 = 0.$$

25. Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži presek ravni $x + 2y + 3z - 4 = 0$ i $3x + z - 5 = 0$ i na pozitivnom delu koordinatne ose Oy odseca odsečak jednak $1/2$.

Rešenje: Tražena ravan α odseca na pozitivnom delu $y-$ose odsečak dužine $1/2$. To znači da tačka $A = (0, 1/2, 0)$ pripada ravni α.

Uvedimo oznake ravni

$$(\beta) \ : \ x + 2y + 3z - 4 = 0, \qquad (\gamma) \ : \ 3x + z - 5 = 0,$$

i neka je p presečna prava ovih ravni. Jednačina prave p u simetričnom obliku tada glasi:

$$(p)\ :\ \begin{cases} x+2y+3z-4=0, \\ 3x+z-5=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{y+11/2}{4}, \\ x=-\dfrac{z-5}{3}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow (p):\ \frac{x}{1}=\frac{y+11/2}{4}=\frac{z-5}{-3}. \tag{0.6}$$

Iz (0.6) čitamo:

- jednu tačku $P=(0,-11/2,5)$ sa prave p,
- vektor pravca $\mathbf{p}=(1,4,-3)$ prave p,
- sve tačke prave p imaju koordinate oblika

$$P+\lambda\mathbf{p}=(0,-11/2,5)+\lambda(1,4,-3).$$

Prava p pripada ravni α, pa i tačka sa prave p

$$Q=(0,-11/2,5)+(1,4,-3)=(1,-3/2,2)$$

pripada toj ravni. S obzirom da $A\notin p$, tri nekolinearne tačke A , P i Q u potpunosti određuju ravan α. Jednačinu tražene ravni tada dobijamo iz uslova

$$(\alpha)\ :\ \left[\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]=0 \qquad \text{za } X=(x,y,z),$$

gde su

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX}&=X-A=(x,y,z)-(0,1/2,0)=(x,y-1/2,z),\\ \overrightarrow{AP}&=P-A=(0,-11/2,5)-(0,1/2,0)=(0,-6,5),\\ \overrightarrow{AQ}&=Q-A=(1,-3/2,2)-(0,1/2,0)=(1,-2,2). \end{aligned}$$

U skalarnom obliku jednačina ravni glasi

$$(\alpha)\ :\begin{vmatrix} x & y-1/2 & z \\ 0 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha)\ :\ -2x+5y+6z-5/2=0.$$