

Задаци, Математика III

Зора Голубовић

Октобар, 2018

1 час, Нумерички редови

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ је бесконачни ред са општим чланом a_n .

$S_k = \sum_{i=0}^k a_i$ је парцијална сума реда. Кажемо да ред конвергира ако конвергира низ његових парцијалних сума.

Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

1. Нека је $a_0 \in \mathbb{R}$ и $a_{n+1} = \cos a_n$, $n \geq 0$. Да ли ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира?

Очигледно је $0 \leq a_n \leq 1$, $n \geq 2$. Важи $a_{n+1} = \cos a_n \geq \cos 1 > 0$, одакле општи члан реда не тежи нули кад $n \rightarrow \infty$, па ред дивергира.

2. Хармонијски ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Кошијевим критеријумом се показује да низ парцијалних сума није Кошијев. Нека је $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и $m = 2n$, тада $|S_m - S_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$.

3. Геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$ конвергира.

Одредимо најпре парцијалну суму. Множењем суме $S_n = \sum_{k=1}^n q^k$ са q и одузимањем qS_n од S_n , добија се да се сви чланови сем првог и последњег

пониште, па је $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Сума реда је лимес низа парцијалних сума:
 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

(Кошијев став) Нека је a_n опадајући низ позитивних чланова. Тада су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ еквиконвергентни.

4. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$.

Применом претходног Кошијевог става налазимо да је посматрани ред еквиконвергентан геометријском реду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ који конвергира за $\alpha > 1$.

5. Наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

Посматрајмо суме $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$ и $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$: $S_1 + iS_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{cis}(\frac{2n\pi}{3})}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2}\right)^n = \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{1 - \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2}} = -\frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$. Одавде је $S_1 = \text{Re}\left(-\frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}\right) = -\frac{2}{7}$.

(Даламберов тест) Нека за чланове позитивног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. За $l < 1$ ред конвергира, а за $l > 1$ дивергира.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Конвергира по Даламберу, $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!}}{\frac{n!^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$.

7. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

Конвергира по Даламберу, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1$.

8. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Дивергира по Даламберу, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (n+1)!}{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^n n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(\frac{n+1}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$.

(Кошијев тест) Нека за чланове позитивног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. За $l < 1$ ред конвергира, а за $l > 1$ дивергира.

9. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$.

Конвергира по Кошију, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n-1}{n+1})^{(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{n+1})^{(\frac{-(n+1)}{2})(\frac{-n-1}{-2(n+1)})} = e^{-\frac{1}{2}} < 1$.

10. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$.

Конвергира по Кошију, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n + 3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{\frac{n^5}{1 + (\frac{2}{3})^n}} = \frac{1}{3} < 1$.

11. Кошијевим критеријумом доказати конвергенцију или дивергенцију редова:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Конвергира, дивергира.

(Кошијев интегрални критеријум) Нека је $f(x)$ непрекидна, ненегативна и опадајућа реална функција за $x \geq 1$ и $a_n = f(n)$. Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира акко конвергира несвојствени интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

12. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$.

Конвергира по Кошијевом интегралном критеријуму.

13. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^\alpha}$.

Конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leq 1$ (Кошијев интегрални критеријум).

2 час, Нумерички редови

(Раабеов тест) Нека за ред с позитивним члановима важи $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l$. За $l > 1$ ред конвергира, а за $l < 1$ ред дивергира.

(Гаусов тест) Нека за ред с позитивним члановима важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, $|\theta_n| < C$, $\varepsilon > 0$. За $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$, $\mu > 1$ ред конвергира, а за $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu < 1$ ред дивергира.

1. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{-1} e^{(n+p) \ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-1} e^{(n+p)(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n}))} = 1 + \frac{p-\frac{1}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, конвергира по Раабеу за $p > \frac{3}{2}$.

2. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}$.

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = (1 + \frac{p}{n})^{-1} (1 + \frac{1}{n})^{q+1} = (1 - \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n})) (1 + \frac{q+1}{n} + o(\frac{1}{n})) = 1 + \frac{q+1-p}{n} + o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Раабеу за $q > p$.

3. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right]^p \frac{1}{n^q}$.

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{q+\frac{p}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Раабеу за $q + \frac{p}{2} > 1$.

4. Испитати конвергенцију хипергеометријског реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n$,

где су $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$.

За $\gamma > \alpha + \beta$ ред конвергира, а дивергира за $\gamma \leq \alpha + \beta$ (Гаус).

(Лајбницов тест) Ако је $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, онда алтернативни

ред $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвергира.

5. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n)}{n}$.

Конвергира по Лајбницу, $\frac{\ln^2(n)}{n}$ је опадајући низ који тежи 0.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

Конвергира по Лајбницу, $\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n) = (-1)^n \sin(\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}) = (-1)^n a_n$, при чему је a_n опадајући низ који тежи 0.

(Абелов тест) Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако конвергира ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и низ b_n је монотono ограничен.

(Дирихлеов тест) Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако низ b_n монотono тежи нули

почев од неког члана и низ парцијалних сума реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ је ограничен.

7. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Конвергира као сума таквих редова, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - \cos 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos 2n}{2n}$. Први ред конвергира по Лајбницу јер $\frac{1}{2n}$ опадајуће тежи нули, а други ред конвергира по Дирихлеу.

8. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Конвергира (Лајбниц и Абел).

9. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$.

Конвергира (Дирихле).

Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

10. Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, $a_n \geq 0$, онда конвергира и ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\alpha$, $\alpha \geq 1$.

Општи члан реда тежи нули, па је ограничен са 1.

11. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ конвергира.

Применом аритметичко-геометријске неједнакости и претходног задатка, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3 час, Нумерички редови

1. Израчунати суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c+n+1-(c+n)}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n)(c+n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n-1)(c+n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c+n-1} - \frac{1}{c+n} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c+n-1} - \frac{1}{c+n+1} \right) = \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+1} \right) = \frac{1}{2c(c+1)}.$$

2. Одредити парцијалну суму, суму и остатак реда $\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\arctan \frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k+1} \right) = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{n+1}, \quad s = \frac{\pi}{4}, \quad r_n = \arctan \frac{1}{n+1}.$$

3. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$.

Конвергира по Кошијевом критеријуму; нека је $\varepsilon > 0$, оценимо разлику

$$S_{n+p} - S_n: |S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m} \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

за $n > n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$.

4. Доказати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$.

$0 < \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}$ где је коришћено да је $\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$ за $x \geq 0$, па је задати ред конвергентан на основу поредбеног критеријума.

5. Испитати конвергенцију редова $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{a}{n} \right)^n$, $a > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{!(n+1)}{(2n)!}.$$

Коши, Даламбер, Раабе и поредбени тест.

6. Доказати да је $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

7. Наћи вредности следећих бесконачних производа: $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$, $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$.

$\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$.

8. Установљавајући конвергенцију одговарајућег реда, доказати да је:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0.$$

Ред са општим чланом $a_n = \frac{n!}{n^n}$ конвергира по Даламберу јер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1, \text{ па општи члан тежи нули. Аналогно,}$$

ред са општим чланом $a_n = \frac{n!}{n^n}$ конвергира по Даламберу јер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{\left(\frac{(n+1)!}{n^n}\right)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{(n+1)^2} = 0 < 1, \text{ па општи члан тежи нули. Ред}$$

са општим чланом $a_n = \frac{(n!)^n}{n(n^2)}$ конвергира по Кошију јер $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \text{ па његов општи члан тежи нули.}$$

9. Испитати за које је вредности параметра α ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ апсолутно конвергентан, а за које је условно конвергентан.

За $\alpha \in (0, 1]$ ред условно конвергира, а за $\alpha > 1$ ред конвергира апсолутно.

10. Испитати апсолутну конвергенцију редова $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) \arctan \left(\frac{\sin n}{n} \right)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Оба апсолутно конвергирају.

4 час, Функционални низови и редови

1. Одредити област конвергенције функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n2^{nx}}$.

Ред је конвергентан за свако $x < 0$.

2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$.

Ред је апсолутно конвергентан ако је $0 \leq y \leq 1$ и $|x| < 1$ или $|x| < y$ и $y > 1$. Ако је $x = -1$ и $0 \leq y \leq 1$, ред је условно конвергентан.

3. Испитати равномерну конвергенцију следећих низова на указаним скуповима:

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2} \text{ на } [-1, 1] \text{ и } f_n(x) = \frac{\arctan nx}{\sqrt{n^2+x^2}} \text{ на } [0, \infty).$$

Оба низа су равномерно конвергентна на датим скуповима.

4. Доказати да је низ функција $f_n(x) = \frac{nx+x^2+n^2}{x^2+n^2}$ равномерно конвергентан ка функцији $f(x) = 1$ на сегменту $[0, 1]$. Да ли је низ равномерно конвергентан функцији f на целој реалној правој?

Низ није равномерно конвергентан функцији f на \mathbb{R} .

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A акко $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in$

$$A)(\forall n, p \in \mathbb{N})(n > n_0 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon).$$

5. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$

на скуповима $(0, \infty)$ и (δ, ∞) , $\delta > 0$.

Неравномерно конвергентан, равномерно конвергентан.

6. Испитати конвергенцију и равномерну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на

скупу E , где је

1. $f_n(x) = e^{-n^2x^2} \sin nx$, $E = \mathbb{R}$,

2. $f_n(x) = \arctan \frac{x^3}{n\sqrt{n}}$, $E = [0, \infty)$.

(Вајерштрасов критеријум) Ако постоји низ ненегативних реалних бројева $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, такав да

1. постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n > n_0$ и свако $x \in A$ важи $|a_n(x)| \leq c_n$,

2. ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира,

тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A .

8. Доказати да је сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ непрекидна функција за свако $x \in \mathbb{R}$.

Вајерштрасовим критеријумом.

9. Користећи Вајерштрасов критеријум доказати да је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n^2x \cos n\pi x}{n\sqrt{n}}$

конвергентан на \mathbb{R} и да је $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{x}{n \ln^2(n+1)})$ конвергентан на $[0, 2]$.

10. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2x}{x+n^3} \ln(1 + \frac{x^2}{n})$ на скуповима $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, \infty)$.
Равномерно конвергира на E_1 и неравномерно на E_2 .

5 час, Функционални низови и редови

(Дирихлеов критеријум) Нека:

1. функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ има равномерно ограничене парцијалне суме, тј. постоји константа K , таква да је за све $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in A$ испуњено $|\sum_{k=1}^n b_k(x)| \leq K$,
2. $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који равномерно конвергира нули.

Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергира на A .

1. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$ на \mathbb{R} .

Дирихлеовим критеријумом.

(Абелов критеријум) Нека:

1. функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ је равномерно конвергентан на $A \subset \mathbb{R}$,
2. $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који је равномерно ограничен, тј. за неко $K \in \mathbb{R}$ важи $|a_n(x)| \leq K$ за све $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.

Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергира на A .

2. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}} (1 + \frac{x}{n})^n$ на $[0, 1]$.

Абеловим критеријумом.

3. Наћи $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$.

Резултат: $\frac{\ln 2}{2}$.

4. Одредити област дефинисаности и испитати непрекидност функције $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2 + \frac{1}{n})^n$.

Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ функција интегралних на сегменту $[a, b]$ равномерно конвергира, онда је његов збир интегрална функција и важи $\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx$.

5. Одредити суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, а затим користећи добијени резултат наћи суму бројног реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

Тражене суме су $\arctan x$ и $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Ако је свака од функција $a_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) диференцијабилна и ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ равномерно конвергира на $[a, b]$, а сам ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира бар у једној тачки $x_0 \in [a, b]$, тада тај ред равномерно конвергира на $[a, b]$, његова сума је диференцијабилна функција и важи $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ за $x \in [a, b]$.

6. Наћи суме редова $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.
 $-\ln(1-x)$, $x + (1-x)\ln(1-x)$.

7. Доказати да је низ $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ конвергентан, али не равномерно на сегменту $[0, 1]$, а да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

6 час, Степени редови

Степени ред се унутар свог радијуса конвергенције може диференцирати и интегрисати члан-по-члан. Добијени редови имају исти радијус конвергенције као и полазни ред.

1. Одредити полупречник конвергенције R степеног реда

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n \cdot 2^n} z^n,$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} 5^n z^{3n}.$$

$$1. R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 1.$$

$$2. R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1+i^n}{n2^n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. За $t = 5z^3$ се добија степені ред $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ који конвергира за $5|z^3| < 1$, $z < \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, а дивергира за $|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, $R = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

2. Одредити област конвергенције степеніх редова $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+(-2)^n}}{n} (x+1)^n$.

Одредимо R за први ред:

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{3n^2+2}}{\frac{2n+3}{3(n+1)^2+2}} = 1$, па је ред конвергентан у $(0, 2)$ и треба испитати понашање у крајњим тачкама. За $x = 0$ добија се ред конвергентан по Лајбницу, а за $x = 2$ се добија дивергентан ред (по поредбеном критеријуму). Област конвергенције је $[0, 2)$.

Одредимо R за други ред: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{3}$, па је ред конвергентан у $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ и треба испитати понашање у крајњим тачкама. За $x = -\frac{4}{3}$ добија се ред конвергентан као сума два таква реда (по Лајбницу и Дирихлеу), а за $x = -\frac{2}{3}$ се добија дивергентан ред. Област конвергенције $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

3. Испитати обичну, апсолутну и равномерну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha} x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Написати разлагање функције $f(x) = \sin^3 x$ у степени ред по степенима x , а затим одредити област у којој важи добијени развој.

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-9^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

5. Доказати да је $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$.

6. Разложити у степени ред по степенима x функцију $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

$$f(x) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1 + (-1)^{n+1}) x^n.$$

7. Представити интеграл $\int_0^1 x^{-x} dx$ у облику реда.

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

8. Разложити Лапласов интеграл $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bxdx$ у степени ред по степенима

$b > 0$, користећи чињеницу да је $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

7 час, Степени редови

Функција је аналитичка у некој тачки ако се може представити у облику конвергентног степеног реда у околини те тачке.

Нека је $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ аналитичка функција у некој околини тачке (x_0, y_0, y'_0) . Тада постоји јединствено решење Кошијевог задатка $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, дефинисано у некој околини тачке x_0 и оно је аналитичка функција у тој околини.

Тачка x_0 је регуларна тачка ДЈ ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке у тој тачки. Тачка x_0 је сингуларна тачка ДЈ ако бар једна од функција $p_1(x)$ и $p_2(x)$ није аналитичка у тачки x_0 .

Ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке функције у области $|x - x_0| < R$, тада је свако решење ДЈ јединствена аналитичка функција у овој области.

1. Методом неодређених коефицијената одредити у облику степеног реда решење Кошијевог задатка $y' = x^2 + e^y$, $y(0) = 0$.

$$y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

2. Наћи оно решење диференцијалне једначине $y'' - xy = 0$ које се може приказати у облику степеног реда по степенима x и које задовољава почетне услове $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \dots ((3n-1) \cdot 3n)}.$$

3. Решити ДЈ $y'' - x^2y = 0$.

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \dots 4k(4k-1)} + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8 \dots (4k+1)4k}, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

4. Методом степених редова одредити Кошијево решење у коначном облику једначине $y'' - xy' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1} = x e^{\frac{x^2}{2}}.$$

5. У области $|x| < 1$ одредити опште решење ДЈ $(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$.

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^{2k} + \frac{a_1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3)x^{2k+1}.$$

6. Представити степеним редом опште решење нехомогене ДЈ $y'' + x^2y = 1 + x + x^2$.

$$y(x) = a_0 + a_1x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1-a_0}{12}x^4 - \frac{a_1}{20}x^5 - \frac{1}{60}x^6 + \dots, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Сингуларну тачку x_0 зовемо регуларно-сингуларном тачком ако су функције $(x-x_0)p_1(x)$ и $(x-x_0)^2p_2(x)$ аналитичке функције у тој тачки.

8. Испитати регуларност тачке $x = 0$ за $2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$.

$x = 0$ је регуларно-сингуларна тачка.

8 час, Функционални низови и редови

Нека ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира. Тада се његова сума може наћи по формули

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

1. Наћи суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

$$S = 3e^2.$$

2. Наћи суму реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

$$S = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18}.$$

3. Доказати да је функција $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{((2n)!!)^2}$ решење диференцијалне једначине $xy'' + y' + xy = 0$.

4. Доказати да је функција $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ решење диференцијалне једначине $y^{(4)} - y = 0$.

5. Дат је функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}}$. Одредити за које вредности параметра a

1. функционални ред конвергира,
2. сума реда представља непрекидну функцију,
3. ред може да се диференцира члан по члан.

1. $a > 1$,

2. $a > 1$,

3. $a > 2$.

6. Израчунати $\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx} \right) dx$.

$$e - e^{\frac{1}{e}} - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e}.$$

7. Дат је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)^\alpha}{n(n+1)(n+2)} x^n$.

1. Испитати условну, апсолутну и равномерну конвергенцију реда.

2. За $x = 1$, $\alpha = 1$ сумирати ред.

1. За $\alpha < 2$ ред је апсолутно и равномерно конвергентан на $[-1, 1]$, док је за $x = -1$ и $2 \leq \alpha < 3$ ред условно конвергентан.

2. Тражена сума је 2.

9 час, Фуријеови редови

Систем функција $\frac{1}{2}, \cos \frac{k\pi x}{l}, \sin \frac{k\pi x}{l}, k \in \mathbb{N}, x \in [-l, l]$, се назива основним тригонометријским системом. Он је ортогоналан на $[-l, l]$. Нека је $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрална функција на $[-l, l]$. Бројеви $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$,

$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$, се зову Фуријеови коефицијенти функције f у односу на основни тригонометријски систем. Тригонометријски ред $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l})$ је Фуријеов ред функције f .

1. Нека је $c \in \mathbb{R}, l > 0$ и $0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < \dots$ низ решења једначине $\tan l\xi = c\xi$. Доказати да је систем функција $\{\sin \xi_n x : n \in \mathbb{N}\}$ ортогоналан у $C[0, l]$.

2. Разложити у Фуријеов ред периодичну функцију основне периоде 2π која је на сегменту $[-\pi, \pi]$ одређена формулом

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$a_n = 0, n \geq 0, b_n = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1), n \geq 1.$$

3. Разложити у Фуријеов ред функцију на интервалу $(0, 2l)$

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 \leq x < l, \\ 0, & l \leq x < 2l. \end{cases}$$

$$a_0 = A, a_n = 0, b_n = \frac{A}{n\pi}((-1)^{n+1} + 1), n \geq 1.$$

4. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = |x|$ на интервалу $(-\pi, \pi)$.

$$a_0 = \pi, a_n = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1), b_n = 0, n \geq 1.$$

5. Функцију $f(x) = \max\{\sin x, 0\}$ развити у Фуријеов ред на $(-\pi, \pi)$ и написати како гласи Парсевалова неједнакост.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, a_n = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}, n \geq 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_n = 0, n \geq 2.$$

6. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = x^2$:

1. по синусима,

2. по косинусима,

3. на интервалу $(0, 2\pi)$.

Користећи добијено разлагање доказати да је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

$$1. a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}, b_n = 0, n \geq 1,$$

2. $a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2}((-1)^n - 1), n \geq 1,$
3. $a_0 = \frac{8\pi^2}{3}, a_n = \frac{4}{n^2}, b_n = -\frac{4\pi}{n}, n \geq 1.$

10 час, Фуријеови редови

Нека је део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ са периодом $2l$ продужена на целу бројну праву. Тада тригонометријски Фуријеов ред функције f конвергира у свакој тачки $x \in \mathbb{R}$ ка вредности $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. Ако део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ још задовољава и једнакост $f(-l) = f(l)$, онда њен тригонометријски Фуријеов ред конвергира равномерно на том сегменту и његова сума је једнака $f(x)$ за свако $x \in [-l, l]$.

Фуријеов ред Риман-интеграбилне функције на сегменту $[-l, l]$ се може на том сегменту интегралити члан по члан.

Нека $f \in C^m[-l, l]$ и $f(-l) = f(l), f'(-l) = f'(l), \dots, f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l)$.

Нека поред тога функција f има на сегменту $[-l, l]$ део по део непрекидан извод реда $m + 1$. Тада:

1. конвергира бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{k\pi}{l})^m (|a_k| + |b_k|)$,
2. Фуријеов ред такве функције можемо на датом сегменту диференцирати члан по члан m пута.
 1. Функцију $f(x) = x - [x]$ разложити у Фуријеов ред.
 2. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{4}{3}, a_n = \frac{3}{\pi^2 n^2} (\cos \frac{2n\pi}{3} - 1), b_n = 0, n \geq 1.$$

3. Функцију $f(x) = x, 0 < x < 2$ развити:

1. у Фуријеов синусни ред,
2. у Фуријеов косинусни ред,
3. Применити Парсевалову једнакост на Фуријеов ред добијен под 2. и

на основу тога наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

4. Наћи Фуријеов ред функције $x \rightarrow x^2, 0 < x < 2$ интегралнењем Фуријеовог реда под 1. и на основу тога наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

1. $a_0 = 0, a_n = 0, b_n = -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi, n \geq 1,$
2. $a_0 = 2, a_n = \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1), n \geq 1,$

$$3. S = \frac{\pi^4}{90},$$

$$4. S = \frac{\pi^2}{12}.$$

4. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi, \pi, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Испитати његову конвергенцију и наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

$$a_n = 0, n \geq 0, b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, n \geq 1.$$

5. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sinh ax$, $-\pi \leq x \leq \pi$ и испитати његову конвергенцију.

$$a_n = 0, n \geq 0, b_n = \frac{2 \sinh a\pi}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}n}{a^2+n^2}.$$

6. Доказати да тригонометријски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ не може бити Фуријеов ред ниједне део по део непрекидне функције на $[-\pi, \pi]$.

7. Ако су a_n и b_n Фуријеови коефицијенти интегралне функције f са основним периодом 2π , одредити Фуријеове коефицијенте A_n и B_n функције Стеклова $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$.

$$A_0 = a_0, A_n = \frac{a_n \sinh nh}{nh}, B_n = \frac{b_n \sinh nh}{nh}.$$

11 час, Диференцијалне једначине првог реда у симетричном облику

Нека су у једноструко повезаној области D функције P'_x и Q'_t непрекидне. Следећа два услова су еквивалентна:

$$1. P'_x = Q'_t \text{ са све } (t, x) \in D,$$

2. $P dt + Q dx$ је тотални диференцијал у D .

$$F(t, x) = \int P dt + \int [Q(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int P(t, x) dt] dx$$

$$1. \text{ Решити ДЈ } x(y^2 + 1) dx + (x^2 y + 2y^3) dy = 0.$$

$$x^2 y^2 + x^2 + y^4 = C.$$

$$2. \text{ Решити ДЈ } y' \cos y + x \sin y \cos^2 y - \sin^3 y = 0.$$

$$\frac{1}{\sin^2 y} = 1 + C e^{x^2} - 2 e^{x^2} \int e^{-x^2} dx, y = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \text{ Решити ДЈ } y' \tan y + 4x^3 \cos^3 y = 2x.$$

$$\frac{1}{\cos^3 y} = C e^{-3x^2} + 2x^2 - \frac{2}{3}.$$

$$4. \text{ Решити ДЈ } 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0.$$

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C.$$

Функцију $\mu = \mu(t, x)$ дефинисану, непрекидну и различиту од 0 у једноструко повезаној области D називамо интеграционим фактором једначине $Pdt + Qdx$ ако је $\mu Pdt + \mu Qdx$ једначина са тоталним диференцијалом.

Ако се интеграциони фактор може изразити помоћу функције $\mu = \mu(\omega)$, тада из $(\mu P)'_x = (\mu Q)'_t$ добијамо $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_x - Q'_t}{\omega'_t Q - \omega'_x P} d\omega$.

5. Одредити интеграциони фактор:

1. ДЈ која раздваја променљиве,

2. линеарне ДЈ.

6. Решити ДЈ $x(1 + xy^2)y' = y(2 - 3xy^2)$ и одредити решење које пролази кроз $(-2, 0)$.

$$\frac{x^2 - x^3 y^2}{y} = C, y = 0, x < 0.$$

7. Решити ДЈ $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$.

$$x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C.$$

8. Решити ДЈ $(\sqrt{x^2 - y} + 2x)dx - dy = 0$ ако је познато да има $\mu = \mu(x^2 - y)$.

$$x + 2\sqrt{x^2 - y} = C.$$

12 час, ДЈ које се решавају без и са параметризацијом

1. Решити ДЈ $y'^2 - (y + x^2)y' + x^2y = 0$.

Опште решење $(y - \frac{x^3}{3} - C)(y - De^x) = 0$, (x_0, x_0^2) сингуларне тачке. 2.

Решити ДЈ $(y')^3 - 4yy' = 0$.

3. Решити ДЈ $xy'^2 - 2y' + 4x = 0$.

Опште решење $(\frac{y}{x^2} - \frac{\sqrt{\frac{y}{x^2} - 4}}{x} - C)(D - x(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 4})) = 0$. 4. Решити ДЈ $y - y'^2 e^{y'} = 0$.

$x = e^u(u + 1) + C$, $y = u^2 e^u$ опште решење у параметарском облику.

5. Решити ДЈ $y \ln y' + y' - y \ln y - xy = 0$, $y > 0$, $y' > 0$.

$x = \ln u + \frac{u}{y} - \ln y$, $\ln |y| + C = \frac{u}{y} + \frac{u^2}{2y^2}$ опште решење у параметарском облику.

6. Решити ДЈ $y - yy'^2 - 2y'x = 0$.

$$x = C \frac{v^2 - 1}{v^2}, y = -\frac{2C}{v}.$$

7. Погодном сменом упростити ДЈ и решити је $y^2 y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 + a = 0$.

$$y^2 = -(x - c)^2 + \frac{c^2 - a}{2}.$$

8. Решити ДЈ $x^{n-1} y'^n - nxy' + y = 0$, $n \neq 0$, $x > 0$.

13 час, Лагранжова и Клерова ДЈ

1. Решити ДЈ $y = 3xy' - 7y^3$.
2. Решити ДЈ $y = xy' + \sqrt{y'^2 + 1}$.
3. Решити ДЈ $\ln y' + xy' + ay + b = 0$.
4. Решити ДЈ $yy'^2 + axy' + by = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

14 час, Диференцијалне једначине n -тог реда

$F(x, y^{(n)}) = 0$ је најједноставнија ДЈ чије се опште решење добија узастопном интеграцијом n пута. Ова једначина нема сингуларних решења. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ се сменом $y^{(k)} = z$, трансформише у ДЈ нижег реда.

Ако је ДЈ облика $f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, ред ДЈ се снижава за један сменом $y' = z$, где је $y \neq \text{const}$ нова независно променљива, а $z = z(y)$ за нову непознату функцију.

Диференцијалној једначини хомогенитета m (односно, $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$) ред се снижава сменом $y' = yz$, где је $z = z(x)$ нова непозната функција.

Ако је ДЈ уопштена хомогена ДЈ ($F(e^t x, e^{kt} y, e^{(k-1)t} y', \dots, e^{(k-n)t} y^{(n)}) = e^{mt} F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$) за неке k и m) једначина се трансформише у једначину трећег типа параметризацијом $x = e^t$, $y = ue^{kt}$, где је t нова независно променљива, а $u = u(t)$ нова непозната функција.

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$ је канонски облик линеарне диференцијалне једначине n -тог реда (за $f(x) = 0$ добија се одговарајућа хомогена линеарна ДЈ). Скуп решења посматране једначине образује вектроски простор на пољем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. 1. Решити једначину $x = \frac{y''}{1+y''^2}$.

$y'' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ има опште решење $-\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c_1 x + c_2$, $|x| < 1$.

2. Решити једначину $y'' + 2y' = e^x y^2$.

$y = -e^{-x} - c_1 x + c_1 \ln |1 + c_1 e^x| + c_2$, $y = c$.

3. Решити једначину $y''^2 = 4(y' - 1)$.

$y = x + \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2$, $y = x + c$.

4. Решити ДЈ $y'' = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

$y = \frac{1}{2} x \ln^2 x - x \ln x + x + C_1 x + C_2$.

5. Решити ДЈ $x - \sin y'' + 2y'' = 0$.

$dy = (t \sin t + \cos t - t^2 + C_1)(\cos t - 2) dt$.

6. Одредити сва решења ДЈ $y'' - xy''' + y''^3 = 0$ која задовољавају почетне услове $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 0$.

$y = C_1 \frac{x^3}{6} - C_1^3 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ је опште решење, $y = \pm \frac{8}{105\sqrt{3}} x^{\frac{7}{2}} + C_4 x + C_5$ је

сингуларно решење за $u \neq 0$. Постоје 3 решења која адовољавају почетне услове.

7. Решити ДЈ $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0, y > 0$.

8. Одредити опште решење ДЈ $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

9. Решити ДЈ $x^3y'' + 2xyy' - x^2y'^2 - y^2 = 0$.

15 час, Линеарна ДЈ n -тог реда са константним коефицијентима, метод варијације константи, линеарна ДЈ n -тог реда са функционалним коефицијентима

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x)$, a_0, a_1, \dots, a_n, g дефинисане на (a, b) . Тачку x_0 зовео сингуларном ако је $a_0(x_0) = 0$, у супротном, тачка је регуларна. Ако су све тачке интервала (a, b) регуларне, можемо добити канонски облик линеарне ДЈ n -тог реда:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x).$$

1. Одредити опште решење ДЈ

1. $y''' - 13y' - 12y = 0$,

2. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$,

3. $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} - 8y''' + 4y'' = 0$.

2. Одредити Кошијево решење ДЈ $y''' + y'' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$.

3. Решити ДЈ $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

4. Решити ДЈ методом варијације константи $y'' + 4y = 2 \tan x$.

5. Решити ДЈ $x^2y'' - xy' + 4y = \cos \ln x + x \sin \ln x$.

6. Одредити опште решење ДЈ $(x+a)^3y''' + 3(1-b)(x+a)^2y'' + (3b^2 - 3b + 1)(x+a)y' - b^3y = c, a, b, c \in \mathbb{R}$.

16 час, Степени редови

1. У близини координатног почетка одредити опште решење ДЈ $2(x^2 + x^3)y'' - (x - 3x^2)y' + y = 0$.

$$y_1(x) = \frac{c_1x + c_2|x|^{\frac{1}{2}}}{1+x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Решити ДЈ $x^2y'' + (x^2 - 3x)y' - (x - 4)y = 0$.

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), y_1(x) = x^2e^{-x},$$

$$y_2(x) = x^2 \ln |x| e^{-x} + x^2(x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{36}x^3 + \dots), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

17 час, Гранични проблеми (Гринова функција)

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{x_1(t)x_2(s)}{W(s)}, & \alpha \leq t \leq s, \\ \frac{x_1(s)x_2(t)}{W(s)}, & s \leq t \leq \beta. \end{cases}$$

1. Наћи Гринову функцију за гранични задатак $t^2 x'' - 2x = f(x)$, $x(1) = 0$, $x(2) + 2x'(2) = 0$.

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1-t^3}{3st}, & 1 \leq t \leq s, \\ \frac{1-s^3}{3st}, & s \leq t \leq 2. \end{cases}$$

2. Наћи Гринову функцију за гранични задатак: $x'' - x = f(t)$, $x(t)$ ограничено за $t \rightarrow \pm\infty$.

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{e^{t-s}}{2}, & -\infty \leq t \leq s, \\ \frac{e^{s-t}}{2}, & s \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

18 час, Системи диференцијалних једначина

1. Свести на нормални систем ДЈ и систем ДЈ:

1. $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$,
2. $y'' = z$, $z' = \frac{2y}{x^2} - y'$.
2. Методом елиминације решити систем ДЈ $y'' = 2y - 3z$, $z'' = y - 2z$.
3. Сменом $y = u(x)v(x)$, $u, v \in C^2(a, b)$ трансформисати ДЈ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $p \in C^1(a, b)$, $q \in C(a, b)$ у ДЈ без првог извода. (Проналажење инваријанте)
4. Методом елиминације решити $x^2 y' - z = 0$, $xz' + x(x^2 + 2)y = 4z$.
5. Методом елиминације решити систем ДЈ $xy' - y - 3z = 0$, $xz' - y + z = 0$.
6. Решити систем ДЈ $\frac{dx}{x^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.
7. Решити систем ДЈ $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+u} = \frac{du}{xy}$.
8. Решити систем ДЈ $\frac{dx}{4y-3z} = \frac{dy}{4x-2z} = \frac{dz}{2y-3x}$.
9. Решити Кошијев проблем система ДЈ $\frac{dx}{x^2-y^2} = \frac{dy}{y^2-yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$, $z(0) = -1$, $y(0) = 1$.
10. Одредити опште решење нехомогеног линеарног система ДЈ $y_1' =$

$$y_2 + \tan^2 x + 1, y_2' = -y_1 + \tan x.$$

19 час, Системи диференцијалних једначина

1. Матричном методом решити систем ДЈ

$$y_1' = y_2 + \tan^2 x + 1,$$

$$y_2' = -y_1 + \tan x$$

ако су позната да линеарно независна решења одговарајућег хомогеног система.

2. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 5y_1 + 4y_2,$$

$$y_2' = 4y_1 + 5y_2.$$

3. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$

$$y_2' = -y_1 + 2y_2.$$

4. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 5y_1 + 2y_2,$$

$$y_2' = -4y_1 - y_2.$$

5. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 3y_1 + y_2,$$

$$y_2' = -y_1 + y_2.$$

6. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$

$$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3,$$

$$y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3.$$

7. Решити систем ДЈ

$$y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3,$$

$$y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3,$$

$$y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3.$$

8. Решити систем ДЈ

$$xy_1' = -6y_1 + y_2 + 3y_3,$$

$$xy_2' = -23y_1 + 6y_2 + 9y_3,$$

$$xy_3' = -y_1 - y_2 + 2y_3.$$

20 час, Линеарне парцијалне једначине I реда

1. Решити Кошијев проблем хомогене линеарне ПДЈ $(z - y)\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u|_{x=1} = y + z$.
2. Решити хомогену линеарну ПДЈ $(2z - 3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (3x - z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y - 2x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
3. Одредити једначину површи G која садржи круг $x^2 + y^2 = r^2$, $z = h$ и ортогонална је на фамилију хиперболоида $xy = cz^2$, $h, r, c \neq 0$.
4. Решити Пфафове једначине $dz = (2x^2 + 2xz + 2xy^2 - 1)d - 2ydy$ и $(\cos x + e^x)dx + (e^x + e^y z)dy + e^y dz = 0$.
5. Наћи потпуни, општи и сингуларни интеграл једначине $p = (qy + z)^2$ и одредити услове постојања Кошијевог интеграла који садржи криву $y = 1$, $z = g(x)$.
6. Одредити потпуне интеграле посебних типова ПДЈ 1. $A(x, p) = B(y, q)$, ПДЈ која раздваја променљиве,
 2. $z = xp + yq + f(p, q)$, Клерова ПДЈ,
 3. $F(z, p, q) = 0$.

21 час, Парцијалне једначине II реда

1. Одредити тип ПДЈ $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos xu_y = 0$ и свести је на канонски облик.
Дата једначина је хиперболичног типа, а канонски облик је $u_{\xi\eta} = 0$.
2. Одредити тип ПДЈ $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 2yu_x = 0$ и свести је на канонски облик.
Дата једначина је параболичног типа, а канонски облик је $u_{\eta\eta} + 2\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 u_{\xi} = 0$.
3. Одредити тип ПДЈ $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0$ и свести је на канонски облик.
Дата једначина је елиптичног типа, а канонски облик је $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_{\xi}}{\xi + \eta} + \frac{u_{\eta}}{2\eta} = 0$.
4. Одредити области у којима је једначина $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$ хиперболичног, параболичног и елиптичног типа и у сва три случаја написати формуле трансформације за свођење на канонски облик.
5. Наћи опште решење следећих ПДЈ:
 - а) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 2(x + e^y)$,
 - б) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$.
6. Датом сменом наћи опште решење следећих ПДЈ: а) $\frac{\delta(x^2 u_x)}{\delta x} = x^2 u_{yy}$,
 $v(x, y) = xu(x, y)$,
б) $(x - y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$, $v(x, y) = (x - y)u(x, y)$.

7. Решити Кошијев проблем:

$$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y + \frac{u}{4} = 0,$$

$$u|_{y=0} = x^2 e^{-\frac{x}{4}}, \quad u_y|_{y=0} = 0.$$

8. Решити следеће Гурсаове проблеме:

а) $2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad |x| < y,$

$$u|_{y=x} = 1, \quad u|_{y=-x} = (1+x)e^x,$$

б) $y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0, \quad y^3 - 8 < 3x < y^3, \quad 0 < y < 2,$

$$u|_{y=2} = 3x + 8, \quad u|_{3x=y^2} = 2y^3.$$

Мешовити проблем хомогене таласне једначине на правој са хомогеним граничним условима

Проблем: У области $D = (0, l) \times (0, \infty)$ одредити нетривијално класично решење $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ хомогене таласне једначине

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x, t \in D$$

која задовољава хомогене граничне услове

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$

и почетне услове

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u'_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l).$$

Посматрани проблем се решава Фуријеовом методом раздвајања променљивих:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0,$$

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda = \text{const}, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

што се своди на решавање регуларног Штурм-Лиувиловог проблема

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = X(l) = 0,$$

и решавање ОДЈ

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

Интерпретација проблема: Жица дужине l слободно осцилује, $u(x, 0) = \varphi_0(x)$ даје положај жице у тренутку $t = 0$, а $u'_t(x, 0) = \varphi_1(x)$

је почетна брзина осциловања жице. Жица је учвршћена на крајевима:
 $u(0, t) = u(l, t) = 0$ за $t > 0$.

Решимо разматрани Штурм-Лиуилов проблем:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \quad X(0) = X(l) = 0 \\ X(x) &= C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad X(0) = X(l) = 0, \\ C_2 &\neq 0, \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \\ \lambda_k &= \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \\ X_k(x) &= \sin \sqrt{\lambda_k}x = \sin \frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Решимо разматрану ОДЈ:

$$\begin{aligned} T_k''(t) + a^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k(t) &= 0, \\ T_k(t) &= C_k \cos \frac{ak\pi t}{l} + D_k \sin \frac{ak\pi t}{l}. \end{aligned}$$

Решење полазног проблема је облика $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$, $u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t)$, $k \geq 1$.

1. Одредити закон осциловања жице дужине l , учвршћене на крајевима, која је у пресецима удаљеним за $\frac{l}{3}$ од крајњих тачака изведена из равнотежног положаја за амплитуду x_0 , тако да је средишњи део паралелан њеном равнотежном положају, па потом пуштена да осцилује без почетне брзине.

22 Варијациони рачун

1. Наћи екстремале функционала:

- а) $J[y] = \int_{-1}^0 (12xy - y^2)dx$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$,
- б) $J[y] = \int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$,
- в) $J[y] = \int_0^1 yy'^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \sqrt[3]{4}$,
- г) $J[y] = \int_0^{\pi} (4y \cos x + y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

а) Ојлер-Лагранжова једначина је облика $6x - y'' = 0$, $y = x^3 + Cx + D$, одакле се сменом у граничне услове добија систем $-1 - C + D = 1$, $D = 0$, па је $y = x^3 - 2x$ екстремала посматраног функционала.

б) $-y'' - y' + 2y = 0$ има опште решење облика $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, па се сменом у граничне услове добија систем једначина $C_1 e + C_2 e^{-2} = 1$, $C_2 e^2 + C_2 e^{-4} = 0$, чије решење је $C_2 = \frac{e^2}{e^{-3}-1}$, $C_1 = 1 - C_2 e^{-2}$.

в) $-y'^2 - 2yy'' = 0$ је ДЈ која се решава сменом $z = y'$: $-z^2 - 2yz'z = 0$, одакле је $z = 0$, $y = C$ или $z' + \frac{z}{2y} = 0$, $y \neq 0$, што је линеарна ДЈ првог реда $(\sqrt{yz})' = 0$, $z = \frac{C}{\sqrt{y}}$, $\sqrt{y}dy = Cdx$, $y = (\frac{3}{2}Cx + \frac{3}{2}D)^{\frac{2}{3}}$. Из граничних услова се добијају екстремале, $y(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$, $y(x) = (-3x+1)^{\frac{2}{3}}$.

г) $y'' + y - 2\cos x = 0$ је ДЈ чији хомогени део решења је $C_1 \cos x + C_2 \sin x$, а партикуларни део решења је облика $y_p = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x$, односно након смене у ДЈ $y_p = b\cos x + (x+d)\sin x$. Дакле, опште решење је $y = (x + D_2)\sin x + D_1 \cos x$, одакле се сменом у граничне услове налазе екстремале $y = (x + D_2)\sin x$.

2. Наћи екстремале функционала: а) $J[y(x), z(x)] = \int_1^2 (y'^2 + z^2 + z'^2)dx$
 $y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $z(1) = 0$, $z(2) = 1$,

б) $J[y(x), z(x)] = \int_1^2 (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)dx$ $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $z(0) = 0$,
 $z(\pi) = -1$.

а) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y'' = 0,$$

$$z - z'' = 0,$$

одакле је

$$y = C_1 x + C_2,$$

$$z = C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y = x,$$

$$z = \frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}$$

б) Ојлер-Лагранжов систем је облика

$$y'' + 2y - z = 0,$$

$$z'' - y = 0,$$

одакле је елиминацијом z ,

$$y^{(IV)} + 2y'' + y = 0,$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x),$$

$$z = y'' + y.$$

Из граничних услова се добија екстремала

$$y = C_2 \sin x - \frac{x}{\pi} \cos x,$$

$$z = C_2 \sin x + \frac{1}{\pi}(2 \sin x - x \cos x),$$

где је C_2 произвољна константа.

23 час, Лапласова трансформација, примене на диференцијалне једначине

24 час, Фуријеова трансформација и интеграл

1. Наћи Фуријеову трансформацију функције $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.

Функција задовољава Дирихлеове услове и апсолутно је интеграбилна на реалној правој ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{2}{a}$). $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \lambda^2}$.

2. Представити у форми Фуријеовог интеграла функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Функција је дефинисана на реалној осци, део-по-део монотона, има две тачке прекида 1. реда и апсолутно је интеграбилна $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx =$

$\int_{-1}^1 |x| dx = x^2|_0^1 = 1$. Дакле, функција се може представити Фуријеовим

интегралом. Функција је непарна, па је $a(\lambda) = 0$; $b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt = \frac{2}{\pi \lambda^2} (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda)$. У тачкама непрекидности (за $x \neq \pm 1$) је $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda) \sin(\lambda x) d\lambda$, а у тачкама прекида $x = \pm 1$ је $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda) \sin(\lambda x) d\lambda = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.