

Математика 1

асистент Зора Голубовић

1.8.2021. године

1 Лимеси

1. задатак Израчунати

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \arctan(x)}{\pi} \right)^x$.

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-3}} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) \right)$.

Решење а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \arctan(x)}{\pi} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{2 \arctan(x)}{\pi}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{2 \arctan(x)}{\pi}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\pi} \frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-3}} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) \right)$.

2. задатак Израчунати

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt[n]{2})^n$,

б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x (\sin x - \cos x)}{(\ln(\tan(x)))^2}$.

Решење а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt[n]{2})^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(2 - e^{\frac{1}{n} \ln 2})} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(2 - (1 + \frac{\ln 2}{n} + o(\frac{1}{n})))} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 - \frac{\ln 2}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 - \frac{\ln 2}{n} + o(\frac{1}{n}))}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln 2}{\frac{1}{n}}} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$

б)

3. задатак Израчунати $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + 3 \sin(2x) + 5x + x^2} + x \sqrt{1 + 7 \sin \frac{3}{x}}$.

Решење

4. задатак Израчунати

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt[n]{3})^n$,

б) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln(x^3 + x - 1) - 4x + 4}{(x^2 - 1)^2}$.

Решење а) Слично задатку 2. под а).

б)

5. задатак Израчунати

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(n) + \sin(n)}{\sqrt{3}} \right)^n$, б) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(1 + x \ln(x^2))^{\frac{1}{x \ln x}} - e^2}{\ln(1 + x^x) - \ln 2}$.

Решење

6. задатак Нека је $k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$. Претпоставимо да је $a_0 > 0$ и дефинишимо $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$ за $n > 0$. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$.

Решење

7. задатак

- а) Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3a_n^2}$ за $n \geq 1$. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{n}$.
- б) Израчунати $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(\arctan \sqrt{(x^2 + 5x + 1)} - \arctan x)$.

8. задатак Доказати да за сваки $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ вреди $x \cos x - \sin x + x^2 \geq 0$.

9. задатак Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} (ne^{\sqrt[n]{\ln(1+e^n)}} - n - n)$.

10. задатак Доказати да за $x \in [0, +\infty]$ важи $\arctan x \geq \frac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}$.

11. задатак Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \ln \frac{\ln 3x}{\ln 2x}$.

12. задатак Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3((1+x^2)^{\frac{1}{x}} - e^x)}{\sqrt{1+x^6}-1}$.

13. задатак Нека је $x_n = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2-1}{4k^2}$ за $n \geq 1$.

- а) Показати да је $x_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$, $n \in \mathbb{N}$.
- б) Доказати да низ конвергира граничној вредности $L \in (0, 1)$.
- в) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} \binom{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
- г) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \tan x) - 2x}{\sin(\sin 4x) - 4x}$.

Решење

14. задатак Израчунати $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 \arctan(e^{x-1})}{\pi}\right)^x$.

Решење У питању је неодређени израз $\left(\frac{0}{0}\right)$, па ћемо применити Лопиталово правило $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 \arctan(e^{x-1})}{\pi}\right)^x =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\frac{4}{\pi} \arctan e^{x-1}} \frac{\frac{4}{\pi}}{1+(e^{\frac{x-1}{x}})^2} e^{x-1} (-1)x^{-2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\pi}.$$

15. задатак а) За $x \in [0, 1]$ доказати неједнакости $\frac{x^2}{4} < x - \ln(x+1) \leq \frac{x^2}{2}$ и проверити да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^i}\right) < e^{\frac{11}{12}}$.

б) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^x - 2(\cos \pi x)^2 - 3x + 2}{(\sqrt{x}-1)^2}$

2 Графици функција

1. задатак Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x \log_{|x|} 2$

2. задатак Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = e^{\frac{1}{x+2}} \sqrt{x^2 + 6x + 8}$.

3. задатак Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = (1 + 3x)e^{\frac{1}{x-2}}$.

4. **задача** Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1$.
5. **задача** Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \arctan\left(x + \frac{1}{x}\right)$.
6. **задача** Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.
7. **задача** Испитати ток и нацртати график функције $y = \frac{x}{x-2} \arctan \frac{x}{x-1}$.
8. **задача** Испитати функцију: $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + |\cos x|}$.
9. **задача** Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \arcsin(1 - \sqrt[3]{x^2})$.
10. **задача** Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \ln(2e^{2x} - 5e^x + 3)$.
11. **задача** Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x \arctan \frac{x}{|x|+1}$.
12. **задача** Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \ln(3e^x - 3 + e^{-x})$.
13. **задача** Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = -\frac{1}{|x|} + \arctan \frac{2x}{x^2-1}$.
14. **задача** Испитати ток и скицирати графике функције $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$.
15. **задача** Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \arctan\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

3 Интегралы

1. **задача** Израчунати $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^5+x^3)\sqrt{x^2-1}}$.
2. **задача** Израчунати $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}+2x}$, где је $\alpha > 0$.
3. **задача** Израчунати $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^2 x}$.
4. **задача** Израчунати $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{(x+\alpha)^2} dx$ за $\alpha > 0$.
5. **задача** Израчунати $\int_0^2 (2x - 3x^2) \arcsin(1-x) dx$.
6. **задача** Израчунати $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^4} dx$.
7. **задача** а) Израчунати интеграл $\int (2x^3 + x)(\arctan x)^2 dx$
- б) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^n \left(n - ne^{\sqrt[n]{\ln(1+e^n)}} - n \right) \right)$.
8. **задача** Израчунати интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx, x \in (-1, 1)$.
9. **задача** Израчунати $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$
10. **задача** Израчунати интеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx$.

11. задатак Израчунати $\int \frac{x-1}{1+\sqrt{x^2+2x-3}} dx$.

12. задатак Израчунати $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

13. задатак Израчунати $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{(1+x)^3} dx$.

14. задатак Израчунати $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

15. задатак Израчунати $\int_0^{\frac{9\pi}{4}} \frac{dx}{|\sin x|+|\cos x|}$.

4 Диференцијалне једначине

1. задатак Решити ДЈ трансформишући је у линеарну ДЈ погодном сменом:
 $yy' + \alpha y^2 - \beta \cos(x + \gamma) = 0$.

2. задатак Решити ДЈ: $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$.

3. задатак Решити ДЈ $x(2x^2y \ln y + 1)y' = 2y$.

4. задатак Решити ДЈ $(x^2 - 1)y' - y(y - x) = 0$.

5. задатак Решити једначину $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$.

6. задатак Решити ДЈ $y' \cos x - y^4 - y \sin x = 0$.

7. задатак Решити ДЈ: $y' + 2\frac{y}{x} = 2\frac{\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

8. задатак Решити ДЈ $y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$.

9. задатак Решити једначину $x^2dt + (3tx - 1)dx = 0$.

10. задатак Решити ДЈ $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

11. задатак Решити ДЈ $y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$.

12. задатак Решити ДЈ $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$.

13. задатак Решити ДЈ $y' + 2\frac{y}{x} = 2\frac{\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

14. задатак Погодном сменом трансформисати једначину у Бернулијеву ДЈ и решити је:
 $y' \cos y + x \sin y \cos^2 y - \sin^3 y = 0$.

15. задатак Решити ДЈ: $y' \cos x - y^4 - y \sin x = 0$.