Зимски семестар 2023/2024 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

2 Диференцијалне једначине

2.0.1 Хомогене линеарне диференцијалне једначине вишег реда са константним коефицијентима

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

- $y''' - 13y' - 12y = 0$,
- $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$,
- $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} - 8y''' + 4y'' = 0$.

Решење.

- Нуле карактеристичне једначине су редом: $-3, -1, 4$ (једноструке и реалне), па је опште решење $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} + C_3e^{4x}$.
- Нуле карактеристичне једначине су редом: 2 (реална и 2-струка) и 3 (једнострука реална), па је опште решење $y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{3x}$.
- Нуле карактеристичне једначине су редом: 1 (реална и 2-струка) и $1 \pm i$ (2-струке комплексно-коњуговане), па је опште решење $y(x) = C_1 + C_2 + C_3e^x \cos x + C_4e^x \sin x + C_5xe^x \cos x + C_6xe^x \sin x$.

2. Одредити Кошијево решење диференцијалне једначине $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

Решење. Проблем $y''' + y'' = 0$ има опште решење $y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}$, а разматрајући почетне услове налазимо да је Кошијево решење $y(x) = x + e^{-x}$.

Таблица решења нехомогених линеарних ДЈ са константним коефицијентима:		
$f(x)$	α, β	$y_p(x)$
$P_n(x)$	$\alpha = \beta = 0$	$x^s \overline{P_n(x)}$
$e^{\alpha x} P_n(x)$	$\alpha \neq 0,\ \beta = 0$	$x^s e^{\alpha x} \overline{P_n(x)}$
$P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)$	$\alpha = 0,\ \beta \neq 0$	$x^s(\overline{P_k(x)}\cos(\beta x) + \overline{Q_k(x)}\sin(\beta x))$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$	$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$	$x^s e^{\alpha x}(\overline{P_k(x)}\cos(\beta x) + \overline{Q_k(x)}\sin(\beta x))$

2.0.2 Нехомогене линеарне ДЈ вишег реда са константним коефицијентима, $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = f(x)$

s- вишеструкост броја $\alpha + i\beta$ као корена карактеристичне једначине, $k = \max\{m, n\}$

3. Решити диференцијалну једначину $y''' - y'' + y' - y = \cos x + 2e^x$.

Решење. Одговарајући хомоген проблем има решење $y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x$. Опште решење полазног нехомогеног проблема тражимо у облику $y = y_H + y_p 1 + y_p 2$, где је $y_p 1$ партикуларно решење проблема $y''' - y'' + y' - y = \cos x$, а $y_p 2$ партикуларно решење проблема $y''' - y'' + y' - y = 2e^x$. Из таблице налазимо облике тих решења: $y_p 1(x) = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x$, $y_p 2(x) = (ex + f)e^x$, где су a, b, c, d, e, f константе које налазимо из полазне диференцијалне једначине. Коначно, $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x - \frac{x}{4}(\cos x + \sin x) + xe^x$.

4. Решити диференцијалну једначину $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Решење. Одговарајући хомоген проблем има решење $y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x$. Опште решење полазног нехомогеног проблема тражимо у облику $y = y_H + y_p$, где је y_p партикуларно решење проблема $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$. Из таблице налазимо да је $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, где су a, b, c константе које налазимо из полазне диференцијалне једначине. Коначно, $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^x - x^2 - 3x - 1$.

5. Решити диференцијалну једначину $y'' - 4y' + 5y(\sin x + 2\cos x)e^{2x}$.

Решење. Одговарајући хомоген проблем има решење $y_H(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$. Опште решење полазног нехомогеног проблема тражимо у облику $y = y_H + y_p$, где је y_p партикуларно решење проблема $y'' - 4y' + 5y(\sin x + 2\cos x)e^{2x}$. Из таблице налазимо да је $y_p(x) = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x$, где су a, b, c, d константе које налазимо из полазне диференцијалне једначине. Коначно, $y(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x - \frac{x}{2} e^{2x} \cos x + xe^{2x} \sin x$.

2.0.3 Метод варијације константи

$y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots y_n(x)$ образују фундаментални систем решења хомогене ДЈ

$$y_H(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x).$$

Проблем се своди на решавање система

$$\begin{aligned}
C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) &= 0,\\
C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x),
\end{aligned}$$

6. Решити диференцијалну једначину методом варијације константи $y'' + 4y = 2\tan x$.

Решење. Како је $y_H(x) = C_1\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$ решење одговарајућег хомогеног проблема, то се методом варијације константи налази решење полазног нехомогеног проблема у облику $y(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$, где су $C_1(x), C_2(x)$ добијене из система:

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x &= 0,\\
-2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x &= 2\tan x.
\end{aligned}$$

Наиме, Крамеровим методом се добијају $C_i'(x)$ за $i = 1, 2$, а интеграцијом и $C_1(x), C_2(x)$.

7. Решити диференцијалну једначину $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Решење. $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x - x^2 - 3x - 1$.

2.1 Линеарне ДЈ са функционалним коефицијентима

2.1.1 Ојлерова ДЈ

8. Решити диференцијалну једначину $x^2y'' - xy' + 4y = \cos\ln x + x\sin\ln x$.

Решење. У питању је Ојлерова једначина која се сменом $t = \ln x, x > 0$ своди на линеарну диференцијалну једначину вишег реда са константним коефицијентима.

9. Одредити опште решење диференцијалне једначине $(x+a)^3y''' + 3(1-b)(x+a)^2y'' + (3b^2 - 3b + 1)(x+a)y' - b^3y = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Решење. Ојлерова диференцијална једначина се решава сменом $t = \ln(x+a)$, за $x > -a$.

2.1.2 Абелова формула

Ако је $y_1(x)$ партикуларно решење хомогене линеарне ДЈ, тада се сменом $y = y_1 z$, $z = z(x)$ снижав ред те једначине за 1.
Ако је $y_1(x)$ партикуларно решење ДЈ $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, тада је друго партикуларно решење могуће добити формулом Абела $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$.

10. Решити хомогену линеарну ДЈ $\sin(2x)y'' - 2\cos x(3\cos x + 2)y' - 4\sin x(1+\cos x)y = 0$, $y_1(x) = \cos x$.

Решење. Друго партикуларно решење се налази Абеловом формулом.

11. Решити нехомогену линеарну диференцијалну једначину $xy'' + 2y' + y = \frac{1}{x}$ ако је познато једно решење одговарајуће хомогене линеарне диференцијалне једначине $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Решење. Применити Абелову формулу.