Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Четврта недеља

1.1 Комплексни бројеви

1. Израчунати з ако важи $\overline{z} = z^2$.

Решење. Нека је $z = x + iy$. Тада $x - iy = x^2 - y^2 + 2ixy$, одакле следи $x = x^2 - y^2$и $y = 2xy$. Дакле, $x = -\frac{1}{2}$ или $y = 0$. У првом случају се добија $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, а у другом $x = 0$ или $x = 1$. Решења су $\{0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

2. Нека је $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $z_1z_2 \neq -1$. Доказати $z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

Решење. Покажимо да је $z = \overline{z}$:

$$\overline{z} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + z_1z_2}\frac{z_1z_2}{z_1z_2} = \frac{|z_1|^2z_2 + |z_2|^2z_1}{z_1z_2 + |z_1|^2|z_2|^2} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2} = z.$$

3. Наћи $\sqrt[4]{16}$.

Решење. Важи формула за n-ти корен комплексног броја:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}), \text{ за } k = 0, 1, \dots n - 1.$$

Дакле, корени су ± 2, $\pm 2i$.

4. Представити графички области а) $Imz^2 > 2$,
б) $|z| > 2 + Imz$,
в) $\frac{\pi}{6} < argz < \frac{\pi}{4}$,
г) $1 < |z| < 3$,
д) $|z - z_0| \leqslant 6$.

Решење. Видети слику.

5. Да ли Абелова група $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ може да се уреди?

Решење. Не може. Доказ- свођењем на контрадикцију. Претпоставимо да може. Како је $i \neq 0$, тада би било $-1 = i^2 > 0$. Контрадикција.

6. Нека је $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + 3i|^2 \geqslant 3|z|^2 + 1\}$ и $B = \{z \in \mathbb{C} : |z^4 + i| = |z^4 - i|\}$. Наћи $A \cap B$.

Решење. Одредимо A. Нека је $z = x + iy \in A$. Тада је $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 \leqslant (\frac{5}{2})^2$. Одредимо B. Нека је $z^4 = x + iy$. Тада је $x^2 + (y + 1)^2 = x^2 + (y - 1)^2$, односно $y = 0$. Дакле,

$$z^4 = \begin{cases} 0, x = 0, \\ |x|e^{i0}, x > 0, \\ |x|e^{i\pi}, x < 0, \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} 0, x = 0, \\ \sqrt[4]{|x|}e^{ik\frac{\pi}{2}}, k = 0, 1, 2, 3, x > 0, \\ \sqrt[4]{|x|}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2})}, k = 0, 1, 2, 3, x < 0. \end{cases}$$

7. Решити $(12 - 5iz)(z - i) = z^3 + i$.

Решење. Како је $z^3 + i = z^3 - i^3$, добија се

$$(z - i)(12 - 5iz + z^2 + zi - 1) = 0,$$

одакле је $z = i$ или $z^2 + 6iz - 13 = 0$, односно нуле су $z = i$, $z = -3i \pm 2$.

8. Решити $|z + 2 + i|^2 + 4\overline{z} + 6 + 4i = 0$.

Решење. Нека је $z = x + iy$. Тада је $x^2 + 8x + 11 + y^2 + 2y = 0$ и $1 - y = 0$, односно $y = 1$ и $x = -4 \pm \sqrt{2}$. Дакле, решења су $-4 - \sqrt{2} + i$ и $-4 + \sqrt{2} + i$.

9. Одредити решења система

$$\omega(z\overline{\omega} - 1) = i(z\overline{w} - 1),$$
$$8\omega^2 z^2 = |z|^3.$$

Решење. Из прве једначине система се добија $\omega = i$ или $\omega = \frac{1}{\overline{z}}$. Размотримо случај $\omega = i$: Тада је из друге једначине система $-8z^2 = |z|^3$, а како је $z = |z|e^{i\phi}$, добија се $z = 0$ или $z \neq 0$, $-8e^{2i\phi} = |z|$, одакле се добија $|z| = 8$, $\phi = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1$.
Размотримо случај $\omega = \frac{1}{\overline{z}}$:
Добија се $8(\frac{z}{\overline{z}})^2 = |z|^3$, одакле због $z = |z|e^{i\phi}$ следи $|z| = 2$ и $\phi = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.
Дакле, $(z, \omega) \in \{(0, i), (-8, i), (8, i), (2, \frac{1}{2}), (2i, \frac{i}{2}), (-2i, \frac{-i}{2}), (-2, -\frac{1}{2})\}$.

10. Решити $2|z|Re(z) = \sqrt{5}(\overline{z} - 2iz - 2)$.

Решење. Нека је $z = x + iy$. Тада следи $2x\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}(x + 2y - 2)$ и $2x + y = 0$. Сменом друге једначине у прву добија се $2x|x| + 3x = -2$, одакле се у случају $x < 0$ налази решење $z = -\frac{1}{2} + i$.