Зимски семестар 2023/2024 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Функционални редови

1. Дат је функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}}$. Одредити за које вредности параметра a:

- функционални ред конвергира
- сума реда представља непрекидну функцију
- ред може да се диференцира члан по члан

Решење.
- Како је$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{a^{n^2}}$, а бројни ред ковергира за $a > 1$ према Даламберу, то на основу Вајерштрасовог критеријума ред равномерно конвергира за $a > 1$. За $a \leqslant 1$ општи члан не тежи нули, па у том случају ред конвергира.
- За $a > 1$ ред је равномено конвергентан и чува непрекидност.
- Како је $|f_n'(x)| \leqslant (\frac{2}{a})^{n^2}$, абројни поредбени ред конвергира по Даламберу за $a > 2$, то се ред може диференцирати члан по члан за такве a.

2. Израчунати $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx}) dx$.

Решење. Како је $|f_n(x)| \leqslant f_n(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e(n-1)!}$, а бројни ред конвергира, то је посматрани функционални ред равномерно конвергентан на $[0, \infty)$ и интеграл и ред могу заменити места: $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx}) dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \int\limits_0^1 x e^{-nx} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-n}(1+n)}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n!} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n!}$.
Коначно, сума реда је $e - e^{\frac{1}{e}} - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e}$.

3. Представити интеграл $\int\limits_0^1 x^{-x} dx$ у облику реда.

Решење. Како је $x^{-x} = e^{-x\ln x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n \ln^n x}{n!}$, а функција $|x\ln x|$ достиже максимум e^{-1}, то је ред равномерно конвергентан по Вајерштрасовом критеријуму. Дакле, може се интегралити члан по члан на $(0,1]$. Како је

$$\int\limits_0^1 x^n \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

то је

$$\int\limits_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

4. Разложити Лапласов интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx dx$ у степени ред по степенима $b > 0$, користећи чињеницу да је $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Решење. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2bx)^n}{(2n)!} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2b)^{2n}}{(2n)!} \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2b)^{2n}}{(2n)!} I_n$. Парцијалном интеграцијом се налази $I_n = \frac{2n-1}{2} I_{n-1}$ уз почетни услов $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, одакле је $I_n = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. Следи $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$. Оправданост интеграције следи из равномерне конвергенције реда на произвољном сегементу $[0, A]$.

5. Израчунати интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{1+e^x} dx$.

Решење. $I = \int\limits_0^{\infty} x \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\frac{1}{n^2} - \frac{(nx+1)e^{-nx}}{n^2}|_0^{\infty}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Редови и интеграл могу заменити места јер се ради о равномерно конвергентним редовима за $x > 0$.

1.2 Фуријеови редови

Систем функција $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{k\pi x}{l}$, $\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [-l, l]$, се назива основним тригонометријским системом. Он је ортогоналан на $[-l, l]$. Нека је $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ интеграбилна функција на $[-l, l]$. Бројеви

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$$

се зову Фуријеови коефицијенти функције f у односу на основни тригонометријски систем. Тригонометријски ред $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l})$ је Фуријеов ред функције f.

Нека је део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ са периодом $2l$ продужена на целу бројну праву. Тада тригонометријски Фуријеов ред функције f конвергира у свакој тачки $x \in \mathbb{R}$ ка вредности $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Ако део по део глатка функција f на сегменту $[-l, l]$ још задовољава и једнакост $f(-l) = f(l)$, онда њен тригонометријски Фуријеов ред конвергира равномерно на том сегменту и његова сума је једнака $f(x)$ за свако $x \in [-l, l]$.

Фуријеов ред Риман-интерграбилне функције на сегменту $[-l, l]$ се може на том сегменту интегралити члан по члан.

Нека $f \in C^m[-l, l]$ и $f(-l) = f(l)$, $f'(-l) = f'(l)$, … $f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l)$. Нека поред тога функција f има на сегменту $[-l, l]$ део по део непрекидан извод реда $m + 1$. Тада:

1. конвергира бројни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{k\pi}{l})^m(|a_k| + |b_k|)$,

2.Фуријеов ред такве функције можемо на датом сегменту диференцирати члан по члан m пута.

6. Нека је $c \in \mathbb{R}$, $l > 0$ и $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < \ldots$ низ решења једначине $\tan l\xi = c\xi$. Доказати да је систем функција $\{\sin\xi_n x : n \in \mathbb{N}\}$ ортогоналан у $C[0, l]$.

Решење. Треба показати да је $\int\limits_0^l \sin\xi_n x\sin\xi_m x dx = 0$ за $n \neq m$ и да је $\int\limits_0^n \sin^2\xi_n dx \neq 0$. Применом адиционих формула $\sin\xi_n x\sin\xi_m x = \frac{1}{2}(\cos(\xi_n - \xi_m)x - \cos(\xi_n + \xi_m)x)$, добија се $\int\limits_0^l \sin\xi_n x\sin\xi_m x dx = \frac{1}{2}\frac{\sin(\xi_n-\xi_m)l}{\xi_n-\xi_m} - \frac{1}{2}\frac{\sin(\xi_n+\xi_m)l}{\xi_n+\xi_m} = \frac{c}{2}\frac{\sin(\xi_n-\xi_m)l}{\tan\xi_n-\tan\xi_m} - \frac{c}{2}\frac{\sin(\xi_n+\xi_m)l}{\tan\xi_n+\tan\xi_m} = \frac{c}{2}(\frac{\sin(\xi_n-\xi_m)l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin l\xi_n\cos l\xi_m-\sin l\xi_m\cos l\xi_n} - \frac{\sin(\xi_n+\xi_m)l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin l\xi_n\cos l\xi_m+\sin l\xi_m\cos l\xi_n}) = \frac{c}{2}(\cos l\xi_n\cos l\xi_m - \cos l\xi_n\cos l\xi_m) = 0$, за $m \neq n$. Ако је $m = n$, добија се $\int\limits_0^l \sin^2\xi_n dx > 0$.

7. Доказати да тригонометријски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ не може бити Фуријеов ред ниједне део по део непрекидне функције на $[-\pi, \pi]$.

Решење. Претпоставимо супротно. Тада важи Парсеваловала једнакост $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Међутим, лева странаје коначна, а десна није. Контрадикција.

8. Разложити у Фуријеов ред периодичну функцију основне периоде 2π која је на сегменту $\left[-\pi,\pi\right]$ одређена формулом

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\leqslant x<0,\\ -1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

Решење. Фуријеов ред задате функције у свим тачкама у којима је непрекидна конвергира ка вредности саме функције , док у нули и на крајевима сегмента $\left[-\pi,\pi\right]$ конвергира ка $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, где је $x=0,\pm\pi$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{o}dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(-1)dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0, n\geqslant 1,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}((-1)^n-1), n\geqslant 1.$$

9. Разложити у Фуријеов ред функцију на интервалу $(0,2l)$

$$f(x)=\begin{cases}A, & 0\leqslant x<l,\\ 0, & l\leqslant x<2l.\end{cases}$$

Решење. Слично претходном задатку, рачунају се коефицијенти:

$$a_0=A,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}=0, n\geqslant 1,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{A}{n\pi}((-1)^{n+1}+1), n\geqslant 1.$$

10. Функцију $f(x) = x - [x]$ разложити у Фуријеов ред.

Решење. Функција је 1-периодична, непрекидно-диференцијабилна изузев у целобројним тачкама где има прекиде прве врсте. Дакле, може се развити у Фуријеов ред $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x$. Овај ред конвергира ка $f(x)$ за $x \neq k$, односно ка $\frac{1}{2}$ у целобројним тачкама.

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{1}(x - [x])dx = 2\frac{x^2}{2}|_0^1 = 1,$$

$$a_n = 2\int\limits_{0}^{1}(x - [x])\cos 2n\pi x dx = 2\int\limits_{0}^{1} x\cos 2n\pi x dx = \frac{1}{2n^2\pi}\cos(2n\pi x)|_0^1 = 0,$$

$$b_n = 2\int\limits_{0}^{1}(x - [x])\sin 2n\pi x dx = 2\int\limits_{0}^{1} x\sin 2n\pi x = -\frac{1}{n\pi} + \frac{\sin 2n\pi x}{2n^2\pi^2}|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}.$$

11. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = |x|$ на интервалу $(-\pi, \pi)$.

Решење. Функција је непрекидна на $(-\pi, \pi)$ и има део по део непрекидан извод свуда са и има део по део непрекидан извод свуда, са изузетком тачке $x = 0$. Са периодом 2π продужава се на целу реалну осу и може се развити у Фуријеов ред.

$$a_0 = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1), n \geqslant 1$$

$$b_n = 0, n \geqslant 1$$

јер је функција парна.

12. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sin ax$, $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ на интервалу $(-\pi, \pi)$.

Решење. Због непарности функције је

$$a_n = 0, n \geqslant 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ax \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - a^2}\sin a\pi, |a| \neq n, n \geqslant 1.$$

13. Функцију $f(x) = \max\{\sin x, 0\}$ развити у Фуријеов ред на $(-\pi, \pi)$ и написати како гласи Парсевалова неједнакост .

Решење. $a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n n-1}{n^2-1}$, $n \geqslant 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_n = 0$, $n \geqslant 2$.

14. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = x^2$:
1. по косинусима,
2. по синусима,
3. на интервалу $(0, 2\pi)$.

Користећи добијено разлагање доказати да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Решење. Функцију разматрану на $[-\pi, \pi]$ 2π-периодично продужимо на целу бројну праву. Тада добијамо непрекидну и део по део глатку функцију која се са датом функцијом поклапа на сегменту $[-\pi, \pi]$ и која се може разложити у Фуријеов ред по косинусима.

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}, n \geqslant 1$$

$$b_n = 0, n \geqslant 1.$$

2. Функцију разматрану на $[0, \pi]$ по непарности продужимо на $[-\pi, \pi]$ и 2π-периодично продужимо на целу бројну праву.

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0, n \geqslant 1,$$

$$b_n = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2}((-1)^n - 1), n \geqslant 1.$$

3.Функцију разматрану на $[0, 2\pi]$ 2π-периодично продузимо на целу бројну праву.

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}, n \geqslant 1,$$

$$b_n = -\frac{4\pi}{n}, n \geqslant 1.$$

15. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Решење. $a_0 = \frac{4}{3}$, $a_n = \frac{3}{\pi^2 n^2}(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1)$, $b_n = 0$, $n \geqslant 1$.

16. Функцију $f(x) = x$, $0 < x < 2$ развити:

1. у Фуријеов синусни ред,
2. у Фуријеов косинусни ред,
3. Применити Парсевалову једнакост на Фуријеов ред добијен под 2. и на основу тога начи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
4. Начи Фуријеов ред функције $x \to x^2$, $0 < x < 2$ интеграљењем Фуријеовог реда под 1. и на основу тога начи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Решење. 1. $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$, $n \geqslant 1$,
2. $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$, $n \geqslant 1$,
3. $S = \frac{\pi^4}{90}$,
4. $S = \frac{\pi^2}{12}$.

17. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi, \pi, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Испитати његову конвергенцију и наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Решење. $a_n = 0$, $n \geqslant 0$, $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, $n \geqslant 1$.

18. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sinh ax$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ и испитати његову конвергенцију.

Решење. $a_n = 0$, $n \geqslant 0$, $b_n = \frac{2\sinh a\pi}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{a^2+n^2}$.

19. Ако су a_n и b_n Фуријеови коефицијенти интеграбилне функције f са основним периодом 2π, одредити Фуријеове коефицијенте A_n и B_n функције Стеклова $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$.

Решење. $A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n \sinh nh}{nh}$, $B_n = \frac{b_n \sinh nh}{nh}$.