1 час, Функционални низови и редови

(Дирихлеов критеријум) Нека:
1. функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ има равномерно ограничене парцијалне суме, тј. постоји константа K, таква да је за све $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in A$ испуњено $|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)| \leq K$,
2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који равномерно конвергира нули.
Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергира на A

1. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$$

на $\mathbb{R}$.

Дирихлеовим критеријумом се показује да ред равномерно конвергира. Низ $\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$ равномерно конвергира ка 0 на реалној правој и

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx| = |\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x(\cos\frac{(k+1)x}{2} - \cos\frac{(k-1)x}{2})}{2sin\frac{x}{2}}| = |\cos\frac{x}{2}||\cos\frac{(n+1)x}{2} - 1| \leq 2.$$

(Абелов критеријум) Нека:
1. функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ је равномерно конвергентан на $A \subset \mathbb{R}$,
2. $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ је, за свако $x \in A$, монотон низ (по n) који је равномерно ограничен, тј. за неко $K \in \mathbb{R}$ важи $|a_n(x)| \leq K$ за све $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.
Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно конвергира на A.

2. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}(1+\frac{x}{n})^n$$

на $[0, 1]$.

Абеловим критеријумом се показује да ред равномерно конвергира. Низ $(1+\frac{x}{n})^n$ је монотон за свако фиксирано $x \in [0,1]$. Како је

$$(1+\frac{x}{n})^n \leq (1+\frac{1}{n})^n < e,$$

за свако $x \in [0,1]$, низ је равномерно ограничен на $[0,1]$. Осим тога, ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ је равномерно конвергентан на $[0,1]$ према Дирихлеовом критеријуму, јер је низ $\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$ опадајући и равномерно конвергентан на скупу $[0,1]$, а парцијалне суме реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ су равномерно ограничене на скупу E.

3. Наћи $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$.

Задати ред је равномерно конергентан за свако $x \geq 0$ по Абеловом критеријуму. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ је равномерно конвергентан по Лајбницу, а низ $\frac{x^n}{1+x^n}$ је монотоно растући и ограничен одозго са 1 за свако $x \geq 1$. Притом, постоји гранична вредност $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, па лимес и сума могу заменити места:

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Резултат: $\frac{\ln 2}{2}$.

4. Одредити област дефинисаности и испитати непрекидност функције

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2+\frac{1}{n})^n.$$

Област дефинисаности одредићемо помоћу Кошијевог критеријума. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(x^2+\frac{1}{n})^n} = x^2,$$

ред ће конвергирати за $x^2 < 1$, а дивергирати за $x^2 > 1$. За $x = \pm 1$ ред је дивергентан јер није задовољен неопходан услов конвергенције. Дакле, област дефинисаности је $(-1,1)$. Да испитамо непрекидност функције, неопходно је одредити област равномерне конвергенције реда. Докажимо да је ред равномерно конвергентан на сваком сегменту $[-a, a]$, $a \in (0, 1)$. Нека је b произвољан број такав да $0 < a < b < 1$. Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n \geq n_0$ важи $a + \frac{1}{\sqrt{n}} < b$. Тада за све $n \geq n_0$ и свако $|x| \leq a$, важи

$$(x^2 + \frac{1}{n}) \leq (|x| + \frac{1}{\sqrt{n}})^{2n} \leq b^{2n}$$

Како је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b^{2n}$ конвергентан јер $b^2 < 1$, то је по Вајерштрасовом критеријуму ред којим је дефинисана функција $f(x)$ равномерно конвергентан. Стога је $f(x)$ непрекидна на $[-a, a]$, а због произвољности броја a, то је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $(-1, 1)$.

Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ функција интеграбилних на сегменту $[a, b]$ равномерно конвергира, онда је његов збир интеграбилна функција и важи

$$\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx.$$

5. Одредити суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, а затим користећи добијени резултат наћи суму бројног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

Размотримо ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Према Кошијевом критеријуму ред је конвергентан на $(-1, 1)$. Сума тог реда је $\frac{1}{1+x^2}$. На основу Вајерштрасовог критеријума, закључујемо да је овај ред равномерно конвергентан на $[-q, q]$, за свако $q \in (0, 1)$. Интеграцијом тог реда на $[0, x]$, за $x \in (0, 1)$, добија се

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}dt.$$

Тражене суме су $\arctan x$ и $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Ако је свака од функција $a_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) диференцијабилна и ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ равномерно конвергира на $[a, b]$, а сам ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергира бар у једној тачки $x_0 \in [a, b]$, тада тај ред

равномерно конвергира на $[a, b]$, његова сума је диференцијабилна функција и важи $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ за $x \in [a, b]$.

6. Наћи суме редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Чланови функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ су непрекидно диференцијабилне функције. Изводни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ је на основу Вајерштрасовог критеријума равномерно конвергентан на $[-q, q]$, $q \in (0, 1)$ и његова сума је $\frac{1}{1-x}$. Стога се полазни ред може диференцирати члан по члан, након чега се добија

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Интеграцијом последње једнакости се добија

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Докажимо да изводни ред функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ равномерно конвергира на $[-1, 1)$. На $(-1, 1)$ ред је равномерно конвергентан по Даламберовом критеријуму. За $x = -1$ ред је равномерно конвергентан по Лајбницу. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ је конвергентан на овом интервалу, а његови чланови су непрекидно диференцијабилне функције, па на основу свега закључујемо да се ред може диференцирати члан по члан. Како је $g'(x) = -\ln(1-x)$, применом парцијалне интеграције на

$$\int_0^x g'(t)dt = g(x) - g(0) = -\int_0^x \ln(1-t)dt,$$

добија се да је сума другог реда једнака $x + (1-x)\ln(1-x)$.

7. Доказати да је низ $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ конвергентан, али не равномерно на сегменту $[0, 1]$, а да је $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} nx(1-x)^n = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^{n+1} = e^{-1} \neq 0.$$

Степени ред се унутар свог радијуса конвергенције може диференцирати и интегрисати члан-по-члан. Добијени редови имају исти радијус конвергенције као и полазни ред.

8. Одредити полупречник конвергенције R степеног реда

1. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$,
2. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n\cdot 2^n} z^n$,
3. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} 5^n z^{3n}$.

1. $R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}| = 1.$
2. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{|1+i|^n}{n2^n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
3. За $t = 5z^3$ се добија stepeni ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^n$ који конвергира за $5|z^3| < 1$, $z < \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, а дивергира за $|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, $R = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

8. Одредити област конвергенције степених редова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

Одредимо R за први ред:
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{3n^2+2}}{\frac{2n+3}{3(n+1)^2+2}} = 1$, па је ред конвергентан у $(0,2)$ и треба испитати понашање у крајњим тачкама. За $x = 0$ добија се ред конвергентан по Лајбницу, а за $x = 2$ се добија дивергентан ред (по поредбеном критеријуму). Област конвергенције је $[0,2)$.
Одредимо R за други ред: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{3}$, па је ред конвергентан у $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ и треба испитати понашање у крајњим тачкама. За $x = -\frac{4}{3}$ добија се ред конвергентан као сума два таква реда (по Лајбницу и Дирихлеу), а за $x = -\frac{2}{3}$ се добија дивергентан ред. Област конвергенције $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

9. Разложити у степени ред по степенима x функцију $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

$$f(x) = -\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1+(-1)^{n+1})x^n.$$

10. Написати разлагање функције $f(x) = \sin^3 x$ у степени ред по степенима x, а затим одредити област у којој важи добијени развој.

$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} = \frac{3}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1-9^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$