Зимски семестар 2023/2024 Вежбе из Математике 3
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Математика 3

1.1 Бројни редови

1. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n\sin\frac{1}{n})^{n^3}$.

Решење. Представљањем општег члана реда у експоненцијалном облику, кад $n \to \infty$, је $a_n = e^{n^3\ln(n\sin\frac{1}{n})} = e^{n^3\ln(n(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})))} = e^{n^3\ln(1-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{n^3(-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-\frac{n}{6}}$. Како геометријски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{6}}$ конвергира, то конвергира и полазни ред.

Теорема (Кошијев интегрални критеријум)**.** Нека је $f(x)$ непрекидна, ненегативна и опадајућа реална функција за $x \geqslant 1$ и $a_n = f(n)$. Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира акко конвергира несвојствени интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

2. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$.

Решење. $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 = 1 + \frac{\ln n}{n^2+1} + o(\frac{\ln n}{n^2+1}) - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1}(1+o(1))$, $n \to \infty$. Дакле, $a_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$, $n \to \infty$. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ конвергира на основу интегралног критеријума: $\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}|_1^{\infty} + \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}|_1^{\infty} = 1$, па и полазни ред конвергира.

3. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^{\alpha}}$ у зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решење. Ред очигледно дивергира за $\alpha \leqslant 0$. Нека је зато $\alpha > 0$. Дати ред је еквиконвергентан реду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, који је према Кошијевом интегралном критеријуму еквиконвергентан са несвојственим интегралом $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$. За $\alpha = 1$, применом парцијалне интеграције се добија да интеграл дивергира. За $\alpha < 1$ интеграл дивергира по поредбеном критеријуму. Нека је $\alpha > 1$. Тада имамо $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to\infty} \left(\frac{\ln x}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^b - \frac{1}{1-\alpha} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx \right) = \lim\limits_{b\to\infty} \left(\frac{\ln b}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{1-\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha}$. Дакле, полазни ред конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leqslant 1$.

4. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^\alpha}$.

Решење. Полазни ред је еквиконвергентан са интегралом $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln (x))^\alpha}$, који је, након смене $t = \ln(\ln x)$, једнак са $\int\limits_{\ln(\ln 3)}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$. Овај интеграл конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leqslant 1$, па по Кошијевом интегрално критеријуму исто важи и за посматрани ред.

Теорема (Рабеов тест)**.** Нека за ред са позитивним члановима важи $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$. За $l > 1$ ред конвергира, а за $l < 1$ ред дивергира.

5. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$.

Решење. Како је $\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{-1} e^{(n+p)\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-1} e^{(n+p)(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n}))} = 1 + \frac{p - \frac{1}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, кад $n \to \infty$, то ред конвергира по Рабеу за $p > \frac{3}{2}$.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}$.

Решење. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = (1 + \frac{p}{n})^{-1} (1 + \frac{1}{n})^{q+1} = (1 - \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n}))(1 + \frac{q+1}{n} + o(\frac{1}{n})) = 1 + \frac{q+1-p}{n} + o(\frac{1}{n})$, кад $n \to \infty$, па ред конвергира по Рабеу за $q > p$.

7. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right]^p \frac{1}{n^q}$.

Решење. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{q+\frac{p}{2}}{n} + o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Рабеу за $q + \frac{p}{2} > 1$.

Теорема (Гаусов тест)**.** Нека за ред са позитивним члановима важи $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, $|\theta_n| < C$, $\varepsilon > 0$. За $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$, $\mu > 1$ ред конвергира, а за $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu < 1$ ред дивергира.

8. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n$, где су $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$.

Решење. Имамо да важи $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{\gamma}{n})}{(1+\frac{\alpha}{n})(1+\frac{\beta}{n})}$. Како је $(1+\frac{\alpha}{n})^{-1} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}}\frac{1}{n^2}$ и $(1+\frac{\beta}{n})^{-1} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}}\frac{1}{n^2}$, то за $\gamma > \alpha + \beta$ ред конвергира, а дивергира за $\gamma \leqslant \alpha + \beta$ по Гаусу.

Теорема (Лајбницов тест)**.** Ако је $a_{n+1} \leqslant a_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, онда алтернативни ред $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвергира.

Ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Сваки апсолутно конвергентан ред је и конвергентан, а обратно не важи.

9. Испитати апсолутну и обичну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n)}{n}$.

Решење. Конвергира по Лајбницу будући да је $\frac{\ln^2(n)}{n}$ опадајући низ који тежи 0 кад $n \to \infty$, а дивергира апсолутно (јер се у том случају добија хармонијски дивергентан ред).

10. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

Решење. $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right) = (-1)^n a_n$, при чему је a_n опадајући низ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема (Абелов тест)**.** Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако конвергира $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и низ b_n је монотоно ограничен.

Теорема (Дирихлеов тест)**.** Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако низ b_n монотоно тежи нули почев од неког члана и низ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ је ограничен.

11. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Решење. Конвергира као сума конвергентних редова: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-\cos 2n}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{2n}$. Први ред је Лајбниц-конвергентан јер $\frac{1}{2n}$ опадајуће тежи нули, а други ред конвергира поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\cos(2n)}{2n},$$

$$S_N = \frac{(-1)^N}{2N}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(2N+1)}{2\sin 1}\right) - \sum_{n=1}^{N-1}\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)}{2\sin 1}\right)\left(-\frac{(-1)^n}{2n+2} - \frac{(-1)^n}{2n}\right)\right],$$

$$S_N = \frac{(-1)^N}{2N}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(2N+1)}{2\sin 1}\right) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^n(2n+1)}{2n(n+1)} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{4n(n+1)\sin 1}$$

12. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Решење. Приметимо да је $\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}$. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$ конвергира по Лајбницовом критеријуму, а низ $\cos\frac{\pi}{n+1}$ је монотон и ограничен, па полазни ред конвергира по Абеловом критеријуму.

13. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$.

Решење. Како је $a_n = \frac{1}{n}$ опадајући низ такав да $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а низ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ је ограничен: $|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k \sin k^2| = \frac{1}{2}|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k(k-1) - \cos k(k+1)| = \frac{|1-\cos(n+1)n|}{2} \leqslant 1$, то ред конвергира по Дирихлеовом критеријуму.

14. Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира ($a_n \geqslant 0$), онда конвергира и ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{\alpha}$ за $\alpha \geqslant 1$.

Решење. Општи члан реда тежи нули, па је ограничен са 1. Ред конвергира по поредбеном критеријуму.

15. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира, онда конвергира и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

Решење. Применом Кошијеве неједнакости и претходног задатка, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

16. Доказати да је $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

Решење. Производ редова $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ (на основу формуле за Кошијево множење) је ред са општим чланом $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, односно $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} 1^k = (1 + (-1))^n$, што је 0 за $n > 0$, а 1 за $n = 0$.

17. Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Решење. Неједнакост $|\sin x| > \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ важи акко $\frac{1}{8} < \{\frac{x}{\pi}\} < \frac{7}{8}$. Како је $\frac{1}{4} < \frac{1}{\pi}$, следи да је за свако n, или $|\sin n|$ или $|\sin(n+1)|$ веће од $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Стога,

$$\frac{|\sin(n)|}{n} + \frac{|\sin(n+1)|}{n+1} \geqslant \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\frac{1}{n+1}.$$

На основу поредбеног критеријума следи да ред апсолутно дивергира. Испитајмо обичну конвергенцију. Низ са општим чланом $\frac{1}{n}$ опадајуће тежи 0 кад $n \to \infty$, а на основу адиционе формуле важи процена

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin k| = \frac{|\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{1}{2}\sin k|}{|2\sin\frac{1}{2}|} = \frac{|\sum_{k=1}^{n} \cos(k-\frac{1}{2}) - \cos(k+\frac{1}{2})|}{|2\sin\frac{1}{2}|} = \frac{|1-\cos(n+\frac{1}{2})|}{|2\sin\frac{1}{2}|},$$

одакле се применом неједнакости троугла добија

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin k| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}},$$

те ред условно конвергира по Дирихлеу.

18. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ испитати апсолутну и обичну конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a}.$$

Напомена 1. Октобарски испитни рок, Математика 3 Ц, 2018/2019.

Решење. Уколико је $a = 0$ ред није добро дефинисан. Уколико је $a < 0$ тада општи члан овог реда тежи ка броју 1 када $n \to +\infty$, што значи да ред не конвергира. Нека је $a > 0$. Апсолутна вредност општег члана нашег реда се асимптотски понаша као $\frac{1}{n^a}$, те имамо да ред апсолутно конвергира ако и само ако је $a > 1$ те у том случају имамо и обичну конвергенцију. Испитајмо шта се дешава када $a \in (0,1)$. Имамо да је

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a} \cdot \frac{(-1)^n - n^a}{(-1)^n - n^a} = \frac{1-(-1)^n n^a}{1-n^{2a}} = \frac{1}{1-n^{2a}} - (-1)^n \frac{n^a}{1-n^{2a}}.$$

Ред $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^a}{1-n^{2a}}$ конвергира за свако $a \in (0,1)$ на основу Лајбницовог критеријума. То значи да је конвергенција полазног реда еквивалентна са конвергенцијом реда $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{1-n^{2a}}$ а конвергенција овог реда је еквивалентна са конвергенцијом реда $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a}}$. Овај ред је конвергентан ако и само ако је $2a > 1$ тј. ако и само ако је $a > \frac{1}{2}$. Дакле, ако је $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ полазни ред конвергира, а ако је $a \in (0, \frac{1}{2}]$ полазни ред дивергира.

19. Нека је

$$\begin{aligned} x_1 &= a > 0, \\ x_{n+1} &= \frac{x_n}{1 + x_n + x_n^2}, n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$.

Решење. Индукцијом се показује да је $x_n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Такође, очигледно важи $x_{n+1} < x_n$. Дакле, низ је опадајући и ограничен одоздо, па конвергира. Преласком на лимес се добија да тежи 0, па посматрани ред условно конвергира по Лајбницовом критеријуму. Ред апсолутно дивергира, јер се применом Штолцовог става добија:

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_{n+1}-x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x_n} = 1,$$

односно $x_n \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$.