Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Осма недеља

1.1 Низови

1. Нека је $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = -1 + \sqrt[n]{1 + x_n}$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Решење.

2. Нека је $x_0 > 0$ и $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^2}$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2$.

Решење.

3. Наћи лимес низа $a_n = \sqrt[n+1]{((n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$.

Решење.

4. Нека је низ x_n дефинисан са $x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}$ за све $n \geqslant 1$. Наћи лимес низа у зависности од α, x_0, x_1.

Решење.

5. Низ x_n реалних бројева задовољава $\lim\limits_{n\to\infty}(x_2n+x_{2n+1}) = 315$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}+x_{2n-1}) = 2003$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}}$.

Решење.

6. Нека је a_n низ реалних бројева такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} (3n)^{\frac{1}{3}} a_n = 1$.

Решење.

7. Нека је a_n низ реалних бројева таквих да $a_n \geqslant 1$ за све n и да низ $(a_n + a_n^{-1})_{n\geqslant 1}$ конвергира. Доказати да је низ a_n конвергентан.

Решење.

8. Нека је $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n^2} - 1}$. Показати да је $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$

Решење.

9. Нека је x_n низ и $y_n = x_{n-1} + x_n$ за све $n \geqslant 2$. Претпоставимо да y_n конвергира. Показати да и низ x_n конвергира.

Решење.

10. Нека је a_n низ реалних бројева таквих да $\lim\limits_{n\to\infty} (2a_{n+1} - a_n) = l$. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

Решење.