Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Осма недеља

1.1 Низови

1. Доказати

$$\lim_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=e,$$

$$e=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}, 0<\theta_n<1.$$

Решење. Љашко, задатак 35.

2. Доказати да је e ирационалан.

Решење. Љашко, задатак 35.

3. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a, a>0$.

Решење. Љашко, задатак 39.

4. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})|$.

Решење. $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})|=\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1}-\pi n)|=\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\frac{\pi(n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+n})|=|\sin\frac{\pi}{2}|=1.$

5. Доказати да $a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$ конвергира.

Решење. Низ је растући. Покажимо да је и ограничен: $a_n = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{4}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2^n}}}} < \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}} = \sqrt{2}b_n$. Како је $b_{n+1} = \sqrt{1+b_n}$, лако се проверава да је b_n ограничен одозго са 2, што значи да је a_n ограничен одозго са $2\sqrt{2}$. Низ a_n конвергира.

6. Нека је $0 < x_0 < 1$ и $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, $n \geqslant 0$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Решење. Индукцијом се показује да је $0 < x_n < 1$. Низ је опадајући и конвергира ка 0. Применом Штолцовог става је $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n) = 1$.

7. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

Решење. На основу задатка са претходних часова је $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \gamma + \ln n + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ кад $n \to \infty$. Слично, $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n} = \gamma + \ln 2n + \varepsilon_{2n}$, где $\varepsilon_{2n} \to 0$ кад $n \to \infty$. Одузимањем ове две релације, добија се тражено.

8. Нека је $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$, $n \geqslant 3$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решење. Решавањем посматране диференцне једначине се добија $x_n = \frac{4(b-a)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{a+2b}{3}$. Тражени лимес је $\frac{a+2b}{3}$.

9. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{m}}{n^m}$.

Решење. Применом дефиниције биномног коефицијента се добија да је тражени лимес $\frac{1}{m!}$.

10. Нека је $0 \leqslant x_n \leqslant x_m + x_n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Доказати да $\frac{x_n}{n}$ конвергира.

Решење. Применом субадитивности имамо $0 \leqslant x_n \leqslant nx_1$, односно $0 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant x_1$. Дакле, постоји инфимум скупа $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ који ћемо означити са α. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји m тако да је $\alpha \leqslant \frac{x_m}{m} \leqslant \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. Како је $n = qm + r$ и $x_n \leqslant qx_m + x_r$, то је $\alpha \leqslant \frac{x_n}{n} < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n} < \alpha + \varepsilon$. Одавде је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$.