# Вежбе, Математика 2ц

Зора Голубовић

21.3.2020. године

1. Одредити сегментни облик једначине равни којој припадају тачке $M_1(2,-3,-4)$, $M_2(3,-2,5)$, $M_3(0,-5,2)$.

Посматране три тачке задовољавају једначину равни $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, одакле се решавањем система добија $x-y=5$.

2. Израчунати растојање тачке $M(x_0,y_0,z_0)$ од равни $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$.

Растојање тачке се израчунава по формули

$$d(M,\alpha)\|n_\alpha\| = |Ax_0+By_0+Cz_0+D|.$$

Притом,

$$\|n_\alpha\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

одакле је

$$d(M,\alpha) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. Одредити растојање тачке $M(x_0,y_0,z_0)$ од праве $p : \frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}$.

Тражи се $d(M,p)$. Права $p$ је одређена правцем $\overrightarrow{u_p}(A,B,C)$ и тачком $P(x_1,y_1,z_1)$. Да бисмо нашли тражено растојање, посматраћемо површину паралелограма над $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{u_p}$:

$$d(M,p) = \frac{|\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{u_p}|}{|\overrightarrow{u_p}|}.$$

4. Наћи једначину нормале из $(2,3,-1)$ на раван $\alpha : 2x+y-4z+5=0$.

Из једначине равни $(2,1,-4)(x,y,z)=-5$ видимо да је вектор правца праве $(2,1,-4)$, а како тој правој припада и тачка $A(2,3,1)$ налазимо да је једначина праве $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-4}$.

5. Одредити тачку продора праве $p:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{-4}$ кроз раван $\alpha: 3x+y+4z+6=0$.

Означимо тачку продора са $P$. Права $p$ у параметарском облику има једначине $x=3t-1=2t-3=-4t+5$. Како $P\in\alpha$, то се лако налази вредност параметра $t$: $9t-3+2t-3-16t+20+6=0$, односно $-5t=-20$, $t=4$.

6. Наћи једначину равни која садржи праву $p:\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-3}{5}$ и тачку $M(1,1,2)$.

Одређивањем две тачке са праве, задатак се своди на задатак 1.

7. Наћи једначину равни која садржи тачку $M(-1,0,3)$ и ортогонална је на праву $q:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

Вектор нормале праве је $(2,4,-1)$, па је једначина равни $2x+4y-z+d=0$. Овде $d$ налазимо из услова да раван садржи тачку .

8. Наћи једначину равни $\alpha$ ако:

а) раван $\alpha$ паралелна са $y$-осом и садржи тачку $P(2,5,3)$

б) раван садржи $z$-осу и садржи тачку $M(-3,1,2)$

в) раван $\alpha$ паралелна са $x$-осом и садржи тачке $A(4,0,-2)$, $B(5,1,7)$.

а) $\overrightarrow{n_\alpha}(0,1,0)$, $y-5=0$.

б) Апликата има једначину $x=y=0$, а како тачка $P$ припада равни, то је $-3\alpha+\beta+2\gamma+\delta=0$. Како апликата припада равни, то је једначина равни $x+3y=0$.

в) Имамо $(\alpha,\beta,\gamma)(1,0,0)=0$, $4\alpha-2\gamma+\delta=0$, $5\alpha+\beta+7\gamma+\delta=0$.

9. Наћи пројекцију тачке $P(-1,4,1)$ на $\sigma: x-2y-2z-7=0$.

Нека је $P'$ пројекција тачке на раван. Из параметарских једначина праве, добија се $x=t-1$, $y=-2t+4$, $z=-2t+1$, с обзиром на то да пројекција тачке припада равни

$$t-1+4t-8+4t-2-7=0,$$

$$t = 2.$$

$$P'(1, 0, -3).$$

10. Одредити ортогоналну пројекцију праве $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-1}$ на раван $\alpha : x + 2y - 5z + 3 = 0$.

Најпре приметимо да та права сече раван. Пројекција праве $l$ на раван $\alpha$ је права $l'$ одређена пројекцијама двеју њених тачака (нпр. (1,-1,3) и пресечне тачке). Тражена пројекција је $l' : \frac{x-3}{47} = \frac{y-2}{64} = \frac{z-2}{35}$.

11. Одредити тачку $Q$ симетричну тачки $P(3, -2, -4)$ у односу на раван $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 - 0$.

Прво се одреди тачка $P'$ која је нормална пројекција тачке $P$ на раван $\alpha$, а потом се искористи да је тачка $P'$ средиште дужи $PQ$. Тражена тачка има координате $Q(15, 2, -10)$.

12. Одредити ортогоналну пројекцију тачке $M(2, 3, 1)$ на праву $l : \frac{x+7}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$.

Нека је тражена пројекција тачка $M'$. Како тачка $M'$ припада правој $l$, њене координате су облика $M'(t - 7, 2t - 2, 3t - 2)$ за неко $t \in \mathbb{R}$. Ако је $\overrightarrow{u_\alpha}$ вектор праве $l$, тада се из услова $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u_\alpha} = 0$ (пројекција је ортогонална) добија да је $t = 2$, па је тражена тачка $M'(-5, 2, 4)$.

13. Одредити тачку $Q$ симетричну тачки $P(-1, -2, -1)$ у односу на праву $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$.

Прво се одреди тачка $P'$ која је нормална пројекција тачке $P$ на праву $l$ (као у претходном задатку), а потом се искористи да је тачка $P'$ средиште дужи $PQ$. Тражена тачка има координате $Q(5, 0, 5)$.

14. Наћи једначину нормале из тачке $M(1, -2, 3)$ на праву $l : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{-1}$.

Нека је $L$ (нпр. L(0,2,4)) произвољна тачка праве $l$ и нека је права $n$ тражена нормала. Тада је $\overrightarrow{u_n} \cdot \overrightarrow{u_l} = 2A - C = 0$. Из услова да се праве секу следи да је $[\overrightarrow{ML}, \overrightarrow{u_l}, \overrightarrow{u_n}] = -4A + B - 8C = 0$. Решавањем система се добија да је $\overrightarrow{u_n}(A, 20A, 2A)$, $A \neq 0$. Тражена нормала је права $n : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{20} = \frac{z-3}{2}$.

15. Одредити једначину равни којој припада $\beta \cap \gamma$, (где је $\beta : x + y + z - 1 = 0$, $\gamma : x - y + 2z + 2 = 0$) и полови одсечак праве $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$ између датих равни.

Једначина пресека равни је $\frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{-4}$, па је једначина равни $\gamma : -2x + y - 4z + \delta = 0$. Како је $\frac{|\delta|}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}} = \sqrt{21}$, то је $\delta = \pm 21$.

16. Одредити једначину равни $\gamma$ нормалне на пресек равни $\alpha : x + 2y = 3$ и $\beta : -2x + z = 1$, која је удаљена од координатног почетка за $\sqrt{21}$.

17. Одредити $\lambda$ тако да се праве $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ секу. Које су координате пресечне тачке?

Запишимо параметарске једначине равни. Добија се да је $P(11, 11, -5)$.

18. Одредити једначину равни која садржи $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и нормална је на $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$.

19. Одредити заједничку нормалу мимоилазних правих $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ и $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Вектори $\overrightarrow{u_p}(1, 2, -1)$ и $\overrightarrow{u_q}(= 7, 2, 3)$ су вектори правих $p$ и $q$. Нека су пресеци тражене заједничке нормале $n$ са датим правама редом тачке $M$ и $N$. Тада су координате ових тачака $M(t + 4, 2t - 3, -t + 12)$ и $N(-7s+3, 2s+1, 3s+1)$ за неке $s, t \in \mathbb{R}$. Из услова је права $n$ нормална на дате праве $p$ и $q$; следи да је $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_p} = 0$ и $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_q} = 0$ тј. $t = 3$ и $s = 0$, па су координате тачака $M(7, 3, 9)$ и $N(3, 1, 1)$. Тражена заједничка нормала је права $n$ и дата је једначином $n : \frac{x-7}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{8}$.

20. Наћи растојање између мимоилазних правих $l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ и $l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$.

Као у претходном задатку, растојање је 7.

21. Наћи растојање равни $\sigma$ која са $\gamma : x - 4y - 8z + 12 = 0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи

а) $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$

б) пресек равни $\alpha : x + 5y + z = 0$ и $\beta : x - z + 4 = 0$

в) $m : \frac{x}{0} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{-8}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\overrightarrow{n_\gamma} \cdot \overrightarrow{n_\sigma}}{|\overrightarrow{n_\gamma}||\overrightarrow{n_\sigma}|}$, одакле се добија $81(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a - 4b - 8c)^2$

а) Како по услову задатка $p \subset \sigma$, то је $\overrightarrow{n_\sigma}\overrightarrow{u_p} = 0$, односно $a = c$. Зато је $64a^2 - 112ab + 49b^2 = 0$, одакле је $\frac{a}{b} = \frac{7}{8}$, па су координате вектора нормале $(7, 8, 7)$. По услову задатка раван садржи тачку $P(1, 2, 0) \in p$, па је дата једначином $7x + 8y + 7z - 23 = 0$.

б)

в)

22. Одредити ГМТ средишта дужи $AB$ дужине 4 таквих да $A$ и $B$ припадају редом правама $l_1 : 2x - y + z = 0, 6x - 3y - 2z + 2 = 0$, $l_2 : 2x + y - z - 1 = 0, 4x + 2y + 3z + 3 = 0$.

Координате тачке су $(t, 2t, 1)$, а тачке $B$ $(s, -2s, -1)$, па је средиште дужи $C(\frac{t+s}{2}, t-s, 0)$. Како је дуж дужине 4, имамо $(t-s)^2+4(t+s)^2+4 = 16$, одакле се добија $y^2 + 16x^2 = 12$, $z = 0$, односно ГМТ је елипса.

23. Дате су $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$, $l_2 : x - 2y - 3z = 1, x + y + kz = 0$. Одредити $k$ тако да су праве компланарне.

Параметарске једначине прве праве су $x = 2t + 1$, $y = -t$, $z = 2t - 2$, сменом тога у једначину друге праве и решавањем система добија се $k = -1$.

24. Кроз $T(-3, 1, 2)$ поставити $l\|\|\alpha$, $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$ која сече праву $p : \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Одредити једначину праве $l_1$ симетричне у односу на $\alpha$ ако је $n_\alpha = (4, -1, 2)$.

Како траженој правој $l$ припада тачка $T(-3, 1, 2)$, то је једначина праве дата са $l : \frac{x+3}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-2}{c}$, где је $\overrightarrow{u_l}(a, b, c)$ вектор праве $l$. Из услова да је права $l$ паралелна равни $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$, следи да је вектор равни $\overrightarrow{u_\alpha}(4, -1, 2)$ нормалан на вектор $\overrightarrow{u_l}$, па је $4a-b+2c = 0$. Како права $l$ треба да сече дату праву $p$, то је $[\overrightarrow{u_l}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{TP}] = 0$, где је $\overrightarrow{u_p}(0, 2, -1)$ вектор праве $p$, а $P$ произвољна тачка праве $p$, нпр. $P(-3, 1, 2)$. Из овог услова се добија $a = 0$. Следи да је вектор праве $l$ $(0, 2, 1)$ и једначина праве $l : \frac{x+3}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$. Тачка $T_1(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{14}{3})$ је симетрична тачки $T(-3, 1, 2)$ у односу на раван $\alpha$. Једначина праве симетричне правој $l$ у односу на раван $\alpha$ је $l_1 : \frac{x-\frac{7}{3}}{0} = \frac{y+\frac{1}{3}}{2} = \frac{z-\frac{14}{3}}{1}$.

25) Одредити једначину праве $q$ која припада $\alpha : 2x + 3y0z + 1 = 0$ образује минималан угао са $p : \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$ и на минималном је растојању од координатног почетка.

Тражена права $q$ је паралелна са пројекцијом праве $p$ на раван $\alpha$ и садржи продор нормале из координатног почетка на раван $\alpha$. Нека су $\overrightarrow{u_p}(1,2,1)$ и $\overrightarrow{u_\alpha}(2,3,-1)$ редом вектори праве $p$ и равни $\alpha$. За вектор равни $\beta$ која садржи праву $p$ и нормална је на равни $\alpha$ може се узети вектор $\overrightarrow{u_\beta}=\overrightarrow{u_p}\times\overrightarrow{u_\alpha}$. Вектор пројекције праве $p$ на раван $\alpha$ одређен је са $\overrightarrow{u_{p'}}=\overrightarrow{u_\alpha}\times\overrightarrow{u_\beta}=(0,-7,-21)$, па се за вектор тражене праве може узети вектор $(0,1,3)$. Једначина праве нормалне на раван $\alpha$ која уједно садржи и координатни почетак је $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$, а њен продор кроз раван $\alpha$ има координате $(-\frac{1}{7},-\frac{3}{14},\frac{1}{14})$. Једначина тражене праве је $q:\frac{x+\frac{1}{7}}{0}=\frac{y+\frac{3}{14}}{1}=\frac{z-\frac{1}{14}}{3}$.

26) Дата је раван $\alpha: x+y=0$ и праве $p_1:\frac{x}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}$, $p_2: y=z+2, x=1$. Одредити праву $p$ паралелну датој равни која сече дате праве у тачкама чије је растојање једнако 3.

Нека су тачке $A$ и $B$ пресеци тражене праве $p$ и правих $p_1$ и $p_2$, редом. Тада је $A(3t,-1,-2t+3)$ и $B(1,s+2,s)$, $s,t\in\mathbb{R}$. Како је по услову задатка $AB\|\alpha$, одакле је $s=4t-4$. Даље из услова $d(A,B)=3$ следи $27t^2-48t+21=0$ тј. $t_1=1$, $t_2=\frac{7}{9}$. Одавде се налазе и $s_i$, па је $p_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}$, $p_2:\frac{x-1}{4}=\frac{y-\frac{10}{9}}{-4}=\frac{z+\frac{8}{9}}{7}$.

27) Координатне равни равни $\alpha: 9x+12y+20z-60=0$ одсецају $\triangle ABC$.

а) Одредити једначину праве којој припада висина тог троугла.

б) Одредити дужину те висине.

Координате тачака су $A(\frac{20}{3},0,0)$, $B(0,5,0)$ и $C(0,0,3)$. Нека је $H$ подножје висине из $C$ на $AB$. Вектор $\overrightarrow{CH}$ је нормалан на $\overrightarrow{n_\alpha}(9,12,20)$ и на вектор $\overrightarrow{AB}$, па је вектор $\overrightarrow{CH}$ колинеаран са вектором $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{n_\alpha}$, односно са $(100,\frac{400}{3},-125)$. Зато је једначина праве $CH$ дата са $\frac{x}{12}=\frac{y}{16}=\frac{z-3}{-15}$. Како је $H(\frac{12}{5},\frac{16}{5},0)$, дужина висине износи 5.